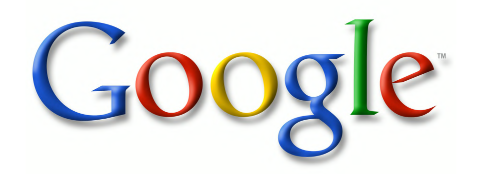





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
PHYSICS LIBRARY
Digitized by Google


UNIVERSITY·OF·MICHIGAN

Physikalische Zeitschrift

Begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

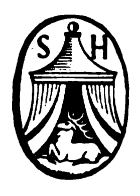
begründet von **Johannes Stark**

Herausgegeben von

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms**
in Leipzig in Würzburg
und
Prof. Dr. **R. Seeliger**
in Greifswald

NEUNUNDZWANZIGSTER JAHRGANG
1928

Mit 3 Tafeln



Verlag von S. Hirzel in Leipzig
1928

Druck von August Pries in Leipzig

Harr.

Autoren- und Sachregister.

Abkürzungen: (B.) = Besprechung, (T.) = Tagesereignisse, (Ph.) = Physikertag Kissingen 1927, (L.) = Leipziger Universitätswoche, (N.) = Naturforscherversammlung in Hamburg, (Z. B.) = Zusammenfassende Berichte.

F.

G.







Q.

R.



T.

U.

Z.

Namensverzeichnis der „Personalien".

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 1. Ausgegeben am 1. Januar 1928. 29. Jahrgang.

No. 749. Printed in Germany.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 1 — 1. Januar 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 3 am 10. Januar 1928

INHALT:

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Über den Einfluß des Grenzkontrastes auf Präzisionsmessungen.

Von A. Kühl.

Inhalt.

Einleitung.

Es ist eine längst bekannte und nicht weiter verwunderliche Tatsache, daß die gesehene Begrenzungslinie eines Netzhautbildes nie oder doch nur selten genau mit der Begrenzung übereinstimmt, welche man nach den Regeln der geometrischen Optik konstruiert. Zwei Wege sind eingeschlagen worden, um über die Gesetze dieser Abweichungen Klarheit zu erhalten, wobei allerdings diese Sonderfrage teils nicht immer klar als Ziel erkannt wurde, teils nicht das ausschließliche Ziel der einschlägigen Arbeiten bildete. Der eine — besonders von der physiologischen Optik bevorzugte Weg — ist wesentlich ein Versuch, die Frage erfahrungsmäßig, also durch umfangreiche Sammlung von Beobachtungen zu lösen, während der andere — vor allem von Physikern und Astronomen beschrittene Weg — die theoretische Errechnung der Lichtstärke in jedem Bildpunkt, also die Ausbildung der Beugungstheorie und ihre Anwendung auf optische Instrumente zum Inhalt hat. Der Weg der physiologischen Optik hat zu eingehender Kenntnis der Empfindungsweise des Auges gegenüber verschiedenartigsten Belichtungsbedingungen, vor allem, was hier wichtig ist, zur Entdeckung der Kontrastempfindungen geführt, und damit in gewisser Weise die qualitative Lösung ergeben. (I, § 36, II, 10 oben[1]). Die Zurückführung aller Beobachtungstatsachen auf ein einheitliches Grundprinzip mußte ihr allerdings versagt bleiben[2]), weil sie die Vorbedingung quantitativer Untersuchungen auf diesem Gebiet, die Resultate der Beugungstheorie, so gut wie vollständig vernachlässigte. Die theoretische Optik, d. h. die Beugungstheorie, hat zwar nach Durchbildung der Rechnungsmethoden die objektive Lichtverteilung für die Brennebenen-

1) Die römischen Ziffern beziehen sich auf die Reihenfolge im Literaturverzeichnis am Schluß

2) E. Hering, der wohl das größte Verdienst um die Förderung des Problems hat und auch die qualitative Lösung gab (a. a. O. S. 150 oben), kannte und würdigte zwar durchaus die Arbeiten Machs, aber er verwarf — m. E. leider — seine wertvolle formale Behandlung des Problems, um sie durch seine Theorie der Induktion zu ersetzen, die in der vorhandenen Form für die quantitative Behandlung wenig günstig, wenn nicht ungeeignet ist.

(oder Netzhaut-)bilder einer Reihe verschieden gestalteter Objekte zahlenmäßig dargestellt, vermochte aber ebensowenig zur einwandfreien Darstellung der Beobachtungen zu gelangen, weil sie noch keine Möglichkeit sah, die Resultate der physiologischen Optik quantitativ zu verarbeiten, denn eine im eigentlichen Sinne objektive Bildbegrenzung läßt sich gar nicht angeben (III. Kap. 5, IV. Kap. 17). Die vereinigende Brücke zwischen beiden Gebieten wurde im Jahre 1865 zuerst von E. Mach durch die sogleich zu besprechenden Arbeiten betreten und da — wie er selber in der „Analyse der Empfindungen" (V. 139, 11) hervorhebt — seine Veröffentlichungen wenig bekannt wurden, 30 Jahre später nochmals unabhängig von Seeliger (VI. Kap. 2[1])). Mach wäre vielleicht auch zur Anwendung des von ihm entdeckten Kontrastgesetzes auf die Erklärung der Bildbegrenzung gekommen, wenn er die im Schlußsatz seiner 4. Abhandlung über die Kontrasterscheinungen (VII, d 9) ausgesprochene Absicht zur Untersuchung des Gestaltensehens durchgeführt hätte. Es ist fast erstaunlich, wenn auch angesichts dringenderer Aufgaben verständlich, daß bis heute dieses für die Deutung präziser Beobachtungen so wichtige Problem von seiten der Physiker und Astronomen, erst vereinzelt beachtet wird, — erstaunlich, weil jede eingehendere Behandlung der Theorie des Fernrohrs oder ähnlicher Beobachtungsinstrumente schon durch die zwischen Theorie und Beobachtung bestehenden Widersprüche, die Struve a. a. O. so beredt hervorhebt, immer wieder auf diese Lücke hinweist — erstaunlich auch, weil die beobachtende Astronomie, Physik und Astrophysik sich seit Jahren um den Nachweis von Erscheinungen mühen, die der Kontrasteffekt in numerisch ableitbaren Beträgen fälschen, ja völlig verschleiern kann.

Eine kurze Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen und bisherigen Erfolge der Kontrastbeobachtung bei der Vermessung optischer Bilder wird dies näher beleuchten.

1) Interessante Erstbeobachtungen über auffällige Kontrasterscheinungen und experimentelle Beiträge zu ihrer Aufklärung wurden — vielfach ohne Kenntnis der Prioritäten — auch von anderen Autoren veröffentlicht: H. Haga und C. H. Wind, Beugung der Röntgenstrahlen, Wiedem. Ann. **68**, 1899. — C. H. Wind, Zur Demonstration einer von E. Mach entdeckten opt. Täuschung. Physik. Zeitschr. **1**, 112. — A. v. Obermayer, Über die lichten Säume um die Bilder dunkler Gegenstände auf hellem Hintergrunde. Eders Jahrb. f. Photogr. u. techn. Reprod. 1900. — A. Lemann, Über Schattenphänomene bei Finsternissen. Abh. der Zeitschr. „Das Weltall", Heft IV, Berlin 1902. — K. Groes-Petersen, Über Schatten während der Sonnenfinsternis. Astron. Nachr. 1913, Nr. 4697. — Zur Abgrenzung der Erscheinung vgl. auch A. Kühl, Die photogr. Umrißzeichnung. Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie. Leipzig 1914, Heft 1, Bd. XIV.

I.

Das Kontrastgesetz.

Unter dem Titel: „Die physiologische Wirkung räumlich verteilter Lichtreize auf die Netzhaut", veröffentlichte Mach in den Jahren 1865—68 in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie vier Abhandlungen (VII, a—d), um eine Reihe von eigentümlichen Erscheinungen, die ihm zunächst zufällig bei der Beobachtung rotierender Scheiben aufgefallen waren, nach zahlreichen Versuchen systematisch aufzuklären, bis ihm als Frucht seiner Arbeit die Entdeckung des Kontrastgesetzes gelang.

Ein typisches Beispiel für die gedachte Erscheinung wird z. B. erhalten, wenn man die in Fig. 1 skizzierte Kreisscheibe in schnelle



Fig. 1.
Kreissektor zur Erzeugung von Kontrastlinien.

Rotation versetzt. Dabei wird nämlich in der radialen Entfernung des Punktes A des weißen Sektors eine ziemlich scharfe dunkle Linie gesehen, in der radialen Entfernung des Punktes B dagegen eine ähnlich scharfe helle Linie. Beide Linien haben in der objektiven Lichtverteilung offenbar keine Begründung, denn da die Lichtstärke in jeder Entfernung vom Mittelpunkt der rotierenden Scheibe proportional dem Öffnungswinkel α des Sektors ist, so würde die Lichtstärke als Funktion von r etwa dargestellt durch einen der Fig. 2 ähnlichen Linienzug, in welchem

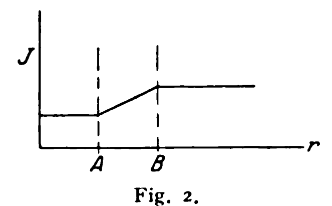


Fig. 2.
Die Intensitätskurve längs eines Radius des rotierenden Sektors Fig. 1.

die Knickstellen den Entfernungen der Punkte A und B entsprechen. Außer den auffälligen „Kontraststreifen", wie wir die Erscheinung der hellen

und dunklen Linien gleich nennen wollen, zeigt sich, daß der lineare Intensitätsanstieg zwischen A und B vom Auge kaum bemerkt wird, solange er nicht besonders steil erfolgt, sondern daß das Auge den Streifen zwischen A und B nahezu von konstanter mittlerer Helligkeit empfindet. Würde man zu der Intensitätskurve der Fig. 2 die zugehörige Empfindungskurve konstruieren, so würde sie also etwa die Form der Fig. 3 erhalten.

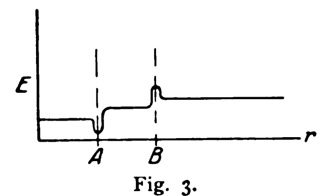


Fig. 3.
Die Empfindungskurve zur Intensitätskurve Fig. 2 (schematisch).

Das Auftreten der Kontraststreifen ist nicht an das Vorhandensein einer Unstetigkeit des ersten Differentialquotienten der Intensitätskurve (wie in Fig. 2) gebunden, sondern bleibt bestehen, wenn statt der Knickungen stärkere Krümmungen der Intensitätskurve vorkommen, d. h. wenn sowohl der erste wie der zweite Differentialquotient zwar stetig bleiben, letzterer aber stellenweise besonders große Werte annimmt, eine Tatsache, die von Seeliger (VI, Kap. 2) durch zahlreiche ähnliche Versuche bestätigt wurde.

Soweit lassen sich die Beobachtungen mit Machs eigenen Worten zunächst dahin zusammenfassen (VII. b, 131):

„Denken wir uns die Netzhaut als Ebene und ihre Beleuchtungsintensität von Stelle zu Stelle beliebig wechselnd, tragen wir an jeder Stelle eine der Lichtintensität proportionale Ordinate auf und verbinden wir die Endpunkte sämtlicher Ordinaten, so entsteht eine Fläche, welche ich objektive Lichtintensitätsfläche oder kurz Lichtfläche nenne.

Tragen wir jetzt auf derselben Netzhaut an jeder Stelle eine Ordinate auf, welche der dieser Stelle entsprechenden Lichtempfindungsintensität proportional ist, so entsteht eine andere Fläche, die ich subjektive Lichtintensitätsfläche oder kurz Empfindungsfläche nennen will.

Die beiden Flächen, die Lichtfläche und die Empfindungsfläche sind im allgemeinen verschieden. Sie sind sich ähnlich, aber nicht im Sinne der Geometrie. Sie sind sich insofern ähnlich, als die eine ein verzerrtes Bild der anderen darstellt. Die Geometrie könnte sie auch nicht affin, sondern nur kollinear nennen.

Es bestehen jedoch ziemlich einfache Beziehungen zwischen beiden Flächen, welche die Physiologie festzustellen hat. Zunächst bemerken wir unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Fechnerschen Gesetzes, daß die Ordinaten der Lichtfläche den Lichtintensitäten proportional, die Ordinaten der Empfindungsfläche aber den Logarithmen der Lichtintensität proportional seien. Das letztere ist aber nur beiläufig wahr. Es ist noch eine Korrektion hinzuzufügen, die wir sofort in Betracht ziehen wollen.

Ein spezieller Fall wurde bereits in der älteren Arbeit untersucht. Wenn nämlich die Lichtintensität auf der Netzhautebene nur parallel zu einer in derselben gelegenen Geraden, also nur nach einer Richtung variiert, so wird die Lichtfläche zu einer Zylinderfläche und dasselbe geschieht mit der Empfindungsfläche. Wir können uns in diesem Falle auf die Untersuchung der beiden Leitkurven beschränken und nennen die der Lichtfläche angehörige die Lichtkurve, die Leitkurve der Empfindungsfläche aber nennen wir Empfindungskurve.

Die Erfahrung lehrt nun, daß die Größe der Ordinaten der Empfindungskurve nicht bloß von den entsprechenden Ordinaten der Lichtkurve, sondern auch von der Krümmung an den betreffenden Stellen abhängt."

Für den Übergang zu quantitativ formulierten Folgerungen sind drei weitere Beobachtungstatsachen von einschneidender Bedeutung. (VII a, 311.)

1. Die Kontraststreifen sind bei allen Beleuchtungsintensitäten, bei welchen überhaupt noch gesehen wird, gleich deutlich, d. h. sie bleiben unverändert, wenn die Lichtkurve $i = f(x)$ übergeht in

$$i = q \cdot f(x),$$

wo q ein positiver Proportionalitätsfaktor ist.

2. Die Kontraststreifen werden deutlicher, wenn die Ordinaten der Intensitätskurve um einen konstanten Betrag verringert werden; sie können dagegen zum völligen Verschwinden gebracht werden, wenn die Ordinaten um einen beträchtlichen konstanten Betrag erhöht werden, d. h. sie verschwinden, wenn die Lichtkurve $i = f(x)$ übergeht in die Kurve $i = p + f(x)$, wo p positiv und groß gedacht wird.

3. Die Kontraststreifen werden deutlicher, wenn die Krümmung der Lichtkurve verstärkt wird, d. h. ihre Deutlichkeit, bzw. die oben erwähnte Korrektion an dem nach dem Fechnerschen Gesetz erhaltenen Empfindungsordinaten ist eine direkte Funktion von $\frac{d^2 i}{d x^2}$.

Diese Feststellungen reichen weit genug, um eine den Beobachtungen genügende Erweiterung des Fechnerschen Gesetzes abzuleiten (VII a, 311 u. f.). Indessen ist ein anderer

Weg der Ableitung (VIId, 11 u. f.) so viel eleganter, daß diese drei Sätze nur zur Verifikation des Ergebnisses herangezogen werden sollen.

Machs Leitgedanke für die Ableitung folgt aus einer näheren Betrachtung des Fechnerschen Gesetzes. Dieses sagt bekanntlich aus, daß die Lichtempfindung des Auges den Intensitäts-Verhältnissen proportional läuft. Nun ist zweifelsohne die variable Irisöffnung schon eine Einrichtung, welche in gewisser Weise dem Erhalten konstanter Licht-Verhältnisse dienen könnte. Man braucht für strenge Erfüllung der Aufgabe z. B. nur anzunehmen, daß sie die Eigenschaft habe ihre Flächengröße stets so zu ändern, daß das Gesamtlicht auf der Netzhaut konstant bleibt. Allein die Iris kann sicherlich nicht alles leisten und so drängt sich schon aus der Form des Gesetzes die Vermutung auf — der durch die neueren Forschungen über Bau und Wirkung der Netzhautelemente durchaus nicht widersprochen wird (II, 6 letzter Absatz), — daß nicht der Anfangsreiz durch die Nervenleitungen einfach fortgepflanzt wird, bis er eine Empfindung auslöst, sondern, daß zwischen dem ersten Reiz auf die Netzhaut und dem letzten Reiz, der im Empfindungszentrum wirkt, eine Kette von Mechanismen liegt, die den ersten Reiz mannigfach modifizieren. Diese Mechanismen leisten wahrscheinlich die Aufgabe, die Reizintensitäten, die auf der Netzhaut auftreffen, gewissermaßen gegen das Gesamtlicht der Netzhaut „abzuschätzen" und nur nach Maßgabe ihres Stärken-Verhältnisses zum Empfindungszentrum fortzuleiten.

Ähnlich wie aus dem Fechnerschen Gesetz an sich eine Wechselwirkung der Netzhautelemente untereinander recht wahrscheinlich ist, so setzt das Auftreten der Kontrasterscheinungen (Reaktion auf die Krümmung der Lichtintensitätsfunktion) solche Wechselwirkung in kleinsten Netzhautbezirken voraus, wenn sie nicht unverständlich bleiben sollen. Zu ihrer Erklärung müßte allerdings dann die in obiger Art gedachte Mitwirkung der umgebenden Netzhautelemente mit der Entfernung vom betrachteten Element abnehmen.

Nennt man nach dieser Arbeitshypothese $\varphi(r)$ den Faktor, welcher die Stärke der Mitwirkung jedes in der Entfernung r gelegenen Elements dv reguliert, so wäre die „letzte" Erregung offenbar

$$e = i \frac{i \Sigma \varphi(r) dv}{\Sigma i_n \varphi(r) dv}.$$

Durch speziellere Versuche läßt sich zeigen, daß für die Kontraststreifen wesentlich nur die Mitwirkung der nächsten Umgebung des betrachteten Netzhautelements ist, woraus sich ergibt, daß die Funktion $\varphi(r)$, von einem höchsten Wert für $r = 0$ beginnend, rasch abfällt, um sich dann wahrscheinlich asymptotisch der Null zu nähern.

Läßt man vorläufig den asymptotisch verlaufenden Teil der Funktion $\varphi(r)$ beiseite, der nur Beiträge zweiter Ordnung für die Summe liefert, wenn die Intensitätsfunktion $i = f(xy)$ nicht bezirksweise ganz extreme Werte erreicht, was ausgeschlossen sein soll, so wäre $\varphi(r)$ etwa zu ersetzen durch eine Funktion $\psi(r)$, die mit r sehr schnell Null wird und in erster Näherung wäre dann:

$$e = i \frac{i \Sigma \psi(r) dv}{\Sigma i_n \psi(r) dv}.$$

Denkt man nun die Intensitätsfunktion $i = f(xy)$ für eine benachbarte Stelle $x + h, y + k$ entwickelt in der Form:

$$i(x+h, y+h) = i + \left(\frac{\partial i}{\partial x} h + \frac{\partial i}{\partial y} k\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} k^2\right)$$

und bedenkt, daß die Summe $\Sigma i_n \psi(r) dv$ durch die folgende Summe von Doppelintegralen ausgedrückt ist, — deren jedes sich über die Nachbarstellen in einem Quadranten der xy-Ebene erstreckt:

$$\sum i_n \psi(r) dv = \iint i(x+h, y+k)\, \psi(\sqrt{h^2+k^2})\, dh\, dk + \iint i(x+h, y-k)\, \psi(\sqrt{h^2+k^2})\, dh\, dk$$
$$+ \iint i(x-h, y+k)\, \psi(\sqrt{h_2+k^2})\, dh\, dk + \iint i(x-h, y-k)\, \psi(\sqrt{h^2+k^2})\, dh\, dk$$

so hat man nach Einsetzen der entwickelten Funktion und passender Zusammenziehung:

$$\sum i_n \psi(r) dv = 4i \iint \psi(\sqrt{h^2+k^2})\, dh\, dk + 2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \iint \psi(\sqrt{h^2+k^2})\, h^2 dh\, dk + 2\frac{\partial^2 i}{\partial y^2} \iint \psi(\sqrt{h^2+k^2})\, k^2 dh\, dk.$$

Da $\psi(r)$ für merkliche Werte von $r = \sqrt{h^2+k^2}$ verschwindet, so kann unbedenklich hier die Integration von $0-\infty$ erstreckt werden, so daß die Integrale zu konstanten Faktoren werden. Wir setzen:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(\sqrt{h^2+k^2})\, dh\, dk = m$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(\sqrt{h^2+k^2})\,h^2\,dh\,dk = \int_0^\infty\int_0^\infty \psi(\sqrt{h^2+k^2})\,k^2\,dh\,dk = n$$

und erhalten:

$$e = i\,\frac{4mi}{4mi + 2n\left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}\right)}.$$

Setzt man noch: $\frac{2n}{4m} = \frac{k}{2}$ und in gebräuchlicher Weise abkürzend die Summe $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} = \Delta i$ so wird:

$$e = i\,\frac{i}{i + \frac{k}{2}\Delta i} = \frac{i}{1 + \frac{k}{2}\frac{\Delta i}{i}} \qquad (1)$$

oder wenn $\frac{k}{2}\frac{\Delta i}{i}$ ein echter Bruch ist, bis auf Glieder zweiter Ordnung:

$$e = i - \frac{k}{2}\Delta i \qquad (1a)$$

wo $\Delta i = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}$ ist.

Es ist leicht zu sehen, daß Gl. (1) und (1a) den drei wichtigen Beobachtungstatsachen von S. 3 entsprechen.

Da Gl. (1a) auch sonst die Kontrasterscheinungen, soweit sie bisher quantitativ verfolgt sind, gut dargestellt und für die Lehre vom Sehen von einschneidender Bedeutung ist, so wollen wir sie als das Machsche Kontrastgesetz bezeichnen, das in Worten nach Mach folgende Fassung erhält:

„Die Abweichung der Intensität einer Netzhautstelle vom Mittel der Umgebung wird deutlich empfunden und ladet demnach dem Sehorgan eine besondere Arbeit auf. Je nachdem diese Abweichung vom Mittel (Δi) positiv oder negativ ist, empfindet sich die Netzhautstelle dunkler oder heller als bei gleichmäßiger Beleuchtung der Nachbarstellen mit der ihr selbst entsprechenden Intensität."

Die Art der Ableitung beschränkt zwar die Gültigkeit der Formel (1a) auf jene Stellen der Lichtfläche, an denen die Krümmungsradien als groß gelten können gegenüber der Ausdehnung des „Mitempfindungsbereichs". Wenn wir sie trotzdem nach dem Vorgange von Mach allgemein der Untersuchung zugrunde legen, so sind einige begründende Bemerkungen unerläßlich. Das Wesentlichste ist zweifelsohne, daß das Kontrastgesetz in der Form (1a) von Mach zunächst als rein empirischer Ausdruck der Beobachtungstatsachen gefunden und immer wieder, soweit es damals möglich war, auch quantitativ bestätigt wurde, selbst in Fällen, in denen Δi sehr große Werte erhielt. Die hier wiedergegebene formale Ableitung hingegen bildete den Abschluß seiner Arbeiten (VIId) und stellt zunächst nicht mehr als einen Versuch zur Begründung einer Arbeitshypothese über die Wirkungsweise der Netzhaut dar. Soweit sich nun ein Widerspruch vorfindet in dem aus der Arbeitshypothese fließenden Ansatz gegenüber der Allgemeingültigkeit der empirisch erprobten Formel (1a), so muß dieser entschieden dahin gedeutet werden, daß die Arbeitshypothese der Korrektur bedarf.

Bei einer Verallgemeinerung der Benützung von (Gl. 1a) bleibt dann der Wert des Faktors $\frac{k}{2}$ natürlich — abgesehen von der Dimension — auch nicht mehr an den oben abgeleiteten Ausdruck gebunden, sondern muß nötigenfalls empirisch bestimmt werden. Ein Mittel dazu gibt die Beobachtung des Momentes $e = 0$, d. h. $i = \frac{k}{2}\Delta i$ nach einer der von Hering (I) für solche Fälle angewandten Vergleichsmethoden an die Hand. Sicher ist aus den Beobachtungserfahrungen, daß im allgemeinen der Einfluß des Gliedes $\frac{k}{2}\Delta i$ auf den Wert e erheblich stärker ist, als aus der Mach'schen Ableitung hervorzugehen scheint.

II.

Die Kontrastfunktion bei Beugungsbildern.

1. Allgemeines.

Denkt man sich als einfachstes Objekt die geradlinig begrenzte, mit überall konstanter Intensität leuchtende Halbebene, so zeigt auch bei idealer optischer Abbildung die Lichtfläche auf der Netzhaut aus beugungstheoretischen Gründen den bekannten, schon innerhalb der geometrisch-optischen Bildgrenze einsetzenden Lichtabfall, der sich mit wachsender Entfernung asymptotisch der Null nähert. Eine „objektive" Bildgrenze, die etwa durch die Isophote Null charakterisiert wäre, liegt also für dieses Objekt (und für jedes andere) genau genommen im Unendlichen und wollte man eine andere Isophote als objektive Bildgrenze definieren, so fände man keinen Anhaltspunkt für ihre Auswahl; m. a. W. eine objektive Bildgrenze gibt es eigentlich nicht. Die Schwierigkeiten, die hier auftreten und zur Hereinnahme physiologischer Überlegungen zwingen, werden treffend beleuchtet durch die von Struve und Strehl (III, Kap. 5, IV) gemachten Ausführungen. Strehl

verfiel dabei intuitiv auf den Ausweg, die Bildgrenze an den Ort der Wendetangente der Lichtkurve zu verlegen und nähert sich damit merklich den Tatsachen.

Das Kontrastgesetz lehrt, daß die Lichtempfindung formal einer Fläche bzw. Kurve der „letzten Erregung" entspricht, zu deren Konstruktion außer der objektiven Intensitätsfläche, bzw. -kurve (in dem Beispiel der Halbebene $= i[x]$) die Kenntnis von $\Delta i = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ nötig ist. Die Kurve Δi, die wir abkürzend als Kontrastkurve bezeichnen wollen, zeigt bei der Halbebene die

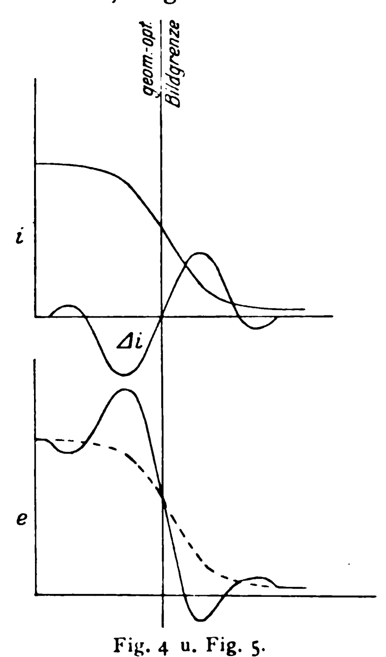


Fig. 4 u. Fig. 5.
4) Intensitätskurve und Kontrastkurve nahe dem Rande des Beugungsbildes der Halbebene.
5) Kurve der „letzten Erregung" zu Abb. 4 (schematisch).

in Fig. 4 dargestellte Form, d. h. sie oszilliert beiderseits des Ortes der geometrisch-optischen Bildgrenze, wo sie gleich Null ist, mit anfänglich starker, dann schnell verringerter, asymptotisch gegen Null konvergierender Amplitude um die Abszissenachse.

Wendet man die Form (1a) des Kontrastgesetzes auf das Beispiel an, indem man den unbekannten Proportionalitätsfehler $\frac{k}{2}$ beliebig wählt, so erhält die Kurve der „letzten Erregung" qualitativ die in Fig. 5 gezeichnete Gestalt. Die Ordinaten der Empfindungskurve, die nach dem Fechnerschen Gesetz im allgemeinen den Logarithmen der Ordinaten dieser Kurve proportional gesetzt werden, spiegeln ihren Lauf wider und besagen, daß die Empfindungsfläche der Halbebene mit einem besonders hellen Kontraststreifen hart innerhalb des geometrisch-optischen Bildrandes und einem besonders dunklen Kontraststreifen hart außerhalb desselben abschließt. Es drängt sich daher die Vermutung auf, daß die Bildbegrenzung nicht nur in diesem Falle, sondern ganz allgemein durch den Verlauf solch auffälliger Kontraststreifen, nicht aber durch irgendeine Isophote ohne hervorstechende Eigenschaft bestimmt wird.

Im Verfolg dieser Vermutung ist von Bedeutung, daß die größten absoluten Werte der Kontrastfunktion in den der geometrisch-optischen Begrenzung benachbarten Extremwerten vorkommen, d. h., daß die von den weiteren Oszillationen hervorgerufenen Kontraststreifen an Deutlichkeit weit hinter den beiden Hauptstreifen zurückbleiben. Die äußeren kleinen Oszillationen werden jedenfalls im allgemeinen überhaupt unsichtbar bleiben, weil die in ihrer Gegend vorhandene Intensität unter der Reizschwelle des Auges liegt. Durch die Beachtung der Kontraststreifen würden also greifbare Anhaltspunkte für die Bildbegrenzung tatsächlich immer in der Nähe der geometrisch-optischen Grenze zu suchen sein, was bei Beachtung der Isophoten nicht der Fall ist. Allerdings erhebt sich im Hinblick auf die im allgemeinen endliche Breite der Kontraststreifen sofort die Frage nach der besonderen Stelle der „Erregungsfläche", welche als Ort der Bildgrenze anzusehen ist. A priori könnten als irgendwie auffallende Stellen sowohl die Kurven der Erregungsmaxima und -minima als auch die Grenzen der beiden Kontraststreifen als mögliche Bildgrenzen in Betracht gezogen werden.

Nach der Form (1a) des Kontrastgesetzes hängt ihre Lage außer von der Intensitätsfunktion wesentlich vom Faktor $\frac{k}{2}$ ab, dessen numerische Größe bislang unbekannt ist. Da aber erfahrungsmäßig die Kontraststreifen schon bei kleinen Werten von Δi (z. B. Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen) recht auffällige Erscheinungen sind, also $\frac{k}{2}$ keineswegs als kleine Größe aufzufassen ist, so folgt zunächst, daß die Erregungsgröße e gegenüber dem lokalen Reiz i durch Subtraktion der Kontrastgröße $\frac{k}{2}\Delta i$ bei merkbaren Werten von Δi ganz wesentlich geändert wird. Beschränkt man weiter die Untersuchung, wie es im folgenden geschieht, auf die durch eine kreisförmige Öffnung erzeugten Beugungsbilder gleichförmig leuchtender Objekte, so zeigt die Intensitätsfläche allgemein innerhalb der geometrisch-optischen Grenze nahezu den Charakter einer



ebenen Fläche, die, nach geringfügiger Senkung gegen den Rand zu, fast plötzlich in einen steilen Abhang übergeht; und ähnlich ist der Übergang von diesem Steilhang in den nahezu wieder ebenen Verlauf der Intensitätsfläche weiter außen, m. a. W. die Extremwerte des Subtrahenden $\frac{k}{2}\Delta i$ treten in diesem Falle auf an Stellen, wo die Intensitätswerte noch nicht stark von den mittleren Intensitätswerten innerhalb des Bildes, bzw. nicht mehr stark von den mittleren Intensitätswerten weiter außerhalb des Bildes abweichen. Wenn also $\frac{k}{2}\Delta i$ bei merkbaren Werten von Δi verhältnismäßig groß angenommen werden darf gegenüber diesen Differenzen, so kann die Lage der Extremwerte der Erregungsfunktion e nur unwesentlich von der Lage der Extremwerte von Δi abweichen. Wichtig ist, darauf hinzuweisen, daß die Beschränkung auf gleichförmig leuchtende Objekte für diese Argumentation sicher ausreichend, aber nicht unbedingt nötig ist, denn auch die allmählich verlaufende Intensitätskurve des Erdschattens bei Mondfinsternissen, die im III. Abschnitt behandelt wird, zeigt dagegen keinen Widerspruch.

So wird die Funktion Δi selbst zur Indikatrix der Orte besonderer Kontrastverhältnisse und rechtfertigt dadurch die abkürzende Bezeichnung Kontrastfläche, wie den vorhin für die Kurve $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ gebrauchten Ausdruck „Kontrastkurve".

Damit ergibt sich ein Ausblick, der das Problem besonders interessant und wichtig gestaltet. Denkt man sich nämlich zwei Beugungsbilder einander bis nahe oder ganz zur Berührung der geometrisch-optischen Bilder genähert, so überdecken sich mehr oder weniger große Teile der äußeren „Abhänge" ihrer Lichtflächen. An jeder Stelle im überdeckten Gebiet herrscht, da im allgemeinen die Lichtschwingungen beider Bilder als inkohärent anzusehen sind, die Summe beider Lichtintensitäten. Die Fläche der letzten Erregung wird also in diesem Fall dargestellt durch

$$e = (i_1 + i_2) - \frac{k}{2}(\Delta i_1 + \Delta i_2)$$

und die Lage der Bildbegrenzung hängt ab von den Eigenschaften der Kontrastfläche $(\Delta i_1 + \Delta i_2)$. Da nun beide Summanden oszillierende Flächen bedeuten, so kann die Lage der Grat- und Tallinien der Summe erheblich verschoben sein gegenüber ihrer Lage in den beiden Summanden. Man gewahrt daraus, daß die Bildbegrenzungslinien durch das Zusammenwirken zweier benachbarter Bilder vermutlich mehr oder weniger starken Lageveränderungen unterworfen sind, eine Folgerung, die für alle Arten von Präzisionsmessungen von einschneidender Bedeutung werden muß.

Sehr auffällig muß diese Erscheinung hervortreten, wenn beide Bilder von stark verschiedener Intensität sind. Setzt man etwa $i_2 = \frac{i_1}{m}$, so wird auch $\Delta i_2 = \frac{\Delta i_1}{m}$ und die Kontrastfläche wäre etwa in der Form zu schreiben $\Delta i = \Delta i_1(x_1 y_1) + \frac{\Delta i_1(x_2 y_2)}{m}$, d. h. wenn m genügend groß ist, würden die Eigenschaften der Kontrastfläche des zweiten Bildes im überdeckten Raum ganz verwischt — die Bildgrenze des helleren Bildes schneidet, fast ohne Veränderungen zu erleiden, in das lichtschwächere Bild hinein.

Es bedarf kaum der Hervorhebung, daß gerade solche Beispiele durch die Messung am sichersten erfaßt werden können und daher als bester Prüfstein für die Theorie gelten müssen.

Die Umständlichkeit der numerischen Durchrechnung einzelner Beispiele läßt sich dabei nicht umgehen, denn daß die allgemeine Untersuchung der Funktion Δi für Beugungsbilder beliebig gestalteter, wenn auch gleichförmig selbstleuchtender ebener Lichtflächen wegen der mathematischen Schwierigkeiten undurchführbar bleibt, ist von vornherein aus dem gleichen Schicksal der Untersuchung der Intensitätsverteilung an Beugungsbildern sicher. Es mag indessen kurz auf eine mögliche Abkürzung späterer numerischer Rechnungen hingewiesen werden.

Das Fraunhofersche Beugungsbild eines durch eine kreisförmige Öffnung abgebildeten Lichtpunktes wird bekanntlich dargestellt durch die Formel:

$$\left.\begin{aligned} i(u) &= \left(\frac{2\pi r^2}{\lambda f}\right)^2 \left(\frac{J_1(u)}{u}\right)^2 \\ (u) &= \frac{2\pi r}{\lambda f}\cdot\varrho \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

worin die Buchstaben folgende Bedeutung haben:

- r der Öffnungsradius (der Eintrittspupille) des optischen Instruments,
- f die Brennweite des optischen Instruments,
- λ die Wellenlänge des Lichtes, die wir im Mittel zu 589 $\mu\mu$ ansetzen,
- ϱ eine Längenausdehnung in der Brennebene,
- u eine dimensionslose Variable, deren Einheit wir abkürzend als „optische Einheit" (o. E.) bezeichnen,
- J_1 die Besselsche Funktion erster Ordnung.

Die Lichtfläche i (u) stellt bekanntlich eine Rotationsfigur dar in Gestalt eines kegelförmigen

Mittelkörpers, der nach außen von niedrigen Ringwällen, den Beugungsringen, umgeben ist. Ihre Kontrastfläche ist gegeben durch:

$$\varDelta i = \frac{d^2 i}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{di}{du} = \frac{2}{u^2}\left[J_2^2 + 2\frac{J_1 J_2}{u} - J_1^2\right]. \quad (3)$$

Damit könnten die Grenzlinien an Punktbildern aus den Eigenschaften der Besselschen Funktionen diskutiert werden, wie die Helligkeitsverteilung selbst.

Die Intensität in einem beliebigen Punkte des Bildes einer gleichförmig selbstleuchtenden ebenen Fläche wird als Integral über die zu diesem Punkt gelangenden Lichtanteile von allen Elementen der Fläche erhalten. Wegen des Rotationscharakters von $i\,(u)$ kann man auch sagen: die Intensität in einem beliebigen Punkte ist gleich dem Volumen, welches der über dem geometrisch-optischen Flächenbild errichtete gerade Zylinder aus der um jenen Punkt als Achsenfußpunkt angeordneten „Lichtmasse" $i\,(u)$ herausschneidet.

Für einen Punkt P ($\varrho = 0$, $u = 0$) dessen Intensität zu berechnen ist, hat man also etwa

$$I_P = \left(\frac{2\pi r^2}{\lambda f}\right)^2 \int_0^{w_1} dw \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} i(u)\,\varrho\, d\varrho$$
$$= r^2 \int_0^{w_1} dw \int_{u_0}^{u_1} \frac{J_1^2(u)}{u}\, du.$$

Die Integration nach u läßt sich noch allgemein ausführen, da $\int_0^u \frac{J_1^2(u)}{u}\, du = 1 - J_0^2 - J_1^2$ ist, aber darüber hinaus ist man auf im allgemeinen langsam konvergierende Reihenentwicklungen angewiesen, so daß selbst Strehl (IV, 93), der sich mit vielen numerischen Rechnungen dieser Art beschäftigte, von Näherungsmethoden nach dem Beispiel Struves (III) abrät, um zur mechanischen Quadratur zu schreiten.

Da nun der Wert der Kontrastfunktion in beliebigem Punkte P sich aus der Summe aller von den Punkten der Lichtfläche herrührenden Kontrastwerte zusammensetzt und der Rotationscharakter nach (3) auch für $\varDelta i(u)$ gilt, so hat man auch:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta I_P &= \left(\frac{2\pi r^2}{\lambda f}\right)^2 \int_0^{w_1} dw \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \varDelta i(u)\,\varrho\, d\varrho \\ &= 2r^2 \int_0^{w_1} dw \int_{u_0}^{u_1} \frac{2J_2^2 + J_2 J_0 - J_1^2}{u}\, du \\ &= -2r^2 \cdot \int_0^{w_1} dw \left[\frac{J_1 J_2}{u}\right]_{u_0}^{u_1} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wie der Ausdruck $(1 - J_0^2 - J_1^2)$ die Helligkeit im Zentrum einer kreisförmigen Lichtscheibe vom Radius u angibt, so bedeutet $-\frac{J_1 J_2}{u}$ gleichzeitig den Wert der Kontrastfunktion dortselbst.

Die zweite Integration von (4) bleibt dagegen ebenso unausführbar wie in I_P.

Immerhin sieht man aber so viel, daß es nicht unter allen Umständen nötig ist, die Lichtverteilung zu berechnen, sondern, daß man zur Untersuchung der Lage der Bildgrenzen direkt die Kontrastfunktion aufstellen und dadurch die numerischen Rechnungen erheblich abkürzen kann, wenn die Funktion $\frac{J_1 J_2}{u}$ einmal in ähnlichen Tabellen vorliegt, wie $(1 - J_0^2 - J_1^2)$.

Für unseren Zweck allerdings kann auf die Darstellung der Intensitätsverteilung, schon um den Verlauf der Bildgrenzen zu den Isophoten zu zeigen, nicht verzichtet werden und überdies ist, wie gesagt, zunächst die zu leistende numerische Rechenarbeit auf dem Umwege über die Intensitätsverteilung geringer, weil diese für manche Objekte schon vorliegt.

Schließlich sei in dieser Übersicht angesichts der aufgezeigten, theoretisch interessanten Erwartungen nicht unterlassen, ein Wort über die Grenze der praktischen Nachprüfung zu sagen, welche in der endlichen Ausdehnung der Zapfenelemente der Netzhaut ihren Grund hat.

Die Gesamtbreite des von den Kontraststreifen am Rande der Beugungsbilder bedeckten Raumes beträgt im allgemeinen weniger als 10 o. E., was bei größeren Instrumenten meist nur geringe Bruchteile einer Bogensekunde bedeutet. Bei Normalvergrößerung ($p = 5$ mm) hat (nach Gl. 5 Anm.[1])) der Zapfendurchmesser ($\varrho = 3\mu$) einen

1) Die häufig benutzten Umrechnungsformeln sind folgende: Wenn man (Gl. 2 S. 7) f die Luftbrennweite des Auges $= 17{,}0$ mm und λ die Luftwellenlänge des wirksamen Lichtes etwa $= 589\,\mu\mu$ setzt, so hat man:

$$\varrho = 3{,}2\,\mu \frac{u}{p} \text{ mm}, \quad (5)$$

d. h. z. B: bei einer Pupillenöffnung von $p = 1$ mm bedeckt eine optische Einheit $u = 1$ auf der Netzhaut eine Strecke von $\varrho = 3{,}2\,\mu$, also ungefähr den Durchmesser eines Zapfenelements der Netzhaut, der durchschnittlich $3{,}0\,\mu$ beträgt.

Selbstverständlich kann man auch die Abmessung u in optischen Einheiten in Beziehung setzen zu der ihr entsprechenden, scheinbaren Größe α'' des durch ein Fernrohr gesehenen unendlich fernen Bildes, denn es ist ja:

$$\alpha'' = \frac{\varrho}{f} \cdot 206265''$$

und daher nach der Ausgangsformel (2 S. 7)

$$\alpha'' = 38'',7 \frac{u}{p} \text{ mm}. \quad (6)$$

Bei 1 mm Pupillenöffnung entspricht einer optischen Einheit also ein Sehwinkel von rund 39 Bogensekunden.

Wert von etwa 5 o. E., d. h. der interessierende Verlauf von Δi spielt sich auf nur zwei nebeneinander liegenden Zäpfchen der Netzhaut ab und von einer differentiellen Beobachtungsmöglichkeit kann nicht mehr die Rede sein. Erst wenn der Wert des Zapfendurchmessers in o. E. (Gl. 5a Anm.) durch starke Okularvergrößerung oder durch Abblendung des Objektivs, bzw. des Okulars auf ca. $^1/_2$ o. E. herabgedrückt ist, d. h. bei ca. 10facher Normalvergrößerung (oder einer Diopteröffnung von ca. $^1/_2$ mm) wird man auf ziemlich reine Beobachtung und Messung der erwarteten Erscheinungen rechnen dürfen. Man kann etwa sagen, daß das Auge bei großer Pupillenöffnung, bzw. einer die Normalvergrößerung des Instrumentes nur wenig überschreitenden Okularvergrößerung, den Kontrasterscheinungen an Beugungsbildern gegenüber noch zu wenig punktförmig empfindet, d. h. mehr nach Zapfenquerschnitten als nach Differentialquotienten der Intensitätsverteilung beobachtet, daß also zuverlässige Nachprüfungen der erwarteten Erscheinungen und damit überhaupt zuverlässige Messungen nur bei ca. 10facher Normalvergrößerung erwartet werden können. (Genauere Festlegung der „hinreichenden Vergrößerung" S. 21).

2. Numerischer Verlauf.

a) Das Ausgangsmaterial.

An Material für numerische Beispiele sind bisher folgende Beugungsbilder von selbstleuchtenden Objekten für kreisförmige Öffnung berechnet worden:

1. Das Bild des Lichtpunktes: berechnet von Schwerdt (XVII, Tab. 3; z. T. abgedruckt in VIII, 26).

2. Kreisschreiben:
vom Radius $u = \infty$ berechnet von Struve (III, 35)
„ „ $u = 50$ „ „ „ (III, 54)
„ „ $u = 10$ „ „ „ (III, 55)
„ „ $u = 1$ „ „ Kühl (VIII, 48)
NB! Auch die Intensitätsverteilungen der ersten drei Kreisscheiben sind z. T. abgedruckt in VIII, 48.

2a. Durch Kombination von Halbebene und kleiner Kreisscheibe zwei nahe zusammenstoßende sichelförmige Flächen (Venusdurchgang in der Nähe des inneren Kontakts) berechnet von
Struve (III, 74)
Nagaoka (XVIII, Tafel 17). (Zeichnerische Darstellung durch Linien gleicher Intensität.)

3. Die für die Berechnung von Beugungsbildern unbedingt nötige Tabelle der Funktion $2(1-J_0^2-J_1^2)$ berechnet von
Struve (III, 40). (Große Intervalle von $u = 0$ bis $u = 2000$.)
Strehl (XVI). (Auf 3 Dezimalen, Intervall 0,05 für $u = 0$ bis $u = \infty$.)
Nagaoka (XVIII, 348). (5 Dezimalen, Intervall 0,01 für $u = 0{,}00$ bis $u = 3{,}83$.)
(XVIII, 330). (5 Dezimalen, Intervall 1,0 bis 10 für $u = 0$ bis $u = 50$.)

b) Der Lichtpunkt.

Die objektive Intensitätsverteilung im Beugungsbild des Lichtpunktes aus der erwähnten Arbeit von Schwerdt (XVII Tabelle III), hat unter Benutzung auch der dritten Differenzen die folgende Darstellung der Kontrastfunktion ergeben.

Tabelle I.

Intensität und Kontrastwerte am Beugungsbild des Lichtpunktes.

u	$J(u)$	$c \cdot \Delta J$	u	$J(u)$	$c \cdot \Delta J$
0	+ 1,0000	− 705	3,9270	+ 0,0004	+ 41
0,2618	0,9825	− 680	4,1888	41	+ 13
5236	9330	− 619	4506	95	+ 1
7854	8550	− 530	7124	143	− 5
1,0472	7550	− 406	9742	170	− 9
3090	6407	− 289	5,2360	173	− 11
5708	5208	− 158	4978	154	− 11
8326	4031	− 46	7596	121	− 7
2,0944	2950	+ 41	6,0214	82	+ 3
3562	2018	+ 107	2832	46	+ 12
6180	1266	+ 139	5450	19	+ 13
8798	706	+ 151	8068	4	+ 9
3,1416	329	+ 139	7,0686	0	0
4034	109	+ 111	3304	6	
6652	14	+ 74	5922	17	
(8327)	(0,0000)	+ (53)			

Für die Verbindung des Auges mit dem Fernrohr wird man gern die Eintrittspupille des Auges durch die Okularvergrößerung Γ ersetzen. Wenn man als Normalvergrößerung Γ_0 eines Fernrohrs mit der $EP = 2R$ diejenige Okularvergrößerung bezeichnet, welche seine Austrittspupille auf 5 mm reduziert, also setzt $\Gamma_0 = \frac{2R}{5}$ mm, so wird $p = \frac{5\Gamma_0}{\Gamma}$ und Gl. 5 geht über in

$$\varrho = 0{,}64\mu \cdot u \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma_0}, \qquad (5a)$$

d. h. die einer optischen Einheit entsprechende Abmessung auf der Netzhaut wächst proportional der Okularvergrößerung.

Führt man endlich noch statt der scheinbaren Bildgröße α'' die ihr entsprechende Mikrometerablesung β'' ein durch $\beta'' = \frac{\alpha''}{\Gamma}$, so geht Formel (6) über in:

$$\beta'' = 7'',7 \frac{u}{\Gamma_0}, \qquad (6a)$$

d. h. die einer optischen Einheit entsprechende Mikrometerablesung ist der Fernrohröffnung umgekehrt proportional.

Eliminiert man aus (5a) und (6a) u, so hat man direkt die einer Netzhautabmessung entsprechende Mikrometerablesung

$$\beta'' = \frac{7'',7}{\Gamma} \cdot \frac{\varrho}{0{,}64}, \qquad (7)$$

also für einen Zapfendurchmesser ($\varrho = 3\mu$)

$$\beta_z'' = \frac{36'',1}{\Gamma},$$

Es zeigen sich demnach
Nullstellen bei: $u = 1{,}96,\ 4{,}51,\ 5{,}93,\ 7{,}02$.
Extremstellen bei: $u = 0,\ \mathbf{2{,}89},\ 5{,}35,\ \mathbf{6{,}48}$.

Da die fettgedruckten Werte Maximalwerte der Kontrastfunktion darstellen, so haben wir hier die tiefste Dunkelheit in der Furche zwischen der Beugungsscheibe und ihren hellen Ringen zu erwarten. Das widerspricht zwar zum Teil der landläufigen Anschauung, die die tiefste Dunkelheit an der Stelle geringster Intensität sucht, aber es deckt sich durchaus mit der von Hering (I) immer wieder durch Beispiele belegten Erfahrungstatsache, daß durch Kontrast eine tiefere Dunkelheit empfunden werden kann als der einfachen Abwesenheit von Licht entspricht.

c) Die Halbebene und der gerade Streifen.

Entnimmt man der ausführlichen Tabelle Struves (III, 35) über die Intensitätsverteilung am Rande des Beugungsbildes der geradlinig begrenzten Halbebene die Funktionswerte in Intervallen von 0,4 o. E. des Arguments und bildet unter Beschränkung auf die zweiten Differenzen die Werte der Kontrastfunktion $c\Delta i = c\frac{d^2 i}{dx^2}$, so erhält man nach leichter graphischer Ausgleichung die folgende Tabelle. Darin gibt das Argument $+e$ die Entfernung vom geometrisch-optischen Bildrand nach außen an. Die Intensität und die Kontrastfunktion für das Argument $(-e)$ sind natürlich:

$$i(-e) = 1 - i(+e)$$
$$\Delta i(-e) = -\Delta i(+e).$$

Man erkennt die Nullstellen bei $e = 0$, 3,6, 5,0, 6,6 usw.; die Stellen der Extreme bei $e = \mathbf{1{,}4}$, 4,3, **5,8** usw. Die fettgedruckten Abszissenwerte deuten die Lage der Maxima der Kontrastfunktion (Dunkelkeit) an.

Aus der Kontrastfunktion der Halbebene leitet man leicht die Konstrastfunktionen verschieden breiter unendlich langer Lichtstreifen ab. Da die Intensitätsfunktion des Beugungsbildes des unendlich langen, von parallelen Geraden begrenzten Lichtstreifens in einer auf seiner Kante senkrechten Linie sich einfach als die Differenz der Intensitätsfunktionen zweier um die Streifenbreite senkrecht zu ihrer Kante gegeneinander verschobener Halbebenen ergibt, so gilt dasselbe für die Kontrastfunktion. Man gelangt daher sofort zu unmittelbarer Anschauung der Lagenveränderungen der Abszissen für die Null- und Extremwerte der Kontrastfunktion von Lichtlinien, wenn man zwei graphische Darstellungen der Konstrastfunktion und ihres ersten Differentialquotienten nach Tabelle II gemäß der zu untersuchenden Lichtstreifenbreite übereinander schiebt.

Tabelle II.
Intensität und Kontrastwerte am Rande der leuchtenden Halbebene.

$+e$	$J(+e)$	$c \cdot \Delta J$	$c_1 \cdot \frac{d\Delta J}{de}$	$+e$	$J(+e)$	$c \cdot \Delta J$
0,0	0,5000	0	+ 67	8,4	0.0241	+ 3
4	3934	+ 84	+ 58	8	227	+ 4
8	2955	+ 146	+ 39	9.2	217	+ 3
1.2	2132	+ 184	+ 14	6	209	+ 1
6	1504	+ 186	— 14	10,0	203	— 1
2,0	1073	+ 160	— 33	4	197	— 2
4	0810	+ 114	— 39	8	190	— 1
8	0670	+ 66	— 32	11,2	182	0
3,2	0602	+ 28	— 23	6	174	+ 2
6	0564	0	— 14	12,0	167	+ 1
4,0	0528	— 12	— 5	4	162	— 2
4	0484	— 13	+ 4	8	158	0
8	0434	— 7	+ 11	13,2	154	+ 1
5,2	0389	+ 5	+ 11	6	150	— 1
6	0353	+ 10	+ 3	14,0	145	0
6,0	0328	+ 8	— 7	4	141	+ 1
4	0311	+ 4		8	137	— 0,5
8	0299	— 1		15,2	133	+ 0,5
7,2	0287	— 3				
6	0272	— 2				
8.0	0256	— 1				

Tabelle III.

Wahre Breite der Lichtlinie	Lage des Mittelmaximums	Lage des I. (inneren) Minimums	Lage des I. Nullortes	Lage des I. Minimums	Lage des II. Nullortes	Lage des II. Minimums
o. E.	o. E.	o. E	o. E.	o. E.	o. E.	o. E.
0		0	+ 1,40	+ 2,40	+ 4,30	+ 5,0
0,1		— 0,05	+ 1,37	+ 2,33	+ 4,10	+ 4,9
0,2		— 0,1	+ 1,30	+ 2,27	+ 4,10	+ 4,8
0,4		— 0,2	+ 1,20	+ 2,15	+ 4,07	+ 4,75
0,8		— 0.4	+ 0,95	+ 2,03	+ 3,90	+ 4,6
1,0		— 0.5	+ 0,93	+ 1,93	+ 3,83	+ 4,5
2,0		— 1,0	+ 0,50	+ 1,63	+ 3,47	+ 3,9
3,0		— 1,5	+ 0,13	+ 1,37	+ 3,67	+ 4,0
4,0		— 2.0	— 0,05	+ 1,27	+ 3,6	+ 4,1
4,7		— 2,35	— 0,05	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2
5,0	— 2,5	— 1,8	0	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2
6,0	— 3,0	— 1,3	0	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2
∞	— ∞	— 1,4	0	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2

Ermittelt man auf diesem Wege die Lage der Null- und Extremwerte der Kontrastfunktion verschieden breiter Lichtstreifen, so erhält man die in der Tabelle III zusammengestellten Resultate.

Man erkennt bei geringer Streifenbreite[1]) (bis zur Breite 4,7 o. E.) ein Minimum über der Mittellinie des geometrisch-optischen Bildes. Mit weiter wachsender Breite gliedert sich das innere Minimum in zwei (durch ein anfänglich sehr flaches, später mit kleinen Oszillationen auf Null anwachsendes sekundäres Maximum) getrennte Minima, welche bei größerer Breite des Lichtstreifens in die konstante Entfernung 1,4 o. E. innerhalb der beiden geometrisch-optischen Bildränder rücken. Die äußeren Null- und Extremstellen nähern sich bei wachsender Linienbreite von maximalen Entfernungen außerhalb des geometrisch-optischen Bildrandes, die sie bei der Breite Null des Lichtstreifens innehaben, unter kleinen Schwankungen dem Bildrande bis auf die konstanten Entfernungen, die sie bei der Halbebene haben. Die Konstanz dieser Entfernungen wird praktisch ebenfalls bei der Linienbreite 4,7 erreicht. Von dieser Breite aufwärts erst kann eine mit den Tatsachen übereinstimmende, wenigstens differentielle Größenmessung an den optischen Bildern möglich sein, während vorher zwischen der Dimension des optischen Bildes und des Objekts ein komplizierterer Zusammenhang besteht. Man kann daher die allgemeine Bemerkung machen, daß das Auge eine Breitenzunahme an Lichtstreifen erst dann objektiv richtig sieht, wenn die geometrisch-optischen Netzhautbilder die Breite 4,7 überschritten haben, womit für die optische Praxis zugleich eine Unterscheidung von Lichtlinien (über deren objektive Breite der Gesichtseindruck kein rechtes Urteil erlaubt) und Lichtstreifen (deren geometrisch optische Bildbreite 4,7 o. E. überschreitet und die daher schon als zweidimensionale Gebilde objektiv richtig meßbar sind) gegeben ist.

d) Die Kreisscheibe.

Bildet man die Konstrastwerte für die von Struve (III) berechneten Kreisscheiben der Radien 50 und 10 o. E. und für die von Kühl (VIII) berechnete Scheibe vom Radius 1 o. E. und überträgt sie in den Maßstab der bisherigen, so erhält man die folgenden Tabellen.

1) Strehl hat eine derartige Tabelle unter Annahme spezieller Kohärenzen auch für beleuchtete Streifen gerechnet (Zentralztg. f. Optik u. Mechanik 1925. S. 47). Wir sehen nach den Untersuchungen von Berek umso lieber davon ab, als sich später obige Tabelle für beide Fälle gut bewährt.

Tabelle IV.
Intensität und Kontrastwerte am Rande der Scheibe vom Radius $u = 50$ o. E.

u	$J(u)$	$c \cdot \Delta J$	u	$J(u)$	$c \cdot \Delta J$
46,0	0,9360	+ 17	51,2	0,2010	+ 183
4	9325	+ 1	6	1391	+ 187
8	9292	− 35	52,0	971	+ 159
47,2	9227	− 78	4	715	+ 114
6	9086	− 128	8	577	+ 71
48,0	8822	− 172	53,2	509	+ 32
4	8379	− 195	6	467	+ 10
8	7742	− 189	54,0	430	+ 1
49,2	6909	− 152	4	398	− 4
6	5930	− 88	8	354	− 1
50,0	4859	− 3	55,2	312	+ 3
4	3799	+ 78	6	275	+ 3
8	2828	+ 142			

Tabelle V.
Kontrastwerte für Kreisscheiben.

Scheibenradius $u = 10$ o. E.		Scheibenradius $u = 1$ o. E.	
e[1]) o. E.	$c \cdot \Delta J$	e[1]) o. E.	$c \cdot \Delta J$
− 6,0	− 8	− 1,0	− 305
− 5,6	− 5	− 0,6	− 291
2	− 4	− 0,2	− 250
4,8	− 6	+ 0,2	− 168
4	− 9	+ 0,6	− 81
4,0	− 14	+ 1,0	− 17
3,6	− 22	+ 1,4	+ 30
2	− 35	+ 1,8	+ 61
2,8	− 72	+ 2,2	+ 59
4	− 126	+ 2,6	+ 39
2,0	− 179	+ 3,0	+ 23
1,6	− 213	+ 3,4	+ 7
2	− 225	+ 3,8	− 5
0,8	− 195		
− 0,4	− 104		
0,0	0		
+ 0,4	+ 74		
8	+ 135		
1,2	+ 147		
6	+ 148		
2,0	+ 140		
4	+ 111		
8	+ 70		
3,2	+ 29		
6	+ 2		
+ 4,0	− 10		

1) $+e$ bedeutet die Entfernung vom geom.-opt. Bildrand nach außen.

Die graphische Darstellung ergibt für die Scheibe vom

Radius $u = 50$ Nullstellen bei $e = -3{,}60, +3{,}6$
Extremstellen „ $e = -1{,}4, +1{,}4$

$u = 10$ o. E.:
Nullstellen „ $e = 0, +3{,}6$
Extremstellen „ $e = -1{,}2, +1{,}4$

$u = 1$ o. E.:
Nullstellen „ $e = +1{,}12, +3{,}7$
Extremstellen „ $e = 1{,}0, +1{,}95$.

Die Kontrastkurve für die Scheibe $u = 1$ o. E. zeigt analog den sehr schmalen geraden Streifen

noch durchaus den Charakter der Kontrastkurve des Punktbildes, während die Kontrastkurve der Scheibe $u = 10$ o. E. schon völlige Ähnlichkeit mit der Kurvengestalt an der Halbebene aufweist.

Aus einer graphischen Darstellung der ausgezeichneten Kontraststellen gegen den Rand der verschieden großen Scheiben, folgt unter Berücksichtigung der Verhältnisse bei Lichtstreifen, daß auch an Kreisscheiben in der Nähe des Durchmessers 4,7 o. E. (wie bei den Lichtstreifen dieser Breite) jene charakteristische Änderung der Kontrastfunktion vor sich geht, welche uns dort zur Unterscheidung von optischen Linien und Streifen, hier zur Unterscheidung von optischen **Punkten** und **Scheiben** veranlaßt[1]).

1) Früher war (VIII, 50) der wohl etwas zu kleine Durchmesser 3 o. E. als Grenze angesetzt worden.

e) Der Keil.

Eine empfindliche Lücke im vorhandenen Material besteht für Beugungsbilder geradlinig begrenzter Objekte, die astronomisch weniger interessieren und infolgedessen rechnerisch — abgesehen von der Halbebene (Kreis vom Radius ∞) und der unendlich schmalen, unendlich langen Geraden (XIX) — überhaupt nicht behandelt sind.

Für physiologisch optische Prüfungen, so auch für die Nachprüfung der Theorie der Bildbegrenzung sind aber oft gerade solche Objekte besonders geeignet. Das Bild eines ganz beliebigen geradlinig begrenzten Objekts kann verhältnismäßig einfach aus den Beugungsbildern von Dreiecken zusammengesetzt werden. Ein Dreiecksbild aber läßt sich wiederum aus Sektoren von bestimmter Öffnung und unendlich großem

Tabelle VI.

Intensität außerhalb der Spitze eines Lichtkeils von 1° Öffnung.
(Einheiten der fünften Dezimale.)

x \ y	0	+ 0,4	+ 0,8	+ 1,2	+ 1,6	+ 2,0	+ 2,4	+ 2,8	+ 3,2	+ 3,6	+ 4,0
0	278	267	237	195	147	106,6	72,5	54,7	47,3	45,9	44,8
+ 0,4	195	187	165	137,5	103,5	76,6	60,5	48,0	43,4	42,2	40,8
+ 0,8	133,2	130,0	114,2	93,8	78,3	61,9	48,8	42,6	40,2	38,8	37,6
+ 1,2	91,9	88,9	79,6	67,4	56,3	48,1	41,9	38,2	36,5	35,9	35,0
+ 1,6	60,7	59,1	54,5	48,4	43,4	39,8	36,6	34,6	33,8	32,9	31,9
+ 2,0	45,4	44,5	42,8	39,5	36,8	35,6	33,5	32,2	31,4	30,1	29,5
+ 2,4	35,8	35,3	34,7	33,9	32,6	31,5	30,3	29,2	28,5	27,3	26,3
+ 2,8	31,2	31,0	30,7	30,0	29,6	28,8	28,1	27,2	26,3	25,2	24,0
+ 3,2	28,0	28,0	27,9	27,6	27,1	26,2	25,3	24,5	23,8	23,0	22,2
+ 3,6	25,8	25,7	25,5	25,1	24,7	24,3	23,5	22,7	21,8	20,9	20,0
+ 4,0	23,9	23,8	23,3	23,1	22,6	22,2	21,8	21,0	20,0	19,3	18,4

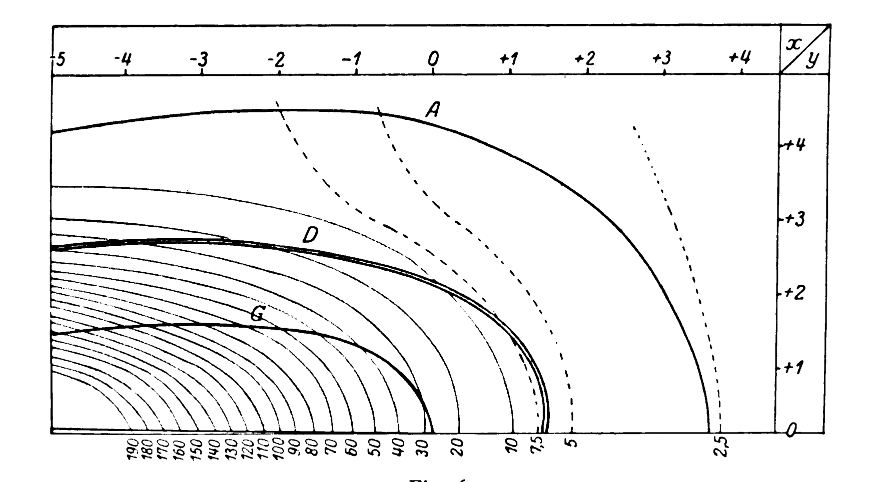


Fig. 6.

Isophoten und Kontrastkurven nahe der Spitze des Ein-Grad-Sektors.

G: Kurve $\Delta i = 0$ zwischen Hell- und Dunkelkontrast,
D: „ $\Delta i =$ Max. (größter Dunkelkontrast),
A: „ $\Delta i = 0$ am Außenrand des Dunkelkontrastes.

Radius (keilförmige Flächen) aufbauen. Das Bild des Sektors von beliebiger Öffnung endlich ist für die Zwecke der mechanischen Quadratur wieder aus Sektoren konstanter kleiner Öffnung zusammensetzbar. So wird man für die Bildberechnung von gradlinig begrenzten Figuren mit der Kenntnis des Beugungsbildes eines unendlich erstreckten Sektors von 1 Grad Öffnung schon ziemlich weit kommen, wenn es auch erwünscht bleibt, Sektoren größerer Öffnung direkt berechnet zu haben, um geringere Fehler in dem zusammengesetzten Bild zu erhalten. Für die Wahl des Ein-Grad Sektors kommt hier außerdem noch dazu, daß die Beugungswirkungen und damit die Abweichungen der Bildgrenze umso stärker sind, je weniger ausgedehnt der betrachtete Gegenstand ist und schließlich noch die Überlegung, daß sehr wenig geöffnete Lichtkeile bei Planetenausmessungen mit Doppelbildmikrometern eine Rolle spielen. Struve (III, 88) hat zwar auch diese Aufgabe in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen und für größere Entfernung der betrachteten Punkte von der Spitze Näherungsformeln für die Intensität aufgestellt, auf deren Benutzung hier verzichtet werden muß, weil gerade die Lichtverteilung in nächster Nähe der Spitze interessiert. Immerhin sind seine allgemeinen Folgerungen über den Lauf der Isophoten als Probe auf die Richtigkeit der folgenden numerischen Ergebnisse auch hier von Nutzen gewesen.

Macht man im Ein-Grad-Sektor die Winkelhalbierende zur x-Achse und zählt die Abszissen negativ von der Spitze ins Innere des Lichtkeils, so ergibt die mechanische Quadratur folgende Übersicht über die Intensitätsverteilung.

Nach Tabelle VI und VII sind zur Veranschaulichung der Lichtwirkung die Isophoten der Übersichtsskizze Fig. 6 gezeichnet.

Wie von vornherein zu erwarten, stehen die Isophoten nahe der Spitze fast senkrecht auf den Grenzlinien des geometrisch-optischen Bildes und werden ihnen erst in recht erheblicher Entfernung genähert parallel, in Übereinstimmung mit den allgemeinen Aussagen, welche Struve a. a. O. aus seinen Formeln deduziert. Besondere Hervorhebung verdient vielleicht, daß — wie die eigenartigen Ausbuchtungen der Isophoten 7,5 und 5 zeigen — die Genauigkeit der mechanischen Quadratur hinreichte, um noch die Wirkung des ersten Beugungsringes in Erscheinung treten zu lassen.

Um den Verlauf der Kontrastfunktion in der Umgebung der Spitze des hellen unendlich langen Sektors von 1 Grad Öffnung zu erhalten, sind aus den Intensitätstabellen VI und VII mit Hilfe der ersten und zweiten Differenzen nach den beiden Koordinaten x und y die Ausdrücke

Tabelle VII. Intensität im Innern und seitlich des Lichtkeils von 1° Öffnung.

x \ y	0	+0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
							(Einheiten der 5. Dezimale)														
0	278	267	237	195	147	106	73	55	48	46	45										
— 0,4	384	368	326	267	200	137	94	66	53	49	48	49									
— 0,8	511	490	433	352	262	180	117	76	57	50	53	54									
— 1,2	659	631	556	448	332	227	142	89	62	53	57	59									
— 1,6	817	781	689	556	407	275	170	101	66	55	62	65									
— 2,0	990	946	834	671	489	326	199	114	73	59	67	71									
— 2,4	1170	1116	981	789	574	380	228	127	78	62	72	75									
— 2,8	1354	1292	1135	909	659	433	258	139	83	65	78	82									
— 3,2	1540	1468	1288	1028	743	487	286	154	88	69	83	88									
— 3,6	1727	1644	1441	1149	827	540	315	167	94	72	89	95									
— 4,0	1914	1821	1593	1269	912	592	344	179	99	76	93	101									
— 5,0	2354	2254	1984	1592	1147	741	423	209	105	70	92	100									
— 7,5	3350	3200	2820	2260	1630	1050	600	300	150	100	130	140									
							(Einheiten der 4 Dezimale)														
— 10	453	434	382	306	221	143	81	40	20	13	18	20									
— 20	942	902	792	635	460	298	160	85	42	29	36	41									
— 40	1868	1790	1576	1268	924	603	349	178	91	63	71	83									
— 100	4416	4250	3783	3109	2346	1615	1010	579	326	213	176	188	187	170							
— 112,25	4944	4779	4274	3538	2700	1891	1212	718	417	269	220	212	208	187	154	117	89	75	71		
— 168,40	6716	6516	5951	5109	4115	3106	2194	1461	933	594	404	315	276	254	228	219	162	136	116		
— 200	7348	7160	6617	5796	4875	3762	2782	1943	1293	835	548	388	315	281	267	241					
— 224,50	7852	7686	7198	6443	5502	4472	3450	2521	1743	1151	745	499	371	315	292	272	243	207	172	144	125

Tabelle VIII.
Kontrastwerte an der Keilspitze.

y \ x	+ 4,0	+ 3,6	+ 3,2	+ 2,8	+ 2,4	+ 2,0	+ 1,6	+ 1,2	+ 0,8	+ 0,4	0	− 0,4	− 0,8	− 1,2	− 1,6	− 2,0	− 2,4	− 2,8	− 3,2	− 3,6	− 4,0
0	− 0,2	0,1	0,9	2,1	4,2	6,6	8,8	9,5	9,0	5,5	0	− 7,5	− 20,5	− 36,5	− 52,5	− 70,0	− 90,0	− 107,5	− 125,5	− 142,5	− 160,0
+ 0,4	− 0,3	0,0	0,7	2,0	4,0	6,5	8,8	10,4	10,3	7,2	2,5	− 4,5	− 17,0	− 32,0	− 46,0	− 61,0	− 76,5	− 93,5	− 109,0	− 123,5	− 136,5
0,8	− 0,4	− 0,2	0,5	1,5	3,3	5,7	8,7	11,0	11,8	9,5	5,5	0,5	− 8,5	− 19,0	− 30,0	− 41,5	− 52,5	− 63,5	− 73,0	− 81,0	− 87,5
1,2	− 0,5	− 0,3	0,1	1,0	2,3	5,0	8,5	11,9	12,2	17,5	9,5	5,5	3,0	− 1,2	− 6,5	− 13,5	− 18,5	− 22,6	− 26,0	− 29,5	− 31,5
1,6	− 0,4	− 0,4	− 0,1	0,5	1,7	3,8	7,1	11,0	14,0	15,5	15,2	13,5	13,0	13,5	14,5	16,0	17,0	19,0	21,5	25,0	27,5
2,0	− 0,3	− 0,4	− 0,3	0,2	1,2	2,7	5,0	8,0	12,0	15,2	17,5	18,9	21,5	25,0	29,5	34,0	40,0	45,5	52,5	60,0	66,5
2,4	− 0,0	− 0,3	− 0,3	− 0,2	0,3	1,2	2,5	4,8	7,0	12,5	17,0	20,0	23,5	28,0	34,0	41,5	49,0	56,5	68,5	72,5	80,0
2,8	− 0,0	− 0,2	− 0,3	− 0,4	0,0	0,5	1,5	3,0	5,5	9,2	13,0	16,0	20,0	26,0	31,5	37,5	45,0	52,0	60,0	68,5	76,5
3,2			− 0,2	− 0,3	− 0,4	− 0,3	0,0	1,3	2,3	4,0	6,2	9,5	14,0	18,5	23,5	29,0	34,0	40,0	46,5	53,5	60,0
3,6				− 0,2	− 0,3	− 0,4	− 0,5	− 0,2	0,3	0,9	1,6	3,6	7,5	11,0	14,0	17,0	20,0	23,0	26,0	28,5	31,5
4,0					− 0,2	− 0,3	− 0,4	− 0,9	− 0,7	− 0,4	0,2	1,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,0	4,5	4,0	4,0	3,5
4,4						− 0,0	− 0,1	− 0,2	− 0,3	− 0,4	− 0,5	− 1,0	− 1,5	− 1,5	− 2,0	− 2,5	− 3,5	− 4,0	− 5,0	− 6,0	− 7,0

$c\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ und $c\frac{\partial^2 i}{\partial y^2}$ gebildet, additiv zu $c \cdot \Delta i$ vereinigt und graphisch ausgeglichen. Die Ergebnisse sind in Tabelle VIII und IX vereinigt.

Die Projektionen der Nullinien und der Kammlinie der Kontrastfläche auf die Bildfläche sind in Fig. 6 eingetragen, so daß es ein leichtes ist, sich die Umwallung des Bildes mit dem an der Spitze ziemlich niedrig werdenden „Kontrastgebirge" plastisch vorzustellen.

Die Kontrastlinien verlaufen somit in der Nähe der Sektorspitze durchaus nicht parallel zu den Isophoten, sondern kreuzen sie unter endlichen Winkeln. In größerer Entfernung von der Spitze werden sie allerdings den Isophoten wieder parallel. Die Entfernung der Hauptkontraststellen vom geometrisch-optischen Bildrande ist in größerer Entfernung (von mehr als 4 o. E.) von der Spitze dieselbe wie bei einem Lichtstreifen von der Breite des Sektorquerschnitts an der betrachteten Stelle. Je mehr man sich der Spitze nähert, um so mehr weicht ihre Lage von dieser Regel ab und zwar in dem Sinne, daß sich die Kurve der inneren Nullstelle allmählich der Spitze nähert, um diese dann zu schneiden. In der Nähe der Spitze zeigt die Kontrastfläche ein einfaches rinnenförmiges Tal, dessen Sohle senkrecht unter der Mittellinie des Sektors verläuft. Erst in einer Entfernung $x = +265$ o. E. von der Spitze, wo der Sektor einen Querschnitt von 4,7 o. E. überschreitet, ändert sich der Querschnitt jenes Tales in der Art, wie wir es an der Kontrastkurve entsprechend breiter Lichtstreifen kennen, d. h. erst von hier ab gabelt sich die Linie des inneren Hellkontrastes, die bisher der Mittellinie des Sektors folgte, in zwei Zweige, welche sich allmählich dem geometrischen Bildrand parallel richten und ihn in einer Entfernung von 1,4 o. E. nach innen gerechnet begleiten.

Von besonderer Wichtigkeit ist für spätere Anwendungen, daß die Talsohle an der Stelle $x = -152$ o.E., an welcher der Lichtkeil eine Breite von 3,0 o. E. hat, ihr Minimum erreicht, m. a. W., daß hier der über der Keilmitte liegende Hellkontraststreifen ein Helligkeitsmaximum zeigt.

Wäre nach bisheriger Auffassung irgendeine isophote Bildgrenze, so müßte das Beugungsbild einer schmalen Lichtspitze nach Fig. 6 als abgestumpfte Spitze, aber immerhin noch als Spitze erscheinen, denn die Zweige der hyperbelförmigen Isophoten konvergieren stets, wie sehr man sich auch der Spitze nähern mag. Nach den Kontrastlinien aber muß das Beugungsbild ein fast keulenförmig verdicktes Ende zeigen, denn es gibt nahe der Spitze Strecken, innerhalb

Tabelle IX.

Kontrastwerte in größerer Entfernung von der Keilspitze.

x \ y	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
− 5	− 185	− 166	− 117	− 47	+ 28	+ 80	+ 102	+ 98	+ 76	+ 42	+ 7	− 7									
− 7,5	− 265	− 235	− 165	− 67	+ 40	+ 115	+ 145	+ 137	+ 107	+ 60	+ 10	− 10									
− 10,0	− 355	− 320	− 222	− 87	+ 52	+ 150	+ 197	+ 190	+ 147	+ 85	+ 15	− 15									
− 20,0	− 750	− 670	− 480	− 200	+ 130	+ 340	+ 410	+ 400	+ 310	+ 170	+ 40	− 10									
(Einheit verzehnfacht)																					
− 40,0	− 146	− 131	− 90	− 36	+ 19	+ 60	+ 80	+ 78	+ 60	+ 34	+ 11	+ 2									
− 100	− 316	− 286	− 202	− 88	+ 26	+ 115	+ 163	+ 168	+ 134	+ 86	+ 41	+ 2	− 12	− 8							
− 112,25	− 335	− 311	− 226	− 102	+ 23	+ 121	+ 172	+ 179	+ 150	+ 98	+ 47	+ 8	− 11	− 11	− 3	− 7	+ 12	+ 9	+ 5		
− 168,40	− 383	− 352	− 268	− 149	− 22	+ 90	+ 166	+ 195	+ 183	+ 147	+ 102	+ 55	+ 21	+ 2	− 10	− 7	+ 10	+ 11	+ 3		
− 200	− 366	− 341	− 270	− 163	− 53	+ 54	+ 133	+ 177	+ 186	+ 166	+ 129	+ 85	+ 46	+ 17	− 1	− 6					
− 524,5	− 327	− 311	− 261	− 182	− 89	+ 5	+ 86	+ 146	+ 178	+ 180	+ 156	+ 117	+ 71	+ 35	+ 13	− 3	− 8	− 3	+ 5	+ 7	+ 5

deren die Zweige der parabelartigen Kontrastlinien einander parallel laufen, ja, in denen sie bei Annäherung an die Spitze sogar ein wenig divergieren. Ein Beispiel dafür bietet die beigegebene photographische Aufnahme (Fig. 7) eines Sonnenflecks, die mir durch Vermittlung des Herrn Dr. med. Strebel, München, von Herrn H. Schmidt, Mittweida, freundlichst zur Verfügung gestellt wurde. Sie ist von Herrn Schmidt

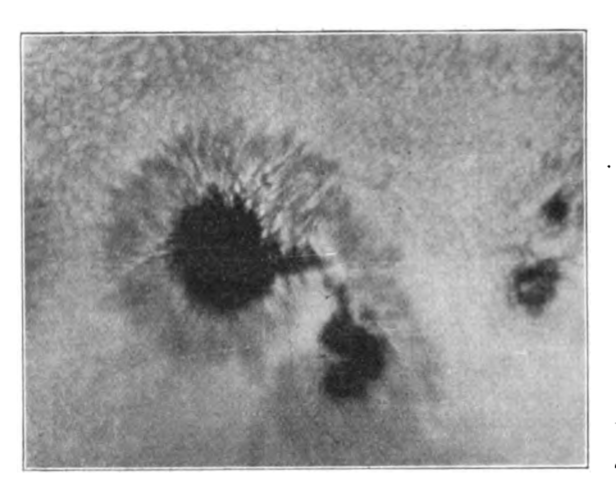


Fig. 7.
Sonnenfleck mit „keulenförmigen" Lichtzungen.

am 15. Juni 1917 mit einem seiner 50 cm Spiegel von 30 m Brennweite hergestellt. Die in den Kern des Flecks hineingesogenen „Flammenzungen", welche physikalischer Anschauung zufolge in feine sehr intensiv leuchtende Spitzen auslaufen müssen, zeigen gerade in dem besonders scharfen Teil der Aufnahme die Keulenform, während im übrigen Teil der Aufnahme örtliche Schlieren die Intensitätsverteilung verwaschen haben.

f) Zusammenfassung.

Aus der Berechnung der Funktion Δi für die beugungstheoretisch bekannten Intensitätsverteilungen von Fernrohrbildern gleichförmig leuchtender Objekte, stellt sich heraus, daß die Kontrastfunktion in der Nähe des idealen Bildrandes stets die Form einer Wellenfläche hat mit einem Wellental innerhalb und einem Wellenberg außerhalb der leuchtenden Bildfläche. In Rücksicht auf die Wirkung des Vorzeichens von Δi folgt also, daß eben innerhalb des idealen Bildrandes des leuchtenden Bildes ein heller Kontraststreifen, eben außerhalb ein dunkler Kontraststreifen gesehen werden müßte. Die Nachprüfung mit hinreichender Okularvergrößerung bestätigt diese Folgerung aufs deutlichste (XXXVII).

Identifiziert man genügend genähert die Kontrastextreme mit den Extremstellen von Δi und beachtet, daß zwar an den Nullstellen von Δi nach Gl. (1 a) die Intensität i maßgebend ist, daß aber wegen der Größe von $\frac{k}{2}$ auch die Nullstellen von e in ihrer unmittelbaren Nähe liegen, so zeigt der Vergleich der hauptsächlich für die Fernrohrmessung in Betracht kommenden

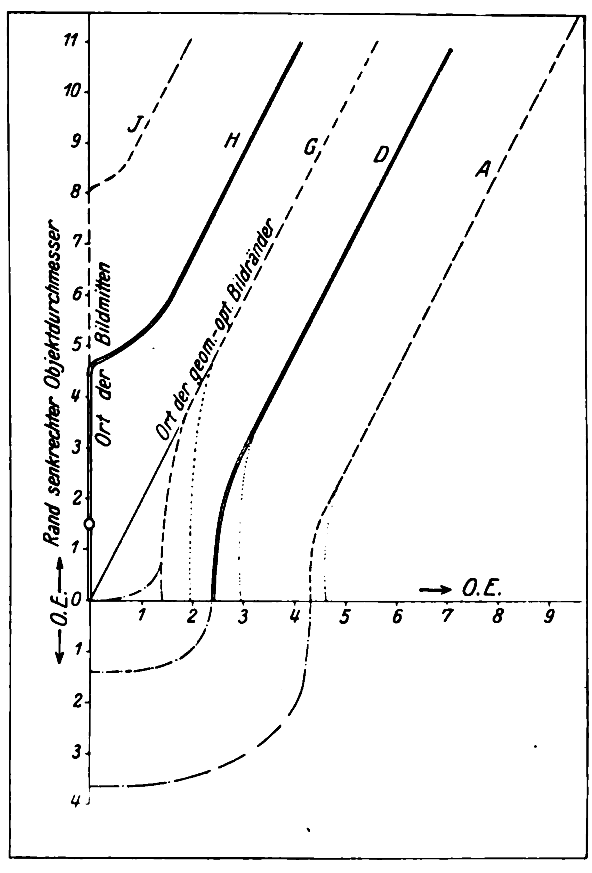


Fig. 8.
Übersicht über die Lage der ausgezeichneten Kontraststellen als Funktion des randsenkrechten Objektdurchmessers.
J, G, A Orte für $\Delta i = 0$ an der inneren Grenze des Hellkontrastes, zwischen beiden Kontrasten und an der Außengrenze des Dunkelkontrastes.
H, D Orte maximalen Hell- uud Dunkelkontrastes.

Bildformen eine so weitgehende Übereinstimmung in der Lage der ausgezeichneten Kontraststellen zum idealen Bildrand, daß man für die Beobachtungspraxis unbedenklich folgende einheitliche Darstellung wählen kann:

Hat an hellen Bildscheiben, Bildstreifen oder Bildecken der von den fraglichen idealen Randstellen gemessene randsenkrechte Bilddurchmesser in optischen Einheiten den Wert u, so haben längs ihm die ausgezeichneten Kontrast-

Tabelle X.

Lagen der ausgezeichneten Kontraststellen zum Bildrand von hellen Bildern.

Wahre Bildbreite o. E.	Innere Grenze des hellen Streifens $\Delta i = 0$	Maximum des Hellkontrastes $\Delta i =$ Min.	Grenze zw. beiden Kontraststreifen $\Delta i = 0$		Maximum des Dunkelkontrastes $\Delta i =$ Max.		Äußere Grenze des dunklen Streifens $\Delta i = 0$	
	Str./Kr.	Str./Kr.	Str.	Kr.	Str.	Kr.	Str.	Kr.
0		0	+ 1,4	1,95	+ 2,4	2,9	+ 4,3	4,5
0,2		— 0,1	+ 1,3	1,9	+ 2,3	2,8	+ 4,1	4,45
0,4		— 0,2	+ 1,2	1,8	+ 2,1	2,75	+ 4,0	4,35
0,8		— 0,4	+ 0,9	1,6	+ 2,0	2,55	+ 3,9	4,25
1,0		— 0,5	+ 0,95	1,55	+ 1,9	2,4	+ 3,8	4,15
2,0		— 1,0	+ 0,5	1,1	+ 1,6	1,95	+ 3,7	
3,0		— 1,5	+ 0,25	0,8	+ 1,4	1,55	+ 3,6	
4,0		— 2,0	+ 0,1	0,15	+ 1,4		+ 3,6	
4,7		— 2,35	+ 0,05		+ 1,4		+ 3,6	
5,0	(— 2,5)[1]	— 1,8	0		+ 1,4		+ 3,6	
6,0	(— 3)	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
8,2	— 4,1	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
9,0	— 3,7	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
10	— 3,6	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
∞	— 3,6	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	

1) Für die eingeklammerten Stellen von Tab. X ist $\Delta i > 0$, aber relatives Minimum der Umgebung.

stellen, die in Tab. X angegebene Entfernung vom geometrischen Bildrand. Die Entfernungen vom geometrisch-optischen Bildrand ins Innere des hellen Bildes sind durch ein Minuszeichen von den Entfernungen nach außen (Pluszeichen) unterschieden. Die speziell für Lichtstreifen gültigen Zahlen sind in der Spalte *Str.*, die für Kreisscheiben gültigen in der Spalte *Kr.* in optischen Einheiten angegeben.

In Fig. 8 ist die Tabelle graphisch dargestellt. Die Ordinatenachse gibt durch ihre Bezifferung oberhalb der Abszissenachse die randsenkrechten Objektdurchmesser in optischen Einheiten an und stellt gleichzeitig den Ort der Durchmessermittelpunkte dar. Die halben Objektdurchmesser sind als Abszissen zu den Ordinaten eingetragen, so daß der Ort der geometrischen Endpunkte der Objekthalbmesser (nämlich der Randpunkte der halben geometrisch-optischen Bilder) durch die Gerade OG dargestellt wird. Trägt man zu den Ordinatenhöhen nach Tab. X von dieser Geraden aus die Randabstände der ausgezeichneten Kontraststellen parallel zur Abszissenachse ein, so stellen die gestrichelten Kurven I, G, A die Orte der inneren, mittleren und äußeren Grenze der Kontraststreifen, die Doppelkurven H und D die Orte maximalen Hell- und Dunkelkontrastes dar. Die punktierten Teile der Kurve G, D, A, geben die speziell bei Kreisscheiben gültigen Lagen an. Bemerkenswert ist, daß die Kurven I, die an beiden Bildrändern entlanglaufenden Kurven $\Delta i = 0$, bei einem Bilddurchmesser von 8,2 o. E. in eine zusammenfließen, d. h., daß dann beide hellen Kontraststreifen unmittelbar aneinandergrenzen. Dieser Zustand bleibt bestehen bis zur Bildbreite 4,7 o. E., indessen wird in diesem Bereich in der Grenzlinie (Bildmitte) nicht mehr der Kontrastwert 0, sondern nur ein relatives Minimum erreicht; m. a. W. die längs der Ordinatenachse zwischen 8,2 und 4,7 o. E. verlaufende I-Linie ist als Projektion der Sohle einer Talrinne anzusehen. Bei geringeren Bildbreiten als 4,7 o. E. hört die Grenze zwischen beiden Hellkontraststreifen auf; wir haben nur noch ein über der Bildmitte liegendes Kontrastmaximum. Gleichzeitig rücken die Kurven G, D, A nun mit abnehmender Bildbreite weiter vom idealen Bildrand ab. Die Abstände, die sie bei der Bildbreite Null haben, gelten für eine unendlich dünne Lichtlinie, bzw. für den ausdehnungslosen Lichtpunkt.

Will man die Darstellung von Fig. 8 gleichzeitig als Bild des Kontrastverlaufes an einer Ecke auffassen, so sind nahe der Spitze die strichpunktierten Modifikationen der Kurven D, A, G und das Hellkontrastmaximum auf der Ordinatenachse bei der Bildbreite 1,5 o. E. (durch den kleinen Kreis angedeutet) zu beachten. Würde man sich für diese Auffassung den Kontrastverlauf als Gebirgsmodell plastisch vorstellen, so ergibt sich, daß bei größerer Bildbreite (größerer Entfernung von der Spitze einer Ecke) jeder Bildrand innen von einem Wall (Hellkontrast), außen von einem Graben (Dunkelkontrast) begleitet wird. Von der Bildbreite 8,2 o. E. an beginnen beide Randwälle miteinander zu verschmelzen, indem sie eine immer flacher werdende Rinne zwischen sich lassen, die bei der Bildbreite 4,7 o. E. aufhört, um von hier ab in

eine Gratlinie überzugehen, die bei der Bildbreite 1,5 o. E. eine Kuppe aufweist. Während dieser Änderungen im Bildinnern entfernen sich die langsam abflachenden Gräben zeitweise ein wenig vom geometrisch-optischen Bildrand und fließen an der Spitze als ziemlich flache Mulde zusammen.

Fig. 8 geht in die Darstellung des Kontrastverlaufs für schwarze Bilder auf hellem Grunde über, wenn man die Vorzeichen der Kontrastextreme umkehrt, also H als Stelle des Dunkelkontrastes und D als Stelle des Hellkontrastes ansieht.

III.

Die Bildgrenze.

1. Ableitung der Definition.

a) Seeligers Modellmessungen.

Es handelt sich darum, aus den Kontrastmöglichkeiten die wirksame Bildbegrenzung durch Beobachtung auszusondern. Ein in jeder Beziehung einwandfreier Weg zur kritischen Prüfung der grundlegenden Definition wäre die Beobachtung an Modellen, in welchen die objektive Lichtverteilung von Beugungsbildern in stark vergrößertem Maßstabe nachgeahmt ist, wie sie Seeliger (VI, Kap. 2) mit einigen Herren der Münchener Sternwarte zum Nachweis der physiologischen Ursache der Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen angestellt hat. Leider ergibt die Überprüfung des Materials, daß das Auge gegenüber dem Winkelmaßstab, in welchem ihm das Modell des ersten der beiden Beispiele dargeboten wurde, als nicht genügend punktförmig empfindend anzusehen ist, und daß das zweite Beispiel nicht die charakteristischen Merkmale eines Beugungsbildes (Aufeinanderfolge eines hellen und eines dunklen Kontraststreifens) hat. Aber wegen ihrer historischen und praktischen Wichtigkeit mögen sie hier kurz besprochen werden.

1. Beispiel: Das Beugungsbild einer selbstleuchtenden Kreisscheibe vom Radius $u = 50$ o. E. wurde nach der Intensitätstabelle von Struve im Maßstabe 100 o. E. = 14,4 cm dadurch nachgeahmt, daß man eine tiefschwarze Kreisscheibe von 15 cm Radius mit einem entsprechend der Intensitätsstärke begrenzten weißen Sektor in schnelle Rotation versetzte. Unmittelbar vor der rotierenden Scheibe in Richtung auf den Beobachter stand ein schwarzer Schirm, durch dessen kreisförmige Öffnung man die rotierende Scheibe fast bis zum Rande frei erblicken konnte. Ein durch ein Lot beschwerter dünner Faden wurde durch Hin- und Herbewegen vor dem Schirm nach Angaben des 5 m entfernten Beobachters so eingestellt, daß er die scheinbare Begrenzungslinie rechts und links berührte; seine Stellung wurde beide Male an einem horizontalen Millimetermaßstab abgelesen und die Ablesungen zu einem Mittel vereinigt. Von den Beobachtern Seeliger, Villiger und List sind a. a. O. S. 23 je zwei Messungen bei verschieden starker Beleuchtung der Scheibe angeführt, die im Gesamtmittel einen Bildradius von 7,40 cm = 55,1 o. E. ergeben, d. h. eine Radienvergrößerung um 5,1 o. E. Bei 5 mm Pupillenöffnung faßt eine Zapfenbreite 4,7 o. E. Die Bildgrenze wurde also im Mittel um eine Zapfenbreite nach außen verlegt und ist daher so locker an die Kontrastforderungen gebunden, daß das Ergebnis für den gegenwärtigen Zweck zu unsicher bleibt.

2. Beispiel: Unter denselben Versuchsbedingungen wie oben wurde von Seeliger die Intensitätsverteilung in der Umgebung der geometrischen Grenze des Kernschattens der Erde bei Mondfinsternissen beobachtet. Es wurde, da der geometrische Kernschattenradius der Erde im Winkelmaß $2471'',2$ beträgt, der Intensitätswert aus der radialen Entfernung $\gamma = 2460''$ in das Zentrum der rotierenden Scheibe, an ihren 15 cm entfernten Rand durch entsprechende Ausgestaltung des weißen Sektors der Intensitätswert aus $\gamma = 2560''$ Entfernung vom Mittelpunkt des Kernschattens verlegt.

Die Intensitätswerte selbst (VI, 17) und die zugehörigen Näherungswerte der Kontrastfunktion finden sich in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XI.

Intensität und Kontrastwerte am Kernschattenrand der Erde bei Mondfinsternissen.

γ	$J(\gamma)$	$c \cdot \Delta J$
2460″	0,00151	− 20
70	164	0
80	178	+ 33
90	195	+ 63
2500	218	+ 113
10	251	+ 160
20	301	+ 203
30	371	+ 220
40	465	+ 217
50	579	+ 207
60	716	+ 200

Es zeigt sich der der geometrischen Kernschattengrenze entsprechende Nullwert bei $\gamma = 2470''$ und ein Maximum bei $= 2525''$, wobei zu bemerken ist, daß die Lage beider Werte sich numerisch nicht sicherer als auf $5''$ festlegen läßt, weil die Tabelle der Funktionswerte für

die Interpolation nur gerade eben lang genug ist.

Die aus jeweils 13 Einzeleinstellungen der Beobachter: Seeliger, Villiger, List und Oertel gemittelten Einstellungen ergaben die gesehene Kernschattengrenze auf der rotierenden Modellscheibe im radialen Abstand 2521″, während die Beobachtungen von Mondfinsternissen nach Hartmann (VI, 17) einen gesehenen Kernschattenradius von 2521″,8 ergeben. Es besteht kein Zweifel daß in diesem Falle die Bildgrenze an die Stelle des Maximums der Kontrastfunktion verlegt wurde.

So lehrreich dieses Beispiel an sich ist, so wenig läßt sich das Ergebnis verallgemeinern, weil hier, wie bemerkt, eine wesentliche Bedingung — der außen anschließende Hellkontrast — fehlt. Volles Verständnis für diese Spezialbedingung ergibt sich übrigens erst aus der später folgenden Ausmessung eines Sternscheibchens bei künstlicher Fadenbeleuchtung.

b) Messung an geradlinigen Streifen.

Wir ziehen daher vor, die Beobachtungsbedingungen zunächst so weit als möglich zu vereinfachen, in dem wir das Bild eines Mikrometerfadens untersuchen (vgl. XXXVI).

Strehl hat gezeigt, daß ebene, auf das Objektiv eines Fernrohrs auftreffende Wellen in erster Näherung als ebene Wellenstücke das Okular verlassen; in Anlehnung an die Abbesche Theorie des Mikroskops darf man weiter schließen, daß dieser Zustand nicht wesentlich gestört wird, wenn ein Mikrometerfaden einen kleinen Teil des Lichtgewebes in der Objektivbrennebene abschattet. Das bedeutet physikalisch: man könne den Mikrometerfaden hinsichtlich seiner Abbildung durchs Okular ersetzen durch einen entsprechend breiten Schirm direkt am Objekt, wenn man nur das die Abbildung beeinflussende Öffnungsverhältnis des Instruments in Rechnung zieht.

Hieraus aber folgt wieder: das Beugungsbild des Mikrometerfadens muß bei „natürlicher Bildfeldbeleuchtung" (d. h. durch diffuses Himmelslicht) von der Größe der Ein- bzw. Austrittspupille des Fernrohrs, bei „künstlicher Bildfeldbeleuchtung" aber von der Größe der materiellen Öffnung im Okulardeckel abhängig sein. Um diese für die Theorie des Fadenmikrometers zweifelsohne wichtige Frage nachzuprüfen, habe ich am Refraktor der Münchener Sternwarte (Öffnung 285 mm) bei beiden Beleuchtungsarten und verschiedener Okularvergrößerung die Fadenbreite dadurch gemessen, daß ich den beweglichen Faden des Mikrometers beiderseits soweit an den festen Faden heranführte, bis der helle Zwischenraum der Fadenbreite gleich war. Die in folgender Tabelle vereinigten Ergebnisse stellen je das Mittel aus drei Einstellungen dar.

Tabelle XII.

Breite eines Mikrometerfadens bei verschiedener Okularvergrößerung am 285 mm-Refraktor der Münchner Sternwarte.

Ok.-Nr.	Vergrößerung	Natürl. Feldbeleuchtung		Künstl. Feldbeleuchtung	
	×	A. P.	Fadenbreite	Ok.-Blende	Fadenbreite
I	95	2,99 mm	1″,49	3,5 mm	1″,82
II	148	1,92	1,23	3,5	1,51
III	235	1,21	0,95	3,5	1.32
IV	345	0,82	0,77	2,4	0,85
V	475	0,60	0,71	3,2	0,82
VI	630	0,45	0,71	1,6	0,74
VII	890	0,32	0,74	1,25	zu lichtschwach
II	148			1,25	1,54

Ein erster Blick auf die Zahlen zeigt ein nach dem seitherigen Standpunkt absurdes Ergebnis, denn mit wachsender Okularvergrößerung erfolgt trotz des bei natürlicher Feldbeleuchtung konstanten Öffnungsverhältnisses des Instrumentes eine gesetzmäßige Abnahme der gemessenen Fadenbreite — und ähnliches zeigt die Reihe bei künstlicher Feldbeleuchtung trotz des ziemlich regellos variierten Öffnungsverhältnisses; ja das Okular II ergibt bei künstlicher Beleuchtung fast das gleiche Resultat bei Okularblenden von 3,5 mm und 1,25 mm Durchmesser. Obendrein sind die Messungsergebnisse bei künstlicher Beleuchtung trotz des gesteigerten Öffnungsverhältnisses im allgemeinen größer als bei natürlicher Beleuchtung, wiewohl eben wegen des Gewinnes an Öffnungsverhältnis die Beugungswirkung sich verringert.

Die Messungen wären mit Tab. III vergleichbar, wenn die Breite des geom.-opt. Fadenbildes etwa in Mikrometerteilen (β'') bekannt und in opt. Einheiten (u) umgerechnet wäre. Da das nicht der Fall ist, muß versucht werden, diesen Wert aus den Meßergebnissen selbst zu ermitteln. Die am angegebenen Orte ausgeführte Überlegung ergibt 0″73 als wahren Wert für die geom.-opt. Fadenbreite.

Die weitere Aufgabe besteht nun in der Ableitung der einzelnen Meßergebnisse aus diesem Ausgangswert im Vergleich mit der Lage der Kontraststellen und dem Bau der Netzhaut. Für natürliche Feldbeleuchtung entspricht die geom.-opt. Bildbreite von 0″,73, bei allen Okularen einer Ausdehnung von 5,43 opt. Einheiten; nach Tabelle III könnte also bei Einstellung auf das Minimum von Δi die gemessene Faden

breite $5,43 + 2 \cdot 1,4 = 8,23$ opt. Einheiten oder $1'',11$ betragen, bei Einstellung auf die äußerste Nullstelle von Δi auch $5,43 + 2 \cdot 3,6 = 12,63$ opt. Einheiten oder $1'',71$. Tabelle XII zeigt zwar, daß die tatsächlichen Einstellungen zwischen diesen Grenzen liegen, aber bei den ersten Okularen keine ausgesprochene Vorliebe für diese Werte zeigen. Das kann daran liegen, daß die Netzhaut des Auges wegen der endlichen Ausdehnung der Zapfenelemente besonders bei geringeren Okularvergrößerungen nicht genügend punktförmig empfindet gegenüber der ihr gebotenen Lichtverteilung, und müßte sich darin verraten, daß die gemessenen Fadenbreiten bei schwachen Okularen ganze Vielfache des Mikrometerwerts eines Zapfendurchmessers sind. Man hat nach Anm. S. 9

$$\beta_z'' = \frac{36'',1}{\Gamma}.$$

Die hiernach gerechneten Mikrometerwerte eines Zapfendurchmessers ($3\,\mu$) finden sich in der zweiten Spalte von Tabelle XIII, die dritte Spalte gibt die mit den ersten vier Okularen bei natürlicher Feldbeleuchtung gemessenen Fadenbreiten in Zapfendurchmessern. In der vierten Spalte ist, gleichfalls in Zapfendurchmessern die Breite des Mikrometerfadens beigefügt, wenn auf das innere Maximum von Δi eingestellt worden wäre; diese Breite beträgt nach Tabelle III um $2 \cdot 1,6$ opt. Einheiten weniger als die geom.-opt. Bildbreite von 5,43 optischen Einheiten, also 2,23 opt. Einheit oder $0'',301$; die fünfte Spalte gibt die Differenz zwischen Spalte 3 und 4.

Tabelle XIII.

Natürliche Beleuchtung.

Okular-Nr.	Zapfendurchmesser	Fadenbreite in Zapfendurchmessern: gemessen	Fadenbreite in Zapfendurchmessern: zwischen Δi — max.	Differenz
I	$0'',380$	3,92	0,79	3,13
II	244	5,05	1,23	3,82
III	153	6,20	2,00	4,20
IV	104	7,35	2,90	4,45

Mit Deutlichkeit erkennt man aus Spalte 3, daß tatsächlich bei den schwachen Okularen nach ganzen Vielfachen von Zapfendurchmessern eingestellt wurde, also zweifellos von einer Einstellung nach zweiten Differentialquotienten (Kontrastfunktion) nicht die Rede sein kann. Die Netzhaut arbeitet hier nach zweiten Differenzenquotienten, deren Abszissenintervalle eben die Zapfendurchmesser sind. Zur Abschätzung eines Wertes des zweiten Differenzenquotienten muß man sich aber offenbar mindestens drei einander benachbarte Zapfen in Tätigkeit denken. Wenn nun etwa nahe dem Bildrande ein Zapfen das innere Kontrastminimis registriert, so kommt daher höchstens der nächste in die Lage, den Nullwert der Kontrastfunktion konstatieren zu können, m. a. W.: eine Empfindung für den Kontrastnullwert kann erst um mehr als einen Zapfendurchmesser von der nach innen benachbarten Kontraststelle entfernt erfolgen. Vergleicht man nun obige Werte in Spalte 3 mit der scheinbaren Fadenbreite zwischen den inneren Kontrastminimis in Spalte 4, so sieht man an den halben Differenzen der Spalte 5, daß in der Tat die gemessenen Bildgrenzen 1,6 — 2,2 Zapfendurchmesser außerhalb der benachbarten Kontraststelle eingestellt wurden. Damit erscheinen die Messungen in einem ganz anderen Lichte, denn danach sind sie nur als Einstellungen auf die mittlere Nullstelle der vom Auge durch den Netzhautbau modifiziert empfundenen Kontrastfunktion aufzufassen, die theoretisch und bei starker Okularvergrößerung mit der geom.-opt. Bildgrenze zusammenfällt, bei schwachen Okularen aber wegen zu grober Differenzierungsmöglichkeit gegenüber der Lichtverteilung um $1^1/_2$—2 Zapfendurchmesser nach außen verschoben wurde.

Im übrigen wird die Richtigkeit der Ableitung weiter gestützt, wenn es gelingt, auch die Messungen bei künstlicher Feldbeleuchtung einwandfrei abzuleiten. Die folgende Übersicht der Beobachtungen bei künstlicher Feldbeleuchtung enthält in der zweiten Spalte die nach Gl. (6a) gerechneten Mikrometerwerte der opt. Einheit, in der dritten Spalte die nach Gl. (7) gerechneten Mikrometerwerte des Zapfendurchmessers, in der vierten die Werte der Zapfendurchmesser in optischen Einheiten, in der fünften die gemessenen Fadenbreiten aus Tabelle XII in opt. Einheiten, in der sechsten in Zapfendurchmessern ausgedrückt.

Spalte 7 und 8 fügen die geom.-opt. Fadenbreite in opt. Einheiten und Zapfendurchmessern hinzu.

Nach Spalte 6 kann wiederum kein Zweifel bestehen, daß die Messungen mit außerordentlicher Präzision nach ganzen Zapfendurchmessern erfolgen. Nur die Messung mit Okular III macht eine Ausnahme in der ausgesprochenen Annäherung an eine ganze Zahl. Neben den Ziffern der Spalte 6 sind daher die entsprechenden ganzen Zahlen in Klammern beigefügt, mit denen die weitere Überlegung arbeitet. Wenn diese Zahl gerade ist, bildet die geom. Bildmitte die Grenze zweier benachbarter Zapfenelemente, wenn sie ungerade ist, halbiert sie das mittlere bildauffangende Element — dies zu beachten ist wichtig für die Auffindung der Zapfen, welche

Tabelle XIV.

Künstliche Feldbeleuchtung.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ok.-Nr.	1 opt. Einh.	1 Zapfendurchmesser	in opt. Einh.	Gemessene Fadenbreite in opt. Einh.	in Zapfendurchm.	Geom. Bildbreite 0″,73 in o. E.	in Zapfendurchm.	Gesehene Fadenbreite nach Theorie	nach Beob.
I	0″,116	0″,380	3,28	15,7	4,80 (5)	6,30	1,93	1″,89	1″,82
II	074	244	3,30	20,4	6,18 (6)	9,30	2,98	1,47	1,51
III	047	153	3,26	28,1	8,62 (9?)	15,5	4,75	1,08	1,32
IV	046	104	2,26	18,5	8,20 (8)	15,8	7,00	0,83	0,85
V	025	076	3,04	32,8	10,78 (11)	29,2	9,60	0,84	0,82
VI	038	057	1,50	19,5	13,00 (13)	19,2	12,80	0,74	0,74
II red.	208	244	1,17	7,4	6,32 (6)	3,5	2,99	1,46	1,54

die als theoretische Grenze des Bildes vermutete mittlere Nullstelle von Δi empfinden. Beispielsweise zeigen die Zahlen für Okular III, daß die halbe geom.-opt. Fadenbreite 2,37 und die halbe gemessene Bildbreite $4^1/_2$ Zapfendurchmesser beträgt; ein Vergleich der zugehörigen Ziffer in Spalte 7 mit der Lage der Kontraststellen nach Tabelle III ergibt sofort, daß das erste halbe Zapfenelement von der Mitte aus noch nicht von den Randphänomenen getroffen wird, das zweite ganze die innere Nullstelle Δi empfinden wird, das dritte ganze das Maximum; dieses Zapfenelement ragt indessen schon um $2,5 - 2,37 = 0,13$ Zapfendurchmesser über den geom.-opt. Bildrand hinaus und da höchstens das nächste für die Empfindung des mittleren Nullwertes des Kontrastes in Frage kommt, so ist theoretisch die gesehene Bildgrenze mit Okular III um 1,13 Zapfendurchmesser $= 1,13 \cdot 0'',153 = 0'',177$ außerhalb des geom.-opt. Bildrandes, also eine Bildbreite von $0'',73 + 2 \cdot 0'',177 = 1'',08$ zu erwarten. Behandelt man die übrigen Beobachtungen in gleicher Art, so werden die Werte der Spalte 9 erhalten, deren Übereinstimmung mit den tatsächlichen Beobachtungswerten in Spalte 10 als vollkommen bezeichnet werden darf, wenn man von der einzigen offenbar durch einen Meßfehler gestörten Beobachtung mit Okular III absieht.

Als durchaus gesichertes Ergebnis ist daher zu buchen: Die eingangs skizzierte Auffassung der opt. Abbildung der Mikrometerfäden ist berechtigt und für die Theorie des Mikrometers ausreichend.

Als Bildgrenze der Mikrometerfäden sieht das Auge die Grenze zwischen dem dunklen und hellen Kontraststreifen am Bildrand, die im allgemeinen mit der geom.-opt. Bildgrenze identisch ist.

Bei geringer Okularvergrößerung wird die Bildbreite in angebbarer Weise (infolge der Zapfenstruktur der Netzhaut) über den theoretischen Grenzwert hinaus vergrößert.

Die letzte Aussage berechtigt zu der Frage: Wie stark muß denn die Okularvergrößerung sein, um von Messungsfehlern aus der endlichen Netzhautstruktur frei zu werden? Die dafür zu erhebende Mindestforderung bleibt natürlich teilweise je nach der individuellen Ansicht über das ausreichende Maß an Meßgenauigkeit willkürlich, indessen ist aus den vorigen Überlegungen so viel klar, daß die Kontraststellen nur dann nahe ihrem theoretischen Ort empfunden werden können, wenn das engste Intervall zwischen zwei benachbarten Kontraststellen (nach Tab. X beträgt es 1,4 opt. Einheiten) von 2—3 Zapfendurchmessern ausgefüllt wird. Setzen wir daher in Gl. (5a) $\varrho = 2,5 \cdot 3\mu = 7,5\mu$ und $u = 1,4$, so ergibt sich:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{7 \cdot 5}{0,64 \cdot 1,4} = 8,35,$$

also 8—9fache Normalvergrößerung. Das bedeutet für Fernrohre mit dem Öffnungsverhältnis 1 : 15 bzw. 1 : 10 Okulare von der Brennweite $\frac{5}{8,35} \cdot 15 = 9$ mm bzw. $\frac{5}{8,35} \cdot 10 = 6$ mm, also Ergebnisse, die mit den aus eingehender Beobachtungspraxis gewonnenen Erfahrungen vorzüglich harmonieren.

Offenbar kann man im gegenwärtigen Beispiel einmal jeden Mikrometerfaden als allein gesehenes Bild auf hellem Grunde auffassen, zum andern kann aber auch der helle Zwischenstreifen als allein gesehenes Bild auf dunklem Grunde gelten. Daher ergibt sich — wenn bei der Ausführung von Beobachtungen die eben abgeleitete Bedingung erfüllt war — und das ist bei fast allen astronomischen Messungen der Fall — über die Lage einer gut definierten Bildgrenze folgende allgemeine Regel (XXXVII).

An alleinstehenden (und kombinierten) Bildern sieht das Auge eine gut definierte

Grenze dort, wo eine zwischen beiden Randkontrasten liegende kontrastfreie Zone ($\Delta i = 0$) an den Dunkelkontraststreifen angrenzt.

c) Irradiationsmessungen.

Eine Art Kontrolle des Vorigen ergeben die berühmten Messungen der „Irradiation"[1]) von Volkmann und Aubert (II, 14 u. f.). Beide Autoren haben zwei gleiche, einander parallele Lichtstreifen auf schwarzem Hintergrund (und in derselben Weise später schwarze Streifen auf hellem Grunde) einander soweit genähert, bis der Zwischenraum ebenso breit erschien wie die Streifen. Nennt man die tatsächliche Streifenbreite in Winkelmaß b, die tatsächliche Breite des Zwischenraumes d und die „Irradiationsverbreiterung" eines Streifens $2z$, so wurde also d so bemessen, daß:

$$b + 2z = d - 2z.$$

Ein positives z gibt demnach an, um welchen Winkelbetrag die gesehene Bildgrenze außerhalb der geometrisch-optischen Bildgrenze liegt. Bildet man bei Auberts Meßergebnissen $b + 2z$, die scheinbare Strichbreite, so hat man

94″,5	bei $b =$ 40″,5	$u =$ 5,3
84 ,0	24 ,6	3,2
81 ,2	15 ,3	2,0
82 ,0	10 ,0	1,3,

d. h. wenn man eine normale Zapfenbreite von 36″,5 annimmt, so hat Aubert die Streifen stets in der Breite von 2,3 Zapfen, d. h. abwechselnd in 2 oder 3 Zapfenbreiten gesehen. Nimmt man, da Angaben fehlen, weiter 5 mm Pupillenöffnung an, so erhalten die wahren Streifenbreiten b die unter u stehenden Breiten in opt. Einheiten. Da sich die Zapfen bei diesen geringen Breiten natürlich symmetrisch zum inneren Hellkontrast gelegt haben, so ist die Bildgrenze wieder an der durch die Zapfen modifizierten Nullstelle zwischen beiden Kontraststreifen gesehen worden.

Ähnlich ist die sog. negative Irradiation (II, 16). Im allgemeinen erscheinen nämlich schwarze Streifen auf weißem Grunde schmäler als sie ihrer geometrisch-optischen Bildausdehnung nach erscheinen sollten — eben weil, wie durch die obige Beobachtungsdarstellung bewiesen wird, die gesehene Grenze des weißen Grundes noch innerhalb der geometrisch-optischen Bildgrenze des schwarzen Streifens liegen kann. Sehr schmale schwarze Streifen dagegen — und das nennt man negative Irradiation — erscheinen wiederum verbreitert. Die von Aubert vorliegenden Messungen zeigen

$b + 2z$	b
81″	45″
75″	33″
64″,5	21″,5,

so daß für sie dieselbe Aussage gilt wie oben.

Zugleich ist hiermit erwiesen, daß die vermeintliche „positive und negative Irradiation" nichts anderes ist als eine Folge der Lichtbeugung, modifiziert durch die endliche Ausdehnung der Netzhautelemente.

2. Messung mit Mikrometerfaden.

a) die Kreisscheibe.

In der Kontrastregel für gesehene Bildgrenzen muß die Regel für gemessene Bildgrenzen enthalten sein, da der Sehakt selbst auch bei kombinierten Bildern nicht anders verlaufen kann als dort. Denken wir an ein helles Objekt (weißer Streifen oder Kreis) einen dunklen Mikrometerfaden herangeführt, so erhält der Mikrometerfaden im allgemeinen seine Grenzkontraste durch die Randintensität des hellen zu messenden Bildes. Ein Ausgleich der einander entgegengesetzten Außenkontraste von Bild und Faden zu einer Zone $\Delta i = 0$ erfolgt offenbar vollkommen, wenn die messende Kante des Fadens an die äußere Nullgrenze des Dunkelkontrastes um das helle Bild herangeführt wird. In der entstandenen Zone $\Delta i = 0$ wird nun $e = i$, d. h. sie erscheint aufgehellt und wird zum hellen Objektbild gezählt. Wir schließen daher, die Durchmesser heller Bilder müssen mit dem Fadenmikrometer (bei natürlicher Feldbeleuchtung) um die Breite des äußeren Dunkelkontrastes zu groß gemessen werden.

Tatsächlich ist bei Fadenmikrometermessungen eine Abhängigkeit des Planetendurchmessers von der Objektivöffnung schon lange vermutet worden. Ältere Messungsreihen lassen sich schwer als überzeugende Beispiele heranziehen, weil meistens die für die Reduktion erforderlichen Angaben nicht zu beschaffen sind und recht oft auch deshalb — was für unsern Zweck das ärgste Hindernis ist —, weil gerade geübte Beobachter ein deutliches Gefühl für die eigenartigen Beugungsverhältnisse am Mikrometerfaden hatten und, um hieraus entspringende Fehler zu eliminieren, den Faden statt bis zur scheinbaren Randberührung noch ein Stückchen in die helle Scheibe hinein zu führen pflegten. So schreibt z. B. Lohse (XXX, 22): „Wenn im Gesichtsfelde des Fernrohrs ein Mikrometerfaden z. B. mit der leuchtenden Scheibe eines Planeten in Berührung kommt, so entstehen

1) W. Struve (III, 50) hält mit Helmholtz noch die Irradiation für eine von der Lichtbeugung streng verschiedene Erscheinung.

eigentümliche Bildverzerrungen durch Beugung des Lichtes. Die Folge davon ist, daß Durchmesser von Planetenscheiben mit Filiarmikrometern leicht etwas zu groß gemessen werden, selbst wenn man glaubt den Faden so weit herangebracht zu haben, daß er ein wenig in die Scheibe einschneidet."

Daß unsere Auffassung den Tatsachen gerecht wird, läßt sich dagegen an folgenden Beispielen einer neueren Venusradiusbestimmung zeigen, auf welche Herr Dr. G. Struve aufmerksam machte; eben weil sie von dem wahrscheinlichsten Wert des Venusradius erheblich abweicht. G. Struve beobachtete in Neubabelsberg 1921 April 4. bis Mai 9. vor und nach der unteren Konjunktion den Planeten Venus am Toepferschen Durchgangsinstrument (190 mm Öffnung, 2,50 m Brennweite) bei 300facher Okularvergrößerung, indem er den beweglichen Mikrometerfaden dem von der Sonne hellerleuchteten Rande der Venussichel (diesen berührend) nachführte. Bei der Ableitung des Planetenortes aus den Meridianbeobachtungen wurde der Planetenradius als Unbekannte in die Bedingungsgleichungen aufgenommen und ergab sich als Mittel aus den 14 Beobachtungstagen zu 9'',072.

Gegenüber den Hartwigschen „wahren" Werten erscheint der Struvesche Venusradius um ca. 0'',26 zu groß.

Die Venussichel hatte während der Beobachtungen eine durchschnittliche Breite von ungefähr 10'', d. h. da eine optische Einheit des Instruments bei voller Öffnung 0'',20 beträgt, ungefähr von 50 o. E. Bei der angewandten Okularvergrößerung wurde die Austrittspupille des Fernrohrs auf 0,6 mm verringert, so daß ziemlich hinreichende Okularvergrößerung vorliegt und die Einstellung des Mikrometerfadens auf die II. äußere Nullstelle der Kontrastfunktion erfolgt sein muß, welche nach Tab. X um 3,6 o. E. also hier um 0'',73 außerhalb des geometrisch optischen Bildrandes liegt.

Nun haben Struves Beobachtungen bei einer mittleren Entfernung der Venus von der Erde von 0,306 stattgefunden und bei der Reduktion auf die Entfernungseinheit konnte sonach nur der Betrag 0'',7326 · 0,306 = 0'',224 der Radienvergrößerung ins Endresultat eingehen. Subtrahiert man diesen Betrag von Struves Wert 9'',072, so ergibt sich als wahrer Venusradius 8'',848, der nur um 0'',015 von dem als richtig anzusehenden Hartwigschen Wert 8'',833 abweicht. Über weitere Reduktionserfolge dieser Art vergleiche man auch G. Struve, „Durchmesserbestimmung des Planeten Venus" und Kühl, „Über den sog. konstanten Messungsfehler bei Bestimmung des Venusdurchmessers". Astron. Nachr. Januar 1925, Nr. 5348.

Mit Rücksicht hierauf darf man wohl die Vermutung auszusprechen wagen, daß die von Courvoisier (XXXI) aus Rektaszensionsbeobachtungen der Venus errechneten Beträge für die sog. „jährliche Refraktion" zum Teil, wenn nicht gänzlich zum Verschwinden gebracht werden, sobald auf Elimination des Kontrastfehlers genügend Rücksicht genommen wird, außer bei den Beobachtungen in oberer Konjunktion, bei denen die Scheibe durch den Faden biseziert war[1]).

Da Rektaszensionsfehler eine wichtige Rolle bei der Prüfung der Perihelbewegung des Merkurs spielen, so ist von vorneherein zu vermuten, daß die Rücksichtnahme auf die betreffenden Kontrastreduktionen das erhaltene Resultat beeinflussen werden. In der Tat führt die Newcombsche Diskussion der Meridianbeobachtungen des Merkur nach Grossmanns kritischer Besprechung (XXXIII, 49, 1) auf Rektaszensionsdifferenzen, welche von der Phase abhängen und im Sinne der Kontrastfehler verlaufen.

b) Der Lichtpunkt.

Wenn man versucht, durch Messungen die Kontrastziffern des Lichtpunktes an Sternen nachzuprüfen, so ist zu bedenken, daß das Bild des Mikrometerfadens auf der Netzhaut im allgemeinen durch künstliche Feldbeleuchtung entworfen wird und daher längs seiner Kanten Kontrasterscheinungen von anderem Abstandsmaßstab auftreten als am Sternbild (vgl. S. 19).

Wir greifen als Messungen dieser Art zunächst einige Messungen von Villiger aus den Jahren 1901 und 1902 an α-Aurigae heraus, die seinerzeit zum Studium der Szintillation (XX) ausgeführt wurden. In der ersten Spalte von Tab. XV findet man die Objektivöffnung, auf welche der Münchener Refraktor abgeblendet wurde, in der zweiten, die zur Objektivöffnung gehörige Normalvergrößerung Γ_0, in der dritten den gemessenen Durchmesser der Sternscheibe, in der vierten den Mikrometerwert einer optischen Einheit nach Gl. (6a) und in der fünften Spalte die Anzahl der o. E., welche auf den zu 3μ angenommenen Abstand zweier Zapfenmittelpunkte der Netzhaut entfallen. Die übrigen Zahlen werden sogleich erklärt.

Obwohl hier ein komplizierteres Lichtgebilde als eine Planetenscheibe zu messen ist, besteht kein Grund das dort bewährte Auffassungsprinzip nicht auch hier anzuwenden. Man wird also voraussetzen, daß der Faden das Sternbild zu berühren scheint, wenn sein Außen-Hellkontrast gerade auf das Außen-Dunkelkontrastmaximum

1) Vgl. G. Struve, Astron. Nachr. März 1924, Nr. 5274.



Tabelle XV.

Durchmessermessung an α-Aurigae (0,^{m}8)
München 10. II. 02 Zenithdist. 10^0,6
10′ Refraktor $\Gamma = 475$.

Obj. Öffng. mm	Γ_0	Stern-durchm beob. ″	Mikro-meterwert von 1 o E. ″	Zapfen-durchm. o. E.	Stern-durchm. n. Theorie ″
284	57	0,82	0,135	0,59	0,85
148	30	1,46	0,256	0,31	1,55
90	18	2,59	0,428	0,19	2,55
30	6	5,60	1,270	0,07	(7,35)5,17

des Sternscheibchens fällt, also einen Ausgleich zur Erzeugung einer Stelle $\Delta i = 0$ hervorruft. Das Außenkontrastminimum des Sternscheibchens liegt im Mittelpunktsabstand 2,89 o. E. und wird maßstäblich durch die Mikrometerwerte der o. E. in Spalte 4 von Tabelle XV festgelegt. Der durch künstliche Feldbeleuchtung verursachte Kontrast am Faden dagegen wird maßstäblich durch den Mikrometerwert einer o. E. für die Okulardeckel-Öffnung von Okular V (vgl. S. 21) bestimmt, der 1 o. E. = 0″,025 beträgt. Die wirkliche Fadenbreite (0″,73) umfaßt in diesem Maßstab also fast 30 o. E. und das äußere Kontrastmaximum des Fadens liegt daher im Randabstand 1,4 o. E. = 0″,035. Der Sterndurchmesser muß demnach gemessen werden zu (5″,78 × Wert aus Spalte 4 Tab. XV + 0″,07). Diese Werte stehen in Spalte 6 verzeichnet — bis auf den letzten in vollkommener Übereinstimmung mit der Beobachtung. Bei der letzten Messung ist offenbar durch die enorme Übervergrößerung $\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 75\right)$ der Dunkelkontrast um das Sternscheibchen stark verflacht, so daß nur noch die Außengrenze des Hellkontrastes am Faden (Randabstand 3,6 o. E. = 0″,09) mit der Nullstelle zwischen den Sternbildkontrasten (Mittelpunktsabstand 1,96 o. E. = 2″,494) zur Deckung kommen konnte, was immer noch einen passablen Ausgleich beider Kontraste ermöglicht. Dies würde dann einen gemessenen Durchmesser von 5″,17 ergeben.

Ebensogut bestätigt sich eine zweite Messungsreihe desselben Verfassers vom 5. Dezember 1901, welche Sterndurchmesser an Sternen 4ter bis 8ter Größe in verschiedenen Zenithdistanzen enthält. Die erste Spalte der folgenden Tabelle gibt die Katalognummer des Sterns im II. Teil der Potsdamer photometrischen Durchmusterung (P. D. II), die zweite die wahre Zenithdistanz, die dritte die Helligkeit, die vierte den gemessenen Durchmesser des Sternbildes. Theoretisch ergibt sich hier nach dem Kontrastprinzip wie oben das Messungsresultat für den Sterndurchmesser zu 2 (2,89 · 0″,135 + 1,4 · 0″,038) = 0″,886 in vorzüglicher Übereinstimmung mit den Messungen bis zu mittleren Zenithdistanzen; bei großen Zenithdistanzen dagegen liegt ein durch Szintillation gegenüber dem reinen hier behandelten Beugungsbild merklich vergrößertes Bild vor. — Außer der Bestätigung der Auffassung des Meßvorganges an einem komplizierteren Bilde, ist die neue Erfahrung zu buchen, daß überstarke Vergrößerung die Kontraste verwaschen und daher die Messung wieder unsicher macht.

Tabelle XVI.

Sterndurchmesser-Messungen.
München 5. 12. 01. 10′ Refraktor-Öffnung 284 mm $\Gamma = 630$ Ok. VI. (Öffnung 1,6 mm 1 o. E. = 0″,038).

PD II Nr.	ζ^0	m	Durchm. beob. ″	Durchm. theor. ″
213	32,9	4,9	0,84	0″,886 (für 213–683)
211	30,0	7,8	87	
215	27,7	6,5	86	
671	51,8	5,9	88	
672	51,0	4,1	91	
683	50,1	7,5	96	
1028	67,3	7,5	97	
1030I	61,9	5,7	97	
1030II	61,0	5,7	95	

3. Doppelbilder.

a) Doppelsterne.

Von besonderem Interesse werden die Erscheinungen an der Bildbegrenzung bei der Annäherung eines zweiten Lichtpunktes an den ersten, ein Fall der für Doppelsternmessungen und gewisse Methoden der visuellen und photographischen Parallaxenbestimmung praktische Bedeutung hat.

Denkt man sich zunächst zwei gleich helle Lichtpunkte einander genähert, so werden sich ihre Beugungsbilder sehr bald teilweise überdecken. In den überdeckten Gebieten wird die Intensität, sofern beide Lichtpunkte inkohärent leuchten, was ja im allgemeinen der Fall ist, gleich der Summe der Intensitäten beider Beugungsbilder an jedem Ort, d. h. es werden die Isophoten in der Verbindungslinie der Zentren beider Beugungsbilder aus der ursprünglichen Kreisform gegeneinander herausgebogen und bei wachsender Annäherung mehr und mehr Eiform zeigen. Wenn das Auge die Bildgrenze längs einer Kurve konstanter Helligkeit sähe, müßten also nahe Doppelsterne tropfenförmig aufeinander zu verlängert erscheinen und die

Messung ihrer Distanz müßte eine geringere Entfernung ergeben als der Wirklichkeit entspricht, denn nach den gebräuchlichen Meßmethoden wird die Lage des Zentrums einer Lichtscheibe mit dem Mittel ihrer beiden den Durchmesser begrenzenden Bildränder identifiziert. Die Untersuchung der Kontrastfunktion liefert ein direkt entgegengesetztes Resultat:

Denkt man sich die beiden gleich hellen Sterne bis auf den Abstand $u = 4{,}0$ ihrer Zentren genähert (wobei sich die Kreise der ungestörten Nullinien bei $u = 1{,}96$ der Kontrastfunktion fast berühren würden), so erhält man die aus dem Zusammenwirken resultierende Kontrastfunktion in Fig. 9 durch die gezeich-

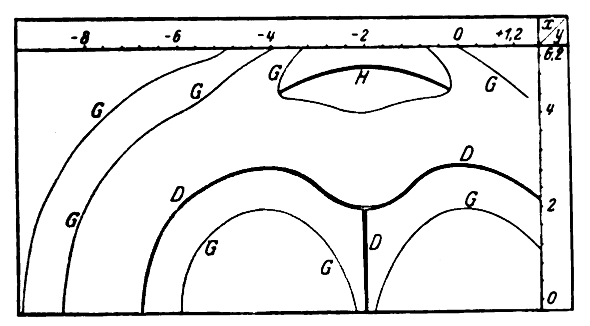


Fig. 9.
Kontrastverlauf bei einem Doppelstern aus gleichhellen Komponenten an der Grenze ihrer Trennbarkeit.

G: Kurven $\Delta i = 0$ um die Komponenten und die 1. Beugungsringe.
D: Kurven $\Delta i = \max$ (höchster Dunkelkontrast).
H: $\Delta i = \min$ (höchster Hellkontrast).

neten Kurven der Nullstellen, Minima und Maxima dargestellt, die im Außenteil mit den entsprechenden Kurven des Einzelsterns identisch sind. Nimmt man an, daß auch der erste Beugungsring des Einzelsterns sichtbar ist, so zeigt die ∼-förmig laufende Gratlinie der Kontrastfunktion die Linie größter Dunkelheit zwischen Beugungsscheibe, Beugungsring und zwischen beiden Zentralbildern an. Als gesehene Bildgrenzen müssen gemäß S. 21 die Nullinien *G* aufgefaßt werden. Es werden also auch bei dieser starken Annäherung beide Sternbilder noch durch eine schmale dunkle Furche von der Breite $u = 0{,}6$ in der Zentrallinie getrennt erscheinen. Die Faden-Messung (künstliche Feldbeleuchtung, Einstellung symmetrisch zum Kontrastmaximum), würde dann die Sternzentra bei $x = 4{,}4$ und $-0{,}4$, daher die Distanz zu 4,8, also um 0,8 o. E. zu groß ergeben. Der erste Beugungsring umschließt in fast elliptischer Form das Gebilde und zeigt in der Mittelsenkrechten der beiden Sterne zwei Lichtknoten, die sich von leichter Schattierung umgeben, von dem übrigen Ring abheben, deren einer in Fig. 9 beiderseits der Abszisse $x = 2$ erkennbar ist.

Obgleich man auch bei etwas weiterer Annäherung noch an der elliptischen Form des Mittelbildes das Vorhandensein eines Doppelsterns erraten kann, scheint doch der durch Fig. 9 dargestellte Moment gleichzeitig die Definition der Trennbarkeitsgrenze zweier gleich heller Lichtpunkte darzustellen, denn nur geringe Unterschreitung der Distanz $u = 4$ läßt das Mittelbild in eins zusammenfließen. Strehl (IV, 118, 8), der die Grenze der Trennbarkeit gleich heller Sterne dadurch definiert, daß die Helligkeit in der Mittellinie konstant wird, kommt auf die Distanz $u = 3{,}2$ o. E.

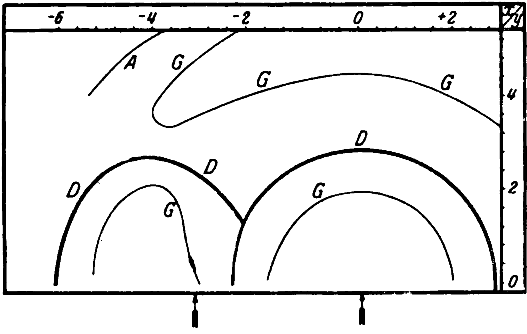


Fig. 10.
Kontrastverlauf bei einem engen Doppelstern mit dem Intensitätsverhältnis der Komponenten 1 : 10. (Bedeutung der Kurven wie in Fig. 9.) →: Orte der geom.-opt. Bildpunkte.

Der Ziffernunterschied ist selbstverständlich und gering, weil Strehl als Trennbarkeitsgrenze einen Moment herausgreift, in welchem der bereits zusammengeflossene Doppelstern noch eben als länglich erkannt werden kann, während hier die Trennbarkeitsgrenze den Moment bezeichnet, in welchem die bisher getrennten Sternbilder in der Mittellinie zusammenfließen.

Die Abplattung der Bilder und die Distanzfehler werden noch auffälliger, wenn man einen Doppelstern mit ungleich hellen Komponenten betrachtet. In Fig. 10 findet man den Verlauf der Kontrastfunktion durch ihre charakteristischen Linien dargestellt für ein Doppelsternpaar, dessen linke Komponente $\frac{1}{10}$ der Intensität der rechten hat, deren wahre Distanz $u = 3{,}2$ beträgt. Sie ist erhalten durch entsprechende Überdeckung und Addition zweier Stern-Kontrastziffernfelder, in deren eines gemäß den Bemerkungen von S. 7 die Kontrastwerte nur mit einem Zehntel ihres Normalbetrages aufgenommen waren. Die Annäherung ist soweit getrieben, wie es ohne Zusammenfließen der Bilder überhaupt möglich ist. Man erkennt, daß die schwache Kom-

ponente sich durch einen länglichen Lichtknoten auf dem ersten Beugungsring der hellen Komponente bemerkbar macht, aus dessen Lage sich die instrumentell meßbare Distanz beider Sterne zu

$$\frac{6{,}0 + 2{,}3}{2} - \frac{2{,}3 - 2{,}8}{2} = 4{,}4,$$

d. h. um 1,2 o. E. zu groß ergibt; und zwar trifft die fehlerhafte Messung hier fast ausschließlich die schwache Komponente. Es scheint nicht unwichtig, darauf hinzuweisen, daß der in Fig. 10 dargestellte Sonderfall in der Beobachtungsliteratur bekannt ist; Strehl (IV, 120) erwähnt, daß Klein in seiner „Durchmusterung des Himmels" von dem Fernrohr eines Grafen Hahn erzählt, das einen Doppelstern dadurch aufgelöst habe, daß die schwache Komponente als Verstärkung im Beugungsring der hellen hervortrat.

Allgemein ergibt sich also, daß von nahe aneinander stehenden Lichtpunkten der schwächere die stärkste Gestaltänderung zeigt (er scheint an den hellen hingedrückt) und daß das Distanzmessungsresultat gegenüber der Wirklichkeit das Bild der schwachen Komponente als von der hellen abgestoßen zeigt.

Sucht man in der Beobachtungsliteratur nach Bestätigungen für diese Ergebnisse, so wird man zunächst an die Ausmessung künstlicher Doppelsterne von O. Struve (XXI § 4) denken — allein jenes Material läßt sich leider für diese Frage nicht gut verwenden, weil diese Erscheinung durch die sehr ausgeprägten und mit der Distanz wachsenden persönlichen Fehler O. Struves völlig verdeckt wird. Aus demselben Grunde geben auch die von O. Struve (XXI § 10) durchgeführten Vergleiche mit den Distanzmessungen anderer Astronomen ein mutmaßlich unsicheres, wenigstens nicht ohne besondere Reduktionen brauchbares Material. Dagegen scheint die von Dembowski (XXI, 141) durchgeführte Vergleichung seiner eigenen Distanzmessungen an Doppelsternen mit denen von W. Struve (Σ) ein ausgezeichnetes Prüfobjekt, weil die Distanzmessungen Dembowskis und W. Struves jene systematischen Fehler nachweisbar nur in sehr geringem Grade aufweisen (XXII), daher auch wie folgende Tabelle zeigt, in Messung größerer Distanzen völlig übereinstimmen.

Die einzige größere Differenz für die Distanz 0'',76 besagt, daß Dembowski hier die Distanzen um 0'',127 größer gemessen hat als W. Struve. Struve beobachtete am großen Dorpater Refraktor von 12 Zoll Öffnung, während Dembowski die Beobachtungen mit einem Merzschen 7,4 zölligen Refraktor machte. Die Distanz 0'',76 entspricht am Dorpater Refraktor der Entfernung $u_D = 7{,}6$, am 7',4 Refraktor

Tabelle XVII.

Vergleich der Doppelsterndistanzen von W. Struve (Σ) und Dembowski (Δ).

Mittel-Dist. ''	$(\Sigma - \Delta)$ ''	Kontrastkorrektur ''	$(\Sigma - \Delta)'$ ''
0,76	— 0,127	+ 0,156	+ 0,029
1,58	+ 0,030	—	30
3,16	+ 12	—	12
6,32	+ 9	—	9
10,20	+ 19	—	19
14,14	+ 9	—	9
20,42	+ 4	—	4
28,29	+ 6	—	6

dagegen der Entfernung $u_M = 3{,}9$, d. h. am Merz-Refraktor gerade der durch Fig. 9 dargestellten Lage beider Komponenten, während beim Dorpater Refraktor die beiden zentralen Beugungsscheiben der Komponenten gerade eben getrennt sind, also keine größere Störung der Bildgestalt mehr zu erwarten ist. Aus der Kontrasttheorie muß demnach gefolgert werden, daß die Dembowskische Messung der Distanz um **0,8 o. E.**, d. h. um 0'',159 zu groß ausfällt. Bringt man diese Korrektur an die Differenz $\Sigma - \Delta$ an, so verwandelt sich der Betrag in + 0'',029, d. h. da die nächstfolgende Distanz 1'',58 auch für den Merz-Refraktor schon ungestört bleibt, daß eine überaschend gute Einfügung des ersten in die übrigen Werte erzielt worden ist, wie die dritte Spalte obiger Tabelle zeigt. Man entnimmt hieraus außer der Bestätigung der Kontrasttheorie einen weiteren Beweis für die erstaunliche Genauigkeit der Doppelsternmessungen Dembowkis an seinem verhältnismäßig kleinen Instrument (XXII, 224). Wenn man nach diesem Ergebnis nun die graphischen Darstellungen der persönlichen Fehler verschiedener Beobachter in den Distanzen überblickt, die Struve (XXI, Tafel 3 und 4) mitteilt, so wird augenscheinlich, daß der allen Kurven gemeinsame absteigende Ast bei sehr kleinen Distanzen auf dieselben Ursachen zurückgeht und durch entsprechende Reduktionen eliminiert werden kann. Es ist anzunehmen, daß durch diese Reduktionen eine merklich bessere Darstellung von Doppelsternbahnen in der Nähe des scheinbaren Periastron zu erzielen ist.

Wenn die Schwärzung photographischer Platten streng der Intensität und der Expositionszeit proportional wäre, so müßten sich beim Ausmessen photographischer Sternbilder ganz ähnliche Erscheinungen herausstellen wie bei den visuellen Beobachtungen. Da jene Proportionalität indessen nur innerhalb beschränkter Grenzen besteht, bedarf die Bildgestalt des pho-

tographischen Lichtpunktes besonderer Untersuchung. Denkt man sich die Schwärzung der photographischen Platte für eine bestimmte Intensität als Funktion der Expositionszeit dargestellt, so erhält man bekanntlich eine eigenartig oszillierende Kurve, von der für gewöhnliche Zwecke und besonders für photometrische Messungen (XXXIII) nur der mittlere ziemlich geradlinig verlaufende Teil des ersten Anstiegs benutzt wird, während für photographische Himmelsaufnahmen mit ihren an Intensität stark variierenden Objekten auch die Wirkungen des ferneren Verlaufs in Erscheinung treten (XXIV, 211). Die Schwärzung im Bilde eines hellen und bei langer Exposition bedeutend überexponierten Sterns ist infolge dieser verwickelten Verhältnisse quantitativ bisher überhaupt nicht darstellbar, selbst ein qualitativer Überblick bietet manche Schwierigkeiten, wie die Darstellungen Scheiners (XXIV) zeigen. Man geht dafür am besten von der mittleren Intensitätsverteilung aus, welche während der Aufnahme über der Bildstelle ruht. Der Hauptteil derselben besteht in der mittleren Intensitätsverteilung des infolge der unvermeidlichen Luftunruhe ständig hin und her zitternden Beugungsbildes — er hat also ganz ähnliche Gestalt wie die Intensitätsverteilung einer kleinen Lichtscheibe. Daneben kommt jene schwache und für visuelle Beobachtungen unmerkliche Intensitätsüberlagerung in Betracht, welche das durch kleine optische Fehler und Unreinlichkeiten des Objektivs zerstreute Licht hervorruft. Sie verändert den Verlauf der Intensität im Mittelbilde unmerkbar, schafft aber in größeren radialen Entfernungen einen merklich langsameren asymptotischen Lichtabfall als er ohnedies bestehen würde; sie ist es daher hauptsächlich, die den der Expositionszeit folgenden Zuwachs der photographischen Sterndurchmesser verursacht (XXIV, 225). Wird nun die Exposition der Platte unter dieser mittleren Intensitätsverteilung solange fortgesetzt bis etwa diese schwachen Intensitäten die maximale Schwärzung hervorrufen, so wird die stärkere Intensität des Mittelbildes fast dieselbe Schwärzung verursachen, vielleicht im Zentrum schon die ersten Spuren der Wiederaufhellung (Solarisation) zeigen. Das überexponierte Sternbild selbst wird also auf der Platte bestehen aus einer nahezu gleichmäßig tiefschwarzen Mittelscheibe, die entsprechend dem Verlauf des zerstreuten Lichtes nach außen ziemlich langsam zur Helligkeit des Plattengrundes ansteigt; das Schwärzungsbild würde also der Umkehr eines radial stark gedehnten Beugungsbildes des Lichtpunktes ähnlich werden, während ein entsprechend schwächerer gleichzeitig aufgenommener Stern ein Schwärzungsbild hervorruft, das ziemlich genau der Umkehrung der mittleren Intensitätskurve entspricht (vgl. dazu auch XXIV, 213 Fig. 47).

Um die qualitativen Folgerungen aus dem Kontrastgesetz zu ermitteln, sei die photographische Aufnahme eines Doppelsterns, mit derartig ungleichen Komponenten angenommen daß der Schwärzungsverlauf im Bilde der schwachen Komponente gerade der Lichtverteilung im Beugungsbild proportional ist, während der der hellen Komponente dem in radialer Ausdehnung vierfach und an Intensität 1,6fach-vergrößerten Beugungsbild des Lichtpunktes entsprechen mag. Dann reduziert sich der Wert der Kontrastfunktion an jeder Stelle des Bildes der hellen Komponente auf den zehnten Teil ihres Betrages an der entsprechenden Stelle des

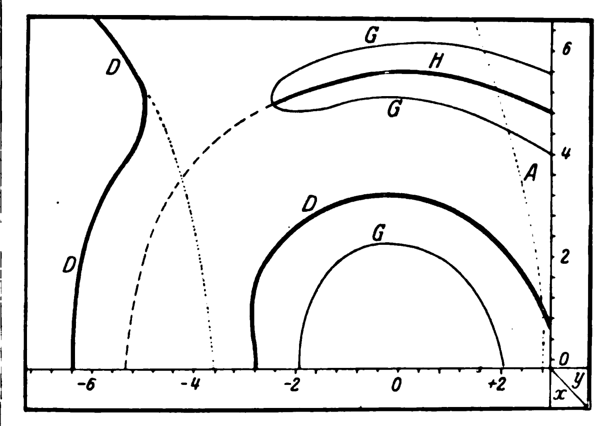


Fig. 11.

Kontrastverlauf im Photogramm eines engen Doppelsterns mit ungleich hellen Komponenten. (Bedeutung der Kurven wie in Fig. 9.)

ungedehnten Bildes, so daß man ihren Verlauf leicht festlegen kann. Nähert man nun die Zentra beider Bilder einander bis auf die Entfernung $u = 15{,}2$ o. E. und ermittelt den Verlauf der resultierenden Kontrastfunktion, so erhält man ein Ergebnis, welches Fig. 11 für die nähere Umgebung der schwachen Komponente darstellt. Die ausgezogenen und gestrichelten Kurven folgen dem Lauf der Kontrastlinien, während die punktierten Kurven den in den dargestellten Bereich fallenden ungestörten Verlauf der Kontrastlinien der hellen Komponente angeben. Man erkennt, daß ihre Form an der schwachen Komponente nur unmerklich verändert ist, während im Bild der hellen Komponente die ganz rechts verlaufende Nullinie (A) völlig unterdrückt wird und die Linie des dem maximalen Dunkelkontrast der Lichtverteilung hier im Schwärzungsbild entsprechenden maximalen Hellkontrastes (DD) eine kräftige Einbuchtung gegenüber dem ungestörten Verlauf erleidet, die auf der Zentrallinie einen

Betrag von 3,2 o. E. erreicht. Um die Hälfte dieses Betrages also um 1,6 o. E. würde bei der gebräuchlichen Mikrometerausmessung die Distanz beider Sterne zu groß gemessen werden, und zwar würde umgekehrt wie bei visueller Beobachtung die helle Komponente um diesen Betrag von der schwachen abgestoßen erscheinen. Es ist unschwer zu ersehen, daß bei noch weiterer Annäherung der Bilder diese Abstoßung noch anwachsen und schließlich fast den Betrag des Radius der schwächeren Komponente erreichen muß.

Die Bestätigung für diese dem Verhalten visueller Doppelsterne direkt entgegengesetzten Folgerungen findet man in der Entdeckung und Untersuchung der „Einwirkung zweier Bilder aufeinander bei astrophotographischen Aufnahmen" durch Kostinsky (XXV). Leider läßt sich — abgesehen von einer nach dem Beispiel Konstinskys ermittelten empirischen Korrektionskurve — keine theoretisch befriedigende Reduktionsmethode zur Ausmerzung dieses Fehlers angeben wie bei visuellen Messungen, weil, wie gesagt, die Schwärzungsverteilung in länger exponierten Sternbildern unbekannt ist, aber eine ebenso einfache wie sichere Methode läßt den Fehler vollkommen ausschließen. Man braucht nämlich nur, wie schon 1911 empfohlen (XXVI), während der Aufnahme zwei rechtwinklig gekreuzte gerade Drähte als „Beugungsgitter" vor dem Fernrohrobjektiv anzubringen, um jeden helleren Stern auf der Platte mit einem durch seinen optischen Mittelpunkt gehenden rechtwinkligen Kreuz zu versehen, auf dessen zarte Striche sich ebenso genau einstellen läßt wie auf das schärfste Sternbild.

Dem Charakter nach sind hier auch die Unterschiede des aus Sternbedeckungen am hellen und dunklen Mondrand berechneten Monddurchmessers zu behandeln. Der starke Dunkelkontrast am hellen Mondrand kann nur geringfügig durch den Hellkontrast des sich nähernden verhältnismäßig lichtschwachen Sternscheibchens geschwächt werden, d. h. das ganze Sternscheibchen wird durch ihn ausgelöscht, sobald es in seinen Bereich gerät. Die Ableitung des Monddurchmessers aus Bedeckungen am hellen Mondrand muß also den geometrischen Durchmesser um die doppelte Breite des Außenkontrastes (7,2 o. E.) vermehren, während Bedeckungen am dunklen Rand genau den wahren Monddurchmesser ergeben müssen. Wenn Airy nach Struve für die Differenz etwa 2″ angibt, so würde daraus auf eine durchschnittliche Objektivöffnung von ca. 140 mm zu schließen sein. Küstner (XXXIII) gibt als Differenz 1″,7 an, was einer Fernrohröffnung von ca. 160 mm entspricht, also einem sehr plausiblen Mittelwert, da in seinem Beobachtungsmaterial die mittlere Instrumentalöffnung auf ca 6 Zoll zu veranschlagen ist.

b) Doppelkeile.

Läßt man zwei helle Sektoren, die mit den Spitzen einander zugekehrt sind, sich einander nähern, so bestehen zwischen den Spitzen nahezu dieselben Bedingungen, welche bei Planeten-

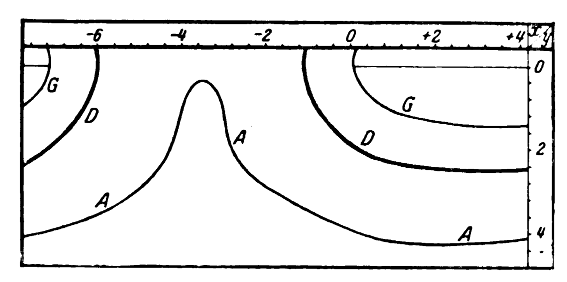


Fig. 12.
Kontrastverlauf zwischen den Spitzen zweier auf 7,2 o. E. genäherten Lichtkeile von 1⁰ Öffnung.

vorübergängen vor der Sonnenscheibe kurz vor der ersten und kurz nach der zweiten inneren Berührung in der Nähe des Berührungspunktes statthaben. Man kann also die Einzelheiten des berühmten „schwarzen Tropfens" auf diese Weise zahlenmäßig verfolgen. In den Fig. 12—15 sind durch Superposition der Kontrastwerte jene Momente dargestellt, in welchen die Spitzen zweier

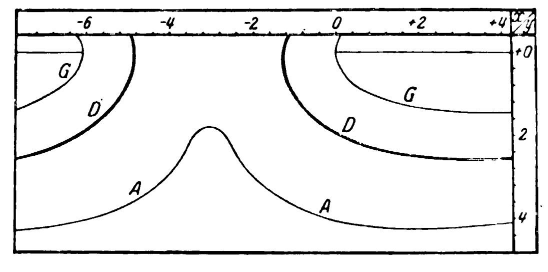


Fig. 13.
Kontrastverlauf zwischen den beiden 1⁰ Keilen bei Annäherung auf 6 o. E.

gleich heller Sektoren von 1 Grad Öffnung einander genähert sind auf Entfernungen von 7,2-6,4 und 0 o. E. Schon bei einem Abstande von 7,2 o. E. hat die erste Phase der Berührung begonnen, da die äußeren Dunkelkontraste in eine beide Bilder umfassende Umrahmung zusammenfließen. Fig. 14 stellt den Moment unmittelbar nach Berührung der Kontrastminima dar; es ergibt sich eine beiden Bildern gemeinsame dunkle Kontrastfurche, der schwarze Tropfen, zwischen den Spitzen. Die weitere Annäherung bringt außer einem unwesentlichen Zurückweichen der Nullgrenze von der Spitze nichts Neues, bis

endlich (Fig. 15) im Moment der geometrisch-optischen Spitzenberührung der Dunkelkontrast zwischen den Bildern verschwindet, d. h. der schwarze Tropfen zerreißt.

Sind die beiden einander genäherten Sektorspitzen von ungleicher Intensität, so treten je nach dem Intensitätsverhältnis wieder mehr oder

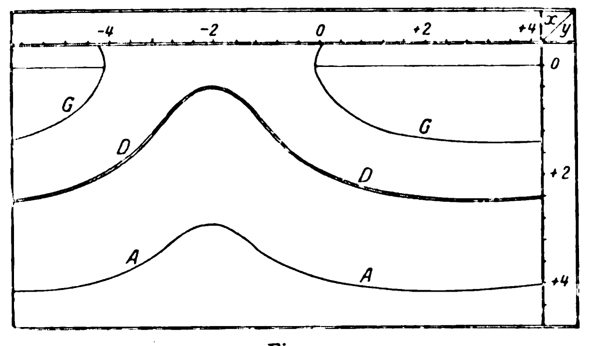


Fig. 14.
Kontrastverlauf zwischen den Lichtkeilen der Fig. 12 u. 13 bei Annäherung auf 4 o. E.

weniger starke Verlagerungen der Begrenzungskontraste der lichtschwächeren Spitze auf. In den Fig. 16 und 17 sind ganz ähnliche tatsächliche Momente dargestellt wie in den Fig 14 und 15, nur mit dem Unterschied, daß der rechts liegenden Sektorspitze nur ein Zehntel der Intensität der linken zuerteilt wurde. Besonders

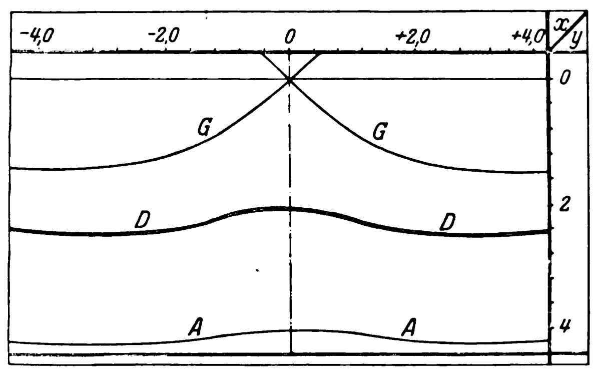


Fig. 15.
Kontrastverlauf zwischen den einander mit den Spitzen berührenden Lichtkeilen der Fig. 12—14.

instruktiv ist der Moment der geometrisch-optischen Berührung (Fig. 17), der die Nullinie des rechten Sektors um 2 o. E. zurückgedrängt zeigt, also noch weit davon entfernt ist, als visuelle Berührung aufgefaßt zu werden. Diese würde erst beobachtet werden können, wenn die Spitzen sich mindestens bereits um 1,6 o. E. überdecken. Während visuell also wieder die lichtschwächere Komponente abgestoßen erscheint, läßt sich in ähnlicher Weise wie oben zeigen, daß bei photographischer Aufnahme dagegen die lichtstärkere Komponente abgestoßen sein wird.

Will man nun die Darstellung der gleich hellen Sektoren zum Vergleich für die Berührungsmomente bei einem Planetendurchgang vor der Sonnenscheibe heranziehen, so ergibt sich folgendes:

Verfolgt man die zur zweiten inneren Berührung schreitende dunkle Planetenscheibe in

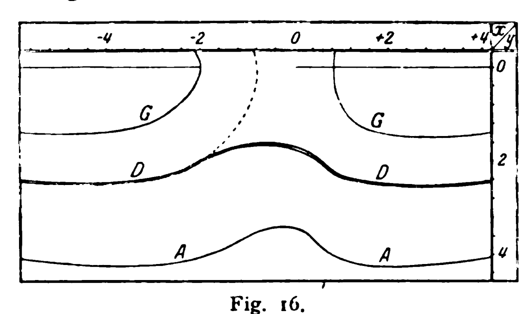


Fig. 16.
Kontrastverlauf zwischen zwei 1° Lichtkeilen vom Intensitätsverhältnis 1 : 10 bei Annäherung der Spitzen auf 2 o. E.

ihrer Annäherung an den Sonnenrand, so wird bald die schmalste Stelle des Lichtbandes zwischen beiden Rändern die Breite 4,7 o. E. erreichen. Von diesem Moment an hört, nach S. 11 hier beginnend, das Lichtband auf als „Streifen" zu erscheinen; es nimmt den Charakter eines „Linienelements" an (ein Hellkontrast-Maximum über der Bildmitte), das nun nach beiden Seiten an Länge langsam wächst, während seine subjektive Bildbreite (vgl. Kurve *G* in Fig. 8 unterhalb der Ordinate 4,7 o. E.) konstant bleibt und

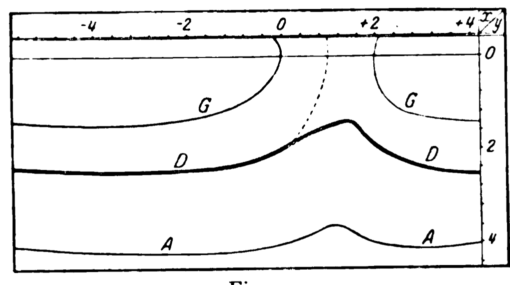


Fig. 17.
Kontrastverlauf zwischen den Keilspitzen der Fig. 16 bei geom.-opt. Spitzenberührung.

das tatsächliche Abnehmen seiner Intensität durch vermehrte Kontrastwirkung zunächst fast ganz ausgeglichen wird. So kann der wirkliche Beginn der Randerscheinungen nicht gut an dem Helligkeitsabfall beobachtet werden, wohl aber scheint, daß der Entstehungsmoment des Lichtlinienelementes als erste Phase ziemlich gut angebbar wäre, wenn ein Beobachter darauf geschult wird.

Bei Fortsetzung der Annäherung des Planetenrandes an den Sonnenrand wird natürlich auch

eine „Trübung" der Lichtlinie subjektiv merkbar werden, aber es gibt keine Möglichkeit, den „Beginn der Trübung" an einen bestimmten Zustand der Annäherung zu knüpfen.

Je mehr aber nun die eigentliche geometrische Randberührung herannaht, um so mehr erhält die Nähe der Berührungsstelle die Form zweier mit der Spitze zusammenstoßender Lichtkeile. Man wird daher die Erscheinung gut erfassen, wenn man auch hier wieder die in Fig. 8 eingetragenen Modifikationen der Kontraststreifen ins Auge faßt. Denkt man sich die Randentfernung auf 1,5 o. E. herabgesunken, so herrscht an der Berührungsstelle ein relativer Maximalkontrast — weitere Randnäherung zertrennt dies Maximum in zwei, deren jedes zu einer Stelle, an der die beiden Lichtkeile momentan 1,5 o. E. breit sind, seitlich abwandert. Hierbei wird die Trübung zwischen ihnen an der Berührungsstelle fast plötzlich auffallend kräftig, so daß hier ein zweites gutes Beobachtungsmoment erscheint.

Im Augenblick der wirklichen geometrischen Randberührung berühren sich die geometrischen Keilspitzen. Die Intensität an der Berührungsstelle ist sehr gering, die hier zusammenfallenden Nullkontrastkurven G legen zwischen die beiden, bei den Keilbreiten 1,5 o. E. liegenden Hellkontrast-Maxima (o in Fig. 8), welche subjektiv jetzt fast plötzlich als die eigentlichen Keilspitzen erscheinen, scheinbar ebenso plötzlich eine auffällige schwarze Brücke (Fig. 15). Dieser Moment als Beginn der „Tropfenbildung" gibt daher eine dritte Beobachtungsnotiz für die Erscheinung. Der weitere Verlauf bietet für das Vorliegende kein Interesse.

Struve zitiert nach Auwers Modellbeobachtungen obiger Erscheinung mit einem Fernrohr von 117 mm Öffnung bei 111 facher Vergrößerung. Da die Fernrohr-Austrittspupille hierbei $p = \frac{117}{171} = 0{,}68$ mm betrug, so darf nach S. 21 noch keine sonderlich genaue Erfassung der Erscheinung erwartet werden. Es fand sich:

a) schwache Trübung
Randabstand — 0",77 = — 2,34 o. E.
b) sehr merkliche Trübung
Randabstand — 0",52 = — 1,58 o. E.
c) sehr starke Trübung
Randabstand — 0",17 = — 0,52 o. E.
d) Tropfenbildung
Randabstand — 0",06 = — 0,18 o. E.
e) Tropfen sehr dick
Randabstand — 0",07 = + 0,31 o. E.

Im Vergleich dazu folgt aus der Kontrastbetrachtung:

o) Entstehung des „Linienelements"
Randabstand — 4,7 o. E.
b) sehr merkliche Trübung
Randabstand — 1,5 o. E.
d) Tropfenbildung Randabstand 0,0 o. E.

Der Moment o) ist nicht beobachtet worden. Die Momente a), c), e) können nicht identifiziert werden; dagegen passen die Momente b) und d) sehr gut zu den betreffenden Kontrastmomenten. Da für das benutzte Instrument eine optische Einheit = 0",330 ist, so hätte man allein durch Kontrastreduktion der Momente b) und d) die Berührung nur noch um $\frac{0{,}08 + 0{,}18}{2}$ o. E. = 0",043 zu früh registriert, also immerhin ein sehr brauchbares Resultat erhalten. Dabei ist nach der Betrachtung über hinreichende Vergrößerung die Vermutung zulässig, daß eine stärkere Okularvergrößerung von $\Gamma \geqq 200$ die Genauigkeit noch hätte etwas erhöhen können.

4. Messung mit Doppelbildmikrometer.

Denkt man bei Doppelbildmikrometern zunächst an Messung kreisförmiger Bilder, so heben sich bei geometrischer Berührung, wie Fig. 15 zeigt, die Grenzkontraste längs einer Geraden senkrecht zu den sich berührenden Bildlinien auf, denn der Zwischenraum zwischen beiden Bildern beiderseits dieser Linie stellt sich als zwei dunkle (bei weißen Bildern) oder helle (bei dunklen Bildern) Keile dar, die mit ihren Spitzen zusammenstoßen. Man erkennt sofort, daß die Bildgrenze (die Kurve G) sich von dem Berührungspunkt, wie oben erwähnt, zunächst längs eines kurzen Stücks senkrecht zu den geometrischen Konturen bewegt und sich dann in zwei Züge gabelt, die in einem Abstand von $2 \cdot 1{,}4 = 2.8$ o. E. voneinander verlaufend, bei einer Keilbreite von 5 o. E. in die geometrischen Grenzen der beiden Bilder übergehen d. h. also: im Moment der geometrisch-optischen Bildberührung scheinen dem Beobachter die Bilder noch um 2,8 o. E. auseinanderzustehen, wiewohl er schon eine deutliche Trübung (bei dunklen Bildern) oder eine deutliche Aufhellung (bei hellen Bildern), den berüchtigten „Tropfen", an der trennenden Brücke bemerkt.

Führt der Beobachter die Bilder nach dem eben erreichten Zustand seiner Meinung nach noch mehr zusammen, so überdeckt er sie unwissentlich und erhält, sofern man wieder an kreisförmige Objekte denkt, einen lanzettförmigen Überdeckungsraum, der sich dunkel bei dunklen Bildern, hell bei hellen Bildern zwischen die auseinanderweichenden Keilspitzen lagert und über seiner Mitte (s. S. 17) einen dunklen, bzw. hellen Kontraststreifen hat, der bei einer Breite des lanzettförmigen Flächenstücks von 1,5 o. E. (s. den kleinen Kreis auf der Ordinatenachse



von Fig. 8) an der Berührungsstelle besonders deutlich wird und daher gut eine gemeinsame Bildgrenze beider Einzelbilder vortäuschen kann.

Noch weiteres Überdecken führt bei einer Breite des lanzettförmigen Flächenstücks von 4,7 o. E. (S. 17) zur Spaltung des eben erwähnten Kontraststreifens und wird damit für den Beobachter subjektiv den Eindruck erwecken, als fange jetzt gerade die Überdeckung an, als sei also gerade jetzt eben die geometrische Bildberührung eingetreten.

Es ist a priori nicht zu sagen, wie sich ein Beobachter den hier vorliegenden Komplikationen gegenüber verhält — er kann z. B., die Breite der „trüben Brücke" schätzend, um dieses Stück die Bilder überdecken, oder er kann die Bilder einander nähern, bis er im Berührungspunkt die vermeintlich gemeinsame Grenze bemerkt, oder er kann subjektiv den Beginn der Überdeckung erwarten. Im zweiten Fall wird er die Bilddurchmesser um 1,5 o. E., im ersten um 2,8 o. E. und im dritten um 4,7 o. E. zu klein erhalten.

Hartwig (XXXI) hat Heliometermessungen des Venusdurchmessers von Main, Kaiser und sich selbst unter Einführung eines unbekannten konstanten Meßfehlers für jedes Instrument ausgeglichen und fand für den Fehler folgende Werte:

Oxforder Heliometer (Main)	$-1'',18$	$-4,1$ o. E.
Straßburger Heliometer (Hartwig)	$-1'',23$	$-1,8$ „ „
Straßburger Heliometer (Hartwig)	$-0'',93$	$-3,1$ „ „
Airys Doppelbildmikrometer (Kaiser)	$-0'',77$	$-2,7$ „ „

Nimmt man jeweils als beugende Öffnung ein Ersatzobjektiv von der halben Öffnungsfläche der Heliometer (vgl. dazu das nächste Beispiel) an, so entsprechen die Fehler den in der dritten Spalte angeführten Werten in o. E., d. h. die Durchmesser sind tatsächlich um solche Beträge und in denselben Stufen zu klein erhalten, wie sie oben für diesen Fall angegeben wurden. Das Hartwigsche Ergebnis für den Venusdurchmesser $2r = 17'',666$ darf man infolge dieser Ausgleichung als den wegen Kontrastfehlers reduzierten wahren Wert ansprechen.

Es scheint nun, daß geübte Beobachter immer mehr zur Einstellung auf den Moment der subjektiv beginnenden Überdeckung, also Durchmesservergrößerung um 4,7 o. E. hinneigen, denn Auwers (III S. 85 u. XXXV) leitete aus den Heliometerbeobachtungen des Venusdurchgangs von 1874 den Durchmesserwert $16'',820$ ab.

Für Abschätzung der Beugungswirkung der Objektivhälften auf jedes Einzelbild ersetzen wir jede durch eine kreisförmige Objektivöffnung von halber Fläche des ganzen Heliometerobjektivs. Da die benutzten Heliometer eine volle Öffnung von 76 mm besaßen, so wäre die Öffnung des jede Hälfte vertretenden „Ersatzobjektivs" zu $38 \cdot \sqrt{2} = 53{,}74$ mm anzunehmen. Durchschnittlich wurde bei 150facher Okularvergrößerung beobachtet; die Ersatz-Austrittspupille für jede Objektivhälfte maß daher $p = \frac{53{,}74}{150} = 0{,}358$ mm, war also hinreichend klein. Aus der zur „Bildberührung" beider Einzelbilder vorgenommenen Überdeckung um 4,7 o. E. würde nach Gl. (6a) (für das Ersatzobjektiv ist $\Gamma_0 = \frac{53{,}74}{5} = 10{,}75$) ein Mikrometerbetrag von $\beta'' = 7'',7 \cdot \frac{4{,}7}{10{,}75} = 3'',367$ folgen. Hiervon mußte bei der Reduktion auf Entfernungseinheit (Erde — Venus in unterer Konjunktion $= 0{,}28$) der Betrag: $2\,dr = 0{,}28 \cdot 3'',367 = 0'',943$ ins Resultat eingehen. Der wahre Durchmesser beträgt daher $16'',820 + 0'',943 = 17'',763$, während der Hartwigsche Wert $17''666$ und der Struvesche $17'',698$ war. Die Mißstimmigkeit wird also hiermit beseitigt.

Ein interessantes hierher gehöriges Beispiel besonderer Art ist das folgende: Nach Auwers (XXXV S. 724) wurde bei Gelegenheit des Venusdurchgangs von 1874 in Bahia blanca und Punta Arenas eine Durchmessermessung an der schmalen Venussichel eben außerhalb der Sonnenscheibe ausgeführt; es ergab sich der Wert $17'',31$. Zweifelsohne erwartet der Beobachter in solchem Fall die Berührung der sehr feinen Sichelspitzen daran erkennen zu können, daß die nebeneinander gelegten Bilder eine gemeinsame Spitze zeigen. Das ist nach Fig. 8 aber nur dann möglich, wenn die Spitzen so überdeckt werden, daß die Hellkontrast-Maxima bei der Sichelbreite 1,5 o. E. zusammenfallen, woraus eine Durchmesserverringerung von gleichem Betrag resultiert. Da die Instrumente dieselben waren wie oben und sich auch die Entfernung Erde — Venus nicht geändert hatte, mußte ins Resultat eingehen der Betrag: $2\,dr = \frac{7'',7 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}28}{10{,}75} = 0'',301$. Der wahre Durchmesserwert beträgt daher $17'',31 + 0'',301 = 17'',61$, d. h., es wird wieder nahezu der Hartwigsche Wert erreicht. Wenn man bedenkt, welche Meßschwierigkeiten so nahe der Sonnenscheibe vorliegen, so muß dies Ergebnis ganz besonders befriedigen.

IV. Schluß.

Die Untersuchung hat unter Voraussetzung hinreichender Vergrößerung die allgemeine Regel erwiesen:

An alleinstehenden und kombinierten Bildern sieht das Auge eine gut definierte Grenze dort, wo eine zwischen beiden Randkontrasten liegende kontrastfreie Zone ($\Delta i = 0$) an den Dunkelkontraststreifen angrenzt.

Die Kontrastlage an kombinierten Bildern erhält man mit genügender Annäherung durch einfache Superposition der erhaltenen Kontrastlagen der Einzelbilder. Die relative Stärke der Kontrastextreme ist der relativen Stärke der den Kontrast verursachenden Bildintensität proportional — bei sehr schmalen Bildern sind evtl. noch die Sonderbemerkungen über relative Kontraststärke S. 17 u. f. zu beachten.

Damit ist man einerseits in der Definition der physiologischen Bildgrenze der mühseligen Untersuchung des Intensitätsverlaufs im einzelnen enthoben, andererseits gewinnt man mit einem Schlage einen charakterisierenden und für numerische Auswertung hinreichenden Einblick in die bei verschiedenen Meßmethoden auftretenden Fehler.

Wenn man, um schematische Verhältnisse zu schaffen, bei irgendeiner Meßmethode unterscheidet: an der zu messenden Fläche die Intensitäten weiß oder schwarz, bei dem zur Messung dienenden Meßbild (Faden, Doppelbild oder dgl.) die Intensitäten weiß oder schwarz, und für den Untergrund eine zwischen beiden stehende Intensität als grau bezeichnet, so sind folgende 8 Fälle denkbar:

Intensität des Meßbildes	Meßbild wird bewegt auf	Meßbild wird bewegt in Richtung gegen Rand von
a) weiß	grauem Grund	weißer Fläche
b) schwarz	grauem Grund	schwarzer Fläche
c) schwarz	weißer Fläche	grauem Grund
d) weiß	schwarzer Fläche	grauem Grund
e) schwarz	grauem Grund	weißer Fläche
f) weiß	grauem Grund	schwarzer Fläche
g) weiß	weißer Fläche	grauem Grund
h) schwarz	schwarzer Fläche	grauem Grund

Die Fälle a), b), e), f) würde man in üblicher Bezeichnungsweise als Messung durch Außenberührung, die Fälle c), d), g), h) als Messung durch Innenberührung zusammenfassen. Die Fälle e), f), g), h) ergeben an oder nahe der Berührungsstelle eine einfache, beiden Bildern gemeinsame Grenzkurve $\Delta i = 0$, die Fälle a), b), c), d) geben nahe dem Berührungsmoment eine Verzweigung der Grenzkurve $\Delta i = 0$, die das äußere Zeichen von verwickelten Phänomenen ist, die man in einem typischen Fall als „Tropfenbildung" bezeichnet.

In der Charakterisierung der Lage der Bildgrenze in verschiedenen Fällen beginnen wir mit der gesehenen Bildgrenze am gleichförmig hellen oder dunklen Einzelbild. Sie ist nach der oben angegebenen Regel durch die Stelle G in Fig. 8 gegeben, fällt also bei Bildern, deren randsenkrechter Durchmesser größer ist als 5 o. E., mit der geometrisch-optischen Bildgrenze zusammen; bei schmäleren Bildern rückt sie mehr und mehr bis zum Betrage 1,4 o. E. vom geometrischen Bildrand nach außen. Sehr schmale Bilder erscheinen also in ihrem Durchmesser um den doppelten Betrag dieser Verschiebung verbreitert. Solche Verbreiterung an hellen Bildern wird als positive, an dunklen Bildern als negative Irradiation bezeichnet.

Die gemessene Bildgrenze ist im allgemeinen von der am Einzelbild gesehenen Grenze verschieden.

Denkt man sich in den Fällen e) und f) der Meßmöglichkeiten der leichteren Übersicht wegen das zu messende und das Meßbild von größerem Durchmesser als 5 o. E., so hat das helle Bild nach Fig. 8 außen einen „Dunkelgraben", das dunkle Bild außen einen „Hellwall" von derselben Höhe wie die Grabentiefe, weil die verursachenden relativen Intensitäten nahe der Berührung gleich sind. (Für künstliche Feldbeleuchtung gelten die besonderen Überlegungen von S. 20 und 24). Kurz vor der geometrischen Randberührung, wenn die beiden Bilder den Abstand der Stellen G und A der Fig. 8 haben, heben sich hier beide Außenkontraste zu einer Strecke $\Delta i = 0$ auf. Längs dieser kontrastfreien Strecke von 3,6 o. E. Länge wird jetzt die tatsächliche Intensität i empfunden, wo vorher Dunkelkontrast herrschte; m. a. W., der Rand des hellen Bildes scheint an der Berührungsstelle um den Betrag 3,6 o. E. gegen den Rand des schwarzen Bildes hingerückt. In den beiden genannten Fällen wird also an hellen und dunklen Bildern der Durchmesser um $2 \cdot 3{,}6$ o. E. zu groß gemessen.

In den Fällen g) und h) stellt das Meßbild — soweit es sich innerhalb der zu messenden Bildfläche befindet — einen nicht oder kaum mehr unterscheidbaren Teil dieser selbst dar, soweit es außerhalb ist, zeigt es an seinem Außenrand dieselben Dunkel- bzw. Hellkontraste wie das zu messende Bild — im Moment der Innenberührung haben Meßbild und zu messendes Bild an der Berührungsstelle eine Stelle ihres Außenkontrastes gemeinsam; es findet also eine geometrische Berührung ihrer unveränderten Grenzen G nach Fig. 8 statt; d. h. bei Bildbreiten über 5 o. E. ergeben diese beiden Fälle die wahren geometrischen Bilddurchmesser. Abgesehen ist hier natürlich von der rein tech-

nischen Frage, ob man bei dieser Methode das zu messende Bild genügend ruhig im Gesichtsfeld erhalten kann.

In den Fällen a) und b) heben sich bei geometrischer Berührung die Grenzkontraste längs einer Geraden senkrecht zu den sich berührenden Bildlinien auf. Der Zwischenraum zwischen beiden Bildern beiderseits dieser Linie — wenn man sich die zu messende Fläche etwa von Kreisform denkt — stellt sich als zwei dunkle (bei weißen Bildern) oder helle (bei dunklen Bildern) Keile dar, die mit ihren Spitzen zusammenstoßen. Die Untersuchung des Kontrastverlaufes führt auf die komplizierten Begleiterscheinungen des berüchtigten „schwarzen (oder hellen) Tropfens" und charakterisiert diese Meßarten als mit unberechenbaren subjektiven Zufälligkeiten behaftet. Doppelbildmikrometermessungen können daher für Präzisionsmessung nicht empfohlen werden.

Im ganzen darf somit der Überzeugung Ausdruck gegeben werden, daß die Kontrasttheorie ein wesentliches Hindernis gegen Erhöhung der Genauigkeit von Präzisionsmessungen beseitigt.

Quellenverzeichnis.

I. E. Hering, Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn. Berlin 1920.

II. F. B. Hofmann, Die Lehre vom Raumsinn des Auges. Berlin 1920.

III. W. Struve, Über den Einfluß der Diffraktion an Fernrohren auf Lichtscheiben. St. Petersburg 1882.

IV. K. Strehl, Theorie des Fernrohrs. Leipzig 1894.

V. E. Mach, Analyse der Empfindungen. 2. Aufl. Jena 1900.

VI. H. v. Seeliger, Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. München, K. B. Akad. d. W. 1896.

VII. E. Mach, Über die Wirkung der räumlichen Verteilung des Lichtreizes auf die Netzhaut. a) Sitzgsber. d. Akad. d. W. Wien 1865, Bd. 52, II. Abt., S. 303 u. f.; b) 1866, Bd. 54, II. Abt., S. 131 u. f.; c) 1866, Bd. 54, II. Abt., S. 400 u. f.; 1868, Bd. 57, II. Abt., S. 11 u. f.

VIII. A. Kühl, Über die Leistungsgrenzen und Empfindungsstärke unseres Sehorgans bei Abbildung von Fixsternen und Planeten mit und ohne Fernrohr. Diss. München 1909.

IX. A. Kühl, Zur Bedeutung des Mach-Seeligerschen Kriteriums für Licht- und Schattengrenzen. Sirius 1919, Heft 9 u. 10.

X. Kühl, Physiologisch-optische Bildbegrenzung. Zeitschr. f. ophthalmolog. Optik 1920, Heft 5.

XI. Helmholtz, Handbuch der physiol. Optik. 3. Aufl. 2. Bd. Hamburg und Leipzig 1911.

XII. A. Kühl, Eine Erweiterung des Riccoschen Satzes. Zeitschr. f. Biologie Bd. 60, S. 481 u. f.

XIII. A. Kühl, Das Fernrohr und die scheinbare Helligkeit der Sterne. Sirius 1918, Heft 6 b, 9.

XIV. A. Pütter, Organologie des Auges. 3. Aufl. Leipzig 1912.

XV. Bloom u. Garten, Vergleichende Untersuchung der Sehschärfe des hell und dunkel adaptierten Auges. Archiv f. d. ges. Physiol., Bd. 72, S. 385.

XVI. K. Strehl, Die Berechnung der Beugungsbilder. Programm d. Gymnas. Erlangen 1898.

XVII. Schwerdt, Die Beugungserscheinungen aus den Fundamenten der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt. Mannheim 1836, Tab. III.

XVIII. H. Nagaoka, Diffraction Phenomena in the Foval Plane of a Telescope with Circular Aperture due to a Finite Source of Light. Tokyo Journ. Sc. Coll. Vol. IX, S. 321.

XIX. K. Strehl, Beugungsbilder und deren Messung. Zeitschr. f. Instr.-Kunde 1896, S. 257.

XX. K. Exner u. W. Villiger, Über das Newtonsche Phänomen der Szintillation. Sitzgsber. d. Wiener Akad. 1902, S. 1264 u. 1904, S. 1019.

XXI. O. Struve, Observations de Poulkova. Vol. IX. Petersburg 1878.

XXII. Schur, Referat über: Dembowski, Misure micrometriche de stelle doppie. Vierteljahrsschr. d. Astr. Gesell., Leipzig 1887, S. 223.

XXIII. K. Schwarzschild, Bestimmung der Sternhelligkeit aus extrafokalen Aufnahmen. Publ. v. d. Kufnerschen Sternw. Wien, Bd. V.

XXIV. Scheiner, Photographie der Gestirne. Leipzig 1897.

XXV. Kostinsky, Über die Einwirkung zweier Bilder aufeinander bei astrophotographischen Aufnahmen. Mitt. d. Nicolai-Hauptsternw. z. Pulkowa 1907, Bd. 2, Nr. 14.

XXVI. A. Kühl, Zur Erhöhung der Einstellungsgenauigkeit auf überexponierte Sternbilder. Astr. Nachr., Bd. 189, Nr. 4531.

XXVII. Aubert, Physiologie der Netzhaut. Breslau 1855.

XXVIII. Helmholtz, Physiologische Optik. 3. Aufl. Leipzig 1909, Bd. 1.

XXIX. K. Strehl, Scheinbarer Durchmesser und Helligkeit des Fixsternbildes. Astr. Nachr. 1913, Bd. 193, S. 389.

XXX. O. Lohse, Planetographie. Leipzig 1894.

XXXI. O. Hartwig, Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars. Publ. d. Astr. Ges. XV, Leipzig 1879.

XXXII. L. Courvoisier, Aufforderung zu Meridianbeobachtungen des Planeten Venus in der Nähe seiner unteren Konjunktion. Astr. Nachr. 1919, Bd. 208, S. 168.



XXXIII. E. Großmann, Die Bewegung des Merkurperihels nach den Arbeiten Newcombs. Astr. Nachr. 1921, Bd. 214, S. 41.

XXXIV. Küstner, Bestimmung des Monddurchmessers aus 9 Plejadenbedeckungen. Diss., Halle 1880.

XXXV. Auwers, Die Venusdurchgänge von 1874 und 1882. Berlin 1898, Bd. 5.

XXXVI. Kühl, Anwendung der Kontrasttheorie auf das Fadenmikrometer. Zentralz. f. Opt. u. Mech. 1924, S. 27 u. f.

XXXVII. Kühl, Die Reduktion von Fernrohrbeobachtungen wegen Kontrastfehlers in: „Probleme der Astronomie". Festschrift für H. v. Seeliger. Berlin 1924.

(Eingegangen 25. August 1927.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen und die Wirklichkeit.

Von F. Ahlborn.

1. Die Diskontinuitätstheorie.

In seiner viel erörterten Arbeit über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen hat Helmholtz darauf hingewiesen, daß die aus den hydrodynamischen Gleichungen abgeleiteten Ergebnisse der Theorie den Physikern doch nur als eine praktisch sehr unvollkommene Annäherung an die Wirklichkeit erscheinen müßten, da in vielen Fällen die Vorgänge in den tropfbaren Flüssigkeiten sehr weitgehend von den theoretischen Strömungen abweichen, die sich wie Elektrizität bewegen.

Als ein auffallendes Beispiel hierfür bezeichnet Helmholtz die Strahlbildung von Wasser und Luft beim Austritt aus Öffnungen mit scharfen Rändern, wo die theoretischen Stromlinien sogleich nach allen Richtungen auseinander weichen. Austretender Rauch bildet scharf begrenzte Fäden, die sich in wechselnden Entfernungen in Wirbel auflösen, während die umgebende Flüssigkeit außerhalb des Strahles fast vollständig in Ruhe bleibt. Im Wasser zeigen sich mit geringen Abweichungen dieselben Bewegungsformen wie in der Luft.

Ein weiteres Beispiel bilden die sehr merkwürdigen periodischen Bewegungen in Orgelpfeifen, die durch einen kontinuierlichen Luftstrom erzeugt werden. Man kann wohl, bemerkt Helmholtz, die Ursache dieser mancherlei abweichenden Erscheinungen in der Reibung vermuten, aber die seltsamen und sprungweisen Änderungen sind auch durch die jedenfalls stetig und gleichmäßig wirkende Reibung nicht zu erklären. Solche Wirkungen können nur durch eine diskontinuierliche Luftströmung hervorgebracht werden, bei der zwei dicht aneinander liegende Schichten mit endlicher Geschwindigkeit aneinander entlanggleiten.

Wenn die Rauchfäden und Wasserstrahlen, wie es den Anschein hat, von einer schlauchförmigen Grenzfläche umschlossen sind, die sie von der umgebenden ruhenden Flüssigkeit trennt, so ist damit das Vorkommen von Diskontinuitätsflächen erwiesen. Aber bei der Schwierigkeit der direkten Beobachtung bleibt es immerhin eine Annahme, die wir weiterhin mit den Hilfsmitteln der photographischen Strömungsanalyse zu prüfen haben werden.

Weit schwieriger ist zu verstehen, wie in einer kontinuierlichen Flüssigkeit die Diskontinuität der Bewegung zustandekommen soll. Hierüber hat Helmholtz den folgenden Gedankengang entwickelt.

Wenn die tropfbaren Flüssigkeiten kontinuierlich wie Elektrizität fließen sollten, so müßte die Geschwindigkeit an jeder scharfen Kante, um welche der Strom herumbiegt, unendlich groß werden. Von der Geschwindigkeit hängt aber die Größe des Druckes in der Weise ab, daß die Verminderung des Druckes der lebendigen Kraft der bewegten Wasserteilchen direkt proportional ist. Übersteigt also die letztere eine gewisse Größe, so muß der Druck negativ werden und die Flüssigkeit zerreißen. An einer solchen Stelle wird die beschleunigte Kraft, welche dem Differentialquotienten des Druckes proportional ist, offenbar diskontinuierlich, und dadurch die Bedingung erfüllt, welche nötig ist, um eine diskontinuierliche Bewegung der Flüssigkeit hervorzurufen. Die Bewegung an einer solchen Stelle vorüber kann nur so geschehen, daß sich von dort ab eine Trennungsfläche bildet.

Die Geschwindigkeit, welche das Zerreißen der Flüssigkeit herbeiführen muß, ist diejenige, welche die Flüssigkeit annehmen würde, wenn sie unter dem Drucke, den sie am gleichen Orte im ruhenden Zustand hat, in den leeren Raum ausflöße. Dies ist allerdings eine verhältnismäßig bedeutende Geschwindigkeit, sie wird aber an vollkommen scharf ausgebildeten Kanten schon bei der mäßigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit erreicht, während an abgerundeten Kanten das Zerreißen und die Bildung der Trennungsflächen erst bei gewissen größeren Geschwindigkeiten stattfindet.

Eine Trennungsfläche kann mathematisch als Wirbelfläche behandelt werden, die mit Wir-



belfäden von unendlich geringer Masse, aber endlichem Drehungsmoment kontinuierlich belegt ist. Für die ideale, reibungsfreie Flüssigkeit, in welcher keine Wirbel entstehen können, ist dies nur eine Fiktion, welche die Integration erleichtert. In den wirklichen Flüssigkeiten werden die Grenzteilchen durch Reibung in Rotation versetzt, so daß hier Wirbelfäden von endlicher, allmählich wachsender Masse entstehen und dadurch zugleich die Diskontinuität der Bewegung ausgeglichen wird.

Wir haben es hiernach mit zwei wesentlich verschiedenen Formen der unstetigen Strömung zu tun. In der idealen Flüssigkeit sind die durch Zerreißen entstehenden Kavitationsspalten und Trennungsflächen frei von Rotation. Sie trennen in dem von Kirchhoff eingehend behandelten Falle einer Querplatte (Fig. 1) die

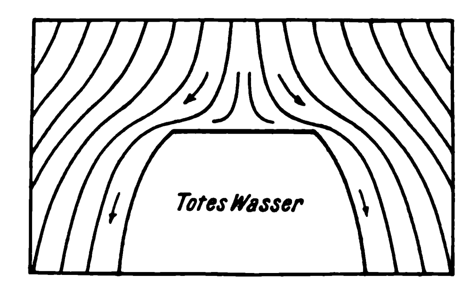


Fig. 1.
Diskontinuierliche Strömung an einer Querplatte nach Kirchhoff. Diskontinuitätsflächen trennen die Strömung von dem toten Wasser hinter der Platte.

von der Vorderseite abfließende Potentialströmung von dem toten Wasser, das sich von der Rückseite der Platte unbegrenzt nach hinten erstreckt. In dem toten Wasser herrscht nur der statische Druck der ungestörten Flüssigkeit.

In einer wirklichen Flüssigkeit entwickelt sich dagegen aus der Kavitationsspalte eine Schicht von Wirbeln endlicher Größe, deren Masse allmählich zunimmt, so daß auch die Flüssigkeit hinter der Platte zunehmend in die umlaufende Bewegung der Wirbel einbezogen wird. Der Vergleich ergibt, daß die ideale Form der diskontinuierlichen Strömung ebenso weit von der Wirklichkeit abweicht, wie die Form mit den Wirbelschichten ihr nahekommt. Die photographische Analyse der natürlichen Strömung zeigt (Fig. 2), daß der Raum hinter der Platte nicht mit totem Wasser, sondern mit Wirbelungen erfüllt ist, die im wesentlichen mit den Wirbelschichten übereinstimmen und räumlich die Form von Wirbelringen haben.

Man könnte die Diskontinuitätstheorie als eine zutreffende Erklärung der natürlichen Vorgänge ansehen, wenn sich nicht doch bei ihrer Anwendung auf Körper von beliebiger Form und auch auf die ideale Flüssigkeit, für die sie zunächst bestimmt ist, Schwierigkeiten herausstellten, die darüber keinen Zweifel lassen, daß die Begründung der Theorie durch die Bildung einer Kavitationsspalte nicht zutreffend sein kann.

Schon Lord Kelvin hat in einer Reihe polemischer Artikel, die in der Nature **50**, 524, 549, 573, 597, 1894 erschienen sind, gewichtige Bedenken und Einwände gegen die Theorie erhoben, die ihn sogar zu der Ansicht gebracht haben, daß die diskontinuierliche Form der Bewegung keine Ähnlichkeit mit dem habe, was in wirklichen Flüssigkeiten geschehe. Er ist der Meinung, daß die Theorie nur auf freie Oberflächen, wie an Strahlen, anwendbar sei.



Fig. 2.
Die wirkliche Umströmung einer Querplatte mit den Wirbelungen.

Der Einwand Lord Kelvins, daß die diskontinuierliche Strömung keine Ähnlichkeit mit den Bewegungen wirklicher Flüssigkeiten habe, weil man hier niemals totes Wasser, sondern lebhafte Wirbelungen an der Rückseite der Körper finde, beruht offenbar auf einem Mißverständnis, da die Theorie, wie oben gezeigt, gerade eine Erklärung für die Entstehung und die Form dieser Wirbelungen gibt, für die in der kontinuierlichen Eulerschen Strömung kein Raum ist.

Schwerer ist der Einwurf, daß das nach hinten unbegrenzte Totwasser eine unendlich große kinetische Energie erfordere, und es ist in der Tat nicht einzusehen, wie z. B. in dem Falle, daß die Querplatte in ruhender Flüssigkeit fortbewegt wird, das „tote Wasser" ohne Druckver-

lust die Geschwindigkeit der Platte annehmen könnte. Es ist auch nichts damit gewonnen, daß man vermutet, das tote Wasser werde sich erst am Ende eines langen, noch unbekannten Vorganges herausbilden.

Lanchester (Aerodynamik I, §§ 100—104) hat versucht, die Entstehung des toten Wassers in wirklichen Flüssigkeiten durch einen solchen allmählichen Vorgang zu erklären. Er nimmt an, daß die Grenzschichten, welche sich längs der Oberfläche des festen Körpers mit einem Geschwindigkeitsgradienten bewegen, immer von den Orten des höheren zu denen des niederen Druckes fließen, also an der Vorderseite der Querplatte mit der Strömung gegen den Rand an der Rückseite ebenfalls randwärts gegen den Strom. Die Ansammlung dieses Materials lasse dann vom Rande aus allmählich das tote Wasser entstehen.

Das ist dieselbe Annahme, die Prandtl seiner Ablösungstheorie der Grenzschichten zugrunde gelegt hat, bei der aber nicht das tote Wasser, sondern die Helmholtzsche Trennungsfläche und die Wirbel aus dem angesammelten Grenzschichtenmaterial entstehen sollen. Beide Theorien sind hinfällig, da die Grenzschichten nachweislich nicht der Strömung entgegenfließen können, deren Grenzschichten sie sind, also auch keine Ansammlung ihres Materials möglich ist. Übrigens ist die Vermutung Lanchesters nicht von Belang, da die Diskontinuitätstheorie in wirklichen Flüssigkeiten das tote Wasser durch Wirbelungen ersetzt. Für die ideale Flüssigkeit aber würde die Theorie Lanchesters schon deshalb ohne Bedeutung sein, weil hier keine verzögert fließenden Grenzschichten bestehen. So bleibt das tote Wasser in der vollkommenen Flüssigkeit ein schwerlich zu beseitigendes Hindernis der Helmholtzschen Theorie.

Die photographische Beobachtung der ersten Anfangsstadien der Strömung im Wasser lehrt nun, daß die Bewegung anfangs fast vollständig mit der reibungsfreien kontinuierlichen Eulerschen Potentialströmung übereinstimmt und gleichzeitig innerhalb des ganzen hydrodynamischen Feldes einsetzt. Es ist also jedenfalls von Anfang an kein totes Wasser vorhanden. Und wenn nun die theoretischen Trennungsflächen von den Kanten aus in der von Kirchhoff gezeichneten Weise in die Flüssigkeit vordringen sollten, so müßten sie die Kraftlinien senkrecht durchschneiden und dadurch die Bewegung hinter dem festen Körper zur Ruhe bringen. Das ist aber ein mechanisch unmöglicher Vorgang.

Von entscheidender Bedeutung ist endlich die Frage, ob die Kontinuität der Flüssigkeit wirklich in der Weise durch Kavitation aufgehoben werden kann, wie es die Theorie annimmt. Helmholtz selbst hat dies schon davon abhängig gemacht, daß die Flüssigkeiten wie Elektrizität fließen müßten. Diese Bedingung ist aber in Wirklichkeit nicht erfüllt, da die Trägheit der bewegten Flüssigkeitsmassen eine plötzliche Änderung der Richtung beim Umströmen einer scharfen Kante unmöglich macht. Damit entfällt aber die theoretische, unendlich große Geschwindigkeit an der Kante und das daraus abgeleitete Negativwerden des Gesamtdruckes, die Kavitation und die Bildung der Trennungsfläche.

Übrigens würde auch das Zerreißen der Flüssigkeit meines Erachtens nicht hinreichend begründet sein, da das Verhältnis zwischen Geschwindigkeit und Druck sich nur auf den dynamischen Druck beziehen kann und der statische Druck durch den Wechsel der Geschwindigkeit innerhalb des Feldes nicht berührt wird. Unter dynamischem Druck ist hier der Druck zu verstehen, der, unabhängig vom statischen Druck, durch einen bewegten Körper in der ruhend gedachten Flüssigkeit hervorgerufen wird. Die Geschwindigkeit kann nur zunehmen, solange der dynamische Druck positiv ist, und die beschleunigende Wirkung erreicht in dem Augenblick ihr Ende, wo der dynamische Druck auf Null gesunken ist. Der unveränderte statische Druck macht aber das Zerreißen der Flüssigkeit unmöglich, wie groß auch die Geschwindigkeit sein möge.

Schließlich sei noch hinzugefügt, daß dieselben Wirbelschichten, die nach der Diskontinuitätstheorie aus einer Kavitationsspalte hervorgehen, schon bei ganz geringen Geschwindigkeiten auch an solchen Körpern auftreten, die vollkommen stromlinienförmige Konturen haben und an denen somit die Bedingungen der Theorie nicht erfüllt sind.

Durch die mitgeteilten Tatsachen ist erwiesen, daß und warum die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt und daß sie auch auf die vollkommene Flüssigkeit nicht anwendbar ist.

2. Die wirklichen Strömungen.

Die Dokumente der photographischen Analyse bestätigen, wie gesagt, daß die Strömungen der natürlichen Flüssigkeiten in den Anfangsmomenten nahezu vollständig die Form der kontinuierlichen Eulerschen Potentialströmungen haben. Dann aber entwickeln sich aus kleinen Anfängen an Kanten und Rändern sowie in der Nähe des größten Körperquerschnitts Abweichungen, die mit Wirbelungen verbunden sind und das anfängliche Strömungsbild bald bis zur Unkenntlichkeit abändern können. Da die natürlichen Flüssigkeiten von dem vollkommenen Medium der

Eulerschen Theorie durch die Zähigkeit unterschieden sind, lag es nahe, diese Abweichungen als Erzeugnisse der Reibung anzusehen.

Nun ist aber die Reibung in der freien Flüssigkeit fast verschwindend gering und ihre Wirkung im wesentlichen auf die Grenzschichten beschränkt, die mehr oder weniger an den festen Oberflächen haften. Es muß also noch eine besondere Ursache vorliegen, die geeignet ist, an

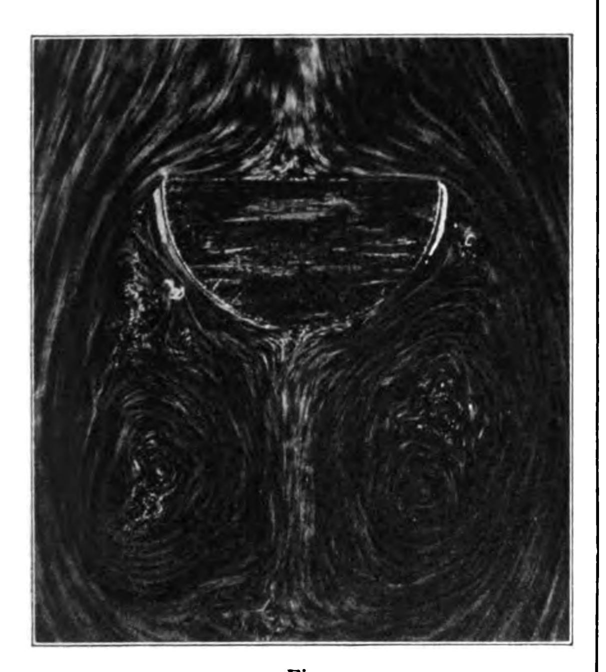


Fig. 3.

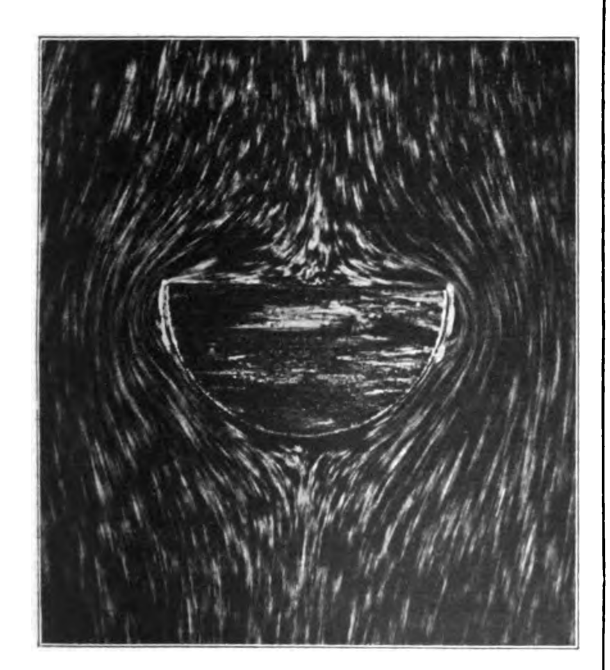


Fig. 4.



Fig. 5.

Fig. 3, 4 u. 5.
Drei Entwicklungsstadien der Strömung um einen Halbzylinder. An den Kanten entstehen keine Trennungsflächen, sondern abgerundete Flüssigkeitskörper, Gyrome, aus denen durch Reibung die Wirbel des Unterdruckfeldes hervorgehen. Die Potentialströmung umfließt den festen Körper mit seinem gyromatischen Wirbelanhang.]

bestimmten Orten Wirbel entstehen zu lassen und dadurch das anfänglich wirbelfreie Strömungsbild abzuändern.

Diese Ursache liegt in der Trägheit der bewegten flüssigen Massen, die es verhindert, daß die Teilchen den theoretischen Stromlinien so frei wie Elektrizität folgen können. Das zeigt sich besonders klar bei der Umströmung der Kanten eines Prismas. Der Strom bricht hier nicht mit unendlicher Geschwindigkeit im scharfen Winkel um die Kante, sondern geht ohne merkliche Änderung seiner endlichen Geschwindigkeit über die Kante hinaus und erreicht mit gekrümmten Stromlinien die andere Seite. Dabei entsteht in der Bucht des Stromes, unmittelbar neben der Kante, ein kleines Feld nahezu ruhender Flüssigkeit, das eine Art Ergänzung des festen Körpers bildet, ihn abrundet und den Konturen die Stromlinienform verleiht. Ich bezeichne dies flüssige Supplement kurz als ein Gyrom, von griech. γύρωμα, das Gerundete. Den festen Körper mit seinen Gyromen umfließt kontinuierlich die Potentialströmung.

Die in den Gyromen stockende Flüssigkeit wird nun durch Reibung von der Potentialströmung in Drehung versetzt und der so entstandene

Wirbel zugleich langsam von dem Orte seiner Entstehung fortgezogen. In dem frei werdenden Raume, unmittelbar neben der Kante, bildet sich sofort ein neues Gyrom, das wieder durch Reibung während seiner Entwicklung in einen Wirbel verwandelt wird und seinem Vorgänger folgt.

Dieselben Erscheinungen der Gyrom- und Wirbelbildung wiederholen sich hinter den rückwärtigen Kanten der Prismen. Alle Wirbel wandern längs der Körperwand nach hinten und gelangen so in den Raum hinter dem Hindernis, wo sie sich zu immer größer werdenden Aggregaten zusammenrollen. Dieser Vorgang vollzieht sich nach Analogie des Biot-Savartschen Gesetzes, und ist nur durch die Größe des Raumes im Kielwasser beschränkt.

Von den zahlreichen photographischen Aufnahmen über die Entstehung der Gyrome und des aus ihnen hervorgehenden Wirbel- und Unterdruckfeldes möchte ich hier nur als ein Beispiel die beliebig ausgewählten Abbildungen 3, 4 und 5 wiedergeben. Es sind drei charakteristische Entwicklungsstadien der Strömung um ein halbzylindrisches Profil von 120 mm Durchmesser.

Das erste Bild zeigt die anfängliche Potentialströmung, aber auch schon neben den Kanten des Modells die kontinuierlichen Ausbuchtungen der Stromlinien mit den eingeschlossenen Gyromen. Mit der Lupe erkennt man leicht unter den etwas störenden Lichtreflexen, daß in den Gyromen bereits eine Kette von drei bis vier Wirbeln entstanden ist, die längs der festen Wand nach hinten vorrücken.

Im zweiten Bilde haben sich die inzwischen zahlreich entstandenen Wirbel jederseits zu ansehnlichen Wirbelkörpern aufgerollt, die hinter der Mitte des Modells zusammenstoßen und so die Potentialströmung völlig von der Rückseite verdrängen.

Das dritte Stadium zeigt hinter dem Modell ein mächtiges Wirbelpaar, in welchem sich die in endloser Reihe am Orte des ursprünglichen Gyroms entstandenen primären Wirbel vereinigt haben. Beide Wirbel gehen in der Tiefe des Wassers, am unteren Ende des Modells, ineinander über. Sie bilden also zusammen einen halben Wirbelring, der sichtbar im Wasserspiegel endigt. Die Potentialströmung fließt von der Vorderseite des Modells über die Außenseite des Wirbelringes in glatten Stromlinien, die sich in einem Staupunkte hinter dem Wirbel wieder vereinigen. Die so bestimmte Grenzlinie zwischen der Potentialströmung und dem Unterdruckfelde des Wirbelringes ist in den Photogrammen unschwer zu verfolgen.

Der Wirbelring haftet an dem festen Körper. Sobald er aber durch die ständig hinzutretenden neuen Primärwirbelchen eine bestimmte Größe erreicht hat, werden von seinem hinteren Umfange in meist unregelmäßiger Periode Teile abgeschnürt, die hinter dem festen Körper im Kielwasser zurückbleiben und in der Ferne durch Reibung an Hypertrophie zugrunde gehen.

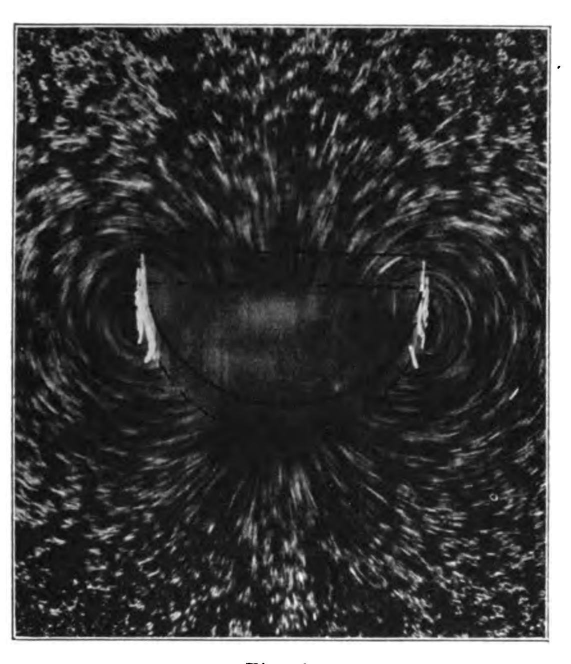


Fig. 6.
Das hydrodynamische Kraftfeld, das den Stromlinien der Fig. 3 zugeordnet ist. Die Kraftlinien sind die absoluten Stromlinien der Theorie.

In Fig. 6 ist auch noch das Photogramm des zweidimensionalen Kraftfeldes der Strömung in der Wasseroberfläche wiedergegeben. Das Stadium entspricht dem ersten Stadium der Strom linienbilder. Das Feld hat die Form eines um die wirbelnden Gyrome zirkulierenden Ringwirbels, in dessen nach vorn gerichtete achsiale Durchströmung der feste Körper eingeschaltet ist. Während der Exposition in der feststehenden Kamera hat das Modell den Weg zwischen den beiden Stellungen zurückgelegt, die durch eingezeichnete gestrichelte und ausgezogene Linien angegeben sind. Im Innern des Modells können die Kraftlinien geradlinig und der Richtung der Fortbewegung parallel gedacht werden. In den Grenzschichten vollzieht sich der Übergang in die Richtungen des äußeren Feldes.

Die Gyrome liegen außerhalb der Potentialströmung und werden von keiner Kraftlinie geschnitten, die vom festen Körper ausgeht und zu ihm zurückkehrt. Es kann daher im Anfangsmoment in den Gyromen nur der statische Druck bestehen. Sobald aber mit der Bewegung auch die Reibung wirksam wird, entstehen durch die tangentialen Schubkräfte in dem sonst toten Was-

ser der Gyrome konzentrische, in sich geschlossene Kraftliniensysteme, welche die Gyrome in Wirbel verwandeln und ihren statischen Druck durch die auftretenden zentrifugalen Trägheitskräfte um bestimmte Beträge herabsetzen. In der Nähe der Wasseroberfläche, wo der statische Druck klein ist, können diese Beträge leicht so groß werden, daß der Druck negativ wird und Kavitation eintritt. An Wirbeln, die an der Wasseroberfläche endigen, erscheint die Kavitation in der Form der bekannten trichterförmigen Einsenkungen des Spiegels, und die Tiefe der Trichter ist das Maß der Druckverminderung, die natürlich in größerer Tiefe nicht zur Kavitation führen kann.

Mit der Rotation der Wirbel bleibt auch der Minderdruck erhalten und wird mit ihnen über das ganze Wirbelfeld an den Flanken und hinter dem festen Körper verteilt. Das Gesamtfeld setzt sich hiernach zusammen aus dem von positiven dynamischen Druckkräften beherrschten Felde der Potentialströmung und dem gyromatischen oder Wirbelfelde, in welchem der statische Druck um den Betrag des zentrifugalen Minderdruckes verringert ist. Man kann diesen Unterdruck auch als negativen dynamischen Druck bezeichnen, wenn damit nichts über die Herkunft desselben ausgesagt werden soll. Man kann dann sagen, daß in jedem Punkte des Feldes der Gesamtdruck gleich der Summe des statischen und dynamischen Druckes ist, und daß an jedem Punkte der Körperoberfläche der Widerstandsdruck nach Größe und Art durch den daselbst vorhandenen dynamischen Druck bestimmt ist.

Beide Teile des Gesamtfeldes sind kontinuierlich miteinander verbunden. Die Zirkulation der Wirbelungen greift ohne Grenze auf die Potentialströmung hinüber. Auch wo bei großen Geschwindigkeiten in den Achsen der Wirbel Höhlungen auftreten, führt dies niemals zur Bildung einer Diskontinuitätsspalte, die, im Sinne der Helmholtzschen Theorie, als Trennungsfläche totes Wasser von der Potentialströmung scheidet.

Auch wenn die natürlichen Flüssigkeiten der Reibung nicht unterworfen wären, würden sie doch durch die Trägheit ihrer Massen daran verhindert sein, wie Elektrizität um scharfe Kanten zu fließen. Es würden immer an den kritischen Orten Gyrome entstehen müssen, die außerhalb der Potentialströmung liegen und als abrundende Anhänge des festen Körpers die Diskontinuität verhindern.

Die Bildung der Gyrome ist übrigens keineswegs an mehr oder weniger scharfe oder abgerundete Kanten gebunden. Wir finden sie an allen, wie immer gestalteten Körpern und auch an solchen, deren Profile vollkommene Stromlinien sind. Hier erscheinen sie zuerst nahe am Hauptspant, dem größten, senkrecht zur Fortbewegungsrichtung genommenen Querschnitt, wo die Geschwindigkeit am größten und der dynamische Druck auf Null gesunken ist. Die zentrifugale Zugspannung läßt hier in einem schmalen, sichelförmigen Gyrom dicht neben der festen Wand, den dynamischen Druck negativ werden, so daß diese Flüssigkeit aus der Potentialströmung ausscheidet und zugleich durch Reibung in Rotation versetzt wird. Das vordere Ende dieser Gyrome mit der Rotationslinie, an welcher die Wirbel entspringen, liegt im Anfang der Bewegung in der Querebene des Hauptspants und wandert mit zunehmender Geschwindigkeit nach vorn bis zu dem Punkte, wo die mit v^2 wachsende Zentrifugalkraft den dynamischen Druck unter Null sinken läßt. Die entstandenen Wirbelschichten verdrängen die Potentialströmung vom hinteren Umfang des Körpers und ändern das Strömungsbild wie oben beschrieben.

Es bleibt uns nun noch der Fall der Flüssigkeitsstrahlen zu untersuchen, die wenigstens in dem Beispiel der Rauchfäden den Eindruck hervorrufen als wären sie von ihrer Austrittsstelle ab durch eine Unstetigkeitsfläche von der umgebenden ruhenden Luft getrennt. Diese Erscheinungen waren es ja, die Helmholtz zur Aufstellung der Diskontinuitätstheorie veranlaßten, und auch Lord Kelvin gab zu, daß wenigstens in diesem Falle die Theorie zutreffend sein werde.

Die Vorgänge wurden im Wasser untersucht, wo sie nach Helmholtz von gleicher Art sind wie in der Luft. Dazu wurde ein hohler Messingzylinder von 150 mm Länge, 50 mm Durchmesser und 1 mm Wandstärke verwendet. Dieser wurde mit einem Längsschlitz von 4 mm Breite versehen und an einer Seite mit einem Boden verschlossen. Durch die Mitte des Bodens führte ein Metallrohr von 10 mm Weite, das einem Gummischlauch als Ansatz diente. Der Zylinder wurde nun bis auf 20 mm vom offenen Rande in das Wasser eines großen Behälters eingetaucht und in senkrechter Stellung festgehalten. Durch den als Heber wirkenden Schlauch kann das durch den Spalt eindringende Wasser abgelassen und so im äußeren Felde eine Senke hergestellt werden, während bei Zuleitung des Wassers durch den Schlauch der Druck im Innern erhöht und die Strömung durch den Spalt nach außen tritt. Die Vorgänge wurden in der Wasseroberfläche durch Lykopodium sichtbar gemacht und in Momentaufnahmen festgehalten.

Die Senke, das Einströmen der Flüssigkeit durch den Spalt, bietet das Bild (Fig. 7) einer schönen, wirbelfreien Bewegung mit Stromlinien, die von allen Seiten gegen den Spalt konvergieren und über den ganzen Umfang des Zylinders verbreitet sind.

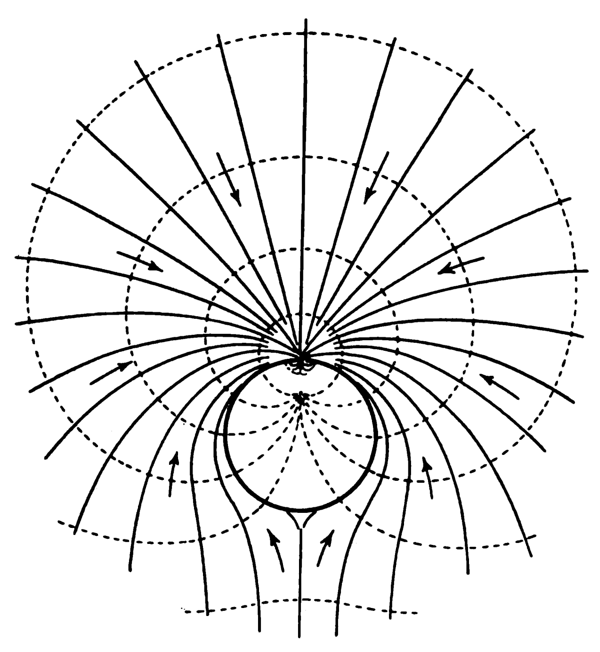


Fig. 7.
Strömung einer Senke, die durch einen Spalt in das Innere eines Zylinders abfließt. Die gestrichelten Kurven sind außerhalb des Zylinders Linien gleichen Druckes. Zeichnung nach Photogramm.

Theoretisch müßte nun dieselbe Potentialströmung mit entgegengesetzter Richtung als Quelle erscheinen, wenn der Druck im Innern des Zylinders erhöht wird und die Flüssigkeit durch den Spalt nach außen tritt. Die Annahme einer solchen Übereinstimmung ist aber nur für den ersten Anfangsmoment zulässig, denn in dem Augenblick, wo die Bewegung zuerst in unmittelbarer Nähe des Spaltes sichtbar wird, zeigt sich auch schon in der Einschnürung der austretenden Flüssigkeit am Ausgang des Spaltes die Gyrombildung und der erste Wirbel (Fig. 8 I). Damit ist die vollständige Umwandlung der Strömung eingeleitet. Durch die Zirkulation des Wirbels wird die abfließende Bewegung der nächsten Stromlinien umgebogen und an der Zylinderwand gegen den Spalt zurückgeleitet. Dieser Bewegung folgt die äußere Flüssigkeit und drängt sich so zwischen den Wirbel und den austretenden Strom. Dem verdrängten Wirbel folgt schnell aus dem Gyrom im Spalt ein neuer mit denselben Begleiterscheinungen, so daß nun in der Nähe des Spaltes statt der anfänglichen, nach allen Seiten auseinanderfließenden Quelle eine senkenartige Zuströmung besteht (Fig. 8 II), die sich von beiden Seiten kontinuierlich dem entstandenen Strahl der austretenden Flüssigkeit anschließt (Fig. 8 III). Damit ist erwiesen, daß der Strahl nicht durch eine Diskontinuitätsfläche von ruhender Flüssigkeit getrennt ist, er bewegt sich vielmehr kontinuierlich mit seiner Umgebung in der Zirkulation um eine Wirbelschicht, die ihn in weiterem Abstande umgibt und aus dem Gyrom im Spalt entstanden ist.

Im Innern des Zylinders würde der Abfluß die Form einer wirbelfreien Senke haben, wenn er nicht durch den turbulenten Zufluß aus dem Heberschlauch gestört wäre.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß aus der theoretischen, unendlich großen Geschwindigkeit der Potentialströmung an scharfen Kanten nicht auf das Negativwerden des Gesamtdruckes und Zerreißen der Flüssigkeit geschlossen werden kann, da die Abhängigkeit der Geschwindigkeit bzw. der kinetischen Energie vom Druck sich nur auf den dynamischen Druck bezieht und der davon unberührte statische Druck die Kavitation verhindert. Die Bildung einer Kavitationsspalte mit anschließender Trennungsfläche und totem Wasser ist daher durch die Schlußfolgerungen der Diskontinuitätstheorie nicht hinreichend begründet. Die natürlichen Flüssigkeiten erfüllen ohnehin nicht die Vorbedingungen der Theorie, da sie durch das Gesetz der Trägheit verhindert sind, wie Elektrizität um Kanten und Ränder zu fließen.

In Wirklichkeit bewegen sich die natürlichen Flüssigkeiten vermöge ihrer Trägheit (und Zentrifugalkraft) über Kanten und Ränder hinaus auf kontinuierlichen Stromlinien und umfließen dabei gerundete Flüssigkeitskörper, „Gyrome", welche der Potentialströmung nicht angehören.



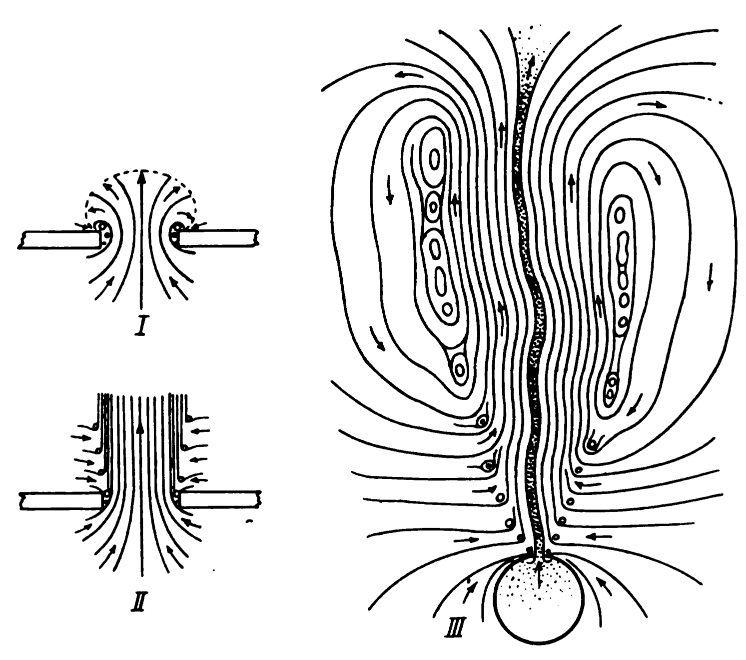


Fig. 8.
Durch einen Spalt in der Wand eines Zylinders dringt Flüssigkeit in das äußere Feld. I. Anfangsstadium in Form einer Quelle, aber mit Gyrombildung in der Austrittsöffnung. II. Vorgänge in der Nähe des Spaltes in einem späteren Stadium. Die aus den Gyromen hervorgehenden Wirbel formen den Stiel der Quelle zu einem Strahl. III. Der fertige Strahl zwischen den Zirkulationen der beiden Wirbelschichten. Das System ist räumlich ein Wirbelring. Zeichnung nach Photogramm.

Die Gyrome können als flüssige Anhänge des festen Körpers angesehen werden, die ihn so abrunden, daß er Stromlinienform erhält, und die Strömung ringsum ohne weitere Störung verläuft.

Durch die zentrifugalen Zugkräfte der umschließenden Potentialströmung wird der in den Gyromen herrschende statische Druck vermindert und in Unterdruck verwandelt, die gyromatische Flüssigkeit aber durch Reibung in Rotation versetzt und langsam fortbewegt. Die so entstehenden Wirbel dringen zwischen Körperwand und Potentialströmung in den Raum hinter dem festen Körper, wobei sie sich nach dem Biot-Savartschen Gesetz zu immer größeren Wirbelaggregaten zusammenrollen. Durch die Rotation der Wirbel wird auch der Unterdruck aufrecht erhalten, der den bisher nicht erklärbaren negativen Flüssigkeitswiderstand bedingt.

(Eingegangen 14. November 1927.)

Über die Bilder im Winkelspiegel.

Von T. Oryng.

Es herrscht in der physikalischen Literatur eine merkwürdige unrichtige Meinung in bezug auf die Anzahl der im Winkelspiegel entstehenden Bilder. So wird — sogar in den besten Lehrbüchern (z. B. in Lommels Lehrbuch der Experimentalphysik) — behauptet, daß bei Anwendung zweier Spiegel, deren spiegelnde Flächen einen Winkel miteinander bilden, der in 360^0 n-mal (wo n eine ganze Zahl ist) enthalten ist, die Zahl der entstandenen Bilder $n - 1$ ist. Es ist unschwer, sich durch ein Experiment oder mit Hilfe einer Zeichnung zu überzeugen, daß die Tatsachen dieser Behauptung widersprechen, und zwar für alle Fälle, wo n eine ungerade Zahl ist, d. h. für Winkel, die von 120, 72, 40, 24 und 8^0. Ferner kann man ohne große Mühe auch die Regeln für beliebige Winkel ableiten. Dieser Gegenstand wird von mir an anderem Orte ausführlich behandelt, hier sollen nur die Ergebnisse in aller Kürze zusammengefaßt werden.

Ist der Winkel, den die beiden Spiegel miteinander bilden, gleich α, dann ist $360 : \alpha = n + p$, wo n eine ganze Zahl und p — ein echter Bruch ist. Wird $p = 0$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. n ist eine ungerade Zahl und 2. n ist eine gerade Zahl. Im ersten Falle ist die Bilderanzahl nur dann $n - 1$, wenn der Lichtpunkt sich an der Winkelhalbierenden befindet, sonst aber ist sie immer gleich n. Z. B.: für

$\alpha = 72^0$ ist die Zahl der Bilder — je nach der Lage des Lichtpunkts — 4 oder 5 (s. Fig. 1).

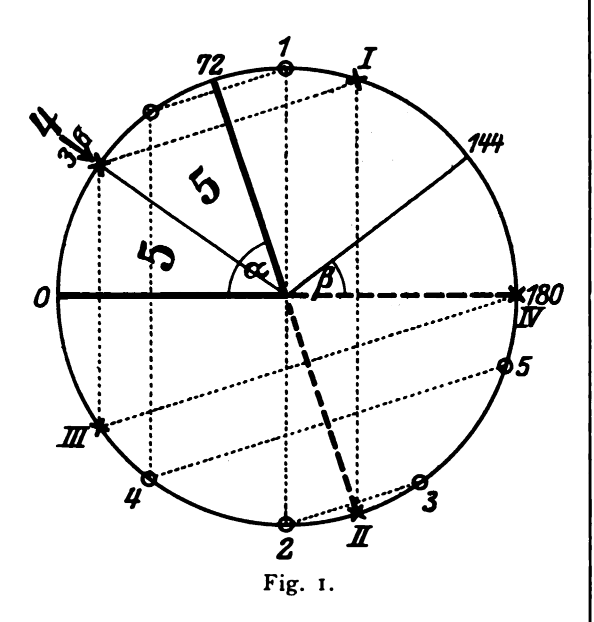


Fig. 1.

Im zweiten Falle dagegen ist die Bilderanzahl für den ganzen Winkelraum gleich $n - 1$, weil hier zwei Bilder zusammenfallen, einer Symmetrie zufolge, die ergibt, daß eine der Abbildungen des einen Spiegels Fortsetzung des anderen ist.

Ist $\beta > 0$, dann wird für den gegebenen Winkel die Zahl der Bilder gleich n oder $n + 1$.

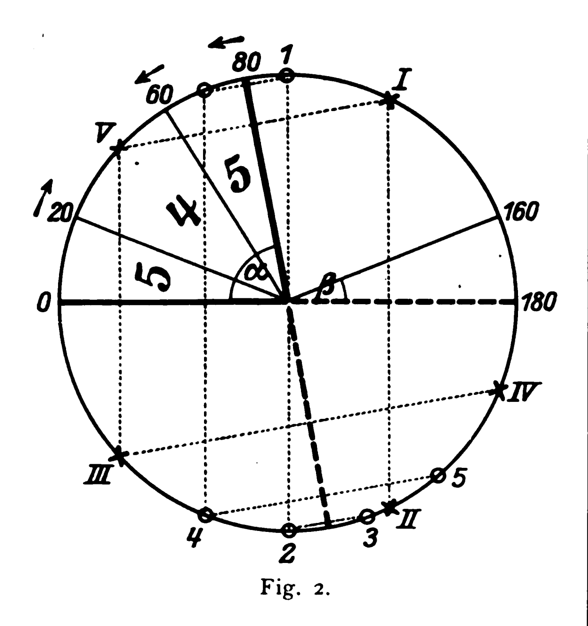


Fig. 2.

In dem durch die spiegelnden Flächen gebildeten Winkelraume sind dann zweierlei Gebiete zu unterscheiden: befindet sich der Lichtpunkt in einem der Gebiete — dann ist die Bilderanzahl gleich n, befindet er sich in dem anderen — dann ist die Zahl der Bilder gleich $n + 1$.

Die Größe des Winkels der beiden Spiegel erlaubt über die gegenseitigen Grenzen der zu unterscheidenden Gebiete zu urteilen. Wir setzen: $180 - m\alpha = \beta$, wo m eine ganze Zahl ist, die angibt, wievielmal der Winkel α in 180^0 enthalten ist. Ist $\beta < \frac{\alpha}{2}$, dann gibt es zwei Gebiete denen $n + 1$ Bilder entsprechen. Diese Gebiete haben als je eine Grenze die beiden Spiegelflächen, und die Winkelweite dieser Grenzen ist kleiner als β. In größeren Winkelentfernungen befindet sich das Gebiet mit n Bildern (Fig. 2).

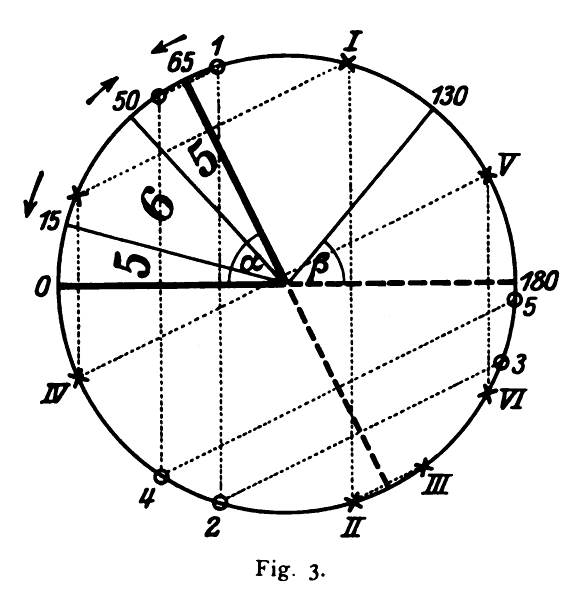


Fig. 3.

Ist $\beta > \frac{\alpha}{2}$, dann liegt das Gebiet mit $n + 1$ Bildern in dem Mittelraume und die Gebiete mit n Bildern befinden sich an den Seitenräumen. Die Abgrenzung der Gebiete erfolgt in Abständen, die — von den Spiegelflächen abgezählt — gleich $\alpha - \beta$ sind (Fig. 3).

Die Pfeile an den Abbildungen oberhalb der Winkelzahlen zeigen, nach welcher Richtung sich die Grenzlinien verschieben, wenn der Spiegelwinkel kleiner wird. Gehen sie nach dem Zusammenfallen wieder auseinander, so nimmt dann die Bilderanzahl um eins zu.

Warschau, Josef Poniatowski-Staatsgymnasium, 10. November 1927.

(Eingegangen 14. November 1927.)



Über Chromasie.

(Nach Versuchen von Herrn stud. Erich Samuel mitgeteilt.)

Von Richard Gans.

In der Überzeugung, daß im physikalischen Praktikum auch feinere optische Methoden zu ihrem Recht kommen müssen, schlug ich Herrn stud. Erich Samuel vor, eine Versuchsanordnung auszuarbeiten, die es gestattet, die chromatischen Fehler eines Objektivs quantitativ zu bestimmen. Nachträglich stellte sich allerdings heraus, daß diese Methode bereits von Hartmann[1]) angegeben worden ist. Wenn ich sie trotzdem kurz beschreibe, so geschieht es, weil die Methode in Physikerkreisen zu wenig bekannt geworden zu sein scheint, dann aber auch, um zu zeigen, daß die Versuchsanordnung, die von Hartmann auf die Untersuchung des Potsdamer 80 cm-Refraktors angewandt worden ist, sich auch für kleine Objektive — z. B. von 2,5 cm Durchmesser — eignet.

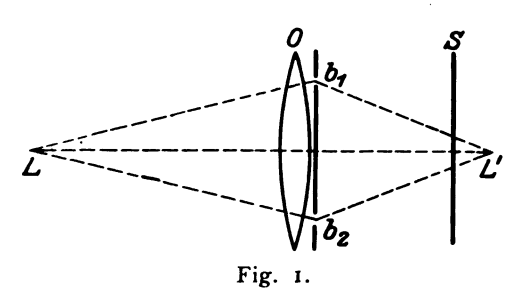


Fig. 1.

Ferner soll kurz darauf eingegangen werden, wie man theoretisch ein Maß für die Chromasie eines Objektivs aufstellen und somit auch zwei verschiedene Objektive bezüglich der Güte ihrer chromatischen Korrektur miteinander vergleichen kann.

Schließlich soll auch angegeben werden, welchen Grad der Achromasie man bei gegebenen Glassorten erwarten kann, und wie sich die Krümmungsradien der Linsen zur Erreichung dieses Ziels berechnen.

Ich glaube zwar nicht, daß man auf Grund dieser Formeln weiter kommen wird, als das durch die reiche Erfahrung der Praxis bereits geschehen ist. Aber es ist doch unbefriedigend, wenn man in den Lehr- und Handbüchern einfach routinemäßige Angaben über die beiden Wellenlängen findet, die man von vornherein auswählt, um für sie gleiche Brennweiten herzustellen. Man fragt sich hier: Warum gerade diese beiden? Warum berücksichtigt man alle anderen Wellenlängen nicht? Und da man auf Grund dieser Auswahl die für die Farbenkorrektion in Betracht kommenden geometrischen Größen eindeutig berechnen kann, so erwecken die Darstellungen leicht den Glauben, als ob das nach dieser Berechnung konstruierte Objektiv für dieses Farbenpaar und nur für dieses korrigiert wäre, derart, daß man durch Messung nachträglich sagen könne, für welche beiden Wellenlängen die Achromasie erzielt wäre[1]). Davon ist aber gar nicht die Rede, denn es gibt unendlich viele Wellenlängenpaare, für die der Achromat gleiche Brennweiten hat.

Dem logischen Bedürfnis nach etwas mehr Klarheit und nach Eindeutigkeit der Begriffe sollen die theoretischen Ausführungen der letzten beiden Paragraphen dienen.

§ 1. Die experimentelle Bestimmung der Chromasie nach Hartmann.

Die Versuchsanordnung der Hartmannschen Methode ist die folgende (Fig. 1). Das zu untersuchende Objektiv O wird bis auf zwei gleich große, gleich weit von der optischen Achse entfernte, vertikal übereinander liegende kleine Löcher b_1 und b_2 abgedeckt. L ist eine punktförmige Lichtquelle weißen Lichts. Die von ihr ausgehenden Strahlen treten durch b_1 und b_2 hindurch und treffen auf den Spalt S eines Spektrographen, bevor sie sich in dem L konjugierten Punkte L' (wegen der Chromasie würde man besser sagen: in den L konjugierten Punkten) vereinigen.

Da die Strahlen verschiedener Wellenlängen wegen der Chromasie des Objektivs den Spalt in verschiedener Höhe treffen, erhält man auf der photographischen Platte zwei gekrümmte kontinuierliche Spektren, das eine von b_1, das andere von b_2 herrührend, etwa wie es Fig. 2 andeutet.

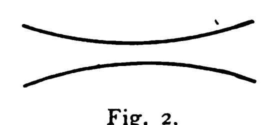


Fig. 2.

Um die Wellenlängen für alle Stellen dieser beiden gekrümmten Spektren zu kennen, wird dann noch das He-Spektrum darüberphotographiert. So sind die beiden Aufnahmen Fig. 3 und Fig. 4 entstanden, die erstere mitttels eines Brillenglases, die zweite mittels eines Zeißschen Projektions-Achromaten. Die Spektren gehen auf der einen Seite nur bis ins Gelbe, weil die

1) J. Hartmann, Publikationen des Astrophys. Obs. zu Potsdam **15**, 26 ff., 1908 und Tafel 7, Fig. 2 und 3.

1) Siehe z. B. die Methode von H. C. Vogel (vgl. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys., 15. Aufl., S. 352. Leipzig u. Berlin 1927).



Empfindlichkeit der photographischen Platten für größere Wellenlängen nicht ausreichte, auf der anderen Seite aber verhältnismäßig weit ins Ultraviolette hinein, da der benutzte kleine Spektrograph Quarzoptik hatte[1]). Daher erklärt sich auch die geringe Dispersion, die aber für den vorliegenden Zweck völlig genügt.

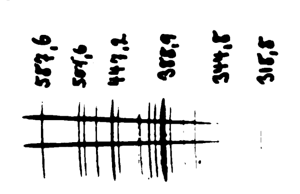


Fig. 3.

Um nun aus den Abständen der beiden Kurven voneinander die Brennweitendifferenzen zu erhalten, macht Hartmann eine zweite extrafokale Aufnahme, bei der S nicht zwischen O und L', sondern jenseits L' sich befindet. Wir

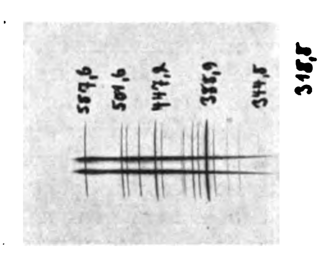


Fig. 4.

müssen uns aus Gründen der Einfachheit mit einer Aufnahme begnügen und verfahren zur Berechnung der Brennweitendifferenzen folgendermaßen:

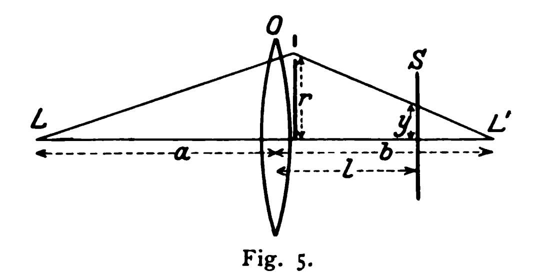


Fig. 5.

Aus Fig. 5 folgt für eine bestimmte Wellenlänge

$$\frac{y}{r} = \frac{b-l}{b}, \qquad (1)$$

wenn b die Bildweite, l der Abstand des Spalts vom Objektiv, r der halbe Abstand der Blenden b_1 und b_2 voneinander, y der halbe Abstand der durch b_1 und b_2 hindurchgetretenen Strahlen auf dem Spalte S ist.

Eliminiert man b aus der Linsenformel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (2)$$

mittels (1), so erhält man

$$\frac{1}{a} + \frac{r-y}{rl} = \frac{1}{f}. \qquad (3)$$

Geht man zu einer anderen Wellenlänge über, so ändern sich y und f, dagegen bleiben a, r und l konstant. Also erhält man durch Differenzbildung

$$f\frac{\Delta y}{rl} = \frac{\Delta f}{f}, \qquad (4)$$

woraus sich Δf als Funktion von λ bestimmt, wenn man von dem f irgendeiner beliebigen Wellenlänge als dem normalen ausgeht, für diese also $\Delta y = 0$ und $\Delta f = 0$ setzt. Da man die Abstände der Kurven auf der photographischen Platte mit dem Komparator oder einem Mikroskop mit Objektschraubenmikrometer ausmißt, so ist natürlich noch die Vergrößerung des Spektrographen zu bestimmen, um aus den gemessenen Abständen auf die Δy schließen zu können. Dies geschah, indem man eine in Millimeter geteilte Glasskala unmittelbar an den weit geöffneten Spalt S heransetzte und photographierte. Bei unserem Apparat betrug die Vergrößerung 0,9914.

Die Resultate für das Brillenglas ($f =$ 167 mm) sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

λ	587,6	501,6	471,3	447,2	388,9	344,8
$\frac{\Delta f}{f} \cdot 10^4$	0	−123	−176	−233	−407	−551

Manchmal begnügen wir uns damit, das Phänomen einfach beobachten anstatt photographieren zu lassen, indem die Kamera durch ein Fernrohr ersetzt wird. Der Unterschied im Verhalten der einfachen Linse und des Achromaten ist dann besonders augenfällig wegen der Vergrößerung durch das Okular. Die Aufgabe besteht dann im Aufbau der Versuchsanordnung, in der Justierung, der Ableitung der Formel und der selbständigen Entscheidung, ob S zwischen O und L' oder jenseits L' liegt, wovon die Vorzeichen der Δf abhängen.

§ 2. Das Maß der Chromasie.

Jetzt wollen wir ein Maß für die Größe der Chromasie aufstellen, das es ermöglicht, zwei Objektive bezüglich ihrer Farbenfehlerkorrektion miteinander zu vergleichen.

1) Ein anderer Apparat steht einstweilen für den vorliegenden Zweck nicht zur Verfügung.



Wir nehmen an, eine ebene Lichtwelle, deren Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und deren Intensität $I(\lambda)d\lambda$ sei, falle auf eine im Abstande x vom Objektiv aufgestellte photographische Platte P (Fig. 6), deren Empfindlich-

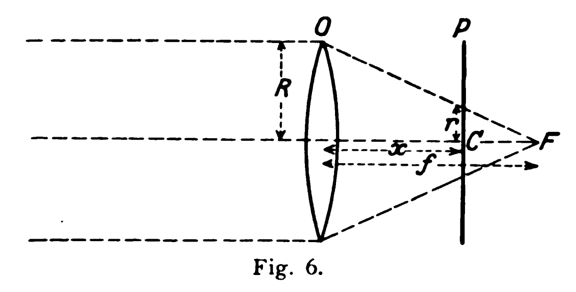


Fig. 6.

keit für die betrachtete Wellenlänge $e(\lambda)$ sei. Wir nennen $I(\lambda) \cdot e(\lambda) = S(\lambda)$ das Schwärzungsvermögen, das also sowohl von der Emissionskurve der Lichtquelle als auch von der Plattensorte (bzw. der Empfindlichkeitskurve des Auges) abhängt.

Auf der Platte erhalten wir durch die Belichtung geschwärzte Silberkörner, die symmetrisch um den Durchstoßpunkt C der optischen Achse angeordnet sein werden. Nennen wir ϱ den Abstand eines solchen Teilchens von C, und befinden sich $n(\varrho)$ Teilchen auf der Flächeneinheit der Platte, so gibt uns $n(\varrho)$ das „Schwärzungsgebirge".

Wir fragen nun nach dem mittleren Quadrat $\overline{\varrho^2}$ aller Abstände bei Beleuchtung mit weißem Licht, suchen diejenige Stellung $\bar{x}$ der Platte, für die $\overline{\varrho^2}$ ein Minimum ist, und berechnen $\overline{\varrho^2}$ für diesen Wert $\bar{x}$.

Zuerst betrachten wir monochromatisches Licht. Da die ebene Welle von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius R (R halber Durchmesser des Objektivs) sich durch die Strahlenbrechung auf den Radius r auf der Platte zusammengezogen hat, so wird $n(\varrho)$ proportional $\frac{R^2 \pi S d\lambda}{r^2 \pi}$ sein, und bei geeigneter Wahl der Einheiten können wir anstatt proportional direkt gleich setzen. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} n(\varrho) &= \frac{R^2}{r^2} S d\lambda \quad \text{für } \varrho < r \\ \text{und} \quad n(\varrho) &= 0 \quad \text{für } \varrho > r, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

so daß

$$\Sigma \varrho^2 = 2\pi R^2 \int \frac{S d\lambda}{r^2} \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi R^2}{2} \int r^2 S d\lambda$$

wird. Da nun aus Fig. 6 folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{f - x}{f} \quad \text{für } f > x \\ \frac{r}{R} &= \frac{x - f}{f} \quad \text{für } f < x, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

so erhalten wir

$$\Sigma \varrho^2 = \frac{\pi R^4}{2} \int \left(1 - \frac{x}{f}\right)^2 S d\lambda. \quad (7)$$

Diese Größe wird ein Minimum, wenn

$$\int \left(1 - \frac{\bar{x}}{f}\right) \frac{S d\lambda}{f} = 0 \text{ oder } \bar{x} \cdot \int \frac{S d\lambda}{f^2} = \int \frac{S d\lambda}{f} \quad (8)$$

Nun setzen wir

$$f = f_0 (1 + \varepsilon(\lambda)), \quad (9)$$

und verstehen unter f_0 eine mittlere oder „normale" Brennweite. Die höheren Potenzen von ε vernachlässigen wir, so daß sich aus (8) ergibt

$$\bar{x} = f_0 \left[1 + \frac{\int \varepsilon S d\lambda}{\int S d\lambda}\right]. \quad (10)$$

Wählt man die Normalwellenlänge λ_0, für die $f = f_0$ ist, so, daß

$$\int \varepsilon S d\lambda = 0,$$

d. h. nach (9), daß

$$\int \Delta f \cdot S d\lambda = 0,$$

so wird

$$\bar{x} = f_0,$$

und das Minimum von $\Sigma \varrho^2$ wird nach (7)

$$\Sigma \varrho^2 = \frac{R^4 \pi}{2} \int \left(1 - \frac{f_0}{f}\right)^2 S d\lambda = \frac{R^4 \pi}{2} \int \varepsilon^2 S d\lambda. \quad (11)$$

Somit wird der Mittelwert

$$\overline{\varrho^2} = \frac{\Sigma \varrho^2}{R^2 \pi \int S d\lambda} = \frac{R^2}{2} \frac{\int \varepsilon^2 S d\lambda}{\int S d\lambda}, \quad (12)$$

und

$$\frac{\overline{\varrho^2}}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{\int \varepsilon^2 S d\lambda}{\int S d\lambda} \quad (13)$$

wird ein Maß für die Chromasie sein.

Nennen wir

$$\bar{\varphi} = \frac{\int \varphi S d\lambda}{\int S d\lambda} \quad (14)$$

den Mittelwert der Funktion φ von λ, so wird

$$\frac{\overline{\varrho^2}}{R^2} = \frac{\overline{\varepsilon^2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{(\Delta f)^2}}{f_0^2}. \quad (13')$$

Da es schwer sein wird, bei einem guten Objektiv das Schwärzungsgebirge des Bildes einer punktförmigen Lichtquelle (also die linke Seite von (13')) zu bestimmen, wird man zur Ermittlung der Chromasie die rechte Seite von (13') heranziehen. Dazu photographiert man mittels der bestimmten Lichtquelle auf die photographische Platte der bestimmten Sorte ein Spektrum und bestimmt das Schwärzungsvermögen $S(\lambda)$ durch Ausphotometrierung dieses Spektrums, natürlich unter Berücksichtigung der von λ abhängigen Dispersion. Dann mißt man — etwa nach der in § 1 auseinandergesetzten Hartmannschen Methode — $\varepsilon(\lambda)$ und rechnet nach (13').

§ 3. Vorausberechnung eines Achromaten.

Wir wollen jetzt zur Berechnung eines Achromaten aus gegebenen Glassorten übergehen, beschränken uns aber auf den Fall, daß die beiden Linsen als unendlich dünn und unendlich benachbart aufgefaßt werden können.

Dann gilt

$$(n_1 - 1)\, k_1 + (n_2 - 1)\, k_2 = \frac{1}{f}, \qquad (15)$$

wo n_1 und n_2 die Brechungsindizes der beiden Glassorten, k_1 und k_2 die Summe der Krümmungen der Linsenoberflächen für die erste bzw. zweite Linse bedeuten.

Gehen wir zu einer anderen Wellenlänge über, so folgt aus (15)

$$\nu_1 k_1 + \nu_2 k_2 = -\frac{\varepsilon}{f_0}, \qquad (16)$$

wo ε durch (9) definiert ist, f_0 die Brennweite für irgendeine als „normal" zu bezeichnende Wellenlänge λ_0 ist, und

$$\nu_1 = n_1 - n_{10}; \quad \nu_2 = n_2 - n_{20} \qquad (17)$$

die Differenzen für die Wellenlängen λ und λ_0 bedeuten. Dann folgt aus (7) und (8) mit Einführung von (9)

$$\Sigma\varrho^2 = \frac{R^4\pi}{2}\int(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 S\, d\lambda, \qquad (18)$$

wo $\bar{\varepsilon}$ der Mittelwert von ε, wie immer im Sinne der Gleichung (14) ist.

Mit Benutzung von (16) ergibt sich daraus

$$\Sigma\varrho^2 = \frac{R^4\pi}{2} f_0^2 \int[\nu_1 k_1 + \nu_2 k_2 - (\bar{\nu}_1 k_1 + \bar{\nu}_2 k_2)]^2 S\, d\lambda.$$

Dies ist das Minimum von $\Sigma\varrho^2$ bezüglich x, d. h. bei günstigster Stellung der photographischen Platte, aber bei gegebenen k_1 und k_2.

Jetzt sollen aber auch die günstigsten Werte von k_1 und k_2 gesucht werden. Es ist also

$$\int[(\nu_1 - \bar{\nu}_1)\, k_1 + (\nu_2 - \bar{\nu}_2)\, k_2]^2 S\, d\lambda$$

als Funktion von k_1 und k_2 zum Minimum zu machen, während nach (15)

$$f_0 \alpha_1 k_1 + f_0 \alpha_2 k_2 = 1 \qquad (19)$$

sein muß, wo

$$n_{10} - 1 = \alpha_1; \quad n_{20} - 1 = \alpha_2 \qquad (20)$$

für die normale Wellenlänge λ_0 gelten.

Führen wir die Bezeichnungen ein

$$\alpha_{11} = \overline{\nu_1^2} - (\bar{\nu}_1)^2; \quad \alpha_{22} = \overline{\nu_2^2} - (\bar{\nu}_2)^2;$$
$$\alpha_{12} = \overline{\nu_1 \nu_2} - \bar{\nu}_1 \cdot \bar{\nu}_2, \qquad (21)$$

wo die ν durch (17) definiert sind, so ergibt sich das folgende Resultat

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{f_0} \frac{\alpha_{22}\alpha_1 - \alpha_{12}\alpha_2}{\alpha_{11}\alpha_2^2 - 2\alpha_{12}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_{22}\alpha_1^2} \\ k_2 &= \frac{1}{f_0} \frac{\alpha_{11}\alpha_2 - \alpha_{12}\alpha_1}{\alpha_{11}\alpha_2^2 - 2\alpha_{12}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_{22}\alpha_1^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

und $\frac{\overline{\varrho^2}}{R^2}$ nimmt den Wert an

$$\frac{\overline{\varrho^2}}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_2^2 - 2\alpha_{12}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_{22}\alpha_1^2}. \qquad (23)$$

Man hat also aus (22) die Größen k_1 und k_2 zu berechnen und erhält als Maß der Chromasie der betreffenden Glassorten den Ausdruck (23). Hierbei sind α_1 und α_2 durch (20) und die α_{ik} durch (21) und (17) definiert.

Die obigen Überlegungen basieren auf den Prinzipien der geometrischen Optik, es ist also von der durch Beugung verursachten Ausbreitung des Bildes abgesehen. Ferner ist die Voraussetzung gemacht, daß die Schwärzung der Beleuchtungsintensität proportional ist, was bekanntlich nicht zutrifft. Trotzdem glaube ich, daß die Ausführungen zur begrifflichen Klärung sowie zur quantitativen Beurteilung des Grades der Chromasie beitragen können.

Königsberg i. Pr., 8. Nov. 1927, II. Physikalisches Institut.

(Eingegangen 18. November 1927.)

BESPRECHUNGEN.

A. G. Webster, Partial differential equations for mathematical physics. Edited by S. I. Plimpton. VII u. 440 S. Mit 97 Figuren. New York, G. E. Stechert u. Co., Leipzig, B. G. Teubner. 1927. M. 23.—, geb. M. 25.—.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, klarzumachen, wie die Integrationsmethoden der in der mathematischen Physik vorkommenden partiellen Differentialgleichungen aus allgemeinen Gesichtspunkten gewonnen werden können. Man hat nämlich zwei wesentliche Methoden: die erste Methode geht von Reihenentwicklungen bzw. Integraldarstellungen aus, deren Muster die Fourierschen Reihen bzw. Integraldarstellungen sind; die zweite Methode verallgemeinert die in der Potentialtheorie auf Green, bei hyperbolischen Differentialgleichungen auf Riemann zurückgehende Schlußweise.

In dem vorliegenden Buche werden nun zunächst die wichtigsten partiellen Differentialgleichungen, wie die des Wärmeflusses, der Hydrodynamik und des Schalles, der Elastizität, der Strömung der Elektrizität in Drähten und schließlich die Maxwellschen Gleichungen kurz abgeleitet. Wegen späterer Verwendung wird sodann die Integration partieller Diffe-

rentialgleichungen erster Ordnung gebracht. Im dritten Kapitel werden die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen bei konstanten Koeffizienten in elliptische, hyperbolische und parabolische eingeteilt und explizit integriert, was hier der oben erwähnten zweiten Methode entspricht. Das Problem der kleinen Schwingungen für endlich viele Punkte leitet dann durch Grenzübergang zu den Fourierreihen über, wobei die Fundamentalbegriffe aus der Theorie der Integralgleichungen gebracht werden. Dieses geschieht alles propädeutisch und erhält erst im vierten Kapitel seine festen Grundlagen durch die exakte Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale, die bei unendlich großem Intervalle bzw. Bereiche an die Stelle der Reihen treten. Die Darstellung durch Fourierintegrale wird dann in Anschluß an Cauchy zur Gewinnung von Integralen der Wellengleichung, der Wärmeleitungsgleichung und der Telegraphengleichung benützt. Im fünften und sechsten Kapitel kommt, abgesehen von wenigen Bemerkungen, die zweite Methode zur Geltung; zunächst werden die bekannten Methoden der Potentialtheorie gebracht, die Greensche Funktion wird eingeführt, der Zusammenhang der Theorie der schwingenden Membrane mit den Integralgleichungen wird dargelegt. Das sechste Kapitel behandelt die Riemann-Volterrasche Integrationstheorie bei hyperbolischen und hyperbolisch-elliptischen Differentialgleichungen sowie die in der Physik besonders wichtige Fortpflanzung von Unstetigkeiten in diesen Fällen. Kapitel 7 und 8 sind der Theorie und Anwendung der Kugelfunktionen, Zylinderfunktionen und Laméschen Funktionen gewidmet, Kapitel 9 den Integralgleichungen. In dem Anhang wird neben anderem eine kurze funktionentheoretische Behandlung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen gebracht.

Das Buch bringt bei verhältnismäßig geringem Umfang eine Menge von Stoff. Angenehm berührt die fortlaufende Verbindung der mathematischen Entwicklungen mit physikalischen Deutungen. Erstaunt war ich nur über die Bemerkung des Herausgebers in der Einleitung, daß der verstorbene Verfasser zwischen der Cauchyschen Benützung des Fourierintegrals und der Methode der Entwicklungen nach Normalfunktionen eine Disharmonie empfand, ohne dem Stande des heutigen Wissens gemäß diese vollständig aufzuklären. Aber solche Kleinigkeiten vermindern den Wert des Buches nicht, das ich wegen seiner Reichhaltigkeit warm empfehlen kann. E. Hilb.

K. K. Darrow, Introduction to Contemporary Physics. Gr. 8°. XXVI u. 453 S. Mit 85 Fig. New York, D. van Nostrand Company. 1926. $ 6.00.

Das Buch ist aus einer Reihe von Artikeln über neuere Fortschritte der Physik entstanden, die in einer amerikanischen technischen Zeitschrift erschienen sind. Es behandelt die neueren experimentellen Fortschritte der Atomphysik, bzw. der Elektronenphysik und eine Auswahl der zum Verständnis der Experimente nötigen theoretischen Überlegungen. Das Buch wendet sich etwa an den gleichen Leserkreis wie das bekannte Buch von W. Gerlach, „Materie, Elektrizität, Energie"; trotz des größeren Umfangs ist allerdings der Kreis der behandelten Gegenstände erheblich enger gezogen als in diesem.

Das Buch soll eine „Einführung in die heutige Physik" geben; es beansprucht von vornherein nicht eine systematische Vollständigkeit nach irgendeiner Richtung hin, sondern gibt eine Auswahl aus der neueren Atom- und Elektronenphysik. Der Verfasser bemüht sich dabei, das „experimentelle Atom" und das „experimentelle Elektron" herauszuarbeiten gegenüber den „theoretischen Atomen und Elektronen"; z. B. sind Masse, magnetisches Moment und abtrennbare Ladung für ihn die einzigen Eigenschaften der Atome, die von der Erfahrung verlangt und auch bestätigt werden. Die ersten beiden Kapitel behandeln demnach die experimentellen Methoden zur Bestimmung der absoluten und spezifischen Elektronenladung, der Atommasse und des magnetischen Atommoments. Im nächsten Kapitel werden an Hand des periodischen Systems die periodischen und die nichtperiodischen Eigenschaften der Elemente erläutert. Das vierte und fünfte Kapitel behandeln die Ablenkung von α-Teilchen und von Elektronen durch Atome; dabei werden besonders eingehend diejenigen Versuche von Davisson über Elektronenreflexion erläutert, deren Fortsetzung bekanntlich zur Beobachtung von Kristallgitter-Elektroneninterferenzen geführt hat. Im nächsten ziemlich umfangreichen Kapitel wird an Hand der „korpuskularen" Eigenschaften des Lichtes (lichtelektr. Effekt, kurzwellige Grenze des Röntgenspektrums, Comptoneffekt), der Dualismus: Wellen und Korpuskeln ausführlich diskutiert. Mit dem folgenden Kapitel über Ionisation beginnt die Überleitung in die Spektroskopie; die Elektronenstoßversuche, eine Anzahl ausgewählter Daten aus der Spektroskopie und ihre Deutung auf Grund der Bohrschen Theorie bilden den Gegenstand der Kapitel 8 bis 12. Das letzte Kapitel, Elektrizitätsleitung in Gasen, fällt etwas aus dem Rahmen des übrigen heraus; es steht nur insofern in Zusammenhang mit den früheren Kapiteln, als die meisten der dort beschriebenen Ergebnisse aus Untersuchungen über den Elektrizitätsdurchgang durch (verdünnte) Gase hervorgegangen sind. Bei der Beschreibung der Apparatur von I. Danysz auf S. 186 im Abschnitt „Abtrennung von festgebundenen Elektronen von Atomen" ist dem Verf. ein Irrtum unterlaufen. Die Elektronenquelle S wurde bei Danysz nicht mit „X-Strahlen, die von einer Quelle links außerhalb der Zeichnung kamen", bestrahlt, wie dort angegeben, sondern Danysz hat β-Strahlenspektren photographiert; magnetische Spektren der von Röntgenstrahlen emittierten Elektronen sind erst später von anderen Autoren (de Broglie, Robinson, Whiddington) erhalten worden. Der Irrtum scheint dem Ref. darauf zu beruhen, daß im Englischen die Bezeichnung „β-rays" häufig ganz allgemein für alle Elektronenstrahlen großer Geschwindigkeit benutzt wird.

Das geistreich und anregend geschriebene Buch ist mit Genuß zu lesen; es ist aber recht bezeichnend für das heutige außerordentlich rasche Tempo der wissenschaftlichen Entwicklung, daß man ein Jahr nach dem Erscheinen des Buches beim Lesen schon beinahe auf Schritt und Tritt auf Dinge stößt, die inzwischen ganz merklich fortgeschritten sind. Ich erinnere nur an die Verfeinerung der Messung kleiner magnetischer Momente, an die „Elektroneninterferenzen", an die Massendefekte der Atome, die durch Erhöhung der Genauigkeit der Massenspektrogramme gemessen werden konnten und an die völlige Überbrückung des von Darrow noch „unerforscht" genannten Wellenlängengebiets im kurzwelligsten Ultraviolett; auch das Kapitel „Wellen und Korpuskeln" würde vielleicht in dem Buche „Introduction to Contemporary Physics 1927" etwas anders ausgesehen haben. Fritz Kirchner.

L. Prandtl und A. Betz, Ergebnisse der Aërodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen (angegliedert dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung). III. Lieferung. 4°. V u. 166 S. Mit 149 Abb. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1927. M. 14.50, geb. M. 16.50.

Nach 4jähriger Unterbrechung (vgl. die Besprechung der beiden ersten Lieferungen diese Zeitschr. **25**, 308, 1924) erscheint hier wieder ein umfangreicher Tätigkeitsbericht der Aërodynamischen Versuchsanstalt. Die Einteilung des Stoffes nach dem gewohnten Programm: erst einige theoretische Ergebnisse, dann neue Versuchseinrichtungen der Anstalt und schließlich zahlreiche neue Versuchsergebnisse.

Den Reigen der theoretischen Abhandlungen eröffnet ein Aufsatz von Prandtl: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Prandtl schildert hier selbst ausführlicher den Gedankengang seiner Ähnlichkeitsbetrachtung, die von dem empirischen Widerstandsgesetz der Röhrenströmung auf ein Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt führt, und gibt eine Anwendung für den Widerstand einer angeströmten Platte parallel zum Luftstrom, die durch die Versuche sehr gut bestätigt wird. Es folgt, ebenfalls von Prandtl: „Über Wirbelablösung und deren Verhinderung" mit schönen Lichtbildern von Strömungen um ruhende und rotierende Zylinder. Fortführungen der Tragflügeltheorie enthalten die folgenden drei Aufsätze: Prandtl, Über den Einfluß der Stromlinienkrümmung auf den Auftrieb von Doppeldeckern; O. Schrenck, Theoretisches über die Joukowsky-Profile; Prandtl, Der induzierte Widerstand von Flügeln mit Endscheiben. Schließlich noch ein Aufsatz von Betz, Theoretisches über Windräder, in dem die maximale Leistung eines Rades von gegebenem Durchmesser berechnet wird.

An neuen Versuchseinrichtungen der Anstalt werden beschrieben kleine Drehstrommotoren zum Antrieb von Modellpropellern (nach Ackeret), die gestatten, die Flugzeugmodelle mit laufendem Propeller zu untersuchen. Diese kleinen Drehstrommotoren stellen die Lösung des enorm schwierigen Problems dar, einen Antriebsmechanismus zu finden, welcher trotz entsprechender Leistung von der Größenordnung 1 PS so kleine Abmessungen hat, daß die Strömung durch ihn nicht wesentlich gestört wird.

Von den 22 Abhandlungen über Versuchsergebnisse beziehen sich 15 auf flugtechnische Fragen, die übrigen 7 auf andere Fragen und zeigen damit, daß die Anstalt mehr und mehr auch anderen Luftwiderstandsproblemen nutzbar gemacht wird. Von den flugtechnischen Ergebnissen sei hervorgehoben die Untersuchung weiterer Profile, wobei jetzt statt der großen Profilbilder Zahlentabellen der Profilkoordinaten mitgeteilt werden. Ferner Versuche über Flügel mit Ausschnitten, über solche mit Endscheiben (wie beim Flettnerrotor), über solche mit Klappen und Spalt über die Beeinflussung der Eigenschaften von Tragflügeln durch Motorgondeln und schließlich Untersuchungen einiger ganzer Flugzeugmodelle.

Die nicht flugtechnischen Arbeiten beziehen sich auf die Druckverteilungen an gestaffelten Flügelgittern (von Bedeutung für den Turbinenbau), auf Windräder, auf den Winddruck an einem Gasbehälter, an ganzen Brückenträgern, an einzelnen Profilträgern. Von besonderem Interesse sind schließlich noch zwei Untersuchungen, die auf Veranlassung der Reichsbahndirektion Hannover bzw. der Studiengesellschaft für die Rheinisch-Westfälische Schnellbahn ausgeführt wurden. Die erstere bezieht sich auf Windschutzgitter zur Verhinderung störenden Windeinflusses auf abrollende Wagen beim Rangierbetrieb, die letztere auf einen Schnellbahnwagen bei Fahrt auf freier Strecke und im Tunnel und auf den Druckverlauf am Wagen bei der Begegnung zweier Züge in einem Tunnel.

Im Anhang ist noch ein Literaturverzeichnis von weiteren 48 Publikationen des Göttinger Kreises aufgeführt, die seit dem Erscheinen des letzten Heftes gedruckt wurden und einen weiteren Beweis seiner reichen Fruchtbarkeit darstellen.

Das ganze Heft wieder ein Muster konzentrierter Qualitätsarbeit! Wenn es gestattet ist, einen formalen Wunsch auszusprechen, so wäre es nur der, daß die Verfasser der einzelnen Artikel bzw. die Versuchsleiter statt nur im Vorwort auch bei den Arbeiten selbst zu finden wären.

L. Schiller.

K. Goldschmidt, Aluminothermie. (Chemie und Technik der Gegenwart, Bd. V.) 8°. VII u. 174 S. Mit 81 Abb. im Text, 1 farb. Tafel u. 1 Bildnis. Leipzig, S. Hirzel. 1925. Geh. M. 10.—, geb. M. 12.—.

Der Verfasser ist der Bruder und langjährige Mitarbeiter des Erfinders der aluminothermischen Verfahren, Prof. Dr. Hans Goldschmidt, der selbst kurz vor seinem Tode die Herausgabe eines solchen Buches plante. Zwei einleitende Kapitel behandeln die Geschichte der Aluminiumgewinnung und die der Thermitreaktion (Reduktion von Metalloxyden durch Aluminium). Die eigentliche Entdeckung Goldschmidts besteht nicht in der schon bekannten Reaktion selbst, sondern in der Erkenntnis, daß sie durch lokale Zündung ohne Vorwärmen einzuleiten und daher kontinuierlich zu führen ist. Die weiteren Kapitel behandeln Metallgewinnung und Schweißung in technischer und historischer Beleuchtung, ohne Spezialkenntnisse zu verlangen, und in interessanter Darstellung. Besonders hervorzuheben ist die ausgezeichnete Ausstattung des Buchs hinsichtlich Papier, Druck und Illustration.

G.-M. Schwab.

Nachtrag zu dem Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1927/28 der Universität Hamburg.

Möller: Elektronenbewegung in Radioröhren mit Demonstrationen, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten Fortgeschrittener, tägl.; Wechselstromtechnik mit Übungen und Demonstrationen 3; Elektrotechnisches Praktikum, 5; Landwirtschaftliche Maschinenlehre, 1. —

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ehrung: Dem ord. Professor der Chemie an der Universität Würzburg Dr. Otto Dimroth wurde der Titel eines Geheimen Regierungsrates verliehen.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für allgemeine Chemie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Viktor Cordier-Löwenhaupt.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13 70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11 20, im Ausland $ 3 —. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 2. Ausgegeben am 15. Januar 1928. Nr. 780. Printed in Germany. **29. Jahrgang.**

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 2 — 15. Januar 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 4 am 10. Februar 1928

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Methode zur Bestimmung der Zahl angeregter Atomzustände[1]).

Von Hedwig Kohn.

Bei dem Kirchhoff Bunsenschen Versuch der Linienumkehr beobachtet man bekanntlich Folgendes: Man läßt die Strahlung, die von einem schwarzen Körper oder einer anderen Lichtquelle mit kontinuierlichem Spektrum („umkehrende" Lichtquelle) ausgeht, einen selektiv emittierenden und absorbierenden Dampf (die „umzukehrende" Lichtquelle) durchsetzen. Die von Dampf ausgesandte Spektrallinie hebt sich bald hell, bald dunkel von dem kontinuierlichen Spektrum der „umkehrenden" Lichtquelle ab, je nach der Helligkeit, die man dieser erteilt. Im Grenzfall verschwindet die Spektrallinie; diese Erscheinung hat man im engeren Sinne als „Umkehr" bezeichnet. Sie tritt ein, wenn der Dampf ebensoviel von der Strahlung der „umkehrenden" Lichtquelle absorbiert, wie er selbst emittiert. Die analytische Formulierung für die drei geschilderten Fälle wird durch die Beziehung

$$E_\lambda \, d\lambda \gtreqless e_{\lambda, T} \cdot A_\lambda \, d\lambda \qquad (1)$$

gegeben, in welcher $E_\lambda d\lambda$ und A_λ das Emissions- bzw. Absorptionsvermögen des „umzukehrenden" Dampfes für den Spektralbezirk $d\lambda$, im Kirchhoffschen Sinne, bedeuten, $e_{\lambda, T} d\lambda$ das Emssionsvermögen des „umkehrenden" schwarzen Strahlers von der Temperatur T. Ist im besonderen der „umzukehrende" Dampf ein Temperaturstrahler, z. B. eine Bunsenflamme von der Temperatur T_1, also $E_\lambda d\lambda = A_\lambda \cdot e_{\lambda, T_1} d\lambda$, so wird im Falle der „Umkehr"

$$e_{\lambda, T_1} = e_{\lambda, T},$$

d. h. die Temperatur des Dampfes wird unmittelbar durch diejenige des „umkehrenden" schwarzen Strahlers (oder durch die schwarze Temperatur einer beliebigen geeichten Lichtquelle) angegeben. Auf dieser Grundlage hat Féry[1]) eine quantitative Methode der Temperaturbestimmung gasförmiger Temperaturstrahler entwickelt.

Ist der Dampf kein Temperaturstrahler (oder ist der Beweis hierfür noch nicht besonders erbracht[1]), so kann man immerhin formal den Ansatz

$$E_\lambda d\lambda = A_\lambda \cdot e_{\lambda, T} p \lambda$$

machen. Die aus der Linienumkehr ermittelte Temperatur T, die als „Umkehrtemperatur" (U.-T.) oder nach E. Pringsheim[2]) als „spezifische" Temperatur bezeichnet wird, ist dann jedoch keineswegs (oder mindestens nicht ohne weiteres) mit der thermischen Temperatur zu

1) Vorgetragen auf der Gauvereinstagung der Deutsch. Physik. Gesellsch., Breslau, d. 13. Juni 1927.

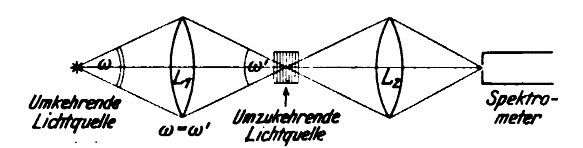
1) C. L. Féry, „Sur la température des flammes", C. R. **137**, 909, 1903; vgl. ferner H. Kohn, Dissert. Breslau 1913; Ann. d. Phys. **4**, 44, 749, 1914 und die dort angegebene ältere Literatur.

2) E. Pringsheim, Temperaturstrahlung und Luminiszenz, Scientia **13** (7), 174, 1913; Jahresber. der Schles. Ges. f. vaterl. Kultur II. Abt. Naturwiss. Sekt. 93, 1913.



identifizieren; auch variiert sie im allgemeinen mit der Wellenlänge. Indessen kommt der „Umkehrtemperatur" im Rahmen der ursprünglichen Bohrschen Theorie eine einfache und gut verwertbare Bedeutung zu, was im folgenden gezeigt werden soll.

Für die Energiebeträge, die die „umzukehrende" Lichtquelle (Dampf) der einfallenden Strahlung von der Frequenz ν durch Absorption entzieht und durch die eigene Emission wieder zurückerstattet, verwenden wir die von Einstein[1]) bei der Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes gegebenen Quantenansätze. Wir können uns hierbei auf einen den Raumwin-



kel ω erfüllenden Strahlenkegel (vgl. Fig.) beschränken (der Einfachheit halber sind hier ω und ω' gleich groß gewählt), den man in die „umzukehrende" Lichtquelle eindringen läßt, und in dessen Bereich die „Umkehr" stattfindet. Wie üblich seien N_k und N_i die Zahlen der Atome in den Zuständen k und i, (Ausgangs- und Endzustand für die Emission der Linie ν), und zwar während der Einstrahlung der umkehrenden Lichtquelle; (vgl. hierüber die Diskussion auf S. 51 u. 52), $B_{k,i}$ und $B_{i,k}$ seien die Koeffizienten für die durch Einstrahlung erzwungenen Übergänge ($k \to i$, $i \to k$), $A_{k,i}$ die Wahrscheinlichkeit der spontanen Übergänge $k \to i$ (Ü.-W.), schließlich $u_{\nu,T}$ die Dichte der einfallenden Strahlung. Alsdann hat der im Raumwinkel $\omega' = \omega$ absorbierte Energiebetrag den Wert

$$u_{\nu,T} \cdot h\nu \,(N_i B_{i,k} - N_k B_{k,i}) \frac{\omega}{4\pi},$$

der emittierte Betrag den Wert

$$N_k A_{k,i} \cdot h\nu \frac{\omega}{4\pi},$$

und die Bedingungsgleichung für „Umkehr" erhält die Form

$$u_{\nu,T}\,(N_i B_{i,k} - N_k B_{k,i}) = N_k A_{k,i}. \qquad (2)$$

Die Koeffizienten für die durch Strahlung induzierten Übergänge ersetzen wir durch die spontanen Ü.-W. nach den bekannten, im Strahlungsgleichgewicht gewonnenen Beziehungen

$$g_i B_{i,k} = g_k B_{k,i}$$

$$B_{i,k} = A_{k,i} \frac{g_k}{g_i} \frac{c^3}{8\pi h \nu^3},$$

in denen g_k und g_i die Quantengewichte (Qu.-G.) der betrachteten Zustände bedeuten. Für die Strahlungsdichte $u_{\nu,T}$ ist der Plancksche Ausdruck

$$u_{\nu,T} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/k\bar{T}} - 1}$$

einzuführen, dann folgt

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{-h\nu/k\bar{T}} = \frac{g_k}{g_i} e^{-\varepsilon_i/k\bar{T}}. \qquad (3)$$

Durch die Strahlungsdichte oder die Temperatur $\bar{T}$ des „umkehrenden" schwarzen Strahlers, d. i. aber die Umkehrtemperatur des betrachteten Dampfes, wird also das Verhältnis der Zahl der Zentren in den beiden stationären Zuständen k und i bestimmt, wenn das Verhältnis der Qu.-G. als bekannt vorausgesetzt wird[1]).

Das gewonnene Resultat leuchtet unmittelbar ein. Denn in dem betrachteten Strahlenkegel ω (und für den schmalen Frequenzbereich $d\nu$ an der Frequenz ν) haben wir bei „Umkehr" den Dampf quasi zu einem schwarzen Strahler von der Temperatur $\bar{T}$ und der Strahlungsdichte $u_{\nu,\bar{T}}$ gemacht; was ihm selbst zu dieser Strahlungsdichte fehlt, wird durch den nichtabsorbierten Betrag der eingestrahlten Energie ergänzt. (Würde man den Dampf unbemerkt entfernen, so könnte der Beobachter, der im Spektrum des schwarzen Körpers auf „Umkehr" eingestellt hat, dies gar nicht gewahrwerden.) Daher gilt hier, d. h. in dem betrachteten Kegel (unabhängig davon, was in dem durchstrahlten Volumen in anderen Richtungen vor sich geht), die in Gleichung (2) zum Ausdruck kommende Bedingung für Hohlraumstrahlung: Gleichheit der Zahl der durch Strahlung induzierten Übergänge $i \to k$ mit der Summe der spontanen und durch Einstrahlung induzierten Übergänge $k \to i$; und aus dieser Bedingung ist das Verhältnis N_k/N_i eindeutig gegeben.

Für einen Temperaturstrahler ist das Resultat selbstverständlich; denn da für ihn, wie oben ausgeführt, die U.-T. mit seiner wahren Temperatur T identisch ist, so ist die Gleichung

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{-h\nu/k\bar{T}} = \frac{g_k}{g_i} e^{-h\nu/kT}$$

nichts anderes als der Ausdruck für Boltzmannsche Verteilung bei der Temperatur $\bar{T} = T$. Nun ist aber die obige Formulierung der Umkehrbedingung ganz unabhängig davon entwickelt worden, ob der leuchtende und absorbierende Dampf ein Temperaturstrahler ist oder nicht.

1) A. Einstein, Physik. Zeitschr. **18**, 121, 1917.

1) Im Sinne der Schrödingerschen Wellenmechanik bildet die Umkehrtemperatur ein Maß für die Erregungsstärke („Amplitudenquadrat") der Eigenschwingung, die einem bestimmten Eigenwert (Zustand, Therm) zugehört.



d. h. unabhängig davon, ob die Anregungszustände nur durch die der Temperatur entsprechenden Zusammenstöße geschaffen werden oder durch elektrische Entladungen, chemische Prozesse, u. a. m. bzw. durch die mit ihnen verknüpften Stöße 1. und 2. Art. Die Verwendung der Umkehrmethode zur Bestimmung der Zahl angeregter Atomzustände und die sich hieraus ergebende Deutung der „Umkehrtemperatur" oder „spezifischen Temperatur" ist also eine ganz allgemeine, unabhängig von der Art des Anregungsprozesses.

Die Methode vereinfacht sich praktisch sehr, wenn es nur auf einen Vergleich der Zentrenzahlen für Linien mit verschiedenem Ausgangs- und gemeinsamem Endzustand bzw. gemeinsamem Ausgangs- und verschiedenem Endzustand ankommt. Beide Fälle liegen bei dem Vergleich der Atomzahlen in den Teilniveaus der Multiplett-Therme vor. Der erste Fall kommt im besonderen bei dem Vergleich der Atomzahlen in den Ausgangsniveaus für die Linien ein und derselben Serie in Betracht.

Sind z. B. k_1 und k_2 die Ausgangsniveaus für die Linien λ_1 und λ_2 (bei gleichem Endniveau), $e_{\lambda_1, T_1} d\lambda$ und $e_{\lambda_2, T_2} d\lambda$ die den U.-T. T_1 und T_2 entsprechenden Helligkeiten der „umkehrenden" Lichtquelle (wahre Temperatur bei schwarzem Körper, schwarze Temperatur bei beliebigem Strahler), so ist einerseits

$$\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}} = \frac{g_{k_2}}{g_{k_1}} e^{-c_2\left(\frac{1}{\lambda_2 T_2} - \frac{1}{\lambda_1 T_1}\right)},$$

anderseits, (im Geltungsbereich der Wienschen Strahlungsformel),

$$V_{2,1} = \frac{e_{\lambda_2, T_2}}{e_{\lambda_1, T_1}} = \frac{\lambda_2^{-5}\, e^{-c_2/\lambda_2 \cdot T_2}}{\lambda_1^{-5}\, e^{-c_2/\lambda_1 \cdot T_1}},$$

also

$$\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}} = \frac{g_{k_2}\, e_{\lambda_2, T_2}}{g_{k_1}\, e_{\lambda_1, T_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 = \frac{g_{k_2}}{g_{k_1}} \cdot V_{2,1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5. \qquad (3a)$$

Die absolute Eichung der „umkehrenden" Lichtquelle erübrigt sich also; nach der Einstellung auf „Umkehr" ist lediglich das Helligkeitsverhältnis $V_{2,1}$ durch heterochromen Vergleich von e_{λ_2, T_2} und e_{λ_1, T_1} zu bestimmen.

Bei engbenachbarten Multiplettkomponenten ($\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$) wird

$$\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}} = \frac{g_{k_2}}{g_{k_1}} e^{-\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}. \qquad (3b)$$

Findet man gleiche U.-T., so liegt sogenannte „natürliche Anregung" vor, bei der die Atomzahlen in den Teilniveaus im Verhältnis der Qu.-G. stehen.

Die geschilderte Methode der Linienumkehr, speziell in der soeben gegebenen Vereinfachung, kann unter anderen dazu verwendet werden, die Zahl der Atome (Anreicherung) in metastabilen Zuständen, wie sie von Meißner[1]), Ladenburg[2]), Dorgelo[3]) in elektrisch angeregten Gasen beobachtet und gemessen wurde, im Vergleich zu der in gewöhnlichen Zuständen quantitativ zu ermitteln. Solche Versuche sind in Angriff genommen. Das Wesentliche ist, daß man nach der Umkehrmethode, die ja, wenn man so will, bereits eine kombinierte Emissions- und Absorptionsmessung darstellt, unmittelbar Atomzahlen (N) mißt, und nicht — wie bei Absorptions-, Dispersions-, Emissionsmessungen — nur die Zahl ($\mathfrak{N}$) der Dispersionselektronen (Stärke der Ersatzoszillatoren).

Kombiniert man z. B. innerhalb einer Serie die Linienumkehrmessung mit der Intensitätsmessung der einzelnen Glieder, so ergibt sich das Verhältnis ihrer Ü.-W., vorausgesetzt, daß das Qu.-G. des Ausgangszustandes innerhalb der Serie konstant bleibt.

Es darf nicht übersehen werden, daß durch die äußere Einstrahlung bei der Umkehrmessung das Gleichgewicht in dem umzukehrenden Dampfstrahler gegenüber seinem Zustand ohne äußere Einstrahlung verschoben werden wird; die Verteilungszahlen werden geändert werden, man bestimmt das Verhältnis N_k/N_t bei gleichzeitiger äußerer Einstrahlung[4]).

Gleichzeitige Intensitätsmessungen in einem nichtdurchstrahlten Volumen und einem solchen, welches von der auf „Umkehr" abgeglichenen Strahlung durchsetzt wird, können über die Größe der Änderung von N_k Aufschluß geben. Früher haben wir, um festzustellen, ob und wie sehr das Temperaturgleichgewicht in einer Bunsenflamme gestört würde, solche Helligkeitsmessungen während des Umkehrversuches an den D-Linien angestellt, aber keine, außerhalb der Fehlergrenze liegende, Änderung konstatieren können[5]). Daß die Änderung aber auch wesentliche Beträge annehmen kann, folgt aus der Tatsache, daß sich ja beträchtliche Resonanzstrahlung durch äußere Einstrahlung erzielen läßt, im besonderen, wenn der Endzustand für die betreffende Emissionslinie ein metastabiler ist[6]).

1) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. **76**, 124, 1925; Physik. Zeitschr. **26**, 687, 1925.

2) R. Ladenburg, H. Kopfermann u. Agathe Carst, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 255, 1926; s. a. Naturwiss. **14**, 1208, 1926.

3) H. B. Dorgelo, Zeitschr. f. Phys. **34**, 766, 1925; **36**, 467, 1926; Physika **5**, 429, 1925.

4) Diskussionen mit Herrn Ladenburg im Anschluß an meinen Bericht auf dem Breslauer Gautag haben die Aufmerksamkeit besonders auf diesen Punkt gelenkt.

5) H. Kohn, l. c.; H. Senftleben, Dissert. Breslau 1915, Ann. d. Phys. **47**, 966, 1915.

6) K. W. Meißner, Zeitschr. f. Phys. **43**, 449, 1927; hier auch weitere Literaturangaben; W. de Groot, Naturw. **14**, 104, 1926.



Die durch die Einstrahlung bewirkte Änderung ist in allen solchen Fällen von Bedeutung, in denen man gerade die Verteilung bei gegebenen Bedingungen, elektrischen, chemischen usw. ohne äußere Einstrahlung kennen lernen möchte; in diesen Fällen wird sie durch Hilfsmessungen zu eliminieren sein. Die Störung ist jedoch bedeutungslos, wenn man z. B., wie oben erwähnt, durch kombinierte Umkehr- und Intensitätsmessung relative Werte der Ü.-W. ermitteln will; in solchen Fällen müssen dann eben nur die Intensitätsmessungen während der äußeren Einstrahlung ausgeführt werden.

Die hier gegebene Deutung des Umkehrversuches soll in erster Anwendung zur Diskussion der Resultate herangezogen werden, die wir im vorigen Jahr[1]) für das Intensitätsverhältnis der Dublettkomponenten des 2. *Cs*-Hauptseriengliedes gewonnen haben. Nach der holländischen Intensitätsregel III[2]) wäre hierfür der Wert des Verhältnisses der Quantengewichte der Ausgangsniveaus, also 2 : 1, zu erwarten gewesen, während die Messungen angenähert 4 : 1 ergaben. Bevor man dazu übergeht, aus dieser Diskrepanz den Schluß auf eine Verschiedenheit in den Ü.-W. für die beiden Komponente zu ziehen, ist streng genommen noch der Beweis zu erbringen, daß die Zahlen der Atome in den beiden Ausgangsniveaus im Verhältnis der Qu.-G. dieser Zustände stehen. Im allgemeinen hat man dies bei so eng benachbarten Niveaus als selbstverständlich angenommen, zumal in Flammen, wo thermische Anregung vorausgesetzt wird. Indessen ist für die Knallgasflamme, die bei den genannten Intensitätsmessungen verwendet wurde, der Nachweis der Temperaturstrahlung — etwa in der Form wie früher für die Bunsenflamme[2]) — bisher nicht erbracht worden.

Es wurden daher in der Knallgasflamme Umkehrmessungen an den beiden Komponenten des 2. *Cs*-Dubletts (4555/4593 Å) vorgenommen. Als „umkehrende" Lichtquelle diente der positive Krater des Kohlelichtbogens, dessen Helligkeit durch Nicolsche Prismen meßbar geschwächt wurde. Die Flamme mußte relativ stark gefärbt werden, damit die Absorption, die an 2. Hauptseriengliedern ja schon beträchtlich gegenüber der am 1. herabgedrückt ist, die dunklen Linien genügend kraß aus dem Spektrum heraustreten ließ, um genaue Einstellungen vornehmen zu können. Die „Umkehr"-Messungen fielen auf 5 Proz. genau aus (bezogen auf die Helligkeit der „umkehrenden" Lichtquelle) und ergaben innerhalb dieser Fehlergrenze gleiche Umkehrtemperatur der beiden Komponenten. Innerhalb etwa 5 Proz. stehen also nach Gleichung (3b) die Atomzahlen in den Ausgangsniveaus der beiden Komponenten des 2. *Cs*-Hauptseriengliedes im Verhältnis ihrer Qu.-G., wobei es im Sinne der Methode dahingestellt bleibt, ob in dem untersuchten Fall (Knallgasflamme) Temperaturstrahlung vorliegt oder nicht. (Die angegebene Fehlergrenze schließt bereits die kleine Änderung ein, die sich bei Boltzmannscher Verteilung infolge der Wellenlängendifferenz von etwa 4 mμ in den Umkehreinstellungen für die beiden Komponenten streng genommen zeigen müßte und eine entsprechende Abweichung des Verhältnisses $\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}}$ von dem der Qu.-G. $\left(\frac{g_{k_2}}{g_{k_1}}\right)$ bedingt.)

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, November 1927.

(Eingegangen 21. November 1927.)

1) H. Kohn und H. Jakob, Physik. Zeitschr. **27**, 819, 1926.

2) H. C. Burger und H. B. Dorgelo, Zeitschr. f. Phys. **23**, 258, 1924.

Über die Schrödingersche Funktion im asymmetrischen Zweizentrenproblem und die Ionenladung in einigen Kristallgittern.

Von K. F. Niessen.

Zusammenfassung.

Wird ein Elektron angezogen von zwei Attraktionszentren mit ungleicher positiver Ladung (sagen wir k_1e links und k_2e rechts, während $k_1 < k_2$), so wird gezeigt, daß die nullte Schrödingersche Funktion ψ in zwei Punkten, welche symmetrisch in bezug auf die Mittelebene liegen, auch links und rechts verschieden ist und zwar rechts größer als links. Für die physikalische Bedeutung dieses Resultates sehe man den Schluß der Abhandlung.

§ 1.

Sind r_1 und r_2 die Abstände vom Elektron zum linken bzw. rechten Zentrum, so lautet die Schrödingersche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E+\frac{k_1e^2}{r_1}+\frac{k_2e^2}{r_2}\right)\psi=0 \tag{1}$$

worin E die Energiekonstante darstellt.

Befinden sich die Zentren in den Punkten:

$$x=-c,\ y=0,\ z=0$$
$$x=+c,\ y=0,\ z=0,$$

und führt man elliptische Koordinaten ein:

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}$$

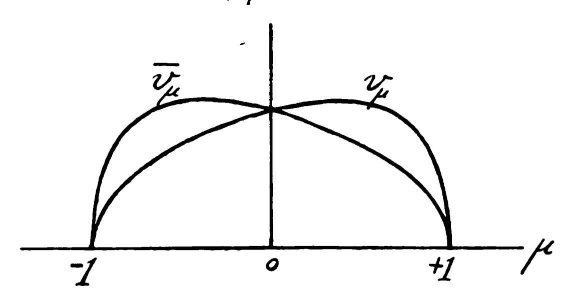
$$\mu = \frac{r_1 - r_2}{2c}$$

φ = Winkel zwischen einer festen und einer beweglichen Ebene, beide durch die x-Achse, und bedient man sich noch der dimensionslosen Größen:

$$\varepsilon = \frac{2c}{a_H}, \qquad \gamma = \frac{E\varepsilon^2}{4E_H},$$

worin a_H den ersten Bohrschen Radius und E_H die Energie im unangeregten H-Atom darstellt; so geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$(\lambda^2 - 1)\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + 2\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + [(k_1 + k_2)\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2]\psi$$
$$+ (1 - \mu^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} - 2\mu\frac{\partial\psi}{\partial\mu} \qquad (2)$$
$$+ [(k_1 - k_2)\varepsilon\mu + \gamma\mu^2]\psi$$
$$+ c^2(\lambda^2 - \mu^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0\ ^{1)}.$$



Schreibt man die Lösung in der Form:

$$\psi = \psi_\lambda(\lambda)\cdot\psi_\mu(\mu)\cdot\psi_\varphi(\varphi), \qquad (3)$$

so stellt sich heraus, wie bei Burrau, daß

$$\psi_\varphi = a\cos(n_\varphi\varphi + b).$$

Wir interessieren uns nur für die nullte Eigenfunktion, so daß ψ keine Nullpunkte haben soll, und deshalb

$$n_\varphi = 0$$

und einfach:

$$\psi = \psi_\lambda(\lambda)\,\psi_\mu(\mu)$$

zu setzen ist.

Nach Einführung einer „Separationskonstante" A läßt sich die Differentialgleichung (2) zerlegen in:

$$(\lambda^2 - 1)\frac{\partial^2\psi_\lambda}{\partial\lambda^2} + 2\lambda\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\lambda} \qquad (4)$$
$$+ [A + (k_1 + k_2)\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2]\psi_\lambda = 0$$

1) Die Ableitung der Differentialgleichung für $k_1 = k_2 = 1$ findet man in O. Burrau, Berechnung des Energiewertes des Wasserstoffmolekelions (H_2^+) im Normalzustand. Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab **7**, **14**, 1927.

$$(1 - \mu^2)\frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial\mu^2} - 2\mu\frac{\partial\psi_\mu}{\partial\mu} \qquad (5)$$
$$+ [-A + (k_2 - k_1)\varepsilon\mu + \gamma\mu^2]\psi_\mu = 0.$$

Diese sind vom Typus:

$$\frac{d^2y}{dx_2} + P\frac{dy}{dx} + Q = 0,$$

welche mittels des Ansatzes:

$$\left.\begin{aligned} y &= v\cdot w \\ w &= e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

auf eine Differentialgleichung ohne ersten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} + Q\right)v = 0$$

zurückgeführt wird.

Wir möchten nun zeigen, daß im Zweizentrenproblem mit

$$k_1\ (\text{links}) < k_2\ (\text{rechts})$$

für zwei in bezug auf der Mittelebene symmetrisch gelegenen Punkte[1])

$$\lambda_0, -\mu_0, \varphi_0\ (\text{links}),\quad \lambda_0, +\mu_0, \varphi_0\ (\text{rechts})$$

immer

$$\psi(\lambda_0, -\mu_0, \varphi_0) < \psi(\lambda_0, +\mu_0, \varphi_0)$$

also nach (3), daß immer

$$\psi_\mu(-\mu_0) < \psi_\mu(+\mu_0)\ ^{2)}.$$

Für diesen Zweck brauchen wir die Transformation (6) nur auf die Differentialgleichung (5) anzuwenden.

Wir bekommen dann mit:

$$\psi_\mu = w_\mu v_\mu$$

$$w_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

$$\frac{d^2v_\mu}{d\mu^2} + K_\mu v_\mu = 0 \qquad (7)$$

mit der Abkürzung:

$$K_\mu = \frac{1 + [-A + p\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1 - \mu^2)}{(1 - \mu^2)^2}, \qquad (7a)$$

$$p = k_2 - k_1 > 0.$$

Der elliptische Koordinat μ bewegt sich zwischen

$$-1 \leq \mu \leq +1.$$

Für $\mu = \pm 1$ wird aber $w_\mu = \infty$. Damit ψ dort nicht unendlich werde, legen wir v_μ die Forderung auf:

$$v_\mu(-1) = 0, \quad v_\mu(+1) = 0.$$

1) In der ganzen Abhandlung verstehen wir unter μ_0 immer einen beliebigen positiven Wert von μ; also $0 < \mu_0 < 1$.

2) An und für sich wäre ein derartiges Verhalten der ψ-Funktion zu erwarten, da man ja weiß, daß im Falle der nullten Eigenfunktion, d. h. des Normalzustandes, die Ladung des Elektrons im Grenzfall sehr großen Abstandes der Zentren sich ganz auf die Umgebung des stärkst geladenen Zentrums zusammenzieht. (Hund, Zeitschr. f. Phys. **40**, 742, 1927.)



Aus der Differentialgleichung (7) folgt dann nämlich, daß ψ in diesen Punkten verschwindet wie

$$C\sqrt{1 \pm \mu}\,,$$

denn die Taylorentwicklung:

$$v_\mu = (\mu \pm 1)^\alpha \left[P + Q(\mu \pm 1) + \dots\right]$$

$$K_\mu = \frac{1}{(\mu \pm 1)^2}\left[\frac{1}{4} + L(\mu \pm 1) + \dots\right]$$

ergibt in der Differentialgleichung (7) für α:

$$\alpha = \frac{1}{2}\,,$$

so daß der Limes von

$$\psi_\mu = \frac{v_\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

für $\mu = \pm 1$ endlich bleibt.

Wir brauchen also von der Differentialgleichung (7) nur die Eigenfunktionen, und zwar die nullte, da ψ ohne Nullpunkte sein soll.

Sei $v_\mu\,(\mu)$ diese gesuchte (normierte) Eigenfunktion, dann ist aus Symmetrieüberlegungen deutlich, daß die folgendermaßen definierte Funktion $\bar v_\mu(\mu)$

$$\bar v_\mu(\mu) = v_\mu(-\mu) \tag{8}$$

die normierte Eigenfunktion sein wird, im Falle k_1 und k_2 vertauscht werden (vgl. Fig. 1).

Die Funktionen v_μ und $\bar v_\mu$ genügen also den Gleichungen:

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + \frac{1 + [-A + p\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2}\, v_\mu = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d^2 \bar v_\mu}{d\mu^2} + \frac{1 + [-A - p\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2}\, \bar v_\mu = 0 \tag{10}$$

$$v_\mu(\pm 1) = 0, \quad \bar v_\mu(\pm 1) = 0, \quad p > 0.$$

Wir wollten beweisen:

$$v_\mu(-\mu_0) < v_\mu(+\mu_0).$$

Es genügt also zu zeigen:

$$\bar v_\mu(+\mu_0) < v_\mu(+\mu_0)\,.$$

Dazu multiplizieren wir Gleichung (9) mit $\bar v_\mu$ und subtrahieren hiervon die mit v_μ multiplizierte Gleichung (10), wonach wir erhalten:

$$\bar v_\mu \frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} - v_\mu \frac{d^2 \bar v_\mu}{d\mu^2} = -\frac{2p\varepsilon\mu}{1-\mu^2}\, v_\mu \bar v_\mu\,.$$

Im rechten Glied sind v_μ und $\bar v_\mu$ als nullte Funktionen überall positiv, also ist das rechte Glied für $\mu > 0$ überall negativ, so daß:

$$\text{für } \mu > 0\colon \frac{d}{d\mu}\left(\bar v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} - v_\mu \frac{d \bar v_\mu}{d\mu}\right) < 0. \tag{11}$$

Nach der erwähnten Taylorentwicklung hat man in der Gegend von $\mu = +1$:

$$v_\mu = P(1-\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar v_\mu = \bar P(1-\mu)^{\frac{1}{2}}$$

so daß für $\mu = +1$ die Produkte $\bar v_\mu \frac{dv_\mu}{d\mu}$, $v_\mu \frac{d\bar v_\mu}{d\mu}$ endlich bleiben und:

$$\bar v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} - v_\mu \frac{d \bar v_\mu}{d\mu} = 0. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt dann für $0 < \mu < 1$:

$$\bar v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} - v_\mu \frac{d \bar v_\mu}{d\mu} > 0.$$

Dividiert man durch den positiven Wert $(\bar v_\mu)^2$, dann hat man

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{v_\mu}{\bar v_\mu}\right) > 0. \tag{13}$$

In Fig. 1 sieht man aber:

$$v_\mu(0) = \bar v_\mu(0)\,,$$

so daß der Quotient $v_\mu/\bar v_\mu$ auf der Mittelebene ($\mu = 0$) eins und wegen (13) nach rechts immer größer wird, woraus:

$$v_\mu(+\mu_0) > \bar v_\mu(+\mu_0)\,,$$

was nach (8) nichts anderes ist als:

$$v_\mu(-\mu_0) < v_\mu(+\mu_0)\,,$$

woraus wieder die in der Zusammenfassung erwähnte Beziehung folgt:

$$\psi(\lambda_0, -\mu_0, \varphi_0) < \psi(\lambda_0, +\mu_0, \varphi_0).$$

§ 2.

Physikalische Bedeutung dieses Resultats.

Da ψ^2 der Dichte der Elektronenladung proportional ist, hat dieses Resultat Interesse für das Studium der homopolaren Bindung, für die Ladungsverteilung der streuenden Elektronen in Kristallgittern und so für die Intensität des gestreuten Röntgenlichtes.

Könnte man die Bindung zweier positiven Attraktionszentren nach der klassischen Quantentheorie beschreiben mittels eines Elektrons, das eine Ellipse um die beiden Zentren als Brennpunkte beschreibt, so ergibt sich, daß das Elektron sich im Durchschnitt länger in der Nähe des schwächeren und kürzer in der Nähe des stärker geladenen Zentrums aufhält[1]), so daß die Elektronenladung rechts kleiner als links sein würde. Dagegen erhielten wir in § 1 gerade: ψ^2 links $< \psi^2$ rechts.

Hier geben die alte und die neue Quantentheorie also Effekte in entgegengesetzter Richtung.

Die alte läßt in einer homopolaren Bindung große Unterschiede in den Gesamtladungen links und rechts erwarten, selbst größer als $(k_2 - k_1)\,e$.

Nach der neuen Theorie wird die „Elektronwolke" gerade versuchen den Ladungsunterschied zwischen links und rechts auszugleichen.

Daß letzterer Effekt der richtige ist, beweisen die Messungen von Ott[2]), der aus Röntgendiagrammen für SiC, AlN, BeO, ZnS ge-

funden hat, daß das Reflexionsvermögen der Ionen in diesen Gittern annähernd einer Annahme neutraler Atome entspricht.

Wie man die Theorie solcher Gitter (im allgemeinen aller Gitter von Diamant- oder Wurzittyp) mit dem Zweizentrenproblem in Verbindung bringen kann, hat Verfasser schon früher (l. c.) gezeigt. Die Attraktionszentren $k_1 e$ und $k_2 e$ sind dann die Atomreste (nach der Grimm-Sommerfeldschen Viererschalentheorie[3]) immer positiv geladen), d. h. die Atome nach Abgabe all ihrer äußeren Elektronen, so daß k gleichzeitig die Reihe des periodischen Systems angibt, worin das neutrale Atom stand. Die losgerissenen Elektronen (und es gibt deren viele, denn $k_1 + k_2 = 8$ in diesen Verbindungen) können nun so verteilt werden, daß jeweils zwei für die Bindung zweier benachbarten ungleichartiger Atomreste sorgen. Rührte die Bindung nur von einem Elektron her, das wie in obiger Rechnung nach der Wellenmechanik „räumlich verteilt" wird, so ist die Ladung der „Elektronwolke" um die Zentra $k_1 e$ und $k_2 e$ bzw.

$$-\left(\frac{1}{2} - \delta\right) e \quad \text{und} \quad -\left(\frac{1}{2} + \delta\right) e,$$

wo als Hauptergebnis unserer Rechnung in § 1:

$$0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Im Falle von zwei bindenden Elektronen wird man also für die Ladung erwarten:

$$-(1 - \delta') e \text{ und } -(1 + \delta') e,$$

wo nun:

$$0 < \delta' < 1.$$

In den betrachteten Gittern ist jeder Atomrest nur mit andersartigen, und zwar mit deren vier verbunden, so daß die resultierende Ladung um die Reste $k_1 e$ und $k_2 e$ sein wird:

$$-(4 - \delta'') e \text{ und } -(4 + \delta'') e,$$

wo nun:

$$0 < \delta'' < 4 \qquad (14)$$

und die Gesamtladung der Ionen deshalb:

$$(k_1 - 4 + \delta'') e \text{ und } (k_2 - 4 - \delta'') e,$$

wobei zu bedenken ist, daß wegen

$$k_1 < k_2$$

noch gilt:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 < 4 \\ k_2 > 4 \end{array}\right\} \qquad (15)$$

und weiter

$$k_1 + k_2 = 8.$$

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. **27**, 300 1926.
2) H. Ott, Zeitschr. f. Krist. **61**, 529, 1925; **62**, 217, 1925; Zeitschr. f. Phys. **22**, 212, 1924.
3) H. Grimm und A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. **36**, 36, 1926.

Nun hat Ott gefunden, daß diese Gesamtladungen praktisch null sind, also daß:

$$k_1 - 4 + \delta'' = 0$$
$$k_2 - 4 - \delta'' = 0,$$

woraus:

$$\delta'' = \frac{k_2 - k_1}{2}. \qquad (16)$$

Das stimmt nach (15) also gerade mit der Ungleichheit (14).

Hätten wir, wie Verfasser es früher getan hat, die Rechnung gegründet auf der klassischen Ellipsenbahn eines Elektrons, so würde δ und damit auch δ'' negativ ausgefallen sein, und wir hätten bekommen:

$$-4 < \delta'' < 0,$$

was dem Wert (16) aus den Messungen von Ott widerspricht[1]).

Auch hier kann also die Wellenmechanik die Schwierigkeiten qualitativ auflösen, worauf man in der alten Quantentheorie gestoßen war.

1) Die damaligen Resultate waren trotzdem noch bedeutend besser wie die nach der Achterschalentheorie, in welcher die äußeren Elektronen des einen Atoms bei der Bindung die Lücke in der äußeren Schale des anderen Atoms ausfüllen.

Utrecht, 9. November 1927.

(Eingegangen 14. November 1927.)

Beziehungen zwischen Wärmeübergang und Reibung.

Von A. Sellerio.

1. Vor kurzem ist von zwei voneinander unabhängigen Seiten eine sehr wichtige Beziehung zwischen Wärmeübergangszahl und Reibungszahl aufgestellt worden, welche, nach ihren Entdeckern, die van Iterson-Lorenzsche Gleichung benannt werden darf[1]).

Der Klarheit halber, wollen wir die Bezeichnungen die wir brauchen werden, ausdrücklich definieren.

D Röhrendurchmesser. Es finden in der Röhre gleichzeitig turbulente Bewegung und Wärmeübergang zwischen Wand und (tropfbarer oder gasförmiger) Flüssigkeit statt. Falls der Querschnitt nicht kreisförmig ist, wird mit D der mittlere oder hydraulische Durchmesser gemeint;

T_s (konstante) Temperatur der inneren Wandfläche;

1) Siehe H. Lorenz, Physik. Zeitschr. **28**, 446, 1927. Die im Nachtrag, S. 618, zitierte Arbeit von van Iterson (1926) ist mir im Original nicht bekannt. Eine ähnliche Gleichung hat übrigens (1926) Prof. ten Bosch aufgestellt, die in seinem Werke „Die Wärmeübertragung" 2. Aufl. wiedergegeben ist.



T_m mittlere Temperatur der Flüssigkeit;
u_m mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit;
μ spezifische Masse, bezogen auf Raumeinheit;
c_p spezifische Wärme, bezogen auf Masseneinheit, bei konstantem Druck;
λ sogenannte Reibungszahl;
h Wärmeübergangszahl zwischen Wand und Flüssigkeit.

In einer Schicht der Länge dx, entstehen ein Druckabfall dp, und gleichzeitig eine Temperaturerhöhung dT, infolge des Wärmeaustausches dQ zwischen Wand und Flüssigkeit. Definitionsmäßig hat man bekanntlich

$$\frac{dp}{dx} = \lambda \frac{\mu}{D} \frac{u_m^2}{2} \tag{1}$$

$$\begin{cases} dQ = h\,(T_s - T_m) \cdot \pi D \cdot dx \\ dQ = \frac{\pi D^2}{4}\, u_m \cdot \mu\, c_p \cdot dT. \end{cases}$$

Daher

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\pi D \cdot h\,(T_s - T_m)}{\frac{\pi D^2}{4}\, u_m \cdot \mu\, c_p}. \tag{2}$$

In unseren Bezeichnungen, lautet die oben erwähnte Gleichung

$$h = \frac{\lambda \cdot \mu c_p \cdot}{8}\, u_m \tag{I}$$

(van Iterson, Lorenz). Gewiß hat dieselbe keinen Anspruch auf hohe Genauigkeit, doch ist sie, sowohl wissenschaftlich wie technisch, sehr willkommen zu heißen, und das um so mehr als ihre Form eine sehr einfache ist[1]).

Man darf aber nicht vergessen, daß schon längst (1874) die beiden Erscheinungen: Wärmeübergang und Reibung, durch die bekannte Reynoldssche Gleichung

$$H = \frac{R \cdot c_p\,(T_s - T_m)}{u_m} \tag{II}$$

(Reynolds) verknüpft sind.' Es wäre sonderbar, wenn Gleichung (I) und (II) voneinander unabhängig wären. Es sind ja Wärmeübergang und Strömung durch je einen einzigen Parameter bestimmt, so daß zwischen beiden Erscheinungen nur eine Verknüpfungsgleichung existieren kann. Es gibt, mit anderen Worten, von vornherein nur zwei Möglichkeiten: entweder sind Gleichung (I) und (II) gleichwertig, oder sie sind miteinander unverträglich.

Wir wollen zeigen, daß der erste Fall vorliegt.

Zu diesem Zweck, weisen wir hin auf die Bedeutungen von H, R in der Reynoldsschen Gleichung.

1) Es sei bemerkt, daß μc_p die spezifische Wärme bezogen auf Raumeinheit bedeutet, und daß bei tropfbaren Flüssigkeiten statt c_p einfach c geschrieben werden kann.

R ist die Reibungskraft bezogen auf die Flächeneinheit. Im Beharrungszustand folgt offenbar aus dem dynamischen Gleichgewicht der Kräfte $\frac{\pi D^2}{4}\,p$, $-\frac{\pi D^2}{4}\,(p - dp)$, $-R \cdot \pi D \cdot dx$, die in der Schicht dx wirken,

$$R = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} \frac{dp}{dx}. \tag{3}$$

H bedeutet den Wärmefluß zwischen Wand und Flüssigkeit, bezogen auf Flächeneinheit und Zeiteinheit, d. h.:

$$H = \frac{\frac{\pi D^2}{4}\, u_m \cdot \mu\, c_p \cdot dT}{\pi D \cdot dx}. \tag{4}$$

Aus (1), (3), bzw. (2), (4), folgt

$$R = \frac{\lambda \mu}{8}\, u_m^2 \tag{5}$$

$$H = h\,(T_s - T_m). \tag{6}$$

Wenn man nun (5), (6) in (I) setzt, erhält man (II). Umgekehrt, kann man (I) aus (II) ableiten.

Die Gleichwertigkeit beider Gleichungen ist somit bewiesen. Diese Feststellung bringt vielen Nutzen mit sich. Erstens, ist durch die Zurückführung der van Iterson-Lorenzschen Gleichung auf diejenige von Reynolds die Zuhilfenahme neuer Hypothesen oder Kunstgriffe entbehrlich. Zweitens gelten alle experimentelle Bestätigungen der Reynoldsschen Formel gleichzeitig als indirekte Bestätigungen der Gleichung von van Iterson und Lorenz. Dieser Punkt ist wichtig, in Anbetracht der Spärlichkeit des Erfahrungsmaterials.

Der Gültigkeitsbereich von Gleichung (II) ergibt sich ohne weiteres aus den Versuchen, die man angesichts der Gleichung (I) angestellt hat, von denen diejenigen Stantons[1]) besonders zu erwähnen sind.

2. Nun kann man einen Schritt weiter tun. Schon Reynolds war damit nicht zufrieden, daß in seiner Formel die Wärmeleitzahl der Flüssigkeit, die sicherlich eine Rolle spielt, nicht zum Vorschein kam. Dieselben Bedenken kann man selbstverständlich gegen Gleichung (I) haben. Den Grund dieses Mangels, welcher die Genauigkeit der Formel, beeinträchtigt, ist leicht zu erkennen, wenn man die schöne Ableitung der Reynoldsschen Formel, die von T. E. Stanton gegeben worden ist, ins Auge faßt[2]).

1) Stanton, Phil. Trans. Roy. Soc. A. 190.
2) Diese Ableitung ist von demselben Verfasser im Glazebrooks Dictionary of applied Physics, Bd. I, Schlagwort „Friction" wiedergegeben. Die Grundidee von Lorenz, in dem zitierten Aufsatz, ist nahe verwandt mit derjenigen Stantons.



Mathematisch gesprochen, handelt es sich um eine dritte Beziehung zwischen den Differentialen dx, dp, dT, die schon durch (1), (2) verbunden sind, zu finden. Eine solche Beziehung wird gewonnen durch den physikalisch gesunden Gedanken, daß je größer der Flüssigkeitsanteil ist, der durch Wirbelung an die Wand gerät, desto größer sind gleichzeitig der Verlust an Bewegungsgröße und der Wärmeaustausch zwischen Wand und Flüssigkeit. In der Beweisführung Stantons ist angenommen, daß die Turbulenz bis zur Wand der Röhre sich erstreckt, während nach der heutigen Auffassung (Prandtl[1]), zwischen der turbulenten Strömung und der Wand, eine Grenzschicht existiert, die in laminarer Bewegung sich befindet, und mit ihrer äußeren Fläche an der inneren Wandfläche der Röhre haftet.

Im Anschluß an diese Vorstellung über die Flüssigkeitsbewegung in Röhren, hat G. I. Taylor[2]) bemerkt (1916), daß in der laminaren Schicht der Wärmeübergang fast ausschließlich durch Leitung, in dem übrigen Teil durch Turbulenz bedingt ist. Daher soll man innerhalb der Grenzschicht die Gesetze der Wärmeleitung (Fourier), und innerhalb der turbulenten Bewegung die Gleichung von Reynolds anwenden. Setzt man also:

ε Dicke der laminaren Schicht;

T_1 Temperatur der innersten Schichtfläche, d. h. derjenigen Zylinderfläche, die die Grenze zwischen laminarer und turbulenter Bewegung darstellt;

u_1 Geschwindigkeit an derselben Stelle;

χ Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit;

η Viskosität, die mit $\bar{R}$ durch die Beziehung

$$\bar{R} = \eta \frac{u_1}{\varepsilon} \quad (1)$$

zusammenhängt, dann soll man mit Taylor schreiben

$$\bar{H} = \chi \frac{T_s - T_1}{\varepsilon}$$

für die Wärmeleitung in der Schicht;

$$\bar{H} = \frac{\bar{R}\, c_p (T_1 - T_m)}{u_m}$$

für den turbulenten Wärmeübergang.

Aus der Gleichsetzung beider Werte von $\bar{H}$ (im Beharrungszustand) bekommt man leicht, mit Berücksichtigung von (7),

$$\bar{H} = \frac{\bar{R} \cdot c_p (T_s - T_m)}{u_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(c_p \frac{\eta}{\chi} - 1\right)} \quad \text{(III) (Taylor)}$$

1) Prandtl, Mathematikerkongreß zu Heidelberg, 1924.
2) Taylor, siehe 2).

Obwohl diese Gleichung durch die Erfahrung nicht in vollem Maß bestätigt zu sein scheint, stellt sie doch den ersten Schritt zur Verbesserung der einfachen Reynoldsschen Formel dar.

Deshalb lohnt es sich den parallelen Schritt mit der van Iterson-Lorenzschen Formel zu tun.

Das gelingt in ganz einfacher Weise nach den vorausgehenden Betrachtungen, da die Gleichung (5), (6) durch die Bemerkungen Taylors nicht berührt werden. Deren Einsetzung in (II) ergibt

$$h = \frac{\lambda \cdot \mu c_p}{8} u_m \cdot \frac{1}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(c_p \frac{\eta}{\chi} - 1\right)}. \quad \text{(IV)}$$

Diese Formel könnte man vervollständigen, wenn man imstande wäre, das Verhältnis u_1/u_m durch andere, der Erfahrung besser zugängliche Größen zu ersetzen. Es fehlen jetzt dazu — soviel mir bekannt — die nötigen Anhaltspunkte, besonders hinsichtlich der Grenzschicht. Übrigens kann man gegen Formel (IV) dieselben Einwände anführen, wie gegen diejenige von Taylor, aus welcher wir sie unmittelbar abgeleitet haben, so daß erst die Erfahrung uns künftighin belehren wird, ob und in welcher Richtung die Formel abzuändern sei.

Was aber auch ihr Schicksal sein wird, stellt sie einstweilen einen — mindestens theoretisch — wesentlichen Fortschritt gegenüber der einfacheren Formel (I), da in (IV) die Wärmeübergangszahl h mit anderen wichtigen Größen wie Wärmeleitfähigkeit und innerer Reibung in Zusammenhang gebracht ist.

Je höher, unter sonst gleichen Umständen, die Leitfähigkeit der Flüssigkeit, desto größer ist nach (IV) die Übergangszahl, was von vornherein zu erwarten war.

Zusammenfassung.

1. Die fast gleichzeitig von Prof. van Iterson und Prof. Lorenz aufgefundene Formel für die Wärmeübergangszahl wird auf die alte Reynoldssche Gleichung zurückgeführt.

2. Es wird eine neue Formel abgeleitet, in welcher die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Wärmeleitzahl und der Viskosität auch zum Ausdruck kommt.

Palermo, Nov. 1927, Istituto di Fisica tecnica R. Scuola d'Ingegneria.

(Eingegangen 16. November 1927.)

Zur Strahlungsdämpfung in der Quantenmechanik.

Von Felix Bloch.

(Für ein gegebenes Atomsystem wird untersucht, wie sich das Quadrat des absoluten Betrages der Wellenfunktion im Lauf der Zeit ändert, wenn die Kopplung mit dem Strahlungsfeld in der von Dirac angegebenen Weise berücksichtigt wird. Es ergibt sich im allgemeinen eine Dämpfungszerstreuung von Wellenpaketen, die zu der schon ohne Dämpfung stattfindenden Zerstreuung hinzutritt. Wählt man jedoch im Spezialfall des harmonischen Oszillators für $t = 0$ diejenige Lösung der Wellengleichung, die das von Schrödinger angegebene Wellenpaket liefert, so bleibt dieses auch in der Folgezeit erhalten und vollführt die von der klassischen Theorie geforderte gedämpfte harmonische Schwingung.)

§ 1. Allgemeine Problemstellung: Wir untersuchen mit Dirac[1]) die Wechselwirkung eines Atoms A mit N beliebigen andern Systemen S_i $(i = 1, 2, \cdots N)$. Vernachlässigt man zunächst die Wechselwirkungsenergie, so mögen die Eigenfunktionen des Atoms $u^k_A \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E^k_A t}$, die des i-ten Systems $u^{r_i}_i \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E^{r_i}_i t}$ lauten. Dabei seien die Quantenzustände des Atoms durch k, die von S_i durch r_i gekennzeichnet; beide nehmen wir vorläufig als diskret an. Um nun die Wellengleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}(H_0 + V)\psi = 0 \tag{1}$$

des Gesamtsystems, bestehend aus A und den N Teilsystemen S_i zusammengenommen zu befriedigen, kann man ihre allgemeine Lösung in der Form

$$\psi = \sum_{k, r_1 \cdots r_N} a^{(t)}_{k, r_1 \cdots r_N} u^k_A u^{r_1}_1 \cdots u^{r_N}_N \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^k_A + \sum_{i=1}^{N} E^{r_i}_i\right) t} \tag{2}$$

ansetzen. Ist nun in (1) H_0 der aus der Energie des ungestörten Gesamtsystems, V der aus der störenden Wechselwirkungsenergie abgeleitete Operator, die beide die Zeit nicht explizit enthalten mögen, so ergeben sich für die Anregungsstärken $a^{(t)}_{k, r_1 \cdots r_N}$ die Differentialgleichungen

$$\dot a^{(t)}_{k, r_1 \cdots r_N} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{l, s_1 \cdots s_N} V_{k, r_1 \cdots r_N; l, s_1 \cdots s_N} e^{\frac{2\pi i}{h}\left[E^l_A - E^k_A + \sum_{i=1}^{N}\left(E^{s_i}_i - E^{r_i}_i\right)\right] t} a_{l, s_1 \cdots s_N}. \tag{3}$$

Im Folgenden sollen sämtliche Funktionensysteme u^k_A, $u^{r_i}_i$ als orthogonal und normiert betrachtet werden. Dann ist

$$V_{k, r_1 \cdots r_N; l, s_1 \cdots s_N} = \int V u^k_A u^l_A \prod_{i=1}^{N} u^{r_i}_i u^{s_i}_i \, dq \, dx$$

das zur Störungsenergie V gehörige Matrixelement. Die Integration ist über den ganzen q-Raum des Gesamtsystems zu erstrecken; dq ist ein Volumelement des q-Raums aller S_i zusammengenommen, dx ein solches des Atom-Konfigurationenraumes.

Nach Born[2]) ist nun die reelle Größe $\psi\bar\psi dq dx$ ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, die Koordinaten des Atoms in dem durch das Volumelement dx und gleichzeitig die der Systeme S_i in dem durch dq gegebenen Bereich zu finden. Dagegen interessieren wir uns hier für die Wahrscheinlichkeit, die Atomkoordinaten im Bereich dx zu finden, unbekümmert darum, wo sich die S_i befinden. Diese erhält man offenbar durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi\bar\psi$ über den ganzen Konfigurationenraum der Systeme S_i.

Wir fragen also nach der neuen, nur noch von den Atomkoordinaten und der Zeit abhängigen Wahrscheinlichkeitsdichte.

$$W(x, t) =$$

$$\int \psi\bar\psi \, dq = \int \left\{ \sum_{k, r_1 \cdots r_N; l, s_1 \cdots s_N} a^{(t)}_{k, r_1 \cdots r_N} a^{(t)}_{l, s_1 \cdots s_N} u^k_A u^l_A \prod_{i=1}^{N} u^{r_i}_i u^{s_i}_i \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left[E^k_A - E^l_A + \sum_{i=1}^{N}\left(E^{r_i}_i - E^{s_i}_i\right)\right] t} \right\} dq.$$

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 243, 1927. Vgl. auch L. Landau, Zeitschr. f. Phys. **45**, 430, 1927.
2) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863; **38**, 803, 1926.

Wegen der Orthogonalität und Normierung der Eigenfunktionen wird daraus

$$W(x,t) = \sum_{k,l} N_{k,l}^{(t)} u_A^k \bar{u}_A^l \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E_A^k - E_A^l\right)t} \tag{4}$$

mit

$$N_{kl}^{(t)} = \bar{N}_{l,k}^{(t)} = \sum_{r_1 \cdots r_N} a_{k,r_1\cdots r_N}^{(t)} \bar{a}_{l,r_1\cdots r_N}^{(t)}. \tag{5}$$

Da uns vom ungestörten Fall her in (4) alles außer den Größen $N_{k,l}$ bekannt ist, besteht unsere Aufgabe darin, diese als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Verschwindet die Störungsenergie, so sind die $N_{k,l}$ Konstante und $W(x,t)$ ist der aus der Wellenfunktion

$$\psi_A(x,t) = \sum_k c_k \cdot u_A^k(x) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E_A^k t}$$

des Atoms gebildete Ausdruck $\psi_A \bar{\psi}_A$, wenn $N_{kl} = c_k \bar{c}_l$ gesetzt ist.

§ 2. Koppelung mit dem Strahlungsfeld: Beim Problem der Strahlungsdämpfung sind die mit A in Wechselwirkung stehenden S_i Lichtquanten. Dadurch wird die allgemeine Aufgabe von § 1 zunächst durch folgende Zusatzforderungen eingeschränkt:

a) Die Systeme S_i sind alle gleichartig. Infolgedessen gehören im ungestörten Fall zu jedem von ihnen die gleichen Eigenfunktionen und Eigenwerte $u_i^{r_i} = u^r$ bzw. $E_i^{r_i} = E^r = h\nu_r$, für $r_i = r$ ($i = 1, 2 \ldots N$). Die ersteren sind die Eigenfunktionen, die letzteren die mit h multiplizierten Frequenzen der dem Hohlraum eigenen elektromagnetischen Schwingungen. Zu diesen eigentlichen Zuständen der Lichtquanten fügt man zweckmäßig noch einen „nullten Zustand" hinzu, in dem sich ein Lichtquant befinden soll, solange es noch nicht in Erscheinung getreten ist; seine Energie und mithin auch seine Eigenfrequenz sind Null, die Zahl N_0 der in ihm befindlichen Lichtquanten unendlich groß.

b) Für die S_i gilt die Einstein-Bosesche Statistik. Infolgedessen[1]) müssen die Anregungsstärken $a_{k,r_1,r_2,\cdots r_N}$ in den Indizes r_i symmetrisch sein. Greifen wir unter ihnen diejenigen heraus, bei denen N_0 der Indizes r_i gleich Null, N_1 gleich 1 u.s.f. sind, so sind also alle diese $a_{k,r_1\cdots r_N}$ gleich groß und zwar setzt Dirac

$$a_{k,r_1\cdots r_N} = \left(\frac{N_0!\,N_1!\cdots}{N!}\right)^{1/2} a_{k,N_0 N_1\cdots N_\infty}. \tag{6}$$

$a_{k,r_1\cdots r_N} \bar{a}_{k,r_1\cdots r_N}$ stellt nach Born die wahrscheinliche Anzahl derjenigen Gesamtsysteme dar, bei denen sich das Atom im k-ten und gleichzeitig das i-te Lichtquant im r_i-ten Zustand befinden ($i = 1, 2, \ldots N$). Dann geht aus (6) hervor, daß $a_{k,N_0 N_1\cdots} \bar{a}_{k,N_0 N_1\cdots}$ die wahrscheinliche Anzahl derjenigen Gesamtsysteme bedeutet, bei denen sich das Atom im k-ten und gleichzeitig N_r der Lichtquanten im r-ten Zustand befinden ($r = 0, 1, 2, \ldots \infty$). Es gilt dann, wie man sich leicht überzeugt, nach (5):

$$N_{k,l} = \sum_{r_1\cdots r_N} a_{k,r_1\cdots r_N} \bar{a}_{l,r_1\cdots r_N} = \sum_{N_0, N_1\cdots N_\infty} a_{k,N_0 N_1\cdots N_\infty} \bar{a}_{l,N_0 N_1\cdots N_\infty}. \tag{7}$$

Offenbar ist

$$N_{k,k} = N_k = \sum_{N_0, N_1\cdots N_\infty} a_{k,N_0 N_1\cdots N_\infty} \bar{a}_{k,N_0 N_1\cdots N_\infty} \tag{8}$$

die Zahl der Gesamtsysteme, bei denen sich das Atom im k-ten Zustand befindet.

c) Die Systeme S_i stehen zwar mit dem Atom, nicht aber unter sich in Wechselwirkung.

Dank den Forderungen a, b, c und dem Umstand, daß wir uns hier nur für Emissionsprozesse interessieren, d. h. nur für solche, bei denen ein Lichtquant vom „nullten" in einen oberen Zustand springt, vereinfachen sich die durch (3) gegebenen Differentialgleichungen stark. Die Matrixelemente der Störungsenergie entnimmt Dirac[1]) der klassischen Wechselwirkung der r-ten Hohlraumschwingung mit dem Atom

$$V_r = \frac{e}{c}(\mathfrak{A}_r, \dot{\mathfrak{x}})$$

e ist die Ladung, $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor des im Atom beweglichen Massenpunktes; in der Folge wollen wir annehmen, daß er sich stets auf ein und derselben Geraden bewegt, also nur einen Freiheitsgrad

1) Vgl. P. A. M. Dirac, l. c.

hat und wollen seine Koordinate x nennen. Die Strahlung denken wir uns in lauter linear polarisierte Komponenten zerlegt, so daß das zur r-ten Eigenschwingung gehörige Vektorpotential die Form

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{B}_r \cos 2\pi \nu_r (t - t_r) \tag{9}$$

hat, wo $\mathfrak{B}_r$ einen nur noch von den Raumkoordinaten abhängigen Vektor darstellt; das skalare Potential möge stets Null sein. Die Gesamtenergie einer Hohlraumschwingung ist $N_r h \nu_r$, also ihre Energiedichte, da R das Volumen des Hohlraums darstellt, $N_r \frac{h\nu_r}{R}$. Vergleicht man diesen Wert mit demjenigen, der sich aus (9) nach der klassischen Elektrodynamik für die Energiedichte ergibt, so erhält man für den Betrag des Vektors $\mathfrak{B}_r$:

$$|\mathfrak{B}_r| = 2 \cdot N_r^{1/2} \left(\frac{hc^2}{2\pi R \nu_r}\right)^{1/2}.$$

Dann gelten für die durch (6) eingeführten neuen Anregungsstärken $a_{k, N_0 N_1 \ldots}$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} a_{k, N_0 N_1 \ldots} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_l \dot{x}_{kl} \sum_{r \neq 0} \left(\frac{\alpha}{\nu_r}\right)^{1/2} \cos \vartheta_r \Big[& N_r^{1/2} a_{l, N_0+1, \ldots N_r-1 \ldots} e^{\frac{2\pi i}{h}(E_A^l - E_A^k - E_r)t} \\ & + (N_r + 1)^{1/2} a_{l, N_0-1, \ldots N_r+1 \ldots} e^{\frac{2\pi i}{h}(E_A^l - E_A^k + E_r)t} \Big] \end{aligned} \tag{10}$$

$\dot{x}_{kl}$, das Matrixelement der Geschwindigkeit geht aus x_{kl}, dem der Koordinate x hervor durch

$$\dot{x}_{kl} = \frac{2\pi i}{h} (E_A^k - E_A^l)\, x_{kl} \tag{11}$$

und letzteres berechnet sich, aus den bekannten Eigenfunktionen des Atoms mittels der Formel

$$x_{kl} = \int x\, u_A^k(x)\, u_A^l(x)\, dx \tag{12}$$

ϑ_r ist der Winkel zwischen dem in (9) eingeführten Vektor $\mathfrak{B}_r$ und der Geschwindigkeit und α steht für die Konstante $\alpha = \frac{e^2 h}{2\pi R}$ [1]).

§ 3. Aufstellung der Differentialgleichungen für die N_{kl}: Wir berechnen zunächst den Wert der N_{kl} in erster Näherung, und zwar nach Ablauf einer Zeit t, über deren Größe wir die Annahmen machen:

a) t soll **groß** sein gegenüber den Schwingungszeiten der vom Atom emittierten Spektrallinien;

b) t soll so **klein** sein, daß die Zahl der Fälle, bei denen ein Atom unterdessen zwei oder mehr Lichtquanten emittiert hat, verschwindend klein ist gegenüber der Zahl derer, bei denen eines und diese wiederum klein ist gegen die Zahl der Fälle, bei denen kein Lichtquant emittiert wurde.

Wegen der Größe der mittleren Lebensdauer eines Zustandes sind diese beiden Annahmen miteinander verträglich.

Für $t = 0$, den Beginn des Strahlungsvorganges, befinden sich alle Lichtquanten im nullten Zustand, d. h. nur die Anregungsstärken

$$a_{k, N_0 000 \ldots}^{(0)} = c_k \tag{13}$$

sind von Null verschieden.

Also ist nach (7)

$$N_{k,l}^{(0)} = c_k \bar{c}_l \tag{14}$$

Zur Zeit t tragen wegen der Forderung b in (7) außer den $a_{k, N_0 00 \ldots}^{(t)}$ nur die $a_{k, N_0 \ldots \overset{r}{0}1 0 \ldots}^{(t)}$ Wesentliches bei und wir erhalten

$$N_{k,l}^{(t)} = a_{k, N_0 00 \ldots}^{(t)} \bar{a}_{l, N_0 00 \ldots}^{(t)} + \sum_{r \neq 0} a_{k, N_0 00 \ldots 0\overset{r}{1}0 \ldots}^{(t)} \bar{a}_{l, N_0 00 \ldots 0\overset{r}{1}0 \ldots}^{(t)} \tag{15}$$

$a_{k, N_0 00 \ldots 0\overset{r}{1}0 \ldots}$ ist dabei die Anregungsstärke derjenigen Eigenschwingung des Gesamtsystems, bei der sich das Atom im k-ten und ein Lichtquant im r-ten Zustand befinden, während alle übrigen

1) Vgl. P. A. M. Dirac, l. c. Dort wird in Formel (30) die Hamiltonsche Funktion angegeben, aus der sich nach § 2 die Formel (10) bestätigen läßt. Für das dort auftretende σ_r ist sein Wert $\frac{R\nu_r^2}{c^3}$ gesetzt.

Lichtquanten im nullten Zustand sind. Wir bestimmen zunächst ihren Wert in erster Näherung. Nach (10) und (13) ist

$$\dot a^{(0)\,r}_{k,N_0 00\ldots 010\ldots} = \frac{4\pi^2}{h^2}\sum_l \left(E^k_A - E^l_A\right) x_{kl}\left(\frac{a}{\nu_r}\right)^{1/2}\cos\vartheta_r\, c_l\cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^l_A - E^k_A - E_r\right)t}$$

also

$$a^{(t)\,r}_{k,N_0 00\ldots 010\ldots} = -\frac{2\pi i}{h}\sum_l \left(E^k_A - E^l_A\right) x_{kl}\left(\frac{a}{\nu_r}\right)^{1/2}\cos\vartheta_r\, c_l\cdot\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^l_A - E^k_A - E_r\right)t}-1}{E^l_A - E^k_A - E_r} \tag{16}$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (16) erhält man dann aus (10)

$$\left.\begin{aligned} a^{(t)}_{k,N_0 000\ldots} = c_k - \frac{4\pi^2}{h^2}\, a \sum_{l,m} x_{kl}\, x_{lm}\left(E^k_A - E^l_A\right)\left(E^l_A - E^m_A\right) c_m\,\cdot \\ \sum_{r\neq 0}\frac{\cos^2\vartheta_r}{\nu_r}\left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^m_A - E^k_A\right)t}-1}{\left(E^m_A - E^k_A\right)\left(E^m_A - E^l_A - E_r\right)} - \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^l_A - E^k_A + E_r\right)t}-1}{\left(E^l_A - E^k_A + E_r\right)\left(E^m_A - E^l_A - E_r\right)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

und ferner

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r\neq 0} a^{(t)\,r}_{k,N_0 0\ldots 010\ldots}\, a^{(t)\,r}_{l,N_0 0\ldots 010\ldots} = \frac{4\pi^2}{h^2}\, a \sum_{m,n} x_{km}\, x_{ln}\left(E^k_A - E^m_A\right)\left(E^l_A - E^n_A\right) c_m \bar c_n\,\cdot \\ \sum_{r\neq 0}\frac{\cos^2\vartheta_r}{\nu_r}\,\frac{\left|e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^m_A - E^k_A - E_r\right)t}-1\right|\left|e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(E^n_A - E^l_A - E_r\right)t}-1\right|}{\left(E^m_A - E^k_A - E_r\right)\left(E^n_A - E^l_A - E_r\right)}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die in (17) und (18) auftretenden Summen über den Index r werden im Falle eines unendlich großen Hohlraumes, wo die Zustände der Lichtquanten nicht mehr diskret sind, zu Integralen, die über den ganzen Wertebereich des Winkels ϑ_r von 0 bis π und über den der Frequenz ν_r von 0 bis ∞ zu erstrecken sind.

Wir integrieren zunächst über ϑ_r. Zu diesem Zweck denken wir uns um den Punkt $x = 0$ die Einheitskugel geschlagen und ihren Nordpol in der einen der beiden Bewegungsrichtungen des Massenpunktes, von wo aus wir den Winkel ϑ_r zählen. Solange man die Strahlung noch nicht in linear polarisierte Komponenten aufgelöst hat, beschreibt das zu einer Eigenschwingung gehörige Vektorpotential eine Ellipse. Nun zerlegen wir die elliptische Schwingung in zwei zueinander senkrechte lineare, von denen die eine in der Äquatorebene stattfinden soll, also in (17) und (18) nichts beiträgt. Die Richtung des in (9) eingeführten, zur zweiten Komponente gehörigen Vektors $\mathfrak{B}_r$ ist dann eindeutig festgelegt, wenn wir noch fordern, daß er in derselben Hemisphäre liegen soll, wie die Normale zur Ellipsenebene, deren Richtung für jede Hohlraumeigenschwingung bestimmt ist und im Fall eines unendlich großen Hohlraums die Kugel gleichmäßig dicht erfüllt. Die Zahl der Eigenschwingungen, bei denen dieser Normalenvektor in den Raumwinkel $d\omega$ weist, ist nach bekannten Überlegungen

$$\frac{R\nu_r^2}{c^3}\, d\nu_r\, d\omega$$

und daraus folgt für die Zahl der linearen Schwingungskomponenten, bei denen der auf die Länge 1 normierte Vektor $\mathfrak{B}_r$ in die Kugelzone zwischen ϑ_r und $\vartheta_r + d\vartheta_r$ weist

$$z_r\, d\nu_r\, d\vartheta_r = \pm 2\pi\cos\vartheta_r\frac{R\nu_r^2}{c^3}\,\vartheta\,\nu_r\, d\vartheta_r,$$

wobei das obere Zeichen für die nördliche, das untere für die südliche Halbkugel gilt. Also tritt in (17) und (18) an Stelle des Zeichens $\sum\limits_{r\neq 0}\frac{\cos^2\vartheta_r}{\nu_r}$ das Zeichen $\int\limits_0^\infty f(\nu_r)\, d\nu_r$, wo

$$f(\nu_r) = \frac{1}{\nu_r}\int_0^\pi z_r\, d\vartheta_r = 2\cdot\frac{2\pi R\nu_r}{c^3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\vartheta_r\, d\vartheta_r = \frac{8\pi}{3}\frac{R\nu_r}{c^3}. \tag{19}$$

Bei der Integration über ν_r tragen nur die Glieder Wesentliches bei, deren Nenner irgendwo im Wertebereich von ν_r eine quadratische Nullstelle hat, und auch diese nur in der Umgebung dieser Nullstelle. Dies sind in (17) die Glieder, bei denen die Bedingung

$$\text{A)}\quad E^k_A - E^l_A = E^m_A - E^l_A > 0$$

erfüllt ist. Denken wir uns die Eigenwerte E^i_A der Größe nach geordnet, so bedeutet dies einfach, daß in (17) nur über diejenigen Glieder zu summieren ist, bei denen $m = k > l$. In (18) sind es diejenigen Glieder, bei denen die Bedingung

$$\text{B)}\quad E^m_A - E^k_A = E^n_A - E^l_A > 0$$

erfüllt ist. Um anzudeuten, daß nur über sie zu summieren ist, schreiben wir in der Folge statt $\Sigma : \Sigma^B$. Demnach erhalten wir aus (17) unter Benutzung von (19)

$$a^{(t)}_{k,N_0\,000\ldots} = c_k - \frac{4\pi^2}{h^2}\alpha\cdot\frac{8\pi R}{3h^2c^3}\sum_{l<k} x_{kl}x_{lk}(E^k_A - E^l_A)^3\cdot c_k\cdot\int \frac{1-e^{-\frac{2\pi i}{h}(E^k_A - E^l_A - E_r)t}}{(E^k_A - E^l_A - E_r)^2}\,dE_r.$$

Sei nun $\xi = \frac{2\pi t}{h}(E^k_A - E^l_A - E_r)$. Die Grenzen des Integrals sind dann an den Stellen $\xi = \pm\varepsilon\frac{2\pi t}{h}(E^k_A - E^l_A)$, und da für die Schwingungszeit der Spektrallinie mit der Frequenz

$$\nu^k_l = \frac{E^k_A - E^l_A}{h}$$

$\frac{1}{\nu^k_l} \ll t$ vorausgesetzt wurde, ist $\nu^k_l t$ so groß, daß für die Integrationsgrenzen ohne merklichen Fehler $\xi = \pm\infty$ gesetzt werden kann, obwohl $0 < \varepsilon \ll 1$. Also wird

$$a^{(t)}_{k,N_0\,00\ldots} = c_k - \frac{4\pi^2}{h}\alpha\cdot\frac{8\pi R}{3c^3}\sum_{l<k} x_{kl}x_{lk}(\nu^k_l)^3\cdot c_k\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi t}{h}\,\frac{1-\cos\xi}{\xi^2}\,d\xi = c_k - \beta t c_k\sum_{l<k} x^2_{kl}(\nu^k_l)^3, \tag{20}$$

wo

$$\beta = -\frac{4\pi^2}{h}\alpha\,\frac{8\pi R}{3c^3}\cdot\frac{2\pi}{h}\pi = \frac{32\pi^4 e^2}{3hc^3} \tag{21}$$

gesetzt ist.

Analog ergibt sich aus (18)

$$\sum_{r\neq 0} a^{(t)}_{k,N_0\ldots 0\overset{r}{1}0\ldots}\,\bar a^{(t)}_{l,N_0\ldots 0\overset{r}{1}0\ldots} = 2\beta t\sum^B_{m,n} x_{km}x_{ln}\cdot c_m\bar c_n\cdot(\nu^m_k)^3 \tag{22}$$

und aus (15) wird, wenn wir darin die Werte (20) und (22) eintragen und die in βt quadratischen Glieder vernachlässigen

$$N_{kl}(t) = c_k\bar c_l + \beta t\left[2\sum^B_{m,n} x_{km}x_{ln}(\nu^m_k)^3 N_{mn}(0) - N_{kl}(0)\left\{\sum_{m<k} x^2_{km}(\nu^k_m)^3 + \sum_{n<l} x^2_{ln}(\nu^l_n)^3\right\}\right]. \tag{23}$$

Wegen der oben gemachten Voraussetzung über die Größe von t kann man für (23) auch die Differentialgleichungen

$$\dot N_{kl} = \beta\left[2\sum^B_{m,n} x_{km}x_{ln}(\nu^m_k)^3 N_{mn} - N_{kl}\left\{\sum_{m<k} x^2_{km}(\nu^k_m)^3 + \sum_{n<l} x^2_{ln}(\nu^l_n)^3\right\}\right] \tag{24}$$

für die gesuchten N_{kl} setzen. Ihrer Herleitung nach beanspruchen sie zunächst nur Gültigkeit für den Beginn des Strahlungsvorganges. Da dieser Zeitmoment aber durch nichts vor den andern ausgezeichnet ist, dürfen wir ihre Gültigkeit auch zu jeder andern Zeit annehmen.

Zur Diskussion von (24) ist es zweckmäßig, folgende beiden Fälle getrennt zu betrachten:

1. $k = l$: Hier wird aus der Bedingung B

$$m = n > k$$

und folglich

$$\dot N_k = 2\beta\left[\sum_{m>k} x^2_{km}(\nu^m_k)^3 N_m - N_k\sum_{m<k} x^2_{km}(\nu^k_m)^3\right]. \tag{25}$$

Dieses Gesetz für die zeitliche Änderung der Besetzungszahlen N_k der einzelnen Zustände ist der einfache Ausdruck der Tatsache, daß die Größen

$$A^r_s = 2\beta x^2_{rs}(\nu^r_s)^3$$

die Einsteinschen Übergangswahrscheinlichkeiten angeben.



2. $k \neq l$: Abgesehen von dem speziellen Fall des harmonischen Oszillators, der in § 4 ausführlich behandelt wird, ist hier im allgemeinen die Bedingung B im diskreten Teil des Eigenwertspektrums unerfüllbar. Im kontinuierlichen Teil ist B natürlich immer erfüllbar; es sollen aber für $t = 0$ die Besetzungszahlen der Quantenzustände im kontinuierlichen Spektrum so klein angenommen werden, daß auch die N_{mn} stets sehr klein bleiben, sobald mindestens einer der beiden Indizes n und m sich auf den kontinuierlichen Teil bezieht. (Dies wird zum Beispiel der Fall sein, wenn man von einem Wellenpaket ausgeht, welches eine in erster Näherung periodische Bewegung ausführt.)

Dann verschwinden also die in $\sum\limits_{m,n}^{B}$ zusammengefaßten Glieder und man erhält als Lösung von (24)

$$N_{kl}(t) = N_{kl}(0) \cdot e^{-\beta\left[\sum\limits_{m<k} x_{km}^2 \left(\nu_m^k\right)^3 + \sum\limits_{n<l} x_{ln}^2 \left(\nu_n^l\right)^3\right] t}.$$

Daß hier die N_{kl} sämtlich exponentiell abnehmen, hat, worauf mich Prof. Heisenberg freundlichst aufmerksam machte, folgenden physikalischen Sinn:

Sind die N_{kl} $(k \neq l)$ hinreichend abgeklungen, so läßt sich nach (4) $W(x, t)$ in der Form

$$W(x,t) = \sum_k N_k(t)\, u_k^2$$

darstellen. Dies entspricht der Situation, daß man die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem bestimmten Quantenzustand zu finden, zwar kennt, sein Ort aber über diese Aussage hinaus unbekannt ist. Während man zur Zeit $t = 0$ die Funktion $W(x, t)$ durch „Interferenz der Wahrscheinlichkeiten"[1]) zu einem Wahrscheinlichkeitspaket aufbauen kann, geht diese Möglichkeit während des Dämpfungsvorganges in dem Maße verloren, wie die in (4) auftretenden gemischten, zeitlich rasch veränderlichen Glieder verschwinden. Die N_{kl} $(k \neq l)$ geben also ein Maß für die Interferenzfähigkeit der Schrödingerwellen.

Neben die Zerstreuung, die das Wellenpaket schon im ungedämpften Fall erfährt, tritt also noch eine von ihr unabhängige Dämpfungszerstreuung, die aber, wegen der Kleinheit der Dämpfungskonstanten im allgemeinen neben der ersteren stark zurücktreten wird.

§ 4. Die N_{kl} als Funktionen der Zeit für den Fall des Schrödingerschen Wellenpakets beim harmonischen Oszillator: Setzt man

$$x = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{h}{m\nu}\right)^{1/2} y,$$

wo m die Masse, ν die klassische Frequenz des Oszillators bedeuten, so lauten seine Eigenfunktionen und Eigenwerte[2])

$$u_A^k = \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k!}\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} H_k(y)$$

bzw.

$$E_A^k = \left(k + \frac{1}{2}\right) h\nu.$$

Daraus ergeben sich nach (12) für die Matrixelemente von x die bekannten Werte

$$x_{kl} = \begin{cases} \left(\dfrac{h}{8\pi^2 m\nu}\right)^{1/2} \sqrt{k+1} & \text{für } l = k+1 \\ \left(\dfrac{h}{8\pi^2 m\nu}\right)^{1/2} \sqrt{k} & \text{für } l = k, \end{cases}$$

während die übrigen Elemente verschwinden. Dann wird aus (24)

$$\dot N_{kl} = \frac{\gamma}{2}\left[2\sqrt{k+1}\sqrt{l+1}\, N_{k+1,\,l+1} - (k+l) N_{kl}\right] \tag{26}$$

und aus (25)

$$\dot N_k = \gamma\left[(k+1) N_{k+1} - k N_k\right]$$

mit

$$\gamma = 2\beta\nu^3 \frac{h}{8\pi^2 m\nu} = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3} \tag{27}$$

1) Vgl. P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 40, 809, 1927.
2) Vgl. E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79, 489, 1926.

Wir integrieren zunächst (27). Herr Beck[1]) hat die Lösung dieses Gleichungssystems für den Fall angegeben, daß für $t = 0$ alle Oszillatoren sich im n-ten Zustand befinden und gezeigt, daß dann die Gesamtenergie

$$E = \sum_k N_k E_k^A$$

gemäß einem Exponentialgesetz abnimmt.

Wir wollen hier auf eine einfache Weise die Lösungen von (27) für jede beliebige Anfangsverteilung finden und bei der Gelegenheit das exponentielle Abklingungsgesetz der Energie bestätigen.

Zu diesem Zweck führen wir eine erzeugende Funktion der Größen N_k ein

$$F(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k(t) \cdot \lambda^k \tag{28}$$

Ist sie einmal bestimmt, so sind es auch die N_k als Koeffizienten der Taylorentwicklung nach Potenzen des Parameters λ. Nun ist nach (27)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \gamma \sum_k (k+1) N_{k+1} - k N_k$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_k N_k \cdot k \cdot \lambda^{k-1} \tag{29}$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \gamma (1 - \lambda) \frac{\partial F}{\partial \lambda}. \tag{30}$$

Durch diese partielle Differentialgleichung ist $F(\lambda, t)$ zu bestimmen. Sie ist vollkommen gleichwertig mit dem totalen Gleichungssystem (27). (30) wird befriedigt durch jede Funktion vom Argument $(1 - \lambda) e^{-\gamma t}$. Ist die Anfangsverteilung der Oszillatoren, also die Größe

$$F(\lambda, 0) = \sum_k N_k(0) \lambda^k = f(\lambda) \tag{31}$$

vorgegeben, so erhalten wir als Lösung von (30)

$$F(\lambda, t) = f[1 - (1 - \lambda) e^{-\gamma t}] = \sum_k N_k \cdot \lambda^k. \tag{32}$$

Die Gesamtzahl der Oszillatoren,

$$Z = \sum_k N_k = F(1, t) = f(1)$$

ist, wie notwendig, zeitlich konstant. Für die Energie finden wir

$$E = \sum_k N_k E_A^k = E_0 + h\nu \sum_k k N_k.$$

Nun ist nach (29) und (32)

$$\sum_k k N_k = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = f'(1) \cdot e^{-\gamma t}$$

und mithin

$$E = E_0 + E_1 \cdot e^{-\gamma t},$$

wo $E_1 = h\nu \cdot f'(1)$ eine Konstante darstellt. Also klingt der nicht zur Nullpunktsenergie $E_0 = Z \cdot \frac{h\nu}{2}$ gehörige Teil exponentiell ab.

Um das Schrödingersche Wellenpaket[2]) zu erhalten, hat man in (31)

$$N_k(0) = \frac{A^{2k}}{2^k \cdot k!}$$

zu setzen, wo A irgendeine große reelle Zahl ist. Dann wird

$$f(\lambda) = \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{A^2 \lambda}{2}\right)^k = e^{\frac{A^2 \lambda}{2}}$$

1) G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **42**, 86, 1927.
2) E. Schrödinger, Naturw. **14**, 664, 1926.

und nach (32)

$$F(\lambda,t) = e^{\frac{A^2}{2}\left(1-(1-\lambda)e^{-\gamma t}\right)} = e^{\frac{A^2}{2}\left(1-e^{-\gamma t}\right)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\left(\frac{A^2 e^{-\gamma t}}{2}\right)^k.$$

Also

$$N_k(t) = \frac{1}{k!} e^{\frac{A^2}{2}\left(1-e^{-\gamma t}\right)} \left(\frac{A^2 e^{-\gamma t}}{2}\right)^k. \qquad (33)$$

Wir behaupten nun, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte (4) gegeben ist durch

$$W(x,t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} N_{kl}(t)\, u_A^k(x)\, u_A^l(x) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E_A^k - E_A^l\right)t} = \psi_A \psi_A \qquad (34)$$

wo

$$\psi_A = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{N_k(t)}\, u_A^k(x) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E_A^k t} \qquad (35)$$

gesetzt ist. Dies bedeutet, daß sich unser Wellenpaket so verhält, als ob es eine „Wellenfunktion des gedämpften Oszillators", nämlich die Größe (35), gebe, aus der es in üblicher Weise hergeleitet ist. Im allgemeinen ist es bei gekoppelten Systemen natürlich sinnlos, von der „Wellenfunktion des Atoms allein" zu reden. Nur die Wellenfunktion des Gesamtsystems und die aus ihr abgeleitete Wahrscheinlichkeitsdichte (4) behalten ihren Sinn bei, und eine Darstellung von $W(x,t)$ in der Form (34) gibt es im allgemeinen nicht.

Zum Beweis unserer Behauptung haben wir nur zu zeigen, daß

$$N_{kl}(t) = \sqrt{N_k(t) N_l(t)} \qquad (36)$$

tatsächlich eine Lösung von (26) ist. Daß es dann auch die richtige, den Anfangsbedingungen genügende Lösung ist, folgt daraus, daß (36) zur Zeit $t = 0$ nach (14) erfüllt ist. Durch Einsetzen von (36) in (26) folgt

$$\dot{N}_k N_l + N_k \dot{N}_l = \gamma\left[2\sqrt{k+1}\sqrt{l+1}\sqrt{N_{k+1}N_{l+1}N_k N_l} - (k+l) N_k N_l\right]$$

und diese Relation besteht nach (33) zu Recht, da

$$\sqrt{k+1}\sqrt{\frac{N_{k+1}}{N_k}} = \sqrt{l+1}\sqrt{\frac{N_{l+1}}{N_l}}.$$

Setzen wir nun in (35) die Werte

$$u_A^k = \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k!}\,\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} H_k(y) \text{ und } E_A^k = \left(k + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

und die Werte (33) für die N_k ein, so wird

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{A^2}{4}\left(1-e^{-\gamma t}\right) + \pi i \nu t - \frac{y^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t + 2\pi i \nu t}\right)^k \frac{H_k(y)}{k!}. \qquad (37)$$

Unter Berücksichtigung der charakteristischen Summenrelation der Hermiteschen Polynome

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot \frac{H_k(y)}{k!} = e^{-t^2 + 2ty}$$

wird aus (37)

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{A^2}{4}\left(1-e^{-\gamma t}\right) + \pi i \nu t - \frac{y^2}{2} + A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t + 2\pi i \nu t} y - \frac{A^2}{4} e^{-\gamma t + 4\pi i \nu t}}$$

und schließlich nach (34)

$$W(x,t) = \psi_A \psi_A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{A^2}{2} - \left[2\pi\left(\frac{m\nu}{h}\right)^{1/2} x - A \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos 2\pi\nu t\right]^2}. \qquad (38)$$

Der durch diese Funktion dargestellte Gaußsche Fehlerbuckel vollführt also dieselbe gedämpfte harmonische Schwingung, wie ein klassischer Oszillator im Strahlungsfeld.



Daß sich das Wellenpaket wie beim ungedämpften Oszillator im Lauf der Zeit nicht zerstreut und seine Form beibehält, kann man sich im Anschluß an die Überlegungen von Kennard[1]) durch das Verhalten der klassischen Oszillatoren veranschaulichen, von denen ein Schwarm im Lauf der Zeit ebenfalls nicht zerstreut wird, da die Dämpfung weder von der Anfangslage noch von der Anfangsgeschwindigkeit abhängt.

Herrn Prof. Heisenberg bin ich für die zahlreichen Unterredungen während des Entstehens dieser Arbeit zu größtem Dank verpflichtet.

Leipzig, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität, 14. Dezember 1927.

1) E. H. Kennard, Zeitschr. f. Phys. **44**, 326, 1927.

(Eingegangen 22. Dezember 1927.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES IV. DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN KISSINGEN VOM 18.—24. SEPTEMBER 1927.

Felix Jentzsch (Berlin), Die Rastermethode. Ein Verfahren zur Demonstration und Messung der sphärischen Aberration.

§ 1. Beschreibung des Grundversuchs.

Die Grundlage der Rastermethode ist folgende Erscheinung, die sich vorzüglich zur objektiven Demonstration auch vor sehr großem Hörerkreis eignet[1]). Man rückt den Kondensor von der Bogenlampe eines Projektionsapparates soweit ab, bis ein reelles Bild des Kraters in einiger Entfernung vom Kondensor entsteht. Auf der Projektionswand zeigt sich dann ein nicht ganz gleichmäßig heller, meist farbig umsäumter Lichtkreis. Hält man nun ein grobes Gitter, z. B. aus etwa 5 Drähten pro Zentimeter, zwischen das Kraterbild und die Wand, so wird man im allgemeinen Schattenstreifen auf der Projektionsfläche sehen, die den Gitterstrichen geometrisch ähnlich, also gradlinig und äquidistant sind. Rückt man aber mit dem Gitter näher an das Kraterbild heran, so wird zunächst die Anzahl der Schattenstreifen geringer, da der Kreis, in dem das Lichtbündel die Gitterebene trifft, immer kleiner wird. Außerdem aber wird Breite und gegenseitiger Abstand der Streifen immer größer, zumal bei den mittleren Streifen in der Nähe der optischen Achse (Fig. 1 u. 2). Fixiert man das Gitter so, daß die Achse gerade die Mitte eines lichtdurchlässigen Teiles des Gitters durchstößt, so werden in der Mitte des Schattenbildes die Streifen auseinander gedrängt, bis bei weiterer Bewegung des Gitters auf die Lichtquelle hin sich in der Mitte eine annähernd kreisförmig erleuchtete Stelle bildet. Bei weiterer Bewegung des Gitters zeigen sich dort zwei symmetrisch liegende geschlossene Kurvenzweige (Fig. 3), aus denen weiterhin ständig neue geschlossene Kurven herausquellen, die die ursprünglich ungeschlossenen Kurven immer mehr beiseite drängen. Die „Quellpunkte" wandern dabei nach außen (Fig. 4 u. 5), in der Mitte werden die Schattenstreifen wieder dichter und nähern sich mehr und mehr in ihrer Form wieder äquidistanten Geraden, bis zuletzt das Schattenbild wieder so wie bei Beginn der Gitterbewegung aussieht. Im Verlauf dieser Verschiebung ist man inzwischen mit dem Gitter über das Kraterbild hinaus in den Raum zwischen Kondensor und Bild gelangt.

Die Erscheinung der Quellpunkte zeigt sich nur, solange man mit dem Raster bzw. Gitter die Kaustik durchwandert, die in der Gegend des Kraterbildes in der Luft schwebt. Besonders das erste Auftreten geschlossener Kurven ist äußerst labil und bei Verwendung einer chromatisch nicht korrigierten Linse bietet sich im weißen Licht der Bogenlampe ein sehr lebhaftes Farbenspiel.

Zur praktischen Vorführung dieser Schattenbilder ist zu beachten, daß die Bilder um so schärfer werden, je kleiner die Lichtquelle ist, — aber natürlich auch dementsprechend lichtschwächer. Glühlampen kann man daher nicht verwenden. Auch bei Bogenlampen wird es sich oft empfehlen, an die Stelle des direkten Kraterbildes eine Blende zu setzen und erst von dieser als Lichtquelle auszugehen. Durch Filter oder eine spektrale Vorzerlegung kann man leicht auch objektiv demonstrieren, wie stark die Lage und Form der Quellpunkte und der sie umschließenden Kurven von der Farbe abhängt.

1) In dieser Form seit W.-S. 1925/26 von mir in der großen Vorlesung über Experimentalphysik im Berliner Institut benutzt.



Fig. 1.
Anfangsstellung des Rasters.

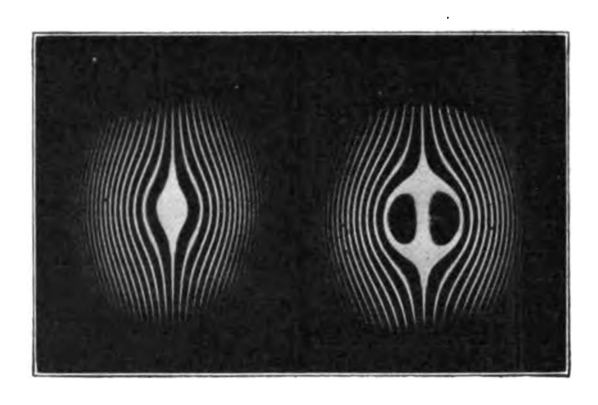


Fig. 2.
Raster außerhalb der Kaustik.

Fig. 3.
Raster außerhalb der Kaustik.

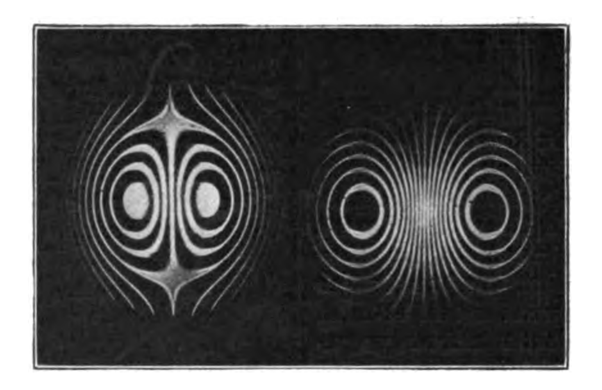


Fig. 4.
Raster innerhalb der Kaustik.

Fig. 5.
Raster innerhalb der Kaustik.

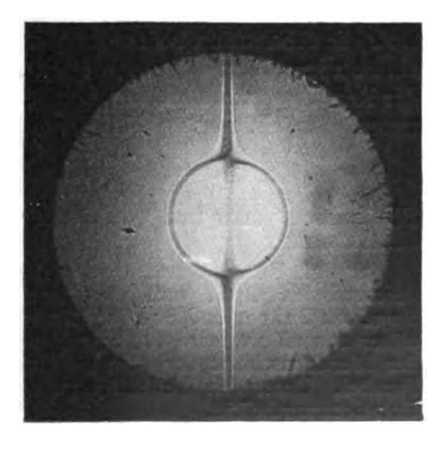


Fig. 7.
Schattenbild eines einzelnen Drahtes.

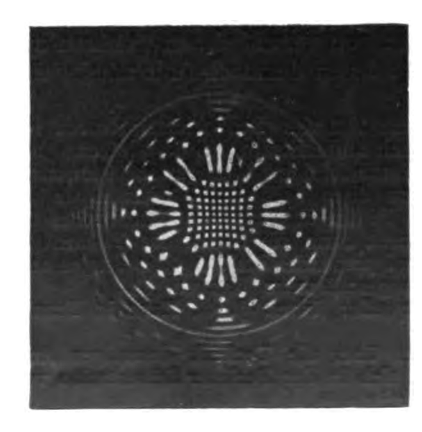


Fig. 8.
Schattenbild eines Kreuzrasters.

Zur subjektiven Beobachtung nimmt man eine schwächere Lichtquelle mit kleiner Blende, hält das Gitter ganz dicht vor das Auge und bewegt eine Sammellinse mit dem freien Arm zwischen Lichtquelle und Gitter. Man sieht dann im wesentlichen die gleichen Erscheinungen wie oben beschrieben. Denselben Anblick kann man auf scheinbar andere Weise erzielen, wenn man das Gitter auf eine erleuchtete Milchglasscheibe legt und es durch eine Linse bei passenden Abstandsverhältnissen betrachtet[1]). Offenbar liegt hier nur eine Vertauschung der Blenden vor.

Die Figuren 1—5, Tafel I zeigen einige typische Formen der Erscheinung. Sie sind im monochromatischen Licht (grüne Quecksilberlinie) und mit einer Blende von etwa 1 mm Durchmesser hergestellt. Als Objektiv diente eine einfache Meniskuslinse, als Gitter Raster, wie sie in der Reproduktionstechnik zur Herstellung von Autotypien verwendet werden[2]) mit verschiedenen Strichzahlen zwischen etwa 40 und 50 Strichen pro Zentimeter. Während zur objektiven Projektion Drahtgitter recht geeignet sind, stören auf Photogrammen, die zur Ausmessung bestimmt sind, die Reflexe an den Drähten. Die Raster sind Glasplatten von 2—4 mm Dicke, auf denen lichtdurchlässige Streifen mit ungefähr gleich breiten undurchlässigen abwechseln. Die Grenze zwischen ihnen wird durch einen feinen Diamantstrich gebildet, wodurch ein völlig scharfer Abfall der Schwärzung erreicht ist[3]).

§ 2. Elementare Theorie.

Die Erklärung dieser Erscheinungen ist ganz elementar. Würden alle von der punktförmig vorausgesetzten Lichtquelle herkommenden Strahlen tatsächlich durch einen einzigen Bildpunkt gehen, so entstünde das Schattenbild des Gitters als einfache Zentralprojektion. In Wirklichkeit tritt aber an Stelle des Bildpunktes eine Kaustik. Zu den verschiedenen Projektionsrichtungen gehören also verschiedene Projektionszentren. Die einzelnen Punkte eines Gitterstriches, die ja von Strahlen verschiedener Richtung durchsetzt werden, werden von verschiedenen Punkten aus projiziert und müssen demnach (mit scheinbarer Ausnahme des durch die Achse gehenden Gitterstriches) gekrümmte Schattenlinien ergeben. Die Form der Kurven hängt davon ab, nach welchem Gesetz die Projektionszentren mit dem Winkel wandern, d. h. von der gewöhnlichen sphärischen Aberration auf der Achse, ausgedrückt als Funktion des Bildwinkels. Betrachtung der Kurven muß also eine qualitative Beurteilung des Korrektionszustandes, ihre Ausmessung eine quantitative Methode ergeben.

Zur analytischen Darstellung (Fig. 6) legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde mit dem Nullpunkt in der Spitze der

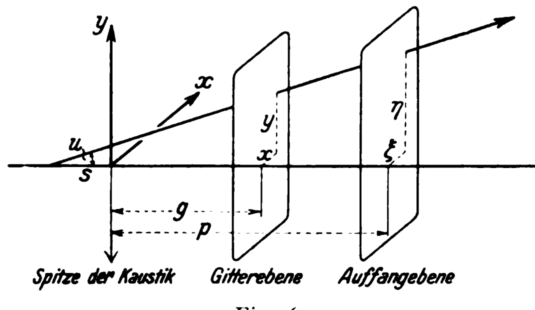


Fig. 6.

Kaustik, die wir im übrigen rotationssymmetrisch zur z-Achse voraussetzen. Es bezeichne g den Abstand der **G**itterebene, p den der Auffangebene (**P**latte) von der Spitze der Kaustik, wobei beide Ebenen senkrecht zur z-Achse angenommen werden. Einer der projizierenden Strahlen schneide die Achse im Abstand s von der Spitze der Kaustik und zwar unter dem Winkel u. Seien weiter x und y die Koordinaten eines Punktes der Gitterebene und ξ und η die in der Auffangsebene, so wird augenscheinlich gelten

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{p-s}{g-s} \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{p-s} \tag{2}$$

wo s die Aberration bedeutet. Wir denken uns s als Potenzreihe von $\operatorname{tg} u$ dargestellt, wobei wegen der Rotationssymmetrie nur gerade Potenzen auftreten. Im einfachsten Falle[1]) wird also:

$$s = A \cdot \operatorname{tg}^2 u. \tag{3}$$

Elimination von s und $\operatorname{tg} u$ aus den obigen drei

1) Auf diese Art der Beobachtung wurde ich bei einer Mahlzeit aufmerksam, bei der einfache glatt geschliffene durchsichtige Weingläser verwendet wurden. Waren diese halbgefüllt, wirkten sie als Linse und die Fäden des leinenen Tischtuches als Gitter. Man sieht dann die Fäden des Tuches gekrümmt und bei passender Haltung des Auges teilweise auch als geschlossene Kurven.

2) Bezugsquelle: Firma J. C. Haas in Frankfurt a. M.

3) Weiteres über die Technik derartiger Aufnahmen findet sich in der Berliner Dissertation von Günther Schulz.

1) Vgl. Felix Jentzsch, Beziehung zwischen geometrischer Optik und Wellenoptik. Handb. d. Phys. von Geiger und Scheel **18**, 294—295. Wie dort näher ausgeführt, wird für obiges spezielles Beispiel der Meridianschnitt der Kaustik eine semikubische Parabel. Unter den Wellenflächen befindet sich ein Rotationsparaboloid.

Gleichungen liefert sofort die Darstellung der Schattenkurven in rechtwinkligen Koordinaten:

$$A(\xi - x)^3(\xi^2 + \eta^2) = (g\xi - px)(p - g)^2 \cdot \xi^2 \quad (4)$$

oder dieselbe Gleichung mit y und η statt x und ξ. Ist unser Gitter gradlinig mit äquidistanten Streifen, wird $x = N \cdot \delta$, wobei δ die Gitterkonstante ist und für N der Reihe nach die ganzen Zahlen $\ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$ einzusetzen sind. Die Form der Schattenkurven ist also eine Quintik, die im Ursprung einen doppelt zählenden Punkt hat, $\xi = N\delta$ ist eine Asymptote. Für ein ideales Obkjektiv [$A = 0$] ergeben sich die Formeln der gewöhnlichen Zentralprojektion

$$\xi = \frac{p}{g} \cdot x. \quad (5)$$

Für $x = 0$, d. h. für den durch die Achse gehenden Gitterstreifen zerfällt Gleichung (4) in eine Gerade $\xi = 0$ und in

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{g}{A}(p - g)^2, \quad (6)$$

d. h. einen Kreis, so daß also der Schatten einer durch die optische Achse gehenden Geraden aus einer Geraden und einem Kreise bestehen kann, der reell ist, wenn g und A das gleiche Vorzeichen haben.

Eine Bestätigung dieses immerhin überraschenden Ergebnisses gibt Fig. 7, Tafel I, die als Schatten eines einzelnen, genau durch die Achse gehenden Drahtes eine Gerade und den sog. „Nullkreis" zeigt. Auch diese Erscheinung läßt sich projizieren, erfordert aber natürlich gute Justierung.

Eine fast noch bessere Übersicht gibt Fig. 8, Tafel I, das Schattenbild eines Kreuzrasters. Der Kreis wird nur von einem einzigen Element der Gitterebene erzeugt. Auch sieht man in diesem Bild deutlich, wie sich bei allmählicher Abblendung das Objektiv immer mehr dem Idealzustand der Aberrationsfreiheit nähert. Die in der Mitte gelegenen Schattenstellen sind in ihrer Anordnung fast geometrisch ähnlich den dort liegenden Rasteröffnungen.

Bei der subjektiven Betrachtung der Schattenkurve kommt es nur auf die Winkelwerte an, unter denen sie erscheinen, woraus sich eine etwas übersichtlichere Schreibart der Kurvengleichung gewinnen läßt. Statt des Abstandes der Auffangebene p ist in diesem Falle der Abstand der Ebene einzuführen, auf die man das wahrgenommene Kurvenbild subjektiv projiziert. Wir setzen also

$$\xi' = \frac{\xi}{p} \text{ und } \eta' = \frac{\eta}{p}$$

und erhalten zunächst

$$A\left(\xi' - \frac{x}{p}\right)^3(\xi'^2 + \eta'^2) = (g\xi' - x)\left(1 - \frac{g}{p}\right)^2 \cdot \xi'^2. \quad (6)$$

Für Beobachtung mit einem normalen (emmetropischen) Auge mit entspannter Akkommodation wird $p = \infty$, so daß wir schreiben können

$$\left(\xi'^2 + \eta'^2 - \frac{g}{A}\right) \cdot \xi' = -\frac{x}{A}. \quad (7)$$

Wie man sieht, zerfallen die Kurven für einen verschwindenden Wert der rechten Seite in Kreis und Gerade und werden sich auch für kleine Werte der Konstante x/A, d. h. kleine N, eng an jenen Kreis und jene Gerade anschließen, also immer noch aus einem geschlossenen Zweige innerhalb des Kreises und einem ins Unendliche gehenden Zweige mit zwei Wendepunkten außerhalb bestehen.

Verwenden wir nicht geradlinige, sondern Kreisgitter, wobei Punkte der Gitterebene durch r und φ, solche der Auffangebene durch R und φ bezeichnet werden mögen, so erhält man statt Gleichung (4)

$$A(R - r)^3 = (gR - pr)(p - g)^2, \quad (8)$$

was sich leicht auf die Normalform für kubische Gleichungen mit $R - r$ als Unbekannter bringen läßt.

$$\frac{A}{(p-g)^2} \cdot (R - r)^3 - g(R - r) + (p - g) \cdot r = 0. \quad (8a)$$

Man sieht dann ohne weiteres, daß im allgemeinen jedem Punkte der Rasterebene drei Punkte in der Auffangebene entsprechen. Sie sind aber nur solange reell als

$$r^2 < \frac{4g^3}{27A}$$

ist. Für ein zentriertes Kreisgitter würden also als Schattenbilder nur Kreise zu erwarten sein, je nach der Lage gegenüber der Kaustik 1 oder 3. Ihre Abstände voneinander wären nicht gleich, so daß man aus ihrer Ausmessung ebenfalls den Verlauf der Aberration ermitteln könnte. Doch wäre es nicht leicht die Zuordnung eines Gitterkreises zu seinen Schattenkreisen zu erkennen.

Bei höheren Aberrationen, wenn ein einziges Glied nicht mehr genügt, sondern etwa

$$s = A\,\mathrm{tg}^2 u + B \cdot \mathrm{tg}^4 u$$

zu schreiben ist, erhält man als Gleichung der Schattenkurven

$$A(p-g)^2 \cdot (\xi - x)^3(\xi^2 + \eta^2) \cdot \xi^2 + B(\xi - x)^5(\xi^2 + \eta^2)^2 = (g\xi - px)(p - g)^4 \cdot \xi^4, \quad (9)$$

d. h. Kurven 9. Grades. $x = 0$ liefert Zerfall in einem fünffach zählenden Punkt und zwei Kreise.

Die Umformung für subjektive Beobachtung bzw. unendlich weit entfernte Auffangebene ergibt

$$[A(\xi'^2+\eta'^2)+B(\xi'^2+\eta'^2)^2-g]\cdot\xi'=-x. \quad (10)$$

Nimmt man in der Potenzreihe noch ein weiteres Glied hinzu, so entsteht eine Kurvenschar vom 13. Grade, die für $x=0$ in einen siebenfach zählenden Punkt und drei Kreise zerfällt.

Schon bei der einfachen Aberration mit nur einem Gliede war der „Nullkreis" nicht immer reell, sondern nur bei bestimmter Lage des Gitters innerhalb der Kaustik. Bei den zuletzt besprochenen Fällen treten noch gewisse Größen- und Vorzeichenbedingungen dazu, die zwischen den Koeffizienten der Aberration bestehen müssen, damit die Schattenkreise nicht imaginär werden. Doch würde die Erörterung dieser Verhältnisse hier zu weit führen.

§ 3. Praktische Anwendung.

Zur Auswertung nimmt man am besten Photogramme, die die beiden Quellpunkte deutlich zeigen und benutzt dann, indem man sich auf die xz-Ebene beschränkt, die unmittelbar aus Fig. 6 ablesbaren Beziehungen

$$\operatorname{tg} u=\frac{\xi-x}{p-g} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} u=\frac{x}{g-s} \quad (12)$$

also

$$g-s=\frac{x(p-g)}{\xi-x}=\frac{N\delta(p-g)}{\xi-N\delta}. \quad (13)$$

Der Abstand $p-g$ der beiden Ebenen ist mit sehr großer Genauigkeit leicht festzustellen. Die ξ-Achse ist im Schattenbild durch die beiden Quellpunkte genügend genau definiert. Auf ihr mißt man die einzelnen ξ-Werte mit dem Komparator, nachdem man sich über die Zuordnung von Rasterstrich und Schattenlinie klar geworden ist. Aus Gleichung (11) findet man sofort den Bildwinkel u, sowie nach Gleichung (12) oder (13) die zugehörigen Schnittweiten $g-s$ in bezug auf die Gitterebene. Der Abstand g der Kaustikspitze von der Gitterebene ließe sich direkt messen, doch ergibt er sich mit großer Genauigkeit als Grenzwert der Aberrationskurve von selbst. Es sei hervorgehoben, daß das so erhaltene Resultat natürlich die wirkliche Aberrationskurve liefert und von der Beschränkung einer abgebrochenen Potenzreihendarstellung frei ist.

Beispiele für derartige Auswertungen sind in der von mir veranlaßten Dissertation von Günther Schulz[1]) gegeben. Herr Schulz hat noch eine Verfeinerung der Messungen erzielt, indem er zur Auswertung die auftretenden Beugungserscheinungen heranzog, die zum Teil recht interessante Einzelbilder ergeben. Als Beispiel sei auch an dieser Stelle die der Arbeit von G. Schulz entnommene Fig. 9, Tafel II gegeben, eine Vergrößerung des Schattenbildes, das von einem Objektiv mit sehr starker Aberration herrührt. Die auffallende Gabelung der Schattenstreifen ist wohl eine Moiré-Erscheinung, die sich aus der endlichen Größe der Lichtquelle ergibt. Ihre Beschränkung auf ein gewisses Gebiet folgt aus der Stellung der Gitterebene innerhalb der Kaustik, wodurch die Mittelpartien von konvergenten, die Randpartien von divergenten Strahlen getroffen wurden. Auch über die in unserer Figur 5 bereits in der Mitte angedeutet enthaltenen elliptischen „Gebiete gleicher Deutlichkeit" sehe man die Arbeit von G. Schulz.

1) Günther Schulz, Über die Prüfung optischer Systeme mit Rastern. Ann. d. Phys. **85**, 1927.

Zusammenfassung.

Die vorstehend beschriebene Rastermethode zur Prüfung optischer Systeme ist in ihrer Ausgestaltung wohl als neuartig anzusehen, wenn es auch viel Ähnliches gibt. Man kann sie z. B. auffassen als eine „Multiplikation der Messerschneidenmethode". Bekanntlich liefert bei diesem von Foucault stammenden Verfahren jede Stellung der Schneide eine andere Kurve, wobei man die meßbare Verschiebung der Schneide längs und senkrecht zur optischen Achse vermutlich schon mehrfach zur Berechnung der Aberrationsgrößen selbst benutzt hat. Veröffentlicht ist allerdings über eine derartige quantitative Ausnutzung der Messerschneidenmethode anscheinend nichts. Hier bei der Rastermethode werden die bei Foucault nacheinander auftretenden Stellungen des Messers durch die einzelnen Gitterstreifen gleichzeitig dargestellt.

Auch mit dem Töplerschen Schlierenverfahren ist die Rastermethode verwandt. Jeden einzelnen Gitterstreifen kann man als eine Töplersche Blende auffassen, durch die bekanntlich Stellen der Linse, in denen der Brechungsindex von seiner Umgebung mehr oder weniger abweicht, sichtbar werden. Auch bei unserer Rastermethode ist eine solche Prüfung, besonders subjektiv, leicht zu ermöglichen. Fig. 10, Tafel II zeigt ein Photogramm, bei dem absichtlich so eingestellt wurde, daß die Schliere in einen Quellpunkt zu liegen kam. Entsprechendes gilt für Schleiffehler, wovon Fig. 11, Tafel II ein Beispiel gibt.

Die scheinbar sehr ähnlichen Methoden von Ronchi und Lenouvel verwenden so enge Gitter, daß von geometrischen Schatten keine Rede sein kann, sondern nur Interferenz- und Beugungserscheinungen (im engeren Sinne) auf-

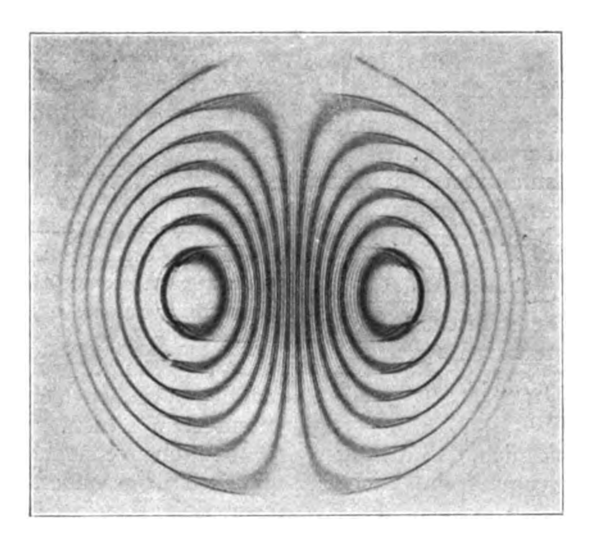


Fig. 9.
Beugungsstreifen und Gabelung der Schattenlinien
(etwa $1\frac{1}{2}$ mal vergrößert).



Fig. 10.
Im linken Quellpunkt liegt eine Schliere.

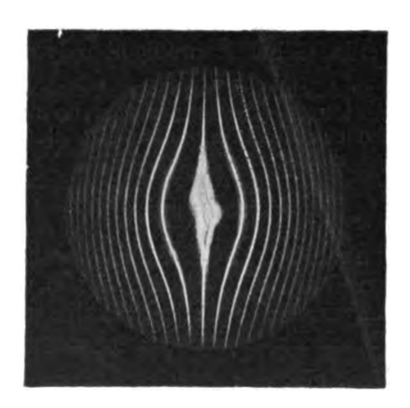


Fig. 11.
Schleiffehler.

treten. Auch brauchen sie verschiedene Hilfslinsen, die allerlei Korrekturen nötig machen. Unsere Rastermethode dagegen braucht außer der zu untersuchenden Linse nur ein Blendloch und ein Gitter.

Felix Jentzsch (Berlin), Beugung des Lichtes an Stahlschneiden und Silberdrähten.

Vortragender gab einen zusammenfassenden Bericht über zwei inzwischen an anderer Stelle bereits erschienene Experimentaluntersuchungen.

1. Felix Jentzsch, Über die Beugung des Lichtes an Stahlschneiden. Ann. d. Phys. **84**, 292—312, 1927.
2. Hans Pfenninger, Über die Polarisation von Lichtwellen am metallischen Kreiszylinder. Berliner Dissertation 1927, 44 S. und Ann. d. Phys. **83**, 753—796, 1927.

Diskussion.

Herr W. Wien: Es freut mich, daß die alten Beobachtungen über die Beugung des Lichtes an Metallschneiden, die weder experimentell noch theoretisch abgeschlossen waren, in so erfreulicher Weise wieder aufgenommen werden. Meine alten Beobachtungen enthielten noch eine Lücke. Da sich nämlich ein Zusammenhang zwischen der Farbe des bei großen Winkeln gebeugten Lichtes und den Konstanten der Metallreflexion ergeben hatte, so ist im Hinblick auf das Kerrphänomen ein Einfluß eines magnetischen Feldes auf die Polarisation des gebeugten Lichtes zu erwarten. Vielleicht könnten derartige Versuche aufgenommen werden. Die Beugung bei langen Wellen ist sehr vielversprechend, weil dann nach der Maxwellschen Theorie ein Einfluß der Leitfähigkeit bemerkbar sein müßte. Es ist nur zu fürchten, daß diese Versuche Intensitätsschwierigkeiten finden werden.

Herr Jentzsch: Beobachtungen über die Beugung an magnetisierten Metallschneiden sowie stromdurchflossenen Drähten sind in der Tat seinerzeit geplant gewesen, aber nicht zur Ausführung gelangt, weil die geringe Größe des magnetooptischen Kerreffektes keinen Erfolg zu versprechen schien.

Beugungsversuche im Ultraroten erscheinen mir deshalb besonders aussichtsvoll, weil ich ein neues Spiegelspektrometer konstruiert habe, das rechnerisch die ca. 40fache Intensität der Rubensschen Spiegel liefern soll. Hierüber wird später berichtet werden.

BESPRECHUNGEN.

F. Eisenlohr, Der molekulare Brechungsexponent in der Reihe der Polymethylenverbindungen. (Fortschr. der Chemie, Physik und phys. Chemie, Bd. 18, Heft 9.) Gr. 8°. 48 S. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1925. M. 4.20.

Eine hauptsächlich für den organischen Chemiker in ihren Resultaten interessante Anwendung der in den Händen des Verfassers sehr ausgebildeten Methode auf spezielle Konstitutionsfragen.

G.-M. Schwab.

H. J. Gramatzki, Leitfaden der astronomischen Beobachtung. 8°. 111 S. Mit 35 Abbildungen und 3 Tafeln. Berlin u. Bonn, Ferd. Dümmler. 1928. M. 3.50, geb. 4.50.

Der Verf. gibt eine recht brauchbare populäre Anleitung für die Ausführung einfacher astronomischer Beobachtungen mit bloßem Auge und mit kleineren Fernrohren (unter anderen Sternschnuppen, Planetenoberflächen, Sternhelligkeiten und Sternfarben, letztere auch unter Benutzung von Hilfsapparaten).

A. Kopff.

Berichtigung.

In dem Vortrag von Alfons Bühl „Über das Diffusionspotential und die Dissoziation der Salzsäure" (diese Zeitschrift **28**, Seite 767—770) bezieht sich die Ziffer [1]) auf der Seite 767, rechte Spalte, Zeile 2 von oben, auf die Anmerkung 1 der linken Spalte. Lies ferner auf derselben Seite, rechte Spalte, 20. Zeile von unten,

$$A_C = (u_C + v_C) A_C \quad \text{statt} \quad A_C = (uC + vC) A_C$$

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent an der Deutschen Universität Prag Dr. Reinhold Fürth zum etatsmäßigen a. o. Professor der theoretischen Physik ebenda, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Halle Dr. Gustav Hertz in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Berlin, der a. o. Professor an der Universität Breslau Dr. Lothar Koschmieder zum ord. Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn, der Privatdozent für Physik an der Universität Marburg Dr. Rudolf Tomaschek zum a. o. Professor ebenda.

Lehrauftrag: Der Privatdozent für theoretische Physik an der Universität Frankfurt Dr. G. Lanczos für das Wintersemester 1927/28 mit einer vierstündigen Vorlesung über theoretische Optik an der Universität Würzburg beauftragt.

Gestorben: Der frühere Rektor der Universität Madrid Professor der Chemie Dr. José Rodriguez Carracida.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 3. Ausgegeben am 1. Februar 1928. 29. Jahrgang.

Nr. 781. Printed in Germany.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 3 — 1. Februar 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 4 am 5. Februar 1928.

INHALT:

Otto Wiener.

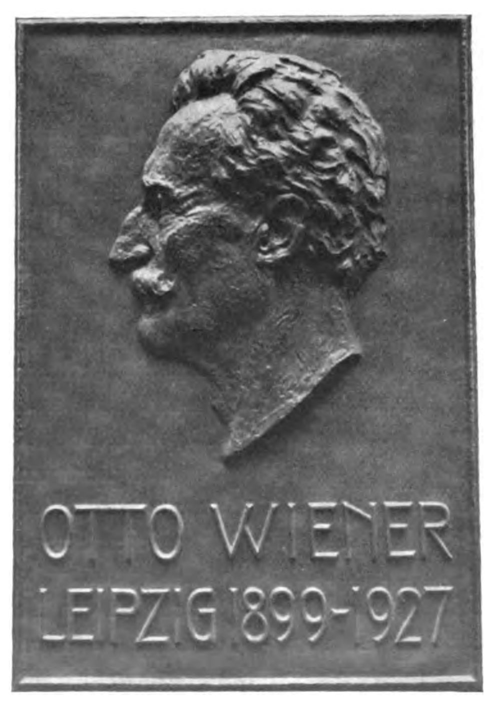
Ein Gedenkblatt zur ersten Wiederkehr seines Todestages.

Von Karl Lichtenecker.

„Auch von ihm soll man einst sagen,
Wenn sein Leben sich geendigt
Und man ihn hinausgetragen:
Das Gemeine hat ihn nicht gebändigt".

Am 18. Januar jährte sich der Tag, an dem der Leipziger Professor für Experimentalphysik, Geh. Hofrat Otto Wiener aus dem Leben schied. Bald nach seinem Tode erschien ein kurzer, aber trefflicher Nachruf aus der Feder seines Schülers, Assistenten und späteren Mitarbeiters W. Moebius und eine besonders eingehende, eindrucksvolle Gedenkrede in den Berichten der sächsischen Akademie, gesprochen von L. Weickmann in der Sitzung vom 1. Juli 1927.

Was dort über Familie und Jugendzeit Wieners, über seine vielfältigen und weitausgebreiteten Interessen, über seine Teilnahme an physikalisch-technischen Problemen und Bestrebungen berichtet wird, soll und kann hier nicht noch einmal wiedergegeben werden. Nur ein kurzer Rückblick auf die Gesamterscheinung Wieners als Forscher und als Mensch will dieses Gedenkblatt sein.



Dem deutschen Südwesten gehörte Wiener nach Abstammung und nach Geburt an. Dort verbrachte er auch seine Kinder- und Knabenjahre, sowie den größten Teil seiner Studentenzeit. Geboren am 15. Juni 1862 zu Karlsruhe, als Sohn des Professors für darstellende Geometrie Christian Wiener, studierte er dort, in

Berlin und in Straßburg. Die südwestdeutsche Heimat verrät sein stets heiteres, sprühendes und doch gemütvoll ruhiges Wesen, seine offene, teilnehmende, grundgütige Art bis in sein Alter.

Wieners Aufstieg als Forscher war ebenso rasch und glänzend wie der in der akademischen Laufbahn: 1887 promovierte Wiener bei Kundt in Straßburg mit einer Arbeit „Über die Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion und Methode zur Dickenbestimmung dünner Blättchen". Nach drei weiteren kleineren Arbeiten folgt schon 1889 seine berühmte Untersuchung über „Stehende Lichtwellen und die Schwingungsrichtung polarisierten Lichtes", vorgetragen auf der Naturforscherversammlung zu Heidelberg. Diese Arbeit bringt ihm die Niederlassung an seiner Studienuniversität Straßburg und bereits nach einsemestriger Tätigkeit als Privatdozent einen Lehrauftrag nach Aachen, der 1894 in eine a. o. Professur verwandelt wurde. In Aachen entsteht außer der wiederholt genannten und angewendeten Arbeit über die „Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen und Verwertung derselben zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung" die hochbedeutsame und weithin bekannt gewordene Arbeit über „Farbenphotographie durch Körperfarben und mechanische Farbenanpassung in der Natur". Das Jahr 1895 vollendet den Aufstieg auf der akademischen Stufenleiter durch den Ruf als Ordinarius nach Gießen.

Nun folgt für Wiener eine Zeit der Amtspflichten und der organisatorischen Arbeit bei dem Auf- und Ausbau zweier großer physikalischer Institute. Kaum ist das Gießener Institut, mit dessem Neubau seine dortige Tätigkeit beginnt, fertig, folgt Wiener am 1. April 1899 dem ehrenvollen Ruf nach Leipzig als Nachfolger G. Wiedemanns, um nochmals ein physikalisches Institut, diesmal eines der größten an Deutschlands hohen Schulen, neu zu erbauen und einen modernen Großbetrieb an Vorlesungen, Praktikum und Doktorandenarbeiten zu organisieren, eine Tätigkeit, die allein an die Grenze der Leistungsfähigkeit eines Menschen heranreicht, insbesondere wenn alle diese Aufgaben mit der sich selbst nie genügenden Pflichttreue eines Wiener durchgeführt werden. Das Leipziger Amt hat dann Wiener bis zu seinem Tode bekleidet; bewundert und bejubelt von zahlreichen Studentengenerationen ob seiner glänzenden Vorlesungsversuche und seiner verständnisvollen Liebe zur Hochschuljugend, hochgeachtet und verehrt von seinen Schülern und Mitarbeitern, denen er stets Treue um Treue zu halten bestrebt war.

Wieners wissenschaftliche Leistungen gehören zwar fast sämtlich der Optik an, wenn dieser Begriff in seinem weitesten durch Maxwell und Hertz begründeten Umfang genommen wird, lassen sich aber trotz ihres inneren Zusammenhanges in drei sachlich und zeitlich geschiedene Gebiete teilen.

Das erste Gebiet betrifft das Verhalten des Lichtes bei Zurückwerfung an metallischen Oberflächen. Von Kundt war Wiener als Doktorarbeit die Aufgabe gestellt worden, die Absorption in dünnen Metallplättchen zu messen. Der Lösung dieser Aufgabe mußte eine genaue Dickenmessung der untersuchten Metallschichten vorangehen, die nur auf optischem Wege möglich war. Eine solche optische Dickenmessung setzte ihrerseits wieder die damals noch nicht vorhandene Kenntnis der Phasenänderung bei Zurückwerfung des Lichtes an metallischen Oberflächen voraus. Diese Phasenänderung und ihre Abhängigkeit von Nebenumständen zu ermitteln, gelang Wiener in seiner Doktorarbeit durch eine Interferenzmethode. Nur die Phasenänderung des Lichtes bei senkrechtem Auffallen auf die zurückwerfende Schicht blieb noch ungeklärt. Nun wollte Wiener diesen Sonderfall getrennt nochmals untersuchen und die dabei auftretenden Interferenzstreifen auf einer lichtempfindlichen Platte festhalten.

Bei dieser Anordnung traten durch Zusammenwirken der einfallenden und der zurückgeworfenen Strahlung die stehenden Lichtwellen auf, wie sie von Kundt für den Schall und von Hertz für seine „Strahlen der elektrischen Kraft" nachgewiesen worden waren. In zweijähriger Arbeit wurde die Auf-

gabe gelöst, die Entstehung der stehenden Lichtwellen einwandfrei als solche nachzuweisen und jeden möglichen Einwand gegen diese Deutung durch ebenso einfache als geistvolle Prüfversuche zu entkräften. Die Entdeckung der stehenden Lichtwellen in Verbindung mit den erwähnten Hertzschen Versuchen war im damaligen Zeitpunkte an sich eine die höchste Aufmerksamkeit und Befriedigung der Fachwelt auslösende Tat. Wieners Versuche wiesen aber auch nach — und dies war von nicht geringerer grundlegender Bedeutung —, daß es die elektrische und nicht die magnetische Abweichung vom Gleichgewichtszustande ist, welche die chemische Veränderung der lichtempfindlichen Platte hervorruft. Zwei Jahre nach Erscheinen der Wienerschen Arbeit konnten Drude und Nernst diesen Befund dahin ergänzend bestätigen, daß auch die Fluoreszenzwirkung des zugestrahlten Lichtes in den Bäuchen der elektrischen und nicht in den Bäuchen der magnetischen Veränderung auftritt.

Der endgültige Nachweis und die beherrschende Behandlung der stehenden Lichtwellen durch Wiener gab einen mächtigen Anstoß für die Bearbeitung der Farbenphotographie. Schon ein Jahr später veröffentlichte Lippmann (1891), durch Wieners Arbeit angeregt, sein Interferenzverfahren, das ohne Zweifel die farbenprächtigsten Bilder und die physikalisch treueste Farbenwiedergabe liefert, die wir bis heute kennen. Wieners Arbeit in den nächsten Jahren konnte das ganze Gebiet der damals bekannten farbenphotographischen Verfahren aufhellen. Er fand das Kriterium des schrägen Lichtdurchganges durch die farbenphotographische Schicht zur Trennung der Verfahren, die auf Interferenz beruhen von jenen, die auf Körperfarben beruhen und gab mit seinem auf die gefärbte Schicht aufgesetzten Flintglasprisma ein einfaches Mittel zur praktischen Anwendung dieses Kriteriums an. Beim Lippmannschen Verfahren, ebenso wie bei den früheren, von Becquerel ausgeführten und von ihm als Farben dünner Blättchen gedeuteten Versuchen an Chlorsilber auf blanker Silberplatte waren, wie Wiener nun zweifelsfrei feststellen konnte, die Farben durch stehende Lichtwellen verursacht, also Scheinfarben. Bezüglich dieser Verfahren hatte sich somit die alte Zenkersche Vermutung als richtig erwiesen. Bei den ältesten Versuchen natürlicher Farbenwiedergabe dagegen, die von Seebeck ausgeführt und schon von Goethe herangezogen worden waren und die dann Poitevin durch Anwendung von Oxydationsmitteln zum Ausbleichen der lichtempfindlichen Schicht vervollkommnet hatte, handelt es sich, wie Wiener nun feststellen konnte, nicht um Scheinfarben, sondern um echte, also Körperfarben.

Für die Entstehung dieser Körperfarben fand Wiener eine verblüffend einfache und einleuchtende Erklärung. Darnach besteht das angelaufene Chlorsilber aus einem Gemisch verschiedenfarbiger komplexer Verbindungen, die unter dem Einflusse von Energieaufnahme durch Strahlung leicht der chemischen Umsetzung unterliegen. Im einfarbigen Lichte müssen dann jene Teilchen von solchen Umsetzungen am besten geschützt sein und somit erhalten bleiben, welche selbst die Farbe des zugestrahlten Lichtes haben, dieses demnach nicht merklich absorbieren. Die von Wiener aufgewiesene Möglichkeit, durch Ausbleichen von neutralgrauen Farbstoffgemischen farbige Bilder zu erzeugen, wurde den Anregungen Wieners folgend 1895 von Vallot durchgeführt; darauf beruht auch das 1911 von Smith herausgebrachte „Utocolorpapier". Weiteste Kreise horchten auf, als Wiener auf die Anwendbarkeit seiner Gedanken zur Erklärung der mechanischen Farbenanpassung in der Natur hinwies und dies durch zahlreiche Beispiele belegte. Welche Bedeutung diesen Erfolgen Wieners von den Zeitgenossen allgemein zuerkannt wurde, geht außer aus den Übersetzungen und Zitaten der Wienerschen Arbeiten in fremdsprachigen Zeitschriften auch daraus hervor, daß er bei der Naturforscherversammlung zu Köln 1908 ausersehen wurde, den Hauptvortrag in der Gesamtsitzung beider Hauptgruppen „Über Farbenphotographie und ver-

wandte naturwissenschaftliche Fragen" zu halten.

So hat Wiener die beiden schweren Schwingflügel des Tores zur Farbenphotographie aufgetan: Die Farbenwiedergabe auf physikalischem und auf chemischem Wege war aufgeklärt. Es liegt eine leise Tragik für Wieners Wirken darin, daß der Stollen hinter diesem weitgeöffneten Tore sich durch Geröll verschüttet erwies; daß es dem Menschen vergönnt war, den Traum des Fliegens, des Fernhörens wohl sogar des Fernsehens früher zu verwirklichen, als den Traum des farbigen Lichtbildes, dessen Erfüllung schon Goethe fast greifbar in Händen zu halten schien. Wäre das farbentreue Lichtbild in der Vollendung unserer Schwarz-Weiß-Photographie in rascher Aufeinanderfolge auf Wieners bahnbrechende Arbeiten gelungen, so ist kein Zweifel, daß der Weltruhm eines Pioniers gleich einem Lilienthal ihm zugefallen wäre. Das Land der Verheißung, zu dem er geführt hatte, blieb verschlossen; aber das Geschlecht, dem schließlich auch diese Errungenschaft reift, wird Wieners Namen noch einmal in höchsten Ehren nennen.

Ähnlich ging es Wiener bei den beiden anderen Arbeitsgebieten, bei der Theorie des Mischkörpers und der Theorie des Strömungsäthers.

Die umfassende Bedeutung des Mischkörperproblems hat er als erster erkannt und ins Licht gestellt. Es handelt sich dabei darum, aus den Eigenschaften der Bestandteile die Eigenschaften des Mischkörpers vorauszubestimmen, wenn die Raumanteile, die Gestalt und die Lagerung der den Mischkörper aufbauenden Bestandteile gegeben sind, unter der Einschränkung, daß auf diese Eigenschaften die Gesetze der stationären Strömung anwendbar sind. In dieser allgemeinen Form gelang die vollständige Lösung des Problems nicht. Es konnten jedoch die folgenden beiden fundamentalen Sätze in voller Strenge und Allgemeinheit hergeleitet werden: 1. „Die Mittelwerte von Kraft, Polarisation und Energie in dem einheitlichen Körper, der den Mischkörper in seiner Wirkung auf das äußere Feld ersetzt, sind die gleichen wie bei dem Mischkörper selbst." 2. „Werden die Werte der Eigenschaftskonstante der Bestandteile eines Mischkörpers sämtlich auf den m-fachen Betrag gebracht, so wird auch die Eigenschaftskonstante des Mischkörpers m-mal so groß." Der zweiten Forderung entspricht bekanntlich die Formel von Lorenz-Lorentz im allgemeinen nicht, sondern nur im Grenzfall „unendlich loser Packung", während die von Wiener angegebene, einen unbestimmten Formkoeffizienten enthaltende Formel ihr entspricht, ebenso wie die später für den Sonderfall der vollkommen ungeordneten Zusammenlagerung gefundene logarithmische Mischungsregel.

Auf einem Teilgebiet des allgemeinen Mischkörperproblems jedoch, von dem Wiener einst ausgegangen war, nämlich für Mischkörper mit Schichten- und Faserstruktur, war ihm schließlich ein voller, unbestrittener Erfolg beschieden. Nicht nur die zahlreichen Untersuchungen seiner Schüler, sondern auch die experimentellen Arbeiten Ambronns und dessen Mitarbeiter über Doppelbrechung organischer und anorganischer Strukturkörper auf Grundlage der von Wiener geschaffenen Theorie brachten ihr vollständige Bestätigung. Eine ausführliche Behandlung dieser Dinge darf wohl gerade in dieser Zeitschrift im Hinblick auf den von mir im Jahre 1926 erstatteten zusammenfassenden Bericht unterbleiben.

Hier wie auch sonst war Wiener von höchstem Gerechtigkeitssinn gegen die Leistungen und den geistigen Besitz anderer, der Lebenden und der Toten. Als der Schreiber dieses Gedenkwortes auf Wunsch des Verschiedenen die erwähnte zusammenfassende Darstellung über die Dielektrizitätskonstante von Mischkörpern abgefaßt hatte und sie ihm vor Drucklegung zeigte, da bestanden Wieners Abänderungsvorschläge immer wieder in der Hervorhebung fremder Leistungen zu ungunsten seiner eigenen auch dort, wo es keinem Zweifel unterliegen konnte, daß die von Wiener nachträglich herausgefundenen gelegentlichen Äußerungen anderer Forscher der Allgemeinheit unbekannt geblieben waren und daß der

wissenschaftliche Erfolg ganz und allein seiner Arbeit zu danken war.

Eine Feststellung ähnlicher Art im Geiste Wieners sei hier gestattet. Als ich meine später in dieser Zeitschrift veröffentlichte Arbeit über den „Leitungswiderstand künstlicher und natürlicher Aggregate" 1923 an Wiener sandte, war dieser nach Studium der Arbeit, trotzdem die Behandlung des Gegenstandes gänzlich von seiner eigenen abwich, sofort bereit, die Abhandlung der sächsischen Akademie vorzutragen. Darüber hinaus aber gab er selbst die Anregung, diese Gedanken auf das von ihm und seinen Schülern so ausführlich bearbeitete Gebiet der Dielektrika und der spezifischen Refraktion von Mischkörpern auszudehnen. Wiener gebührt also das Verdienst der Miturheberschaft, soweit diese Bemühungen inzwischen Erfolge aufzuweisen hatten.

Das Lieblings- und Sorgenkind von Wieners theoretischer Forschung blieb bis zuletzt seine Untersuchung, die unter dem Namen „Grundgesetz der Natur" bekanntgeworden ist. Von allen seinen wissenschaftlichen Unternehmungen hielt Wiener diese für die wichtigste, auf keine wendete er mehr Zeit, Mühe und geistige Arbeit an. „Nach dieser Theorie wäre der Weltäther eine ideale reibungslose und unzusammendrückbare Flüssigkeit, wo jedes Teilchen eine ewig unveränderliche Geschwindigkeit hätte, so daß es bei der Bewegung nur die Richtung verändern könnte. Die Protonen und Elektronen wären geschlossene Ringe, bestehend aus den Wienerschen Rechts- und Links-Schraubenwirbeln, welche in dieser Flüssigkeit entstehen und sehr lange Zeit dauern würden. Dabei hat O. Wiener gezeigt, daß eine solche Vorstellung der Materie notwendig bei ihrer Bewegung zur Lorentz-Kontraktion führt. Wiener hat auch mathematisch gezeigt, daß eine solche Flüssigkeit quasielastische Schwingungen auszuführen imstande ist, womit natürlich die Existenz der ‚elektromagnetischen' Wellen erklärt wäre. Es bleibt abzuwarten, wie sich diese großangelegte Theorie weiter ausarbeiten läßt"[1]).

1) St. Mohorovicic in Winkelmanns Handb. III. Auflage, Physik. Optik, II. Band, 1928, S. 971.

Keine Zeit konnte weniger günstig sein für die Veröffentlichung einer solchen Arbeit, als die, in welcher sie erfolgte. Nicht Mangel an Teilnahme seiner Zeitgenossen, die er im Grunde gar nicht erwartete, wohl aber geflissentliche Herabsetzung seiner Arbeit von Mund zu Mund durch Unberufene kränkte oft bitter den heiß und ehrlich Ringenden in seinen letzten Lebensjahren. Und doch war er gerade in der letzten Zeit voll Schaffensfreude über das fortschreitende Gelingen seiner großen Konstruktion. Mehrere Tausend Seiten Handschrift ruhen in der Leipziger Universitätsbücherei unter Wieners von ihm selbst mustergültig geordnetem Nachlaß und harren des verständisvollen Studiums und der Veröffentlichung der noch nicht bekanntgewordenen Ergebnisse. „Wer vermag zu sagen, ob nicht eines Tages diese Wienerschen Gedanken wie eine neue Offenbarung zu neuem Leben erwachen werden", sagt treffend L. Weickmann in seinem Nachruf auf Wiener vor der sächsischen Akademie. Wenn diese Zeilen dazu beitragen könnten, einen gleichgestimmten Geist zur Sichtung und Bergung dieses Teils von Wieners Nachlaß anzuregen, so wäre ihre schönste Aufgabe erfüllt.

Es ist schon gesagt worden, daß der Grundzug in Wieners Wesen die Güte war. Strenge kannte er nur aus Pflichtgefühl; dann aber konnte sie auch so groß werden wie dieses. Jedenfalls ist ihm sein Pflichtgefühl seit seiner Bestellung zu einem öffentlichen Amte stets über die Pflege des eigenen Ruhmes gegangen, der ihm überhaupt nicht allzuviel galt, so sehr er sich auch von Herzen freuen konnte, wenn ihm etwas gelungen war. Wie heilig ihm die Leistungen anderer waren, ist schon hervorgehoben worden. Voll neidloser Freude kargte er dann auch nicht mit lebhafter öffentlicher Anerkennung; es war aber nie ein Lob auf Gegenseitigkeit. Überhaupt ließ er gern die Meinung des andern gelten; niemand verstand besser wie er die schwere Kunst des Zuhörens mit leuchtenden Augen. Selbst voll wahrster Bescheidenheit, konnte er von olympischer Höhe das Unechte, Viel-

geschäftige innerlich wertloser Menschen an sich abgleiten lassen. Seinem Widerwillen gegen alles Aufgeschminkte und Nebelhafte und seiner reinen Vaterlandsliebe entsprang die lebhafte Abneigung gegen überflüssige Fremdworte. Bei Tagungen und Versammlungen wurde er nicht müde, für einen reinlichen deutschen Vortrag in Wort und Schrift auch bei fachwissenschaftlicher Darstellung zu werben und ging selbst darin mit bestem Beispiele voran. Sein Nationalgefühl umfaßte schon vor dem Kriege alles, was deutschen Geistes und deutscher Prägung war, mit gleicher Liebe ohne Rücksicht auf staatliche, dynastische oder soziale Schranken. Selbstlos und selbstverständlich hatte er sich bei Kriegsbeginn zur Verfügung gestellt; auf dem Balkan wurde er das Opfer einer schweren Kriegskrankheit, die schon damals seinem Leben fast ein Ziel gesetzt hätte. In den letzten Jahren konnte er wohl wieder fröhlich sein und lachen, ganz der Alte ist er aber nach den schweren körperlichen und seelischen Erschütterungen durch den Krieg und das Kriegsende nicht mehr geworden.

Erst geistvoller Bahnbrecher, dann treuer Diener am Werke der Wissenschaft, ein ebenso vorzüglicher wie hingebungsvoller Hochschullehrer, ein vergeistigter, edler Mensch, ein wackerer deutscher Mann, so lebt und wirkt Otto Wiener fort bei denen, die ihn kannten. Und die ihn kannten, haben ihn lieb gehabt.

Das diesem Artikel beigefügte Bild ist die Wiedergabe einer Bronzeplakette, die auf Veranlassung von Schülern und Freunden des Verstorbenen durch Prof. Pfeifer, Leipzig, geschaffen und kürzlich im großen Hörsaal des Leipziger physikalischen Instituts angebracht wurde.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Aktivitätskoeffizienten kleiner Ionen.

Von Hans Müller.

Das zuerst von Güntelberg[1]) und später von mir[2]) unabhängig entdeckte Verfahren zur Berechnung der Aktivitätskoeffizienten f besagt, daß $kT \log f$ eines Ions in einem Elektrolyten mit den Konzentrationen c_i gleich ist dem Arbeitsbetrag, der nötig ist, um dieses eine Ion in dem betrachteten Elektrolyten, in dem alle andern Ionen ihre volle Ladung tragen, aufzuladen, vermindert um die Arbeit, die die Ladung dieses Ions in reinem Wasser erfordert. In meiner ersten Mitteilung (auf die ich hier durch loc. cit. verweise) hat mich diese Betrachtung auf die Formel geführt (loc. cit. (15))

$$\log f = z_i \int_0^1 \varphi(\lambda)\, d\lambda - \frac{\varepsilon^2 z_i^2}{2aDKT}. \qquad (1)$$

Darin ist z_i die Wertigkeit des Ions, dessen Aktivitätskoeffizient gesucht wird, und $\varphi(\lambda) = \frac{\varepsilon}{kT}\psi(\lambda)$, wo $\psi(\lambda)$ das Potential dieses Ions ist, wenn es während des oben beschriebenen Ladungsprozesses den Teil λ seiner vollen Ladung trägt. Dabei wurde angenommen, daß bei der Integration die charakteristische Größe

$$x = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon^2\nu}{DkT}}\sqrt{\sum_i c_i z_i^2}$$

als konstant betrachtet werden darf.

Herr Gronwall[1]) macht mich darauf aufmerksam, daß das Güntelbergsche Verfahren nicht mehr richtig ist, wenn man für das Potential eine bessere Annäherung als die Debyesche berücksichtigt. Die in meiner ersten Arbeit gegebenen Aktivitätskoeffizienten sind daher ungenau. Die Untersuchungen von Gronwall, La Mer und Sandved[2]) haben mir aber eine Möglichkeit gezeigt, nach meiner graphischen Methode die Aktivitätskoeffizienten zu bestimmen unter Zugrundelegung der Debyeschen Definition derselben.

Wir wollen uns im folgenden auf den Fall eines z—z-wertigen Elektrolyten beschränken, für den wir die Aktivitätskoeffizienten beider

1) Siehe N. Bjerrum, Zeitschr. f. physikal. Chemie **119**, 145, 1926.
2) Hans Müller, diese Zeitschrift **28**, 324, 1927.

1) Siehe N. Bjerrum, Zeitschr. f. physikal. Chemie **119**, 145, 1926.
2) T. H. Gronwall, Viktor K. La Mer und Karl Sandved, diese Zeitschrift (im Druck). Ich bin diesen Herren sehr verpflichtet für die Überlassung des Manuskriptes. Die folgenden Betrachtungen schließen sich eng an diese Arbeit an. Siehe auch La Mer, Transact. Am. Electrochemial Society **51**, 631, 1927.

Ionensorten als gleich annehmen können. Man kann dann nach Gronwall zeigen, daß das Potential φ eines Ions vom Radius a, das den Bruchteil λ seiner vollen Ladung E trägt, als Funktion der zwei unabhängigen Variabeln $\frac{\lambda E z \varepsilon}{a D k T}$ und xa dargestellt werden kann. Zu diesem Zwecke bringt man die Differentialgleichung

$$\Delta_r \varphi = \frac{x^2}{z} \sinh z\varphi$$

durch Einführen der Variabeln

$$\Phi = z\psi \qquad y = xr$$

auf die Form

$$\Delta_y \Phi = \sinh \Phi$$

in der die Größen z, x nicht mehr explizite auftreten. Das Potential $\Phi(\lambda, z, a)$ hängt somit nur noch von den Werten der zweiten Randbedingung ab, welche in diesen Variabeln lautet

$$\text{Für } y = ax \qquad \Phi' = -\frac{z\varepsilon\lambda E}{xa^2 DkT}.$$

Man kann somit die Lösung formell schreiben

$$\varphi(\lambda, a, z) = \frac{1}{z} f\left(\frac{z\varepsilon\lambda E}{xa \cdot aDkT}, xa\right)$$

oder auch

$$\varphi(\lambda, a, z) = \frac{1}{z} f\left(\frac{\lambda E z\varepsilon}{aDkT}, xa\right).$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Funktion f in eine konvergente Potenzreihe von $\frac{\lambda E z \varepsilon}{aDkT}$ entwickelbar ist. Den Beweis, daß dies möglich ist, wird in der Arbeit von Gronwall, La Mer und Sandved erbracht. Wir setzen daher

$$\varphi(z, a, \lambda) = \frac{1}{z} \sum_m \left(\frac{\lambda E z\varepsilon}{aDkT}\right)^m p_m(xa).$$

Da überdies für $z - z$-wertige Elektrolyte φ eine ungerade Funktion von λ sein muß, nimmt m nur ungerade Werte an, so daß

$$\varphi(\lambda, a, z) = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda E z\varepsilon}{aDkT}\right)^{2m+1} p_{2m+1}(xa). \quad (2)$$

Das erste Glied dieser Summe mit $m = 0$, das den linearen Anstieg des Potentials mit der Ladung ergibt, ist natürlich das in der Debyeschen Theorie berücksichtigte Glied (loc. cit. (16))

$$\varphi_1 = \frac{1}{z} \frac{\lambda E z\varepsilon}{aDkT} p_1(xa) = \frac{\lambda E\varepsilon}{aDkT} \frac{1}{1 + xa}.$$

Die Summe aller übrigen Terme stellt für $\lambda = 1$ den in meiner Arbeit berechneten Korrekturterm zum Potential dar

$$-\Delta\varphi = \frac{1}{z} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Ez\varepsilon}{aDkT}\right)^{2m+1} p_{2m+1}(xa). \quad (3)$$

Wäre die Güntelbergsche Methode anwendbar, so würde sich daraus nach (1) ergeben

$$\log f = \frac{E}{z\varepsilon} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{Ez\varepsilon}{aDkT}\right)^{2m+1} \frac{1}{2(m+1)} p_{2m+1}(xa) - \frac{E^2}{2aDkT} \quad (4)$$

In der zweiten Debyeschen Methode zur Berechnung des Aktivitätskoeffizienten betrachtet man das Potential eines Ions in einem Elektrolyten, in dem gleichzeitig alle andern Ionen den Bruchteil λ ihrer vollen Ladung tragen. Um dieses zu erhalten, hat man daher in Formel (2) z durch λz und x durch λx zu ersetzen

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\lambda z} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2 E z\varepsilon}{aDkT}\right)^{2m+1} p_{2m+1}(\lambda xa).$$

Darin sind die p_{2m+1} die gleichen Funktionen wie oben, nur mit einem andern Argumente. Um daraus den Aktivitätskoeffizienten zu berechnen, sucht man zuerst das sog. Aktivitätspotential

$$\log h = \frac{E}{\varepsilon} \int_0^1 \bar{\varphi}(\lambda)\, d\lambda - \frac{E^2}{2aDkT} = \frac{E}{\varepsilon z} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z\varepsilon E}{aDkT}\right)^{2m+1} \int_0^1 \lambda^{4m+1} p_{2m+1}(\lambda xa)\, d\lambda - \frac{E^2}{2aDkT}$$

und erhält daraus nach Debye[1]) den Aktivitätskoeffizienten aus

$$\log f = \log h + \sum_j N_j \frac{\partial}{\partial N_i} \log h_j.$$

Da allgemein für einen $z - z$-wertigen Elektrolyten

$$\sum_j N_j \frac{\partial}{\partial N_i} = \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x},$$

1) P. Debye, diese Zeitschrift **25**, 9, 1924.

wird der Aktivitätskoeffizient somit

$$\log f = \frac{E}{\varepsilon z}\sum_0^\infty\left(\frac{z\varepsilon E}{aDkT}\right)^{2m+1}\left[\int_0^1 \lambda^{4m+1} p_{2m+1}(\lambda x a)\,d\lambda + \frac{x}{2}\int_0^1 \lambda^{4m+1}\frac{\partial}{\partial x}p_{2m+1}(\lambda x a)\,d\lambda\right] - \frac{E^2}{2aDkT}.$$

Je nachdem man hierin das zweite oder das erste Integral partiell integriert, erhält man die folgenden zwei Ausdrücke für log f

$$\left.\begin{aligned}\log f &= \frac{1}{2}\frac{E}{z\varepsilon}\sum_0^\infty\left(\frac{z\varepsilon E}{aDkT}\right)^{2m+1} p_{2m+1}(xa) - \frac{E^2}{2aDkT}\\ &- \frac{E}{z\varepsilon}\sum_0^\infty\left(\frac{z\varepsilon E}{aDkT}\right)^{2m+1} 2m\int_0^1 \lambda^{4m+1} p(\lambda x a)\,d\lambda,\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}\log f &= \frac{E}{z\varepsilon}\sum_0^\infty\left(\frac{z\varepsilon E}{aDkT}\right)^{2m+1}\frac{1}{2(2m+1)}p_{2m+1}(xa) - \frac{E^2}{2aDkT}\\ &+ \frac{E}{z\varepsilon}\sum\left(\frac{z\varepsilon E}{aDkT}\right)^{2m+1} x\,\frac{m}{2m+1}\int_0^1 \lambda^{2(2m+1)}\frac{\partial}{\partial(\lambda x)}p_{2m+1}(\lambda x a)\,d\lambda.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wir haben also anstatt (4) eine dieser Formeln (5) oder (6) zur Berechnung der Aktivitätskoeffizienten zu benutzen. Formel (5) ist bis auf die Bezeichnung übereinstimmend mit dem von Gronwall, La Mer und Sandved gegebenen Ausdruck. Man sieht, wie diese Autoren zuerst bemerkt haben, daß (5) und (6) nur in dem Gliede mit $m = 0$ mit (4) übereinstimmen, d. h. das Güntelbergsche Verfahren ist nur richtig, wenn man sich auf die Debyesche Näherung beschränkt.

Bezeichnet man mit f_D den aus der Debyeschen Näherung berechneten Aktivitätskoeffizienten, so ist nach allen drei Formeln übereinstimmend

$$\log f_D = \frac{E^2}{2aDkT}p_1(xa) - \frac{E^2}{2aDkT}. \quad (7)$$

Berücksichtigt man noch (3), so hat man also zur Berechnung der Aktivitätskoeffizienten einwertiger Ionen die zwei Formeln

$$\log f = \log f_D - \frac{\Delta\varphi}{2} - 2\sum_1^\infty\left(\frac{\varepsilon^2}{aDkT}\right)^{2m+1}\cdot m\cdot\int_0^1 \lambda^{4m+1}p_{2m+1}(\lambda x a)\,d\lambda \quad (5')$$

$$\begin{aligned}\log f &= \log f_D + \sum_1^\infty\left(\frac{\varepsilon^2}{aDkT}\right)^{2m+1}\frac{1}{2(2m+1)}p_{2m+1}(xa)\\ &+ x\sum_1^\infty\left(\frac{\varepsilon^2}{aDkT}\right)^{2m+1}\frac{m}{2m+1}\int_0^1 \lambda^{2(2m+1)}\frac{\partial}{\partial(\lambda x)}p_{2m+1}(\lambda x a)\,d\lambda.\end{aligned} \quad (6')$$

Um daraus numerisch Aktivitätskoeffizienten zu berechnen, sollte man die Funktionen p kennen. Mein graphisches Verfahren liefert zwar $\Delta\varphi$, nicht aber die einzelnen Funktionen p_{2m+1}. Nun hatten wir aber gefunden, daß mit guter Annäherung (loc. cit. (18))

$$\Delta\varphi(\lambda) = \lambda^3\Delta\varphi(1),$$

d. h. das Verfahren ist äquivalent einer zweiten Annäherung. Wir können also $\Delta\varphi$ angenähert identifizieren mit

$$-\Delta\varphi(x) = \left(\frac{\varepsilon^2}{aDkT}\right)^3 p_3(xa)$$

und die Aktivitätskoeffizienten werden daher in zweiter Näherung

$$\log f = \log f_D - \frac{\Delta\varphi(x)}{2} + 2\int_0^1 \lambda^5\Delta\varphi(\lambda x)\,d\lambda \quad (5'')$$

$$\log f = \log f_D - \frac{\Delta\varphi(x)}{6} - \frac{x}{3}\int_0^1 \lambda^6\Delta\varphi'(\lambda x)\,d\lambda. \quad (6'')$$

Überlegt man, welche Fehler bei dieser Näherung begangen werden, so findet man, daß die Berechnung nach (5″) einen zu großen, dagegen die Berechnung nach (6″) einen zu kleinen Wert für log f liefern wird. Man hat damit den richtigen Wert zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, und da es sich zeigt, daß das Resultat nach (5″) wenig

von dem nach (6'') abweicht, läßt er sich mit bestimmter Genauigkeit angeben.

Für die numerische Berechnung der Integrale ist es praktisch, die zu einem fixierten Ionenradius a gehörende Funktion $\Delta\varphi$ nicht als Funktion von x, sondern der proportionalen Größe $\sqrt{c} = \frac{x}{\bar{x}\sqrt{2}}$ darzustellen. So erhält man schließlich die für die numerische Rechnung geeigneten Formeln

$$-\log f = -\log f_D + \frac{\Delta\varphi(\sqrt{c})}{2} - 2\int_0^1 \lambda^5 \Delta\varphi(\lambda\sqrt{c})\, d\lambda \quad (7)$$

(untere Grenze)

$$-\log f = -\log f_D + \frac{\Delta\varphi(\sqrt{c})}{2} + \frac{\sqrt{c}}{3}\int_0^1 \lambda^6 \Delta\varphi'(\sqrt{c})\, d\lambda. \quad (8)$$

(obere Grenze)

Die Funktionen $\Delta\varphi(\sqrt{c})$ für die verschiedenen Ionenradien können wir unserer ersten Arbeit

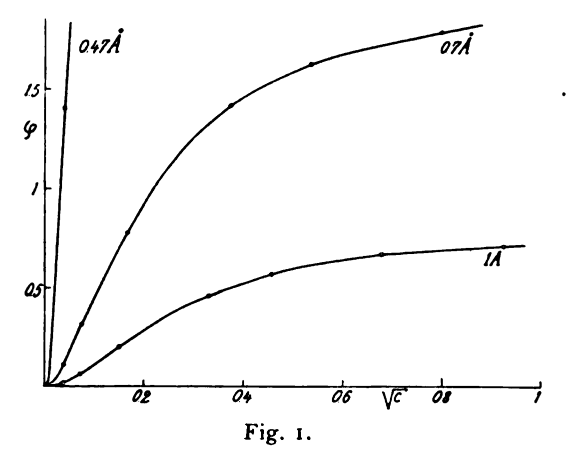


Fig. 1.

entnehmen (loc. cit. Tabelle I) und daraus die Ableitung konstruieren. In Fig. 1 und 2 sind diese Funktionen für die Radien 1 Å, 0,7 Å und 0,47 Å dargestellt. Mit Hilfe dieser Kurven lassen sich die Integrale in (7) und (8) leicht graphisch bestimmen.

Für unser Rechnungsbeispiel der ersten Arbeit

$a = 1$ Å, $c = 0{,}8557$ Mol/Liter, $\Delta\varphi = 0{,}7166$

ergibt sich beispielsweise:

Untere Grenze nach (7)

$$-\log f_D = 0{,}8163$$
$$\Delta\varphi/2 = 0{,}3583$$
$$-2\int_0^1 \lambda^5 \Delta\varphi(\lambda)\, d\lambda = -0{,}2376$$
$$-\log f = 0{,}9370$$
$$-{}^{10}\log f = 0{,}406$$

Obere Grenze nach (8)

$$-\log f_D = 0{,}8163$$
$$\Delta\varphi/6 = 0{,}1194$$
$$\frac{\sqrt{c}}{3}\int_0^1 \lambda^6 \Delta\varphi'(\lambda)\, d\lambda = 0{,}0083$$
$$-\log f = 0{,}9440$$
$$-{}^{10}\log f = 0{,}410$$

Der Mittelwert $-{}^{10}\log f = 0{,}408$ muß daher auf mindestens 1 Proz. des Gesamtwertes genau sein. Je kleiner die Konzentration ist, um so besser stimmen die Resultate nach den beiden Formeln überein. Für ganz kleine Konzentrationen (0,005 Mol/Liter) werden sie identisch und stimmen auch wieder überein mit dem Resultat, das nach der Güntelbergschen Methode erhalten wird. Mit abnehmendem Ionenradius wird die Genauigkeit geringer; sie beträgt für $a = 0{,}7$ Å mindestens 2 Proz. und für $a = 0{,}47$ Å mindestens 3 Proz.

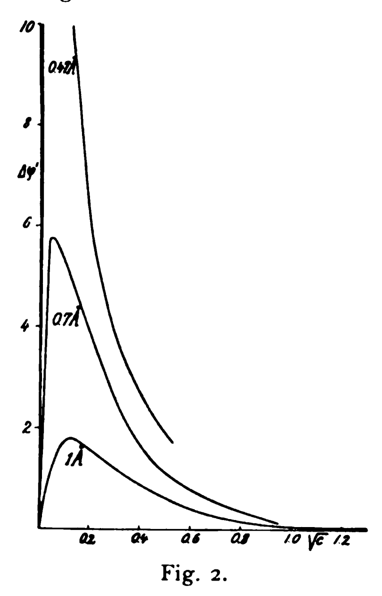


Fig. 2.

Wir erhalten nach der neuen Berechnung die in Tabelle I enthaltenen Aktivitätskoeffizienten kleiner Ionen bei 18°.

Tabelle I.

$-{}^{10}\log f$ einwertiger Ionen bei 18°.

C Mol/Liter	$a = 1$ Å	$a = 0{,}7$ Å	$a = 0{,}47$ Å
1,0	0,430	0,550	
0,5	0,341	0,437	
0,2	0,240	0,323	
0,1	0,186	0,265	
0,05	0,141	0,207	0,37
0,02	0,085	0,130	0,31
0,01	0,059	0,090	0,25
0,005	0,040	0,065	0,20
0,002	0,023	0,040	0,15
0,001	0,015	0,025	0,12

Vergleicht man diese Werte mit den in der ersten Arbeit gegebenen, so erkennt man deutlich die Unzulänglichkeit der Güntelbergschen Methode für die Berechnung der Aktivitätskoeffizienten kleiner Ionen. Die neuen Werte sind etwas kleiner, sie ändern aber nicht das prinzipielle Resultat der ersten Arbeit. Die neuen Kurven (siehe Fig. 3) verlaufen immer noch unterhalb der Debyeschen Grenzgeraden und erlauben daher, das Auftreten negativer Ionenradien in der Theorie von Debye und Hueckel nicht auf ein Versagen dieser Theorie, sondern nur auf die Unzulänglichkeit der darin benutzten Näherung zurückzuführen. Die Übereinstimmung mit den Kurven von N. Bjerrum ist etwas schlechter, was zur Folge hat, daß die von ihm berechneten Radien kleiner Ionen etwas geändert werden.

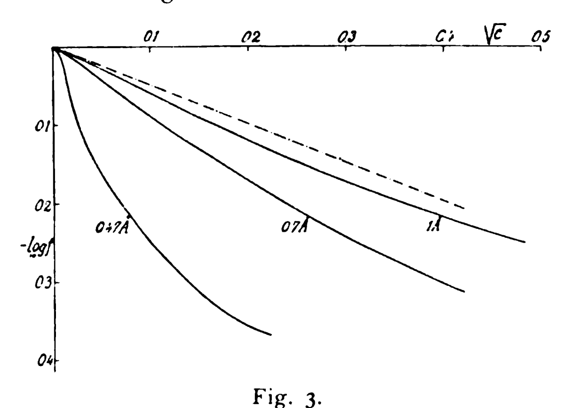


Fig. 3.

Eine vom theoretischen Standpunkt aus wichtige Frage ist die Neigung der Nullpunktstangente der Kurven $\log f(\sqrt{c})$. In meiner ersten Arbeit habe ich die Vermutung ausgesprochen, daß diese für kleine Ionen geändert wird und vom Ionenradius abhängt. Unterdessen haben Gronwall und La Mer[1]) auf analytischem Wege zeigen können, daß das nicht der Fall ist, sondern daß das Debyesche Grenzgesetz für beliebig kleine Ionen gilt. Eine bessere Betrachtung meiner Resultate scheint diese Tatsache zu bestätigen. Das geht aus Fig. 1 hervor. Man sieht darin deutlich, daß die Kurven $\Delta\varphi(\sqrt{c})$ für kleine Konzentrationen einen Wendepunkt besitzen und daher nicht notwendigerweise mit endlicher Nullpunktstangente enden. Die Kurve für $a = 1$ Å scheint sogar deutlich in die Tangente null überzugehen. Wenn das aber allgemein der Fall ist, (was natürlich aus einem graphischen Verfahren nicht bewiesen werden kann), so kann man für kleine Konzentrationen setzen

$$\Delta\varphi(\sqrt{c}) = \alpha(\sqrt{c})^2 \quad \text{und} \quad \begin{cases} \Delta\varphi(\lambda\sqrt{c}) = \alpha c \lambda^2 \\ \Delta\varphi'(\lambda\sqrt{c}) = 2\alpha\sqrt{c}\cdot\lambda. \end{cases}$$

Formel (7) und (8) liefern dann übereinstimmend (und auch die Methode von Güntelberg würde dieses Resultat ergeben)

$$-\log f = -\log f_D + \frac{\alpha c}{2} - 2\alpha c\int_0^1 \lambda^7 d\lambda$$

$$= -\log f_D + \frac{\alpha}{4} c$$

$$-\log f = -\log f + \frac{\alpha c}{6} + \frac{2\alpha c}{3}\int_0^1 \lambda^7 d\lambda$$

$$= -\log f_D + \frac{\alpha}{4} c.$$

Eine bessere Näherung ändert also im Grenzfall geringer Konzentrationen den Debyeschen Wert von $\log f$ nur um ein Glied, das der Konzentration selbst, und nicht der Wurzel daraus, proportional ist. Die Nullpunktstangente von $\log f(\sqrt{c})$ ist also in jedem Falle diejenige von $\log f_D(\sqrt{c})$.

Wenn in den Kurven meiner ersten Publikation (loc. cit. Fig. 4) die Grenztangente geändert erscheint, und wenn das auch in den gemessenen Aktivitätskurven der Fall zu sein scheint, so liegt das nur in einer fehlerhaften Interpolation der berechneten bzw. gemessenen Punkte. Für eine richtige Interpolation hat man zu berücksichtigen, daß die Kurven $\log f(\sqrt{c})$ für kleine Konzentrationen eine Wendetangente besitzen. Diese Wendetangente erscheint bei um so kleineren Konzentrationen, je kleiner der Ionenradius ist. Es dürfte von Interesse sein zu bemerken, daß man in diesem Auftreten einer Wendetangente der Aktivitätskurven wiederum ein Analogon zu dem Verhalten der Leitfähigkeitskurven starker Elektrolyte hat, die ja nach L. Onsager[1]) ebenfalls für kleine Konzentrationen eine Wendetangente besitzen können.

1) La Mer und Mason, Journ. Am. Chem. Soc. **49**, 419, 1927.

1) L. Onsager, Physik. Zeitschr. **28**, 277—298, 1927.

Cambridge (U. S. A.), Mass. Institute of Technology, Physics Dep., 10. November 1927.

(Eingegangen 18. November 1927.)

Die Kennzeichnung der Farben.

Von Siegfried Rösch.

1. Begründung.

Wer die über Farbenlehre handelnden Schriften der letzten Jahrzehnte durchliest, dem wird mehr und mehr deutlich erkennbar eine Sehnsucht nach einer exakten, allgemeinen und eindeutigen Möglichkeit der Definierung und Messung der Farben, anderseits aber auch die Tatsache, daß zwar viele, schier unzählige Wege nach diesem Ziele hin beschritten wurden, teilweise mit sehr gutem, teilweise mit schlechtem Erfolg, daß aber bis heute noch kein Verfahren verwirklicht ist, das die obigen Wünsche restlos befriedigt[1]).

Wer aber mit Aufmerksamkeit liest, der wird bemerken, daß durch alle Arbeiten bedeutender Köpfe teils nur geahnt, teils klar ausgesprochen, sich der Glaube an die Realisierbarkeit einer solchen Möglichkeit auf Grund spektraler Definierung der reellen Farben hindurchzieht. Diese Möglichkeit einer brauchbaren Form zuzuführen, ist der Zweck dieser Zeilen; wenn die darin entwickelten Gedanken auch selbständig gefunden wurden, und erst nachträgliches Literaturstudium die vielfachen anderweitigen Spuren aufzeigte, so können und wollen sie natürlich nicht als durchaus neue Entdeckungen betrachtet werden, sondern als organische Weiterentwicklung der Ideen einer langen Reihe von Vorgängern, jedoch auf dem, wie ich glaube, sagen zu dürfen, einzigen aussichtsreichen Wege zu dem obengenannten Ziele.

2. Theorie.

Farben gibt es bekanntlich nur für das Auge, in der objektiven Außenwelt nicht; hier sind nur ihre physikalischen Voraussetzungen, die Strahlungen verschiedener Wellenlänge in den verschiedensten gegenseitigen Intensitätsgraden, zu suchen. Ihre übersichtlichste Darstellung finden diese Gegebenheiten in dem jeweiligen Spektrum, der synoptischen Nebeneinanderstellung des zum Gesichtseindruck beitragenden Wellenlängenbereiches. Durch ihr Spektrum ist daher jede Farbe physikalisch mit befriedigender Genauigkeit charakterisiert, und wir könnten uns eigentlich damit nun zufrieden geben. Jedoch gibt uns einerseits das Spektrum keine klare Vorstellung vom Aussehen des vom Auge empfundenen Lichteindruckes, anderseits ist die Beziehung zwischen Spektrum und Farbe durchaus keine einfache. Zwar gilt unbedingt der Graßmannsche Satz, daß bei stetiger Änderung des Spektrums auch die Farbe (= Empfindung) sich stetig ändert, und ferner der Satz, daß jedem Spektrum eine und nur eine bestimmte Farbe zugeordnet ist[1]); jedoch gilt nicht das Umgekehrte, daß zu jeder Farbe nur ein Spektrum gehöre. Vielmehr gibt es im allgemeinen jeweils eine unendliche Anzahl von Spektren, die auf das Auge völlig gleichen Eindruck machen, von v. Kries „Lichter gleicher Reizart", von K. W. Fr. Kohlrausch „gleichaussehende Lichter", von Wi. Ostwald „metamere Farben" genannt, und es ist eine lange bekannte Tatsache, daß die dem Auge unterscheidbaren Farben eine dreifache, die Abänderungsmöglichkeiten der Spektren aber eine unendlichfache Mannigfaltigkeit bilden.

Dies hat die bedeutsame praktische Folge, daß wir die Gesamtheit aller Farben in einem dreidimensionalen Raume zur Darstellung bringen können, und ferner, daß durch drei unabhängige Messungen (Koordinaten) eine jede Farbe eindeutig bestimmbar ist. Welche Koordinaten wir wählen, ist an sich einerlei, so z. B. mit Helmholtz Farbton, Sättigung und Helligkeit, mit Maxwell u. a. Rot-, Grün- und Blaugehalt, mit Ostwald Farbton, Weißgehalt und Schwarzgehalt, mit Arons[2]) Dicke einer Quarzschicht und zwei Winkel bei gewissen Nikolstellungen, wodurch eine mit dem Prüfling gleichaussehende Interferenzfarbe erzeugt wird, mit Hering die drei bivektoriellen Koordinaten Schwarz-Weiß, Rot-Grün, Gelb-Blau und manche andere mehr; prinzipiell lassen sich alle mehr oder weniger leicht ineinander überführen. Wir wollen hier der Darstellung mittelst eines Vektorentripels der „Grundempfindungen" Rot, Grün, Blau den Vorzug geben, wie es der durch die Namen Young, Helmholtz, A. König, Fr. Exner, v. Kries, Ives, Schrödinger charakterisierten Lehre entspricht[3]). Danach ist eine Farbe im Raume gekennzeichnet durch die vom Nullpunkt S (Schwarz) ausgehenden Vektoren Rot ($\mathfrak{R}$), Grün ($\mathfrak{G}$) und Blau ($\mathfrak{B}$), aus denen sie sich zusammensetzen läßt, wobei diesen drei Grundempfindungen gewisse physiologische Bedeutungen zukommen (Fig. 1). Ein ebener Schnitt durch das räumliche Dreikant ergibt unter Ver-

1) Dies kann heute noch genau so gesagt werden, wie es von P. Krais in seinen lesenswerten Arbeiten von 1914 (Zeitschr. f. angew. Chemie **27**, 25—37) und 1922 (Archiv für Buchgewerbe **59**, 233—240) ausgesprochen wurde.

1) Voraussetzung ist hier wie im ganzen vorliegenden Aufsatze ein normales „trichromatisches" Auge, foveales Sehen und Einhaltung mittlerer Intensität des beleuchtenden Lichtes.

2) Leo Arons, Ann. d. Phys. **33**, 799, 1910 und **39**, 545, 1912.

3) Die beste Übersicht bildet der Abschnitt „Die Gesichtsempfindungen" von E. Schrödinger im Bd. II von Müller Pouillets Lehrbuch der Phys., 11. Aufl., S. 456—560, 1926.

zicht auf eine Dimension (Helligkeit oder Leuchtkraft) die bekannte Darstellung des Farbendreiecks,

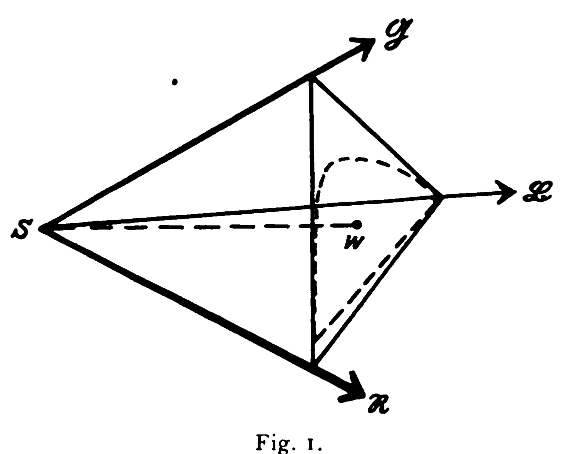


Fig. 1.

wobei man die Einheiten der drei Vektoren und ihre gegenseitigen Richtungen so zu wählen pflegt, daß man ein gleichseitiges Dreieck mit zentraler Lage des Weißpunktes erhält (Fig. 2); durch

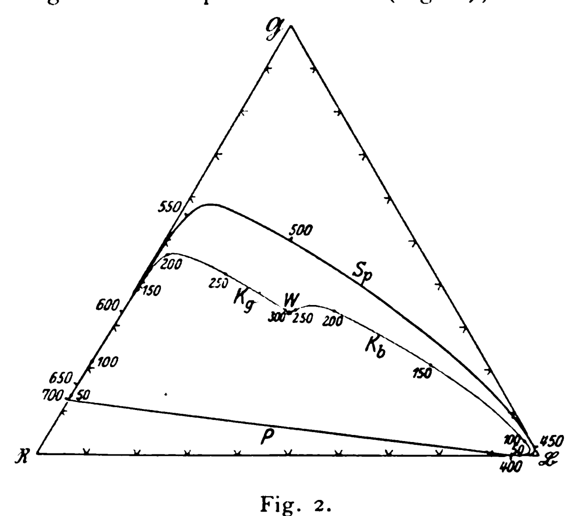


Fig. 2.

die Kurve der Spektralfarben (*Sp*) und die Purpurgerade (*P*) wird die „reelle Farbfläche“ umschlossen.

Nach dem oben Gesagten wird, wenn wir zunächst von der Helligkeit absehen, an jedem Punkt der Farbentafel eine unendliche Anzahl physikalisch verschiedener, aber gleichaussehender Spektren dargestellt; es steht uns also frei, statt

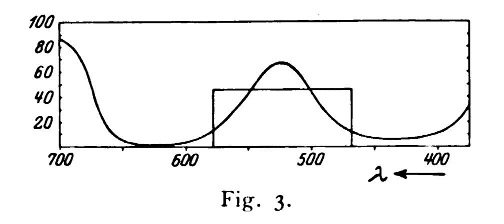


Fig. 3.

des zu definierenden Spektrums ein gleichaussehendes zu substituieren, das möglichst einfach gebaut ist. Dies ist in der Fig. 3 an einem Beispiel zum Ausdruck gebracht, wo durch die Kurve das spektrale Durchlaßvermögen eines Farbstoffes[1]) veranschaulicht wird, in Prozenten der auffallenden Energie (die äußere Rechteckumgrenzung symbolisiert das beleuchtende weiße Licht); gleichzeitig ist durch das kleine Rechteckgebiet eine Farbe gekennzeichnet, die mit der obigen gleichaussehend ist, bei der aber jede Wellenlänge nur mit einer konstanten Größe oder dem Wert Null beteiligt ist. Es ist somit möglich, durch die Angaben der Grenzen des Spektralgebietes (λ 468,5 bis λ 578,5) und der Ordinatenhöhe (45,5 Proz.), also durch drei Angaben, die Farbe spektral zu charakterisieren.

Dieses schematische Verfahren hat nun eine tiefere Bedeutung[2]). Es gibt nämlich bei einer gegebenen spektralen Zusammensetzung des Beleuchtungslichtes (etwa weißes Sonnenlicht) Farben, die unter allen anderen gleichen Farbtones und gleicher Sättigung die größtmögliche Helligkeit oder Leuchtkraft besitzen; und es läßt sich beweisen (s. unten, Abschn. 4), daß diesen „hellsten Farben“ stets Spektren zugehören, bei denen jede Wellenlänge nur mit der Intensität Null oder Eins (100 Proz.) vertreten ist, und bei denen höchstens zwei Sprungstellen zwischen 0 und 1 vorkommen. Diese ausgezeichneten Farben bilden im räumlichen Farbsystem (Fig. 1) die äußerste Begrenzung des reellen Farbraumes, so daß dieser etwa die Form eines etwas unregelmäßigen Rhomboeders erhält (Fig. 4) (siehe eine demnächst erscheinende Arbeit R. Luthers[3])). Hier wurde eine etwas andere, für unsere Zwecke besser geeignete Darstellung gewählt: über dem Farbdreieck als Grundfläche werden senkrecht nach oben die Helligkeiten aufgetragen; dann bilden die hellstmöglichen Farben die Oberfläche eines bergähnlichen Körpers, den die Fig. 5a im Grundriß mit eingetragenen Kurven gleicher Helligkeit (bezogen auf Weiß = 100), die Fig. 5b als Ansicht eines Modells zeigt. Die Darstellungen sind sehr lehrreich; unter anderem zeigen sie die große Helligkeit reingelber Farben und ihre Ursache, sowie den Grund für den etwas mystischen „na-

1) „Dunkelrotgrün für Dunkelkammerlicht“ nach E. König, Dichte 1,0. Siehe A. Hübl, Die Lichtfilter, Halle 1921, S. 34.

2) Man verwechsle nicht die geschilderte Umformung des Spektrums mit dem ziemlich willkürlichen Vorgehen Wi. Ostwalds bei seiner Bestimmung des Schwarz- und Weißgehaltes; siehe z. B. Cl. Schaefer, diese Zeitschr. **27**, 352, 1926. Fig. 6.

3) Anm. bei der Korr.: Inzwischen erschienen in Zeitschr. f. techn. Physik **8**, 540, 1927.

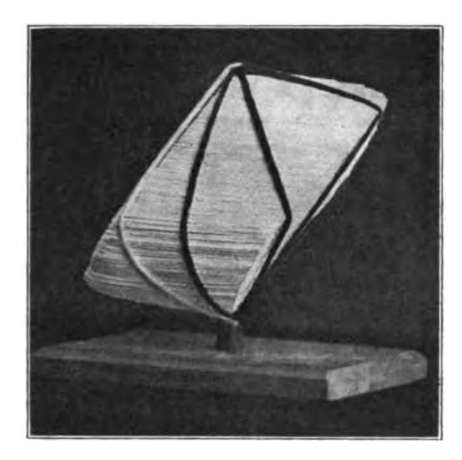


Fig. 4.
Nach einer von Herrn Prof. Luther freundlichst zur Verfügung gestellten Photographie.

türlichen Schwarzgehalt der kalten Farben" bei Wi. Ostwald. Daß Weiß die höchste Erhebung des Berges bildet, versteht sich von selbst[1]).

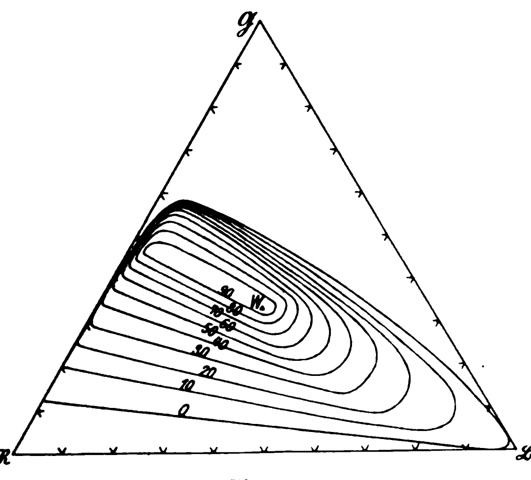


Fig. 5a.

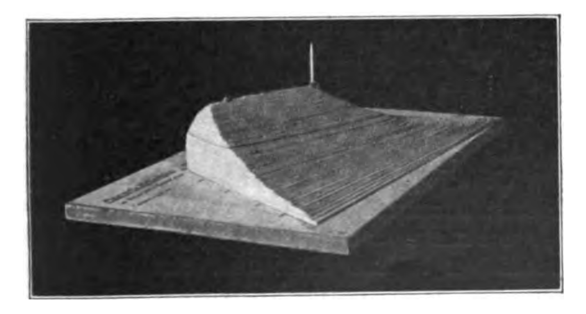


Fig. 5b.

1) Die Berechtigung für Anwendung des Gesetzes der Additivität der Helligkeiten bei heterochromer Photometrie ist nach den Arbeiten der Exnerschen Schule, ferner von Cl. Schaefer (diese Zeitschr. **26**, 58 u. 908, 1925), Schrödinger, Ives u. a. nicht mehr zu bezweifeln.

Es mag besonders betont werden, daß, während für alle Farben im Innern des Farbkörpers, wie gesagt, unendlich viele spektrale Zusammensetzungen möglich sind, die „hellstmöglichen Farben" jeweils nur ein bestimmtes Spektrum besitzen. Dabei sind nach E. Schrödinger (s. unten) vier typische Fälle möglich, die in der Fig. 6 nebeneinander ge-

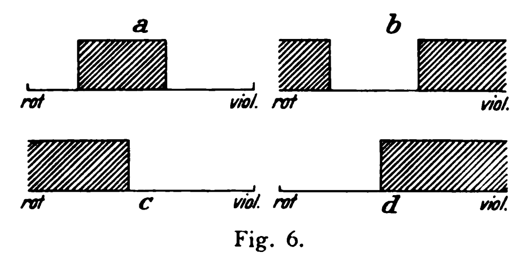


Fig. 6.

stellt seien. Die von Schrödinger geprägten Bezeichnungen sind ohne weiteres verständlich: *a* und *b* sind die sog. „Mittelpigmente" und „Mittelfehlpigmente", während *c* und *d* als „Langend- und Kurzendpigmente" ausgeartete Fälle von *a* und *b* darstellen. Gibt man dem spektralen Hellgebiet in *a* (schraffiert) bzw. der Lücke in *b* systematisch alle möglichen Breiten und Lagen im Spektrum, ferner den Sprungstellen in *c* und *d* alle möglichen Lagen, so wird dadurch die Gesamtheit der Oberflächenstellen des Farbkörpers lückenlos erschöpft und ebenso auch in der reellen Fläche des Farbdreiecks jeder Ort durch eine dieser Farben eindeutig und lückenlos bestimmt.

Wir wollen zuerst die Fälle *c* und *d* betrachten. Läßt man bei *c* das Hellgebiet allmählich vom roten Spektralende her, bei *d* vom Violett aus durch das Spektrum hindurch wandern, so entstehen Farben, die anfangs rein spektralrot (-violett) sind, dann unter allmählicher Abnahme der Reinheit über Orange-Gelb (Indigo-Blau) in vollkommenes Weiß übergehen. Die entsprechenden Kurven sind in Fig. 2 als *Kg* und *Kb* dargestellt[1]). Es ist beachtenswert, daß die Richtungen, in denen sie im Weißpunkt einmünden, genau auf den Ort des jeweils entgegengesetzten Spektralendes hinzielen.

Bei den Farben, die durch das Schema *a* (Fig. 6) dargestellt sind, haben wir zwei Möglichkeiten der Variation. Wir wollen zuerst ein Hellgebiet bestimmter Breite (etwa 100 $\mu\mu$) durch das Spektrum wandern lassen[2]); zuerst, solange

1) Die beigeschriebenen Zahlen bezeichnen die jeweilige Entfernung der Sprungstelle vom Spektralbeginn in $\mu\mu$.

2) Es ist hierbei vorteilhafter, statt der beiden Grenzen λ_1 und λ_2 des Hellgebietes seine Breite und eine „mittlere Wellenlänge" λ_m anzugeben, die dadurch definiert ist, daß $\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

nur eine der Grenzen ins sichtbare Gebiet eingetreten ist, ist das Spektrum identisch mit den Fällen *c* oder *d*, dann wird die ganze Reihe der Spektralfarben durchlaufen, jedoch mit um so

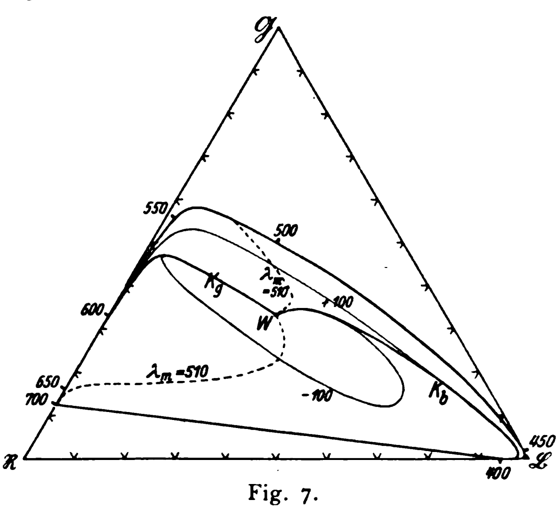


Fig. 7.

geringerer Reinheit, je breiter das Hellgebiet ist; schließlich wird beim Austreten der ersten Grenze aus dem sichtbaren Spektrum wieder einer der ausgearteten Fälle *d* bzw. *c* erreicht. Dieser Verlauf ist in Fig. 7 in der mit + 100 bezeichneten Kurve gezeigt.

Gehen wir anderseits von einer bestimmten

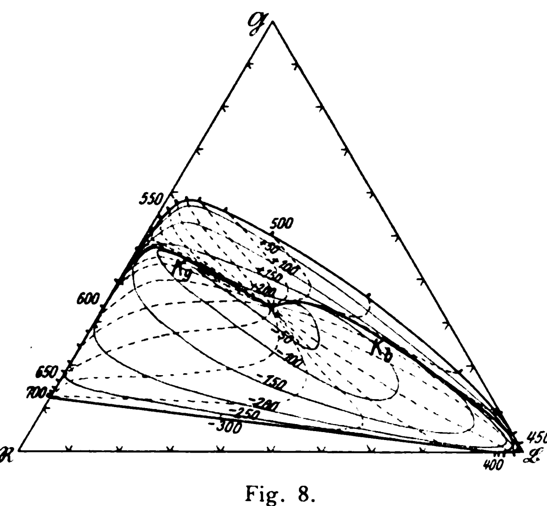


Fig. 8.

Wellenlänge aus, und halten diese als λ_m fest, indem wir gleichzeitig symmetrisch das Hellgebiet breiter und breiter werden lassen, so wird die zugehörige Farbe von der reinen, verhältnismäßig dunklen Spektralfarbe aus stetig heller und ungesättigter werden, bis schließlich Weiß erreicht ist. Dabei kann die Farbe ihren Ton mannigfach ändern (Fig. 7, obere gestrichelte Kurve).

Der Fall *b* ist, wie leicht einzusehen, in enger Verwandtschaft mit *a*: je zwei Spektren, die gleiche Sprungstellen besitzen, deren eine aber dem Typus *a*, die andre *b* angehört, liefern völlig genaue Komplementärfarben, ihre Orte liegen also im Dreieck auf einer kürzesten Linie durch den Weißpunkt. Ferner befinden sich alle Farben des *b*-Typus in dem unteren der beiden durch die Kurven *Kg* und *Kb* getrennten Gebiete, umfassen also insbesondere die Purpurfarben. Die der Spektrallücke von 100 $\mu\mu$ Breite zugehörigen Farben sind als Kurve — 100 in Fig. 7 eingetragen, die auf die gleiche mittlere Wellenlänge wie oben (λ 510) bezüglichen Farben bei wachsender Lückenbreite in der unteren gestrichelten Kurve. Im Fall *b* entsprechen engster Lücke die weißlichsten Töne, breiter Lücke gesättigte Purpurfarben.

Eine Übersicht über alle analogen Kurven gibt die Fig. 8[1]), die deutlich die restlose Bedeckung der Farbfläche durch die beiden Koordinaten „mittlere Wellenlänge" λ_m und Spaltbreite *sp* zeigt. Damit ist also jede der möglichen „hellsten Farben" definiert.

Die in der Praxis vorkommenden Farben, seien es Remissions-, Absorptions-, Interferenz- oder andere Farben, sind fast ohne Ausnahme von geringerer Leuchtkraft, und finden daher ihre Darstellung im Innern des Farbkörpers. Jede von ihnen kann aber durch einen im obigen Sinne durch λ_m und *sp* gekennzeichneten Wellenlängenkomplex imitiert werden, wenn man diesem nicht maximale, sondern eine entsprechend geringere Helligkeit gibt, wie dies in der Rechteckfunktion der Fig. 3 geschehen war. Die Höhe dieses Rechtecks (in Prozenten der größtmöglichen Höhe) ist es, was man sinngemäß als „relative Helligkeit" der Farbe bezeichnen kann. Dieser Begriff hat für Theorie und Praxis vielleicht eine nicht geringe Bedeutung. So gibt es z. B. für Beleuchtungszwecke mannigfache Lichtfilter gleichen Farbtons und gleicher Farbreinheit; doch wird man für Signallampen (auch Dunkelkammerlampen) die Gläser bevorzugen, die das farbige Licht auf die weiteste Strecke hin sichtbar machen[2]); dies sind diejenigen größter relativer Helligkeit.

3. Farbenmessung.

Um die gewonnenen Ergebnisse einer praktischen Ausnutzung entgegenzuführen, müssen wir uns nunmehr eine Vorrichtung ersinnen, die uns die Vergleichung einer zu bestimmenden Farbe mit einem spektralen Lichtgemisch gestattet, das mit ihr gleichaussehend gemacht wird; kann

1) Zugrunde gelegt ist bei allen Dreiecken die von H. E. Ives (Journ. Frankl. Inst. **195**, 23, 1923) gewählte Form der Spektralkurve.

2) Vgl. die Arbeit von E. Zschimmer, Sprechsaal **59**, 818, 833, 858, 1926 und E. Lax u. M. Pirani, 8. Fachausschußbericht d. D. Glastechn. Ges., 1927.

man dann die verwendete mittlere Wellenlänge, Spaltbreite und relative Helligkeit ablesen, so ist damit die Farbe bestimmt. Die Fig. 9 zeigt schematisch eine dazu geeignete apparative Anordnung[1]), mit der bisherige Versuche sehr befriedigend ausfielen.

Der Prüfling *P*, hier als remittierendes Plättchen gedacht, erfüllt mit seiner Farbe die eine Gesichtsfeldhälfte eines Hüfnerschen Prismas *H* (bei kleinen oder weit entfernten Objekten kann durch eingeklappte Linsen der Strahlengang in den einer Lupe oder eines Fernrohrs verwandelt werden); von der gleichen Lichtquelle *L*, die *P* beleuchtet, wird auch ein Spektralapparat erhellt, dessen Eintrittsspalt durch *Sp*, dessen Gitter durch

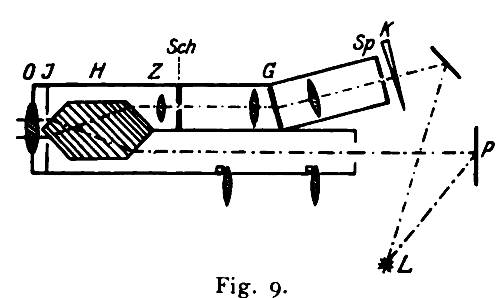


Fig. 9.

G angedeutet ist. Das reelle Spektrum von *L* wird in der Ebene *Sch* erzeugt. Dort befindet sich ein Schieber, der gestattet, ein beliebiges Gebiet aus dem Spektrum auszublenden[2]). Der Rest von Lichtern wird durch die Zylinderlinse *Z* zu einer Mischfarbe vereinigt, die die zweite Fläche des Hüfner-Prismas *H* ausleuchtet. An einer scharfen Trennungslinie stoßen somit die beiden zu vergleichenden Farbfelder zusammen; die Größe des ganzen Gesichtsfeldes wird durch eine Blende *I* auf etwa $1,5^0$ Durchmesser eingeengt, um foveales Sehen zu gewährleisten. Damit ist allen photometrischen Bedingungen genügt. Um das Spektrallichtergemisch abzuschwächen, kann der Graukeil *K* noch in den Strahlengang gebracht werden.

Von besonderem Interesse ist nun die Vorrichtung bei *Sch*; sie soll ermöglichen, alle in Fig. 6 charakterisierten Typen von Mischfarben herzustellen, und die endgültige Mischung abzulesen. Nach einer Reihe von Vorversuchen wurde die in Fig. 10 gezeigte Form gewählt: eine keilförmige Blende kann vertikal und horizontal verschoben werden (10 a) und damit ein beliebiges Spektralgebiet im Sinne der Fig. 6 b bedeckt werden; gleicherweise lassen sich aber auch bei Benutzung der unteren Schieberhälfte die entsprechenden „Mittelpigmentfarben“ erzeugen. Noch praktischer erwies sich die in Fig. 10 b dargestellte Gestalt der Blende (Spiralblende), bei der die vorhin vertikale Bewegung durch eine Drehung ersetzt ist, während die ganze Scheibe mit ihrer Achse noch horizontal verschiebbar ist.

Der Gang einer Messung ist nun einfach der, daß, nachdem bei beiderseits weißem Licht zunächst die Nullstellung des Graukeils geprüft wurde, die Farbe des Prüflings und die des Spektralgemisches durch Einstellen an *Sch* und *K*

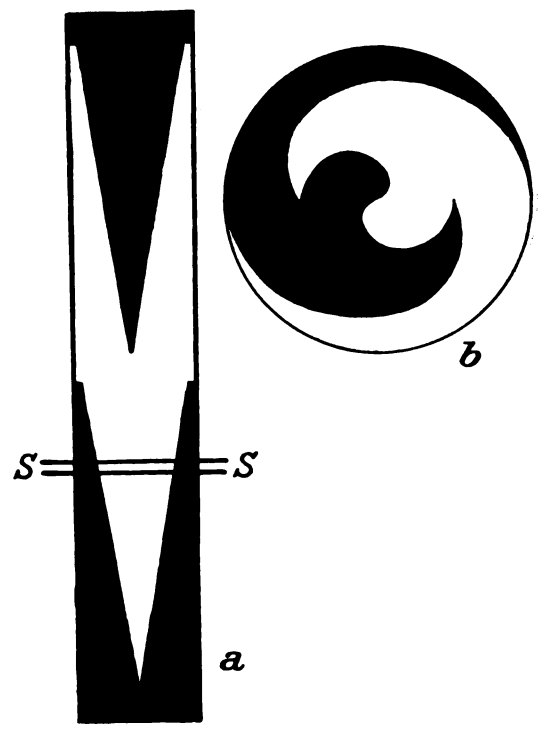


Fig. 10.

auf gleiches Aussehen gebracht werden, und daß sodann an *Sch* und *K* die drei Koordinaten Spaltbreite *sp*, mittlere Wellenlänge λ_m und relative Helligkeit $\mathfrak{H}_r$ abgelesen werden. Mit Hilfe eines nach Fig. 8 in großem Maßstab gezeichneten Diagramms läßt sich dadurch der Ort der Farbe des Prüflings im Dreieck sofort angeben, ohne daß irgendwelche Berechnungen oder sonstige mit Fehlerquellen verbundene Messungen nötig wären.

Demgegenüber ist die einzige der bisherigen Farbbestimmungsmethoden[1]), deren Prinzip als

1) Die Firma C. Zeiss, Jena, ist zur Zeit damit beschäftigt, ein derartiges Instrument zu bauen.

2) In Wirklichkeit ist der Ort von *Sp* und *Sch* aus technischen Gründen vertauscht; man sieht leicht ein, daß dadurch nichts am Prinzip geändert wird.

1) Zusammenstellungen siehe z. B. bei B. Kolbe, Geometrische Darstellung der Farbenblindheit. Jahresbericht der St. Annenschule, St. Petersburg 1881; P. Krais (l. c.); Wi. Ostwald, Mathematische Farbenlehre und Physikalische F., Leipzig 1921 u. 1923; S. Rösch, Sprechsaal **59**, 609—618, 1926; M. Luckiesh, Color and its applications, New York 1921.

durchaus einwandfrei bezeichnet werden kann, die Methode der Spektralphotometrie, von nicht zu leugnender Umständlichkeit: an einem Spektralphotometer wird das Spektrum ausgemessen, die gefundenen Intensitäten mit den zugehörigen Grundempfindungen ℜ, 𝔊, 𝔅 multipliziert, sodann die Flächeninhalte der G.-E.-Spektren planimetriert und auf Prozente ihrer Summe umgerechnet, eine Arbeit, die stets nach Stunden zu bemessen ist. Gewiß gibt es viele einfachere Methoden, z. B. die Benutzung eines Farbenatlas, aber ihre Anwendung ist beschränkt und auch die Vergleichsfarben nichts weniger als streng definiert.

Aus dem gefundenen Werte $ℌ_r$[1]) kann man unter Zugrundelegung eines Diagramms nach Fig. 4 den Maximalwert der Helligkeit für die betreffende Farbe $ℌ_m$ bestimmen und daraus die absolute Helligkeit der Farbe als $ℌ = ℌ_r \cdot ℌ_m$, wenn die Helligkeit des benutzten weißen Lichtes zur Einheit genommen wird.

Als ein Beispiel der praktischen Anwendung dieser Koordinaten *sp*, λ_m und $ℌ_r$ seien hier tabellarisch die Farben des schon erwähnten, besonders interessanten Farbstoffes „Dunkelrotgrün nach E. König“ (in dünner Schicht leuchtend smaragdgrün, in dicker Schicht dunkelrot) bei wachsender Dichte mitgeteilt, ferner noch die Farben der bekannten Lifafilter (Nr. 200a, b, c), rot, grün, violett. Es bezeichnen *d* die Dichte (nach v. Hübl, l. c.), ℜ, 𝔊, 𝔅, ℌ die Flächeninhalte der jeweiligen Grundempfindungskurven und der Helligkeit (wobei für Weiß ℜ = 𝔊 = 𝔅 = ℌ = 1000 gesetzt ist), 𝔖 die Summe ℜ + 𝔊 + 𝔅, ℜ %, 𝔊 %, 𝔅 % die Dreieckskoordinaten ($ℜ\,\% = 100 \cdot \frac{ℜ}{𝔖}$ usf.).

Dunkelrotgrün nach E. König.

d	ℜ	𝔊	𝔅	ℌ	𝔖	ℜ %	𝔊 %	𝔅 %	$ℌ_r$	λ_m	*sp*
0,2	692,5	781,0	631,5	742,5	2105,0	32,9	37,1	30,0	80,3	527	+ 192
0,4	512,5	627,5	405,0	570,0	1545,0	33,2	40,6	26,2	67,0	526	+ 161
0,8	315,0	425,5	185,5	369,0	926,0	34,0	46,0	20,0	50,6	524	+ 127
1,0	257,0	371,0	130,0	310,0	758,0	34,1	48,2	17,7	45,5	523,5	+ 110
1,2	215,5	312,5	96,5	263,5	624,5	34,5	50,0	15,5	42,2	523	+ 104
1,6	157,5	234,5	49,5	193,0	441,5	35,7	53,1	11,2	34,7	524	+ 87
2,0	120,0	180,5	30,0	150,0	330,5	36,4	54,5	9,1	28,1	525	+ 80
2,5	90,5	136,5	17,5	112,0	244,5	37,0	55,8	7,2	21,5	526,5	+ 68
5,0	33,4	49,5	5,5	41,25	88,4	37,8	56,0	6,2	8,26	529	+ 70
7,5	10,5	15,25	1,5	12,75	27,25	38,6	55,8	5,6	2,44	532	+ 72
10,0	3,75	5,10	0,40	4,45	9,25	40,5	55,1	4,4	0,74	538	+ 78
12,5	1,65	1,95	0,065	1,80	3,665	44,1	51,5	4,3	0,23	549	+ 109
15,0	0,74	0,69	0,040	0,715	1,470	49,6	46,5	3,9	0,077	450	— 105
17,5	0,3525	0,2600	0,0225	0,305	0,6350	56,9	39,8	3,3	0,052	477	— 147
20,0	0,2000	0,0950	0,0083	0,150	0,3033	65,9	31,4	2,7	0,044	487,5	— 176
22,5	0,1175	0,0350	0,0031	0,075	0,1556	75,6	22,5	1,9	0,050	497	— 214
25,0	0,0750	0,0137	0,0012	0,040	0,0899	83,6	15,3	1,1	0,140	512	— 260
27,5	0,0510	0,0060	0,0005	0,0255	0,0575	87,0	12,4	0,6	0,068	525	— 295
30,0	0,0370	0,0025	0,0002	0,0175	0,0397	87,4	12,6	0	0,035	534	— 310

Lifafilter Nr. 200a, b, c (rot, grün, violett).

Nr. 200	ℜ	𝔊	𝔅	ℌ	𝔖	ℜ %	𝔊 %	𝔅 %	$ℌ_r$	λ_m	*sp*
a	270,0	98,0	0	189,0	368,0	73,4	26,6	0,0	92,3	651	+ 118
b	95,0	138,0	13,0	117,0	246,0	38,6	56,1	5,3	23,4	532	+ 65
c	2,0	5,0	100,0	8,0	107,0	1,9	4,7	93,4	36,4	586	— 205

Auf die vielen interessanten Umstände, die in dieser Tabelle ausgedrückt sind, einzugehen, ist hier nicht der Ort. Es sei nur erwähnt, daß das $ℌ_r$ des Farbstoffes nicht monoton abnimmt, sondern bei *d* = 25 nochmals ein Maximum erreicht; daß bei *d* = 7,5 ein Farbton erreicht wird, der mit dem vom Lifagrün fast identisch ist, jedoch mit einer relativen Helligkeit von nur $2\frac{1}{2}$ Proz. gegen fast den 10fachen Wert bei jenem; daß schließlich die Lifafilter, was besonders die Fig. 11 erweist (in der die Farben der Tabelle dargestellt sind), sich recht gut als Stan-

1) Ich möchte vorschlagen, bei allen Farbbestimmungen, die sich auf Grundempfindungskoordinaten beziehen, deutsche Buchstaben zu verwenden, also ℜ, 𝔊, 𝔅, ℌ, zum Unterschied von den Definierungen durch reelle Eichlichter, für die *R*, *G*, *B* sich eingeführt haben. Dies entspricht auch der ursprünglichen, von A. König benutzten Bezeichnungsweise.

dardfilter eignen für ein additives Dreifarbenmischverfahren, sowohl ihrer Lage im Dreieck nach, als auch wegen ihrer verhältnismäßig großen relativen Helligkeit von 92, 23 und 36 Proz. Denn auf die Helligkeit ist auch in diesem Falle

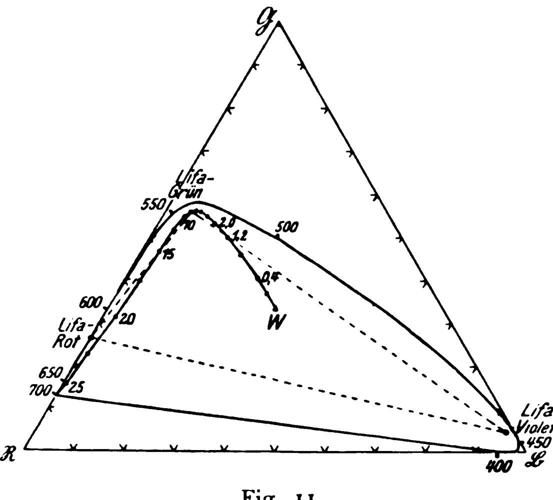


Fig. 11.

besonders zu achten, da nur bei hellen Farben einigermaßen gute Meßgenauigkeit zu erzielen ist; die geringe Helligkeit des Gesichtsfeldes macht vor allem bei Spektrophotometern oftmals die Messungen illusorisch. Auch dies ist ein Hauptvorteil des oben geschilderten Meßverfahrens, da dort das Gesichtsfeld stets so hell ist wie der Prüfling selbst.

Die Transformation der reellen Spektren in gleichaussehende vereinfachte gestattet noch eine Darstellung der Farben, die manchmal, wie gerade in unsrem Beispiel, von Nutzen sein mag. In einem Koordinatensystem (Fig. 12) mit Wellenlängen als Abszissen, Helligkeiten als Ordinaten[1]) kann von der kontinuierlichen Reihe der idealisierten Spektren jedes durch eine horizontale Gerade in der entsprechenden Höhe und von der durch *sp* und *λm* bedingten Ausdehnung bezeichnet werden. In der Darstellung kommt wie im Dreieck sehr schön die Einengung des Farbtons auf Grün, sodann seine Verschiebung nach Rot zur Geltung, zugleich aber auch die starke Abnahme der Helligkeit, die im Dreieck nicht dargestellt ist.

4. Geschichtlicher Überblick.

Die ausgezeichneten Farben größter Helligkeit spielen in der uns bekannten Farbenwelt eine größere Rolle als man zunächst glauben mag. Ihrer Definition gemäß lassen sie sich leicht erzeugen, wenn man in einem Spektroskop den Spalt weit aufmacht: an jeder Stelle des sichtbaren Farbenbandes überlagern sich dann eine Anzahl Wellenlängen, alle mit maximaler Intensität und mit nur zwei Sprungstellen zwischen 0 und 1. Ist der Spalt soweit geöffnet, daß der Mittelteil des Spektrums rein weiß geworden, und damit alles Grün verschwunden ist, so erhält man zwei typische Farbenfolgen schwarz-rot-orange-gelb-weiß und weiß-blau-indigo-violett-

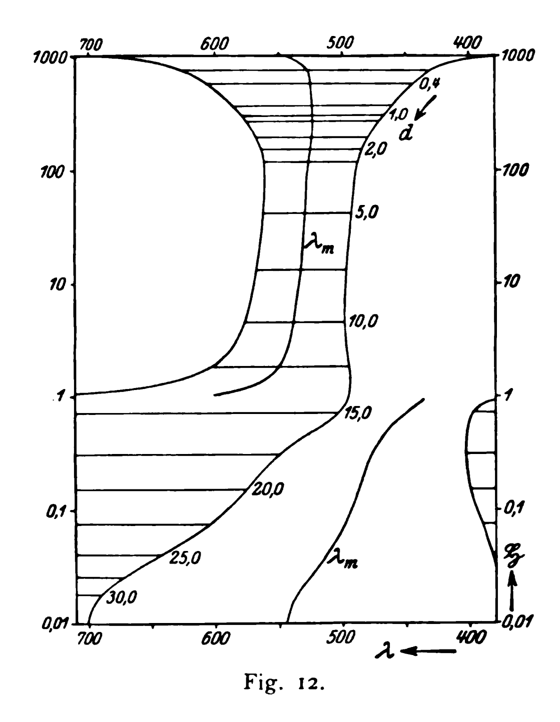


Fig. 12.

schwarz, die wir schon oben kennenlernten (Kurven *Kg* und *Kb* in Fig. 2). Man kennt die fundamentale Bedeutung, die diese Farben in Goethes Farbenlehre haben; ich möchte nur auf die Abbildungen auf den 16 Tafeln (Tübingen 1810) hinweisen. Eine richtige Erklärung dieser Farben durch Überlagerung, sowie gute Abbildungen hatte kurz zuvor schon Th. Young gegeben[1]). Auch bei Jos. Fraunhofer (1817), W. Crumm (London 1830) und Maxwell[2]) spielen diese Farben eine wichtige Rolle. A. Kirschmann[3]) hat wohl nach Goethe am eingehendsten die fraglichen Farben studiert, sie mit sehr glücklichen

1) Aus Gründen des größeren Darstellungsbereiches und auch, um dem hier geltenden Fechnerschen Gesetze besser gerecht zu werden, empfiehlt es sich, die Logarithmen der Helligkeiten aufzutragen, wie es auch in Fig. 12 geschehen ist.

1) Th. Young, Lectures on natural philosophy. London 1807, p. 439 u. Tafel 29, Fig. 421 und 422.

2) Cl. Maxwell, Phil. Trans. **150**, 57, 1860.

3) Aug. Kirschmann, Physik. Zeitschr. **18**, 195—205, 1917; Neue psychol. Studien **2**, 411—442, 1926 und Abderhaldens Handb. d. biol. Arb.-Meth., Abt. VI A, S. 879—891, 1927. Letztere beiden Arbeiten mit guten farbigen Wiedergaben.

Namen belegt: Typus *a* unserer Fig. 6 als Farben des normalen, *b* als die des umgekehrten Spektrums, *c* und *d* als gelbes bzw. blaues Kantenspektrum und hat in interessanter Weise ihre Theorie vom psychologischen Standpunkt aus entwickelt.

Die Dubosqsche Methode der Projektion von Komplementärfarben durch Aussonderung aus dem Spektrum hat W. v. Bezold[1]) sinnvoll modifiziert, wobei er ähnlich wie wir oben eine Blende von der Form der Fig. 14a durch das Spektrum führt. Diese Idee wurde von C. Pulfrich vor wenigen Jahren wieder aufgegriffen und in einem sehr schönen, bisher leider noch nicht veröffentlichten Apparat, dem Polariskop, verwertet (Fig. 13). Dieses von den Zeisswerken in Jena hergestellte Demonstrationsinstrument enthält in einem Tubus zwei Dispersionsprismen mit senkrecht zur Sehachse gerichteten Prismenkanten; die Prismen sind um die Sehachse meßbar drehbar. Betrachtet man durch dieses System ein am Hinterende des Tubus eingesetztes Diaskopbild etwa vom Aussehen der Fig. 14 a oder b

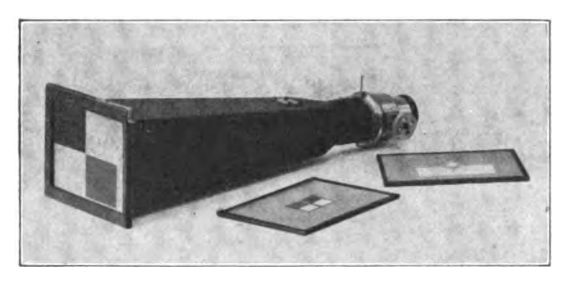


Fig. 13.
Polariskop nach C. Pulfrich.
Nach einer von der Firma C. Zeiss gütigst angefertigten Photographie.

(es sind dem Apparat eine Anzahl solcher Bilder beigegeben), so sieht man beim Drehen der Prismen in prachtvoller Weise die Ränder bunt

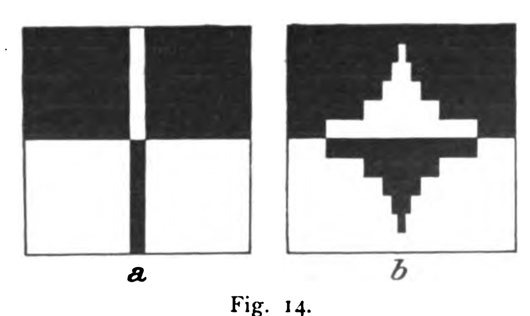


Fig. 14.

gesäumt, und kann die verschiedensten Modifikationen derartiger Mischfarben herstellen. Die gleichen Farben gewahrt man übrigens an Totalreflexionsgrenzen (was schon Th. Young wußte), beim Feuer des Brillanten, am Bildrand bei unkorrigierten Linsen oder bei schlecht zentrierten Projektionsapparaten usf.

Der oben beschriebene Apparat zur spektralen Farbenmischung hat in der Geschichte der Farbenlehre verschiedene nahe Verwandte. So beruhen der color-mixer Maxwells (1861[1])), der Helmholtzsche[2]), sowie der von P. Glan[3]) entworfene Farbenmischer, Edridge-Greens-Apparat zur Prüfung der Farbentüchtigkeit[4]), ferner ein für Untersuchungen über Sättigung der Farben von W. Seitz[5]) konstruierter Apparat auf ähnlichem Prinzip. Auch v. Kries[6]) plante ein ähnliches Instrument, ein von Pulfrich[7]) begonnenes konnte der große Forscher leider nicht mehr vollenden.

Die bekannte Ostwaldsche Lehre vom Farbenhalb, genial entworfen, mit vielen tiefgehenden Gedanken und fruchtbaren Anregungen, aber freilich etwas zu stark schematisierend, hängt mit unserem Problem naturgemäß eng zusammen; auch sie hat ihre historischen Vorläufer, die bis auf Goethe und Schopenhauer[8]) zurückgehen. Einer der ersten, der Gesetzmäßigkeiten an Spektren, zunächst nur gelber Farbstoffe, auffand, war Alb. Scheurer[9]); R. Luther[10]) sprach 1908 als Vermutung aus, daß starke Leuchtkraft eines Farbstoffes bedingt werde durch steile Absorptionskurven; auch P. Krais[11]) hat sich in interessanter Weise hierzu geäußert.

Wichtige Angaben über Farben bei breitem Spektroskopspalt macht H. Schulz 1925[12]), ferner finden sich viele wertvolle Ausführungen

1) W. v. Bezold, Wied. Ann. N. F. **32**, 65—167, 1887.

1) Von Wi. Ostwald, Phys. Farbenlehre Leipzig 1923, S. 126 aufs neue beschrieben und angewendet.
2) H. Helmholtz, Pogg. Ann. **94**, 1—28, 1855.
3) P. Glan, Pflügers Archiv f. Physiol. **24**, 307—328, 1881.
4) Edridge-Green, Phys. Soc. Nov. 12, 1909, Chem. News **100**, 268, 1909.
5) W. Seitz, Zeitschr. f. Sinnesphysiol. **54**, 146—158 (1922) und Physik. Zeitschr. **23**, 297—301, 1922.
6) J. v. Kries, Zeitschr. f. techn. Phys. **5**, 331, 1924.
7) Angekündigt im letzten Prospekt zum Stufenphotometer; Jena 1927 (C. Zeiss), Druckschrift Mess 430, 2. Ausgabe.
8) A. Schopenhauer, Über das Sehen und die Farben. Leipzig 1816, 2. Aufl. 1854.
9) A. Scheurer, Bull. Soc. industr. Mulhouse **61**, 339—346, 1891.
10) R. Luther, Zeitschr. f. Elektrochem. **14**, 452, 1908; auch erwähnt bei O. Groskurth, Diss. Marburg 1910, S. 84 (Über heterochrome Photometrie).
11) P. Krais, Zeitschr. f. angew. Chemie **27**, 32—34, 1914.
12) H. Schulz, Zeitschr. f. Instrum.-Kunde **45**, 393—398, 1925.

bei Luckiesh[1]). Auch v. Kries hat die Farben größter Helligkeit beschrieben[2]).

Die wichtigste Arbeit aber, die für die ganze Theorie unserer „hellstmöglichen Farben" grundlegend ist, ist aus der Feder E. Schrödingers 1920 erschienen[3]). Dort gibt Schrödinger die Beweise (soweit solche geführt werden können) für die eindeutige und lückenlose Bedeckung der Farbfläche mit den genannten Farben, diskutiert ihre allgemeinen Eigenschaften, und stellt Vergleiche mit der Erfahrung an.

In bezug auf diese Farben soll schließlich noch auf einen im Erscheinen begriffenen Aufsatz von R. Luther (Kissinger Vortrag vom Sept. 1927) hingewiesen werden, in dem Dinge besprochen werden, die sich mit den hier entwickelten eng berühren[4]).

Der Vorschlag, die Farben größter Helligkeit zur Normierung aller Farben zu benutzen, ist in dem Maße, als die Kenntnis ihrer Natur sich erweiterte, in letzter Zeit immer öfter gemacht worden. So hat als einer der ersten wohl Wi. Ostwald den Plan gefaßt gehabt (Physikal. Farbenl.); in den letzten Jahren äußerten sich der leider frühverstorbene Fr. Bohnenberger[5]), J. v. Kries[6]), K. Miescher[7]), C. Pulfrich[8]) ganz im gleichen Sinne; auch von A. Klughardt sind in der Deutschen Werkstelle für Farbkunde, Dresden dahingehende Versuche eingeleitet worden[9]).

5. Zusammenfassung.

a) Es ist möglich, jede reelle Farbe durch eine gleichaussehende zu ersetzen, deren Spektrum nur aus Ordinaten eines konstanten Wertes oder des Wertes Null besteht, und das höchstens zwei Sprungstellen von und nach Null aufweist. Dieses Spektrum, und damit die zu vergleichende Farbe, kann eindeutig definiert werden durch die Größe dieses konstanten Wertes („relative Helligkeit" $\mathfrak{H}_r$) und durch die Lage der beiden Sprungstellen (oder eine „Spaltbreite" sp und „mittlere Wellenlänge" λ_m, was dasselbe ist). Spektren, bei denen die relative Helligkeit gleich der maximalen ist, bilden extreme Fälle, die das Farbensystem nach außen begrenzen. Sie sind zur Definierung der Farben hervorragend geeignet.

b) Um praktisch diesem Ziele näher zu kommen, wurde ein Apparat gebaut und beschrieben, bei dem eine Synthese solcher hellstmöglicher Farben aus Spektralteilen vorgenommen werden kann; das Lichtgemisch wird mit dem Prüfling gleichaussehend gemacht, und es werden dann die genannten drei Koordinaten abgelesen. Die Vorversuche fielen befriedigend aus.

Diagrammatisch wurde der Verlauf der Kurven für $\mathfrak{H}_m$, sp und λ_m im Farbdreieck festgelegt, so daß jede Farbe danach eingetragen werden kann.

c) Zum Schlusse wurde ein historischer Überblick über das besprochene Gebiet versucht, und auf die Wichtigkeit der Farbnormierung nach den beschriebenen Prinzipien hingewiesen.

Mitteilung aus dem Mineralogischen Institut der Universität Leipzig, Nr. 233, Januar 1928.

(Eingegangen 11. Januar 1928.)

1) M. Luckiesh, Color and its applications. New York 1921.
2) J. v. Kries, Zeitschr. f. Sinnesphysiol. **50**, 117—136, 1918; Abh. Bd. **4**, 144—163, 1918.
3) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. (4), **62**, 603—622, 1920.
4) S. Anm. 1 auf S. 91 rechts.
5) Fr. Bohnenberger, Die Bedeutung der Ostwaldschen Farbenlehre. Tübingen 1924, S. 21.
6) J. v. Kries, Zeitschr. f. techn. Phys. **5**, 331, 1924.
7) K. Miescher, Zeitschr. f. Sinnesphysiol. **57**, 90, 1925.
8) C. Pulfrich im Handbuch der physikal. Optik, Bd. I, 1. Hälfte, S. 94, 1926.
9) A. Klughardt, Zeitschr. f. techn. Phys. **8**, 299—307, 1927.

Gegenseitige Anziehung und Abstoßung der Gasmoleküle und die daraus folgende Theorie der inneren Reibung.

(Vorläufige Mitteilung von Léon Schames.)

Während die gegenseitige Abstoßung der Gasmoleküle als Folge der Grundvorstellung der kinetischen Gastheorie, nach welcher die Moleküle als vollständig elastische, harte Kugeln zu denken seien, schon lange bekannt war, hat erst van der Waals die gegenseitige Anziehung der Moleküle erkannt. Über die Ursache dieser Anziehung hat er sich nicht ausgesprochen. Ungefähr gleichzeitig haben Reinganum[1]) und Sutherland[2]) darauf hingewiesen, daß die Anziehung aus dem elektrischen Aufbau des Moleküls folgt, welches sie allgemein als Dipol betrachteten. Während beide als Ursache der Abstoßung die Elastizität beibehielten, hat zuerst Schames[3]) darauf aufmerksam gemacht, daß auch die Abstoßung aus dem elektrischen Aufbau der Moleküle, und zwar als Folge der Abstoßung der Elektronenhüllen, aufzufassen sei. Diese elektrische Abstoßung ist keinesfalls einfach zu verstehen, und Debye[4]) ist es, welcher eine Überlegung angegeben hat, wie sie vielleicht

1) M. Reinganum, Physik. Zeitschr. **2**, 421, 1901; Ann. d. Phys. (4) **10**, 334, 1903.
2) W. Sutherland, Phil. Mag. (6) **4**, 625, 1902; **7**, 417, 1904.
3) L. Schames, Zeitschr. f. Phys. **1**, 376, 1920.
4) P. Debye, Physik. Zeitschr. **22**, 302, 1921.

zustande kommt. In einer früheren Arbeit hatte Debye[1]) gezeigt, daß die Anziehungskräfte nicht nur durch die festen elektrischen Systeme bedingt seien, sondern daß die Moleküle auch als polarisierbare Systeme aufeinander anziehend wirken; für die Edelgase käme so sogar nur die letztere Ursache in Betracht.

Die innere, potentielle Energie Φ zweier Moleküle im Abstande r voneinander kann also dargestellt werden durch

$$\Phi = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}, \qquad (1)$$

wobei der Anziehungsexponent $m \geqq 3$ (Reinganum) und der Abstoßungsexponent $n > m$ sein muß. (Zur früheren Auffassung des vollkommenen elastischen harten Moleküls gelangt man zurück, indem man $n = \infty$ setzt.) In Fig. 1 ist Φ als Funktion von r dargestellt. Ohne kinetische Energie, also für $T = 0$ sind die Moleküle im Gleichgewicht beim Minimum-Punkt M. Hierbei ist also $r_0 \equiv s_0$ dem Durchmesser der Moleküle für $T = 0$. Tritt kinetische Energie in Gestalt von Temperaturbewegung hinzu, so werden die Moleküle sich während des Stoßes weiter nähern, d. h. der mittlere Durchmesser s nimmt mit wachsender Temperatur ab und zwar wird (für $r < r_0$) nach der klassischen Theorie

$$\Phi_s - \Phi_0 = kT, \qquad (2)$$

wo k die Boltzmannsche Konstante bedeutet. Demnach stellt unsere Fig. 1 auch die Tempe-

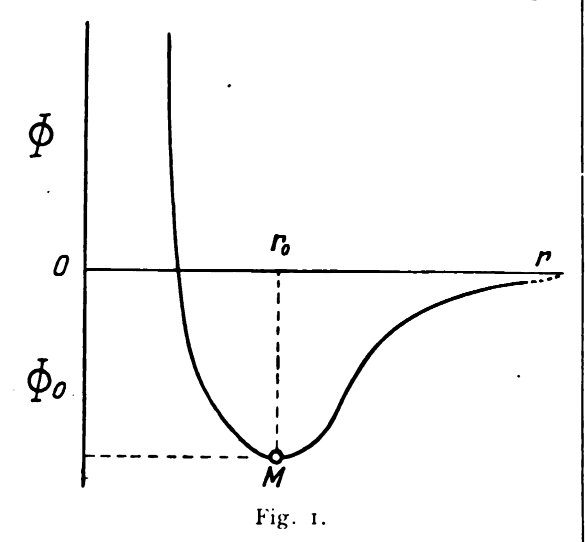


Fig. 1.

raturabhängigkeit von s dar. Drückt man r bzw. s in Einheiten von r_0 aus, setzt also

$$\varrho = \frac{r}{r_0} \text{ bzw. } \sigma = \frac{s}{r_0} = \frac{s}{s_0}$$

und setzt ferner $\frac{A}{r_0^m} = kT_0$, so erhält man nach kurzer Rechnung unter Berücksichtigung, daß für $\varrho = 1$, $\Phi = \Phi_0 =$ Minimum wird

$$\Phi = kT_0\left(-\frac{1}{\varrho^m} + \frac{m}{n}\frac{1}{\varrho^n}\right) \qquad (1a)$$

und

$$\Phi_0 = -kT_0\frac{n-m}{n}. \qquad (1b)$$

Setzen wir die beiden letzten Gleichungen in (2) ein, so erhalten wir:

$$\frac{n-m}{n} - \frac{1}{\sigma^m} + \frac{m}{n}\frac{1}{\sigma^n} = \frac{T}{T_0}. \qquad (3)$$

Gleichung (3) gibt also die Temperaturabhängigkeit von $\sigma = \frac{s}{s_0}$ unter Voraussetzung eines Anziehungs- und Abstoßungspotentials nach Gleichung (1).

Der aus Gleichung (3) folgende, temperaturabhängige Durchmesser der Moleküle (s) muß, wenn diese als kugelförmig vorausgesetzt werden dürfen, derjenige sein, der die innere Reibung bestimmt. Wir kommen also auf diesem Weg zur Beantwortung des bisher ungelösten Problems der Theorie der Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung der Gase.

Für kugelförmige, vollständig elastische und harte Moleküle (ohne innere Anziehung), deren Durchmesser also konstant ist, ist die innere Reibung η gegeben durch:

$$\eta = \frac{m\bar{c}}{2\sqrt{\pi}s^2}\ ^{1)},$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot c\ ^{2)},$$

$$mc = \sqrt{3kTm}\ ^{3)},$$

also

$$\eta = \frac{1}{\pi s^2 N}\sqrt{\frac{RTM}{\pi}}, \qquad (4)$$

Sutherland (l. c.) und Reinganum (l. c.) haben bekanntlich die innere Anziehung der Moleküle zu berücksichtigen versucht, aber ihre Theorien sind nicht einwandfrei. Die innere Abstoßung allein zu berücksichtigen ist mathematisch einfach[4]), aber es hat physikalisch keinen

1) P. Debye, Physik. Zeitschr., **21**, 178, 1920.

1) Vgl. J. H. Jeans, Dynamische Theorie der Gase 1926, S. 351.

2) Vgl. J. H. Jeans, Dynamische Theorie der Gase 1926, S. 44.

3) Vgl. J. H. Jeans, Dynamische Theorie der Gase 1926, S. 145.

4) Vgl. J. H. Jeans, Dynamische Theorie der Gase, 1926, S. 364.



Sinn. Beide — Anziehung und Abstoßung — müssen gemeinsam berücksichtigt werden. Ein Versuch von J. E. Jones[1]) dies zu tun, leidet erstens an der unrichtigen Voraussetzung, daß $m = 2$ gesetzt wird (während wir oben erwähnten, daß es mindestens 3 sein muß) und zweitens daran, daß ein Anschluß an die nicht strenge Sutherlandsche Formel erstrebt wird. Die Lösung dieses Problems ist nun aber einfach, indem in Gleichung (4) statt des konstanten Durchmessers s der elastischen Moleküle der nach Gleichung (3) variable Durchmesser für Moleküle mit innerer Anziehung und Abstoßung einzuführen ist.

Um zu sehen, wie sich diese Theorie bewährt, wenden wir sie auf Helium an, für welches die Voraussetzung der Kugelform der Moleküle wohl am ehesten erfüllt ist, und für welches auch im weitesten Temperaturgebiet die sehr genauen Messungen von Kamerlingh-Onnes und S. Weber[2]) vorliegen. Es ergibt sich so folgende Tabelle:

T	$\eta_{\text{beob.}} \cdot 10^7$	$s_{\text{beob.}} \cdot 10^8$	$s_{\text{ber.}} \cdot 10^8$
456,8	2681	2,073	2,082
372,9	2337	2,111	2,116
291,8	1980	2,154	2,158
290,7	1967	2,162	2,160
250,3	1788	2,174	2,192
212,2	1587	2,225	2,215
203,1	1564	2,217	2,218
194,6	1506	2,237	2,230
170,5	1392	2,250	2,250
89,75	918,6	2,359	2,360
75,5	817,6	2,395	2,397
74,7	813,2	2,408	2,400
20,17	349,8	2,632	2,626
15,0	294,6	2,664	2,665

In der dritten Spalte ist der temperaturabhängige Durchmesser der Moleküle angegeben, wie er sich direkt aus dem beobachteten Reibungskoeffizienten nach Gleichung (4) ergibt. Die letzte Spalte enthält dagegen die gleiche Größe, wenn man sie nach unserer Gleichung (3) berechnet. Dabei fanden wir durch Probieren, daß nur die Werte $m = 8$, $n = 9$ befriedigende Resultate ergeben. Es wurde dann beste Übereinstimmung zwischen $s_{\text{beob.}}$ und $s_{\text{ber.}}$ erzielt mit den Werten:

$$s_0 \equiv r_0 = 3{,}16 \cdot 10^{-8}\,\text{cm},$$
$$T_0 = 47^0.$$

Zur Veranschaulichung haben wir in Fig. 2 einerseits $s_{\text{beob.}}$ als Funktion von T durch kleine Kreise dargestellt und andrerseits haben wir

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{k} = T_0 \left\{ -\left(\frac{r_0}{r}\right)^m + \frac{m}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n + \frac{n-m}{n} \right\}$$

mit den oben angegebenen Werten von m, n, r_0 und T_0 als ausgezogene Kurve eingezeichnet. Ferner haben wir die Linie $\Phi = 0$ eingezeichnet. Diese verläuft im Abstand

$$-\frac{\Phi_0}{k} = \frac{n-m}{n} T_0$$

mit obigen Werten $= 5{,}22^0$. Letzterer Wert ist gleich der kritischen Temperatur, so daß wir empirisch für Helium finden:

$$-\Phi_0 = kT_k$$

Fig. 2.

Helium ist bekanntlich derjenige Stoff, bei welchem die innere Anziehung am kleinsten ist, daher der kleine Wert von Φ_0 und der kritischen Temperatur. Trotzdem wäre es verfehlt, wenn man diese Anziehung ganz aus der Betrachtung wegließe, und aus den Reibungsversuchen lediglich auf eine Abstoßung schließen wollte. Man käme so zu einer theoretischen Begründung der empirischen Formel von Kamerlingh-Onnes (l. c.), die wohl die Beobachtungen sehr gut darstellt, aber aus der man nach unserer Ansicht nicht — wie Lenard-Jones[1]) das tut — auf eine nur abstoßende Energiefunktion mit $n = 13$ schließen darf, weil durch die notwendige Be-

1) J. E. Jones, Proc. Roy. Soc. London A. **106**, 441, 1924.

2) Kamerlingh-Onnes u. S. Weber, Com. of the Leiden Lab. **184**b, 1913.

1) J. C. Jones, Proc. Roy. Soc. London A. **107**, 157, 1925.

rücksichtigung der noch so schwachen Anziehung sich n stark ändern kann.

Aus der Temperaturabhängigkeit des 2. Virialkoeffizienten glaubt Lenard-Jones eine Bestätigung des Exponenten $n = 13$ und zwar mit $m = 4$ ableiten zu können. Aber nach seiner früheren Arbeit[1]) ist die Entscheidung mittels seiner Methode für den 2. Virialkoeffizienten recht unscharf. Rechnet man die von ihm gegebene Anziehungs- und Abstoßungsgrößen auf unsere um, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} m = 4,\ n = 13 \\ r_0 = 3{,}14 \cdot 10^{-8},\ T_0 = 3^0{,}62 \end{array}\right\}\text{(Lenard-Jones).}$$

Die mit diesen Größen berechnete Energiefunktion haben wir in unsere Figur als punktierte Kurve eingetragen; sie deckt sich, wie man sieht, keineswegs mit den Reibungsversuchen.

Es gibt noch eine frühere Bestimmung von m und n aus dem 2. Virialkoeffizienten des Heliums, nämlich diejenige von Zwicky[2]). Obwohl diesem Autor leider mehrere Rechenfehler unterlaufen sind, stimmt sein Resultat $m = 8$, $n = 9$ doch mit unserem überein.

Wir hoffen in kurzem sowohl nach der hier gegebenen Methode aus der inneren Reibung, als auch aus dem 2. Virialkoeffizienten (vor allem aus dem Verhältnis der Joule- zur Boyletemperatur) für verschiedene andere Gase die Energiefunktion Φ ableiten zu können. Einstweilen können wir sagen, daß die hier gegebene Berechnung aus der inneren Reibung des Heliums eine starke Stütze für die eingangs erwähnte Theorie von Debye ist, nach welcher die Edelgasatome nur durch ihre gegenseitige Polarisation aufeinander anziehend einwirken und deshalb das Potential Φ mit r^{-8} beginnen muß, wie es auch hier gefunden wurde.

1) J. C. Jones, ebenda A. **106**, 463, 1924.
2) F. Zwicky, Physik. Zeitschr. **22**, 449, 1921.

Frankfurt a. M., 27. Dezember 1927.

(Eingegangen 1. Januar 1928.)

Nachtrag zu meiner Notiz „Zur elektrischen Leitfähigkeit des Siliziums".

(Diese Zeitschrift **28**, 765, 1927.)

Von H. J. Seemann.

1. Die genaue chemische Analyse des Versuchsmaterials, die ich den freundlichen Bemühungen des Herrn Dr. F. Roll-Mannheim verdanke, ergab eine verhältnismäßig große Verunreinigung von 1,83 Proz. Eisen, 0,3 Proz. Aluminium, 1,04 Proz. SiO_2, 0,08--0,10 Proz. Zn und Spuren von Kohlenstoff und Mangan.

An der Verunreinigung des Siliziums sind mithin im wesentlichen die drei Metalle Eisen, Aluminium und Zink beteiligt. Leider läßt sich deren summarischer Einfluß auf den Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes von reinem Silizium nicht mit Sicherheit angeben, da die hierzu nötigen metallographischen Unterlagen fehlen. (Es handelt sich um das quaternäre Legierungssystem $Al — Fe — Si — Zn$, dessen Konstitution nicht untersucht ist.) Es ist aus diesem Grunde auch nicht möglich, eine Aussage über den Einfluß der Verunreinigung an $Si\,O_2$ auf die gemessenen Temperaturkoeffizienten zu machen, die gerade hinsichtlich der Überlegungen, von denen ausgehend die Messungen unternommen wurden, von Interesse gewesen wäre.

2. Jedenfalls erscheint es bei dieser Sachlage recht wünschenswert, einmal über wirklich reines Material verfügen zu können. Andererseits wäre es mit Beziehung auf gewisse Fragen der Metallphysik nicht überflüssig, systematische Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit der Gemische von Metallen mit deren Oxyden anzustellen, sowohl solcher Oxyde, die wie die des Siliziums usf. Isolatoren sind, als auch solcher, die nach irgendeinem Mechanismus leiten.

3. Während der Drucklegung vorstehender Notiz erhielt ich durch freundliche Mitteilung des Herrn P. Clausing-Eindhoven Kenntnis von dessen Untersuchungen über den Temperaturkoeffizienten von Titan und Zirkon, die leider in den physikalischen Berichten noch nicht referiert und mir daher unbekannt waren. Durch die Untersuchungen von P. Clausing sind die aus meinen Messungen an Silizium in bezug auf den Temperaturkoeffizienten von Titan und Zirkon gezogenen Folgerungen experimentell bestätigt.

In einer ersten Arbeit[1]) vom Jahre 1924 hat Clausing durch Messungen an verschiedenen Stäbchen, die durch Zusammensintern von sorgfältig gereinigtem Zirkonpulver erhalten wurden, zwischen 70^0 und 300^0 abs. eine stetige Abnahme des Widerstandes mit abnehmender Temperatur gefunden, während Koenigsberger und Schilling ein Widerstandsminimum bei etwa 170^0 abs. feststellten.

Inzwischen war es A. E. v. Arkel und J. H. de Boer[2]) gelungen, die Metalle Titan, Zirkon, Hafnium und Thorium aus einer flüchtigen Verbindung durch thermische Dissoziation auf eine glühende Metalldrahtseele niederzuschlagen und dabei die Metalle in sehr reiner duktiler Form zu erhalten. Aus den derartig gewonnenen Metallen Zirkon und Titan wurden Stäbchen geformt,

1) Physica (Nederl. Tijdschr. voor Natuurkunde) **4**, 372, 1924.
2) Zeitschr. f. anorg. u. allg. Chem. **148**, 345, 1925.

die aus einer kleinen Zahl von großen Einkristallen bestanden, und an diesen Messungen des Widerstandes zwischen 70^0 und 273^0 abs. vorgenommen[1]). Der spezifische Widerstand von Zirkon bei 273^0 abs. ergab sich zu $0{,}41 \cdot 10^{-4}$ Ohm $\times$ cm, der von Titan zu $0{,}80 \cdot 10^{-4}$ Ohm $\times$ cm; vor allem aber waren die Temperaturkoeffizienten des Widerstandes positiv und betrugen für Zirkon 0,00438, für Titan 0,00469. — Auch Hafnium und Thorium haben, wie noch nicht veröffentlichte Messungen von P. Clausing zeigen, einen positiven Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes.

1) P. Clausing u. G. Moubis, Physica **7**, 245, 1927.

Zusammenfassung.

Durch die Messungen von Clausing, Ryschkewitsch und mir ist das den eigentlichen Metallen gleiche elektrische Verhalten der bisher zu den Halbleitern gezählten Elemente experimentell bewiesen; die auf dem Verhalten der Halbleiter aufgebaute Dissoziationstheorie der elektrischen Leitfähigkeit von Koenigsberger verliert damit in bezug auf die zu den Halbleitern gezählten Elemente ihre experimentelle Stütze.

Greifswald, 21. Dezember 1927.

(Eingegangen 22. Dezember 1927.)

BESPRECHUNGEN.

K. Müller, Studien an Mondphotographien. 8°. 41 S. Mit einer Übersichtskarte. Leipzig, J. A. Barth. 1927. M. 2.40.

Die Untersuchung ist ein erweiterter Abdruck aus dem „Sirius" Jahrg. 1926 und enthält einen kritischen Vergleich der wichtigsten vorhandenen Mondkarten mit photographischen Aufnahmen, wobei in schwierigen Fällen eine Nachprüfung am Fernrohr erfolgte. A. Kopff.

H. Boykow, E. Everling, H. Koppe, Arbeiten zur Luftnavigierung. Doppel-8°. 63 S. Mit 72 Abb. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1927. M. 5.—, geb. M. 6.50.

Das vom Navigierungsausschuß der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt herausgegebene Buch zerfällt in 4 Teile: 1. Die Platzorientierung im Luftfahrzeuge bei Nacht (Signalwesen) unter Ausschluß der Funkentelegraphie, 2. Probleme der terrestrischen Navigation im Luftfahrzeuge (beide Aufsätze von H. Boykow), 3. Neigungsmesser und Wendezeiger für Flugzeuge (von E. Everling), 4. Die Höhenmessung in der Luftnavigation (von H. Koppe).

Während die beiden ersten Aufsätze mehr oder minder die in der (zweidimensionalen) Seefahrt üblichen Befeuerungs- und Vermessungsmethoden auf die (dreidimensionale) Luftfahrt übertragen, berichten die beiden letzten Arbeiten über eine Reihe von physikalisch interessanten Problemen, den Nacht- und Nebelflug betreffend. Everling bespricht hier die verschiedenen Methoden zur Feststellung der für den Piloten überaus wichtigen Neigung des Flugzeuges bei fehlender Sicht. Pendel und Wasserwage ergeben nur das „scheinbare" Lot, sie zeigen stets die Resultierende aus sämtlichen im Augenblick wirksamen Beschleunigungskräften an. Anderseits ist ein auf Trägheitswirkungen beruhendes, das „wahre Lot" anzeigendes Neigungs-Meßgerät prinzipiell unmöglich, da sich die Erdbeschleunigung aus der Summe aller auftretenden Beschleunigungen durch kein Mittel herausschälen läßt. Alle Neigungsmesser ergeben also nur eine mehr oder minder brauchbare Annäherung an das „wahre Lot". — Im letzten Kapitel behandelt H. Koppe die verschiedenen Verfahren der Höhenmessung unter besonderer Berücksichtigung der Messung in Bodennähe bei fehlender Sicht. Es zeigt sich, daß die barometrische Methode hier zu ungenau ist und daß für Zwecke der Landung bei mangelnder Sicht von den vielen möglichen Verfahren nur die Echolotung Aussicht auf Erfolg hat.

Das in jeder Hinsicht gut ausgestattete kleine Werk gibt trotz des losen Zusammenhangs der einzelnen Kapitel untereinander einen interessanten Überblick über Aufgaben und seitherige Ergebnisse der Luftnavigierung, insbesondere bei Nacht und Nebel (abgesehen von den drahtlosen Verfahren). Als Ergebnis läßt sich zusammenfassen, daß das Fliegen ohne Sicht heute bereits mit großer Sicherheit möglich ist, während die Landung im Nebel bisher kaum bis zu den Kinderschuhen gediehen ist. K. Krüger.

H. Boegehold, Geometrische Optik. (Sammlung Borntraeger, Bd. 11.) 8°. 375 S. Mit 109 Fig. Berlin, Gebrüder Borntraeger. 1927. Geb. M. 13.50.

In dem vorliegenden Buch ist eine ausgezeichnete Einführung in die Gesetze der geometrischen Optik erschienen. Der Verfasser hat es verstanden, auf verhältnismäßig kleinem Raum alles zusammen zu tragen und klar zu schildern, was zum Verständnis der geometrischen Theorie der Optik und zur Anwendung derselben auf die Konstruktion der optischen Instrumente gehört. In drei Abschnitten wird die Fortpflanzung, die Reflexion, die Brechung und die Farbenstreuung des Lichtes (unter besonderer Berücksichtigung der Prismen) behandelt. Es folgt in Abschnitt IV und V die Theorie der optischen Bilder, bestehend in den rein geometrischen Gesetzen, denen der optischen Abbildung durch achsensymmetrische Flächen und Flächenfolgen und der dabei geltenden Beziehungen zwischen konjugierten Ebenen, sowie der Messung der Grundgrößen. Ihrer Wichtigkeit wegen werden in Abschnitt VI anschließend die Farbenfehler besprochen. Sehr eingehend ist die Darstellung der Erweiterung des Abbildungsbereichs mit der Lehre von den Pupillen, Luken, der Abbildungstiefe und der Vergrößerung (Abschnitt VII). Ab-

schnitt VIII bringt das Auge und die Sehhilfen mit Untersuchungen über die Perspektive und das räumliche Sehen und Abschnitt IX die Beschreibung der künstlichen optischen Instrumente und ihrer Wirkungsweise: Fernrohr, Lupe, Mikroskop, photographisches Objektiv und anderes. Im letzten Abschnitt X werden dann die Aberrationen behandelt, zunächst die trigonometrischen Durchrechnungsverfahren — mit dem Schema für achsennahe und endlich geneigte Strahlen —, und darauf die analytischen Näherungsverfahren auf Grund der Abbeschen Invarianten. Den Schluß des Abschnittes bildet die Darstellung allgemeiner Lehrsätze der geometrischen Optik, z. B. der Sätze von Fermat, von Malus und des Kosinussatzes, an dessen Entwicklung der Verfasser selbst hervorragenden Anteil hat. Zahlreiche historische Hinweise sind in der Einleitung und auch sonst gegeben, ein ausführliches Quellenverzeichnis ist angefügt. — Das Buch kann jedem, der sich über die wissenschaftlichen Grundlagen der optischen Instrumente unterrichten will, auf das Angelegentlichste empfohlen werden, da ihm trotz vorhandener, meist aber umfangreicherer Werke wegen seines Inhaltes und seiner Darstellungsweise ein hervorragender Platz in der optischen Literatur zuerkannt werden muß.

Klughardt.

J. Drecker, Zeitmessung und Sterndeutung in geschichtlicher Darstellung. (Sammlung Borntraeger Bd. 8.) 8°. 188 S. Mit 67 Abbildungen. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1925. Geb. M. 6.75.

Das Buch zerfällt in drei Teile: Chronologie, Horologie und Astrologie. Das wichtigste Kapitel ist das mittlere. Es orientiert in anschaulicher Weise über die Zeitmessung in älteren historischen Zeiten, über Wasseruhren, Sonnenuhren, auch tragbare, und über Astrolabien.

A. Kopff.

Berichtigungen.

Zum Aufsatze F. Ahlborn, „Die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen und die Wirklichkeit". (Diese Zeitschrift **29**, 34—41, 1928.)

Seite 37: Figur 3 ist umzuändern in Figur 5.
„ 37: „ 4 „ „ „ „ 3.
„ 37: „ 5 „ „ „ „ 4.

In dem Aufsatz von W. Jazyna, „Über die Nullpunktzustände". (Diese Zeitschrift **28**, 908 bis 911, 1927.) Seite 909, rechte Spalte, Zeile 18 von oben muß es heißen: Gleichung (1) statt Gleichung (2).

Tagesereignisse.

Die metallographischen Ferienkurse an der Technischen Hochschule zu Berlin unter Leitung von Prof. Dr.-Ing. Hanemann finden im März dieses Jahres statt.

Vom 5. bis 15. März dauert Kurs I,
(Technik der Metallographie, Kristallisationslehre, Zustandsschaubilder, Metallographie von Stahl, Grauguß, Temperguß, Grundzüge der Wärmebehandlung und Schmiedebehandlung, des Glühens, Härtens, Vergütens.)

Vom 19. bis 25. März Kurs II,
(Röntgenspektroskopie, ternäre Zustandsschaubilder, Verfestigung und Rekristallisation, spezielle Metallographie des Stahles und Graugusses.)

Die Kurse bestehen aus täglich 2 Stunden Vortrag und 4 Stunden Übungen. Die Teilnehmergebühr beträgt M. 175.— für Kurs I und M. 100.— für Kurs II. Anfragen und Anmeldungen sind zu richten an das Außeninstitut der Techn. Hochschule, Charlottenburg 2, Berliner Straße 171.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Göttingen Dr. Hans Lewy für Mathematik, an der Universität Königsberg Dr. K. L. Wolf für physikalische Chemie.

Ernannt: Der Direktor des Forschungsinstitutes für Geschichte der Naturwissenschaften in Berlin Dr. Julius Ruska zum Honorarprofessor für Geschichte der Naturwissenschaften an der Universität Berlin, der Privatdozent für Experimentalphysik an der Universität Berlin und Observator am Astrophysikalischen Observatorium auf dem Trachenberg bei Berlin Dr. Walter Grotrian zum a. o. Professor ebenda, die Privatdozenten der Chemie an der Universität Hamburg Dr. Karl Kindler und Dr. Hans Schmalfuß zu a. o. Professoren daselbst, der Privatdozent an der Universität Hamburg Professor Dr. Wolfgang Pauli zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Eidgen. Technischen Hochschule in Zürich, der Privatdozent für Physik und Meteorologie an der Technischen Hochschule München, Dr. Robert Emden zum Honorarprofessor für Astrophysik an der Universität daselbst, der Privatdozent der Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Karl Ziegler zum a. o. Professor daselbst, Ing. Aleš Linsbauer zum ord. Professor der chemischen Technologie der Kohlenhydrate an der Böhmischen Technischen Hochschule in Brünn, Dr. D. S. Masters von der Ohio State University zum Dozenten für Chemie und chemisches Ingenieurwesen an der Washington University in St. Louis, der ord. Professor für organische Chemie an der Universität Sydney Dr. I. Kenner zum ord. Professor für technologische Chemie an der Universität Manchester.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Felix Jentzsch als etatsmäßiger a. o. Professor und Leiter des Institutes für wissenschaftliche Mikroskopie an der Universität Jena.

Vom Lehramt zurück: Der Dozent für Elektrochemie an der Universität Manchester Dr. A. G. Lobley (infolge Ernennung zum Generaldirektor der Birmingham Electric Furnaces).

In den Ruhestand: Der ord. Professor für physiologische Chemie an der Universität Tübingen Dr. Hans Thierfelder.

Ehrung: Der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule München Dr. Wilhelm Manchot wurde zum Geh. Regierungsrat ernannt.

Verliehen: Dem a. o. Professor für Experimentalchemie an der Universität Wien Dr. Julius Zellner der Titel Hofrat.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Chemie an den Universitäten Czernowitz und Wien Hofrat Dr. Richard Pribram, der frühere ord. Professor der Physik an der Universität Erlangen Geheimer Rat Dr. Eilhard Wiedemann, der ord. Professor der Chemie an der University of Georgia in Athens Dr. Henry C. White.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 4. | Ausgegeben am 15. Februar 1928. Nr. 782. Printed in Germany. | 29. Jahrgang.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT
vereinigt mit dem
JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 4 — 15. Februar 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 6 am 10. März 1928 — 29. Jahrgang

INHALT:

Ferdinand Kurlbaum[1]).

Von F. Henning.

In der Frühe des 29. Juli 1927 ist Ferdinand Kurlbaum kurz vor Vollendung seines 70. Lebensjahres von uns gegangen, tief betrauert nicht nur von seiner Familie und seinen zahlreichen Freunden, sondern auch von seinen Fachgenossen, die in ihm einen der Mitbegründer jenes großen Aufstieges in unserer Wissenschaft verehren, durch den die deutsche Physik unter Führung von Max Planck eine überragende Stellung gewann. Kurlbaum schuf zusammen mit Lummer, Rubens und Ernst Pringsheim die experimentellen Grundlagen, auf denen sich die Quantentheorie in ihren Anfängen aufbaute.

Keiner seiner Mitarbeiter aus jener Zeit weilt mehr unter den Lebenden, und von seinen alten Freunden aus dem Jahrzehnt um die Jahrhundertwende kann heute keiner mehr das Wort zu einer Gedächtnisrede nehmen. Damit fallen der nachrückenden Generation Pflichten zu, die ihr eindringlich zum Bewußtsein bringen, daß sie immer mehr zum Träger der Tradition wird, die sie von dem voraufgehenden Geschlecht übernommen und die sie an das nachfolgende Geschlecht weiterzugeben hat. So ist mir der Auftrag geworden, heute vor Ihnen über Ferdinand Kurlbaum zu sprechen, und zwar hier in diesem Saal, in dem so oft seine Stimme erschallte, um einer großen Schar von Schülern die für ihren Beruf notwendigen physikalischen Kenntnisse zu vermitteln.

Ich unterziehe mich der mir gestellten Aufgabe in dem Gefühl aufrichtiger Freundschaft, die ich dem Dahingeschiedenen entgegenbrachte, und die mir das Andenken an ihn stets lebendig halten wird. Die Geradheit seines Wesens und die Ruhe, die von seiner Persönlichkeit ausging, haben zusammen mit seinem unvergleichlichen Erzählertalent in hohem Maße die Sympathien hervorgerufen, die er allerorten fand. Es ist nicht leicht, sich die harte Tatsache klarzumachen, daß dieser rüstige Mann, dem niemand sein Alter ansah, und der noch vor gar nicht so langer Zeit mit großer Gewandtheit das hohe Gitter um das Gelände der Technischen Hochschule überstieg, weil die benachbarte Pforte verschlossen war, nicht mehr unter uns weilt. Wer erinnerte sich nicht gern an seine hohe Gestalt mit dem fein geschnittenen Gesicht und den gütigen

1) Gedächtnisrede, gehalten im Hörsaal des physikalischen Instiuts der Technischen Hochschule Charlottenburg am 16. Dezember 1927.

blauen Augen! Er nahm ja häufig an unsern Sitzungen teil, und manch einer wird noch mit Freude an die Vorträge denken, die er in früheren Jahren über seine wissenschaftlichen Untersuchungen oft in der Physikalischen Gesellschaft gehalten hat. Aber auch den jungen Mitgliedern unserer Vereine wird noch wohl im Gedächtnis sein, in wie liebenswürdiger und geistvoller Weise Kurlbaum bei der Feier des 80. Geburtstages unseres sehr verehrten Präsidenten Warburg dem Jubilar seine Glückwünsche darbrachte. Wem wäre es nicht eine Freude gewesen, sich mit ihm über Fragen aus seinem Fachgebiet oder über Fragen des täglichen Lebens zu unterhalten!

Bei seiner wissenschaftlichen Arbeit kamen ihm die guten und fruchtbringenden Ideen dank einer ausgezeichneten Begabung ohne Mühe; sie in schwerem Ringen zu erarbeiten, hätte auch seiner ganzen Veranlagung und, wie ich glaube, auch seiner ausgesprochen rein germanischen Abstammung nicht entsprochen. Ständig beschäftigte ihn die Natur mit ihren mannigfaltigen Erscheinungen; doch liebte er es, besonders in den späteren Jahren, weit mehr sie unmittelbar zu sich sprechen zu lassen, als daß er ihr durch kompliziert ausgedachte Experimente bestimmte Fragen vorlegte. Sein Interessengebiet war sehr groß, es umspannte außer der Physik die Biologie und Zoologie ebenso wie die Botanik, und in seinen Mußestunden suchte er mit ganz besonderer Vorliebe die Einsamkeit des heimatlichen Waldes auf, wo er in seiner Art allen diesen Wissensgebieten nachgehen konnte. Er kannte den Wald und sein Getier so gut wie wenige, und er hatte sich auf diesem Gebiet schließlich so umfangreiche Kenntnisse erworben, daß er in dieser Beziehung den berufensten Vertretern des Forstfaches nicht nachstand.

Wir aber wollen heute das Gedächtnis des Physikers Kurlbaum feiern, indem wir zugleich mit einem kurzen Rückblick auf den äußeren Verlauf seines Lebens an unserm Geiste vorüberziehen lassen, was er zur Förderung unserer Wissenschaft getan hat, und indem wir uns im stillen geloben, ihm den Dank, den wir ihm schulden, über das Grab hinaus zu bewahren.

Ferdinand Kurlbaum wurde am 4. Oktober 1857 als Sohn des damaligen Kreisrichters Karl Kurlbaum in Burg bei Magdeburg geboren. Wenige Tage nach der Geburt starb seine Mutter, und der Knabe wurde von der Schwester seines Vaters in Kassel erzogen. Er kehrte erst im Alter von 6 Jahren, nachdem der Vater zum zweitenmal geheiratet hatte, in das Elternhaus zurück. Der Zwang der Schule war für ihn eine rechte Qual, und seine Interessen richteten sich viel lieber auf die Dinge, mit denen das Leben ihn außerhalb der Schule umgab. Durch vielfache Versetzungen des Vaters, der schließlich nach Berlin zur Kommission für die Abfassung des Bürgerlichen Gesetzbuches berufen wurde, war Ferdinand Kurlbaum genötigt, häufig das Gymnasium zu wechseln. Er berichtete gern, daß dies siebenmal geschah, allerdings nicht immer wegen der Versetzung des Vaters, und daß er einmal die Schule verlassen mußte, weil er einem seiner Lehrer gegenüber (wegen vermeintlich ungerechter Behandlung) allzu energisch protestiert hatte. So war Kurlbaum schließlich 23 Jahre alt, als er nach bestandenem Abiturientenexamen endlich auf die Universität ziehen konnte.

Er bietet mit seiner späten geistigen Entwickelung ein merkwürdiges Beispiel für diese in nordischen Ländern nicht selten beobachtete Eigentümlichkeit, und wir müssen fast staunen, daß der schlechte Schüler nach vierjährigem Studium in Heidelberg und Berlin auf Grund umfangreicher experimenteller Untersuchungen eine Dissertation schrieb, von der Helmholtz rühmte, daß sie nicht nur eine große Schärfe des mathematischen Gedankens bewiese, sondern auch von dem seltenen experimentellen Geschick des Autors Zeugnis ablege.

Die Doktorarbeit, welche er im Jahre 1887 vollendete, betraf eine neue Bestimmung der Wellenlänge von 13 Fraunhoferschen Linien des Sonnenspektrums. Er bediente sich hierzu zweier Plangitter, deren Gitterkonstante er mit hervorragender Sorgfalt un-

ter besonderer Berücksichtigung der periodischen Teilungsfehler ermittelte. So gelangte er zu einem Ergebnis hoher Genauigkeit, das die älteren Zahlen Ångströms nicht unwesentlich an Zuverlässigkeit übertraf. Seine Erstlingsarbeit war sogleich eine Präzisionsuntersuchung im besten Sinne des Wortes. Ihr wurde nicht dadurch Abbruch getan, daß die Potsdamer Astronomen Müller und Kempf eine Veröffentlichung über denselben Gegenstand herausbrachten, und auch heute, nachdem auf diesem Gebiete erhebliche Fortschritte durch die von Macé de Lépinay geschaffene interferometrische Methode erzielt sind, findet sich die Kurlbaumsche Zahl für die Wellenlänge der Natriumlinie (mit einem Hinweis auf die Dissertation) noch in unserem großen physikalischen Tabellenwerk.

Die Doktorarbeit war im Helmholtzschen Institut unter der speziellen Leitung von Kayser ausgeführt, der damals dort Assistent war. Nachdem Kayser an das Physikalische Institut der Technischen Hochschule Hannover berufen war, zog er Kurlbaum mit sich, der dort als Assistent vom Herbst 1887 bis zum Frühjahr 1891 verblieb. Am 1. April dieses Jahres trat Kurlbaum in die Physikalisch-Technische Reichsanstalt über und wurde dem unter Lummers Führung stehenden optischen Laboratorium zugeteilt. In seinem neuen Wirkungskreis fand er eine Fülle von Problemen, die der Bearbeitung harrten, dazu einen sehr angeregten und wissenschaftlich vielseitig interessierten Kreis, dem auch Willy Wien angehörte. In erster Linie handelte es sich um Fragen aus dem Gebiet der Strahlung, dem Kurlbaum dann sein ganzes Leben über treu geblieben ist. Man war schon damals, also jetzt vor 36 Jahren, aufs eifrigste bemüht, eine reproduzierbare Lichteinheit hoher Genauigkeit aufzufinden, ein Wunsch, der bekanntlich bis heute noch nicht in Erfüllung gegangen ist. In Gemeinschaft mit Lummer setzte sich Kurlbaum zum Ziel, durch Flächenbolometer, die in der Wheatstoneschen Brückenschaltung angeordnet waren, die Strahlung verschiedener Glühlampen miteinander zu vergleichen und womöglich die Lichteinheit auf eine absolute Wärmestrahlungseinheit zurückzuführen.

Die Bedingungen für die größte Empfindlichkeit des Bolometers wurden sorgfältig erörtert, und nachdem sich herausgestellt hatte, daß es am günstigsten ist, möglichst dünne Metallbänder zur Auffangung der Wärmestrahlen zu verwenden, wurde jene schöne Methode zur Auswalzung von Platinfolien mit Silberblech ausgearbeitet, die es möglich machte, Blechstärken von 0,001 mm Dicke und weniger herzustellen. Noch bewundernswerter ist das große Geschick, mit dem Kurlbaum aus diesen dünnen Folien ein System von mäanderartig zusammenhängenden Streifen herausschnitt und auf einen Schieferrah-

men spannte. Auch das Verfahren zur Schwärzung der Streifen mit dem Ruß einer Petroleumflamme, die sogenannte kalte Berußung, bei der keine dauernde Widerstandsänderung des Platinstreifens eintrat, wurde auf Grund vielfacher Versuche damals eingehend beschrieben.

Während bisher mit dem Bolometer nur relative Beobachtungen möglich waren, gelang es Kurlbaum im Jahre 1893, dies Instrument zur absoluten Messung von Strahlungsintensitäten brauchbar zu machen, wobei er vor einem ähnlichen Gedanken Ångströms zweifellos die Priorität für sich in Anspruch nehmen durfte. Das von Kurlbaum angegebene Prinzip beruht darauf, daß die elektrische Energie gemessen wird, die infolge Joulescher Wärme den elektrischen Widerstand des Bolometers ebenso stark erhöht wie die auf das Bolometer treffende Wärmestrahlung.

Von der Idee bis zur Ausführung war natürlich noch ein beträchtlicher Schritt. Es stelllte sich bald heraus, daß die Methode der kalten Berußung zu ungleichmäßige Schichten lieferte, die auch bezüglich der Wärmeleitung nicht genügten. Erst der Überzug der Platinstreifen mit Platinschwarz führte zu dem erstrebten Ziel. Nun schien tatsächlich der Weg zur einwandfreien Festlegung einer Lichteinheit offen. Diese wurde, nach gemeinsam mit Lummer ausgeführten Versuchen, folgendermaßen definiert. Man bringt einen Platinstreifen durch elektrische Heizung zum Glühen und bestimmt die von 1 cm² seiner Oberfläche ausgehende Strahlung mittels des Bolometers, 1. wenn das Platin frei strahlt, 2. wenn zwischen Platinstreifen und Bolometer ein Quarztrog mit Wasser von vorgeschriebenen Abmessungen eingeschaltet wird. Die Strahlungsintensitäten in diesen beiden Fällen sollen sich wie zwei näher festzusetzende Zahlen, etwa wie 10 zu 1, verhalten. Dann ist die Temperatur und auch die Helligkeit des glühenden Platinstreifens eindeutig gegeben. Die Autoren hofften, die Lichteinheit auf diese Weise mit 1 Proz. Genauigkeit festlegen zu können. Später hat sich leider gezeigt, daß die damals zur Verfügung stehenden Mittel nicht ausreichten, um die wachsenden Ansprüche der messenden Physik zu befriedigen. Aber damals wurden diese Versuche mit Recht sehr hoch gewertet, denn sie bedeuteten einen kraftvollen Vorstoß in Richtung auf das gesteckte Ziel.

Kurlbaum reiste im Jahre 1893 zusammen mit Helmholtz und Lummer zur Weltausstellung nach Chikago und führte den dort gleichzeitig zu einem Kongreß vereinigten Physikern aller Länder sein neues Flächenbolometer vor. Die Konstruktion dieses Apparates konnte als handgreifliches Symbol genommen werden für die Pläne und Wege, welche der damals noch so jungen Physikalisch-Technischen Reichsanstalt von ihrem ersten Präsidenten vorgezeichnet waren. Die amerikanische Reise bedeutete für Kurlbaum auch einen bedeutenden persönlichen Gewinn. Nach Erledigung der dienstlichen Aufgaben besuchte er die größten Sehenswürdigkeiten Amerikas und lernte den Yellowstone-Park und Kalifornien kennen. Er hat oft davon gesprochen und seinem interessanten Bericht gern hinzugefügt, daß der gestrenge Präsident des Kuratoriums der Reichsanstalt den Nachurlaub nicht anerkennen wollte, den Kurlbaum in Amerika von Helmholtz erbeten hatte.

Nach dieser Unterbrechung nahm die ernste Arbeit in Charlottenburg wieder ihren Fortgang. Kurlbaum stellte die heute wohlbekannte Tatsache fest, daß die Empfindlichkeit seines Bolometers unter sonst gleichen Umständen im Vakuum mindestens doppelt so groß ist wie in Luft von Atmosphärendruck. Im Anschluß an diese Beobachtungen ließ er in einem abschließbaren und mit verschiedenen Gasen gefüllten Raum ein geheiztes Bolometer auf ein zweites strahlen, das nur vom Meßstrom durchflossen wurde, und bestimmte auf diese Weise die Absorption einer Kohlensäureschicht von gegebener Dicke.

Aus dem Jahre 1898 stammt die berühmte, mit Lummer zusammen veröffentlichte Mitteilung über „den elektrisch geglühten, absolut schwarzen Körper", der in unveränderter

Form noch heute das Fundament für alle Messungen der Licht- und Wärmestrahlung im Gebiet hoher Temperaturen bildet. Wenn nicht durch eigene Anschauung, so kennt doch jeder Physiker mindestens aus den Lehrbüchern die Konstruktion dieses schönen Apparates, jenes mit verschiedenen Blenden versehenen zylindrischen Hohlraums aus einer schwer schmelzbaren keramischen Masse, die von einer elektrisch heizbaren Platinhaut umschlossen ist und ohne Schwierigkeit auf Temperaturen bis etwa 1500^0 gebracht werden kann. Lummer und Kurlbaum maßen die Temperatur mit einem Thermoelement, das durch Vergleich mit einem Gasthermometer geeicht war, und konnten auf Grund relativer Messungen mit dem mehrfach genannten Flächenbolometer sofort eine sehr befriedigende Bestätigung des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes der Gesamtstrahlung bis herauf zu 1200^0 geben.

Ein Jahr später berichtete Kurlbaum über weitere Ergebnisse seiner Messungen an der Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers, die zum erstenmal einen zuverlässigen Wert für die Stefan-Boltzmannsche Konstante lieferten. Die bisher aus anderweitigen Untersuchungen errechnete Größe für diese Konstante war erheblich zu niedrig, während Kurlbaums Zahl, nachdem er sie auf Grund besonderer Messungen noch wegen der mangelnden Schwärze des Bolometers und wegen der Temperaturdifferenz zwischen der bestrahlten und der nicht bestrahlten Seite des Bolometerstreifens korrigiert hatte, von dem heute geltenden wahrscheinlichsten Wert nur noch um etwa 5 Proz. abwich. Wie groß die experimentellen Schwierigkeiten bei dieser Untersuchung waren, kann man daran ermessen, daß die Stefan-Boltzmannsche Konstante auch heute trotz zahlreicher Neubestimmungen nach den verschiedensten Methoden noch keineswegs mit der zunächst sehr wünschenswerten Genauigkeit von 1 Proz. sichergestellt ist.

Die letzte, gemeinsam mit Lummer durchgeführte Untersuchung bezieht sich auf die photometrische Helligkeit des schwarzen Körpers in Abhängigkeit von der Temperatur. Sie ist in Fachkreisen sehr bekannt geworden, und die Tatsache, daß nach diesen Versuchen die Helligkeit des schwarzen Körpers bei 1000^0 C mit der 19. Potenz der Temperatur wächst, wurde damals viel besprochen. Die Beobachtungsergebnisse wurden nur in knapper Form mitgeteilt, aber sowohl das Problem selbst als auch die kurz angedeuteten Pläne zur Abänderung und Verfeinerung der Messungen sind für viele Leser sehr anregend gewesen. Ich nenne hier nur den Vorschlag, die photometrische Helligkeit des schwarzen Körpers aus der Wienschen Strahlungsgleichung und der Kurve für die spektrale Augenempfindlichkeit herzuleiten, der später von anderer Seite in die Tat umgesetzt wurde.

Es ist eigentlich erstaunlich, daß die Autoren ihre schönen Beobachtungen so wenig ausgeschöpft haben, denn ihre Messungen waren durchaus genau genug, um festzustellen, daß das Produkt der absoluten Temperatur mit jener Potenz, die die Steigerung der Helligkeit bestimmt, konstant ist, und daß die Helligkeit des schwarzen Körpers sehr nahe ebenso mit der Temperatur steigt wie die monochromatische Intensität bei der Wellenlänge des grünen Lichtes.

Fast gleichzeitig mit der Untersuchung über die Helligkeit des schwarzen Körpers führte Kurlbaum gemeinsam mit Heinrich Rubens in dessen Laboratorium an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg diejenigen Messungsreihen über die Strahlungsintensität des schwarzen Körpers bei den Reststrahlen des Flußspates und des Steinsalzes aus, die den letzten Anstoß zur Aufstellung der Planckschen Strahlungsgleichung und somit zur Entstehung der Quantentheorie lieferten. Obwohl schon Lummer und Pringsheim die Gültigkeit der mit Hilfe der klassischen Physik abgeleiteten Wienschen Strahlungsgleichung durch sorgfältige Versuche in Frage gestellt hatten, so schienen doch andere Messungen die Wiensche Gleichung durchaus zu bestätigen. Die klare Entscheidung war nur zu erwarten, wenn die Beobachtungen im Gebiet jener langen Wellen

oberhalb 20 μ durchgeführt wurden, deren Entdeckung wir Heinrich Rubens verdanken, und wenn man für jene Messungen den schwarzen Körper bis herauf zu 1500° C heizte, wie es nur mit der Apparatur möglich war, an deren Herstellung Ferdinand Kurlbaum einen wesentlichen Anteil hatte. Das Wiensche Strahlungsgesetz versagte in der Tat bei dieser Feuerprobe, und die neue Plancksche Formel fand sofort ihre glänzende experimentelle Bestätigung.

Das Jahr 1901 bedeutete für Kurlbaum insofern einen gewissen Wendepunkt, als er aus dem Lummerschen Laboratorium ausschied, um ein eigenes zu übernehmen. Es war bei ihm schließlich der Wunsch auch nach äußerer Selbständigkeit so stark geworden, daß er sich gern bereit erklärte, eine Mitgliedsstelle in der damaligen zweiten Abteilung der Reichsanstalt zu übernehmen, in der die Prüfung von Apparaten vor der wissenschaftlichen Forschung den Vorrang besaß.

Nach einer gewissen Vorbildungszeit bei der Firma Siemens & Halske, wo er die Herstellung und Justierung der dort gefertigten elektrischen Meßinstrumente kennenlernte, und wo er sich über die Untersuchungsmethoden und die Abnahmeprüfung der verschiedenen Typen von Dynamomaschinen und Motoren unterrichten konnte, übernahm Kurlbaum das neu begründete Starkstromlaboratorium der Reichsanstalt. Der damals mit einem Amt dieser Art verbundene Professortitel war Kurlbaum ausnahmsweise schon zwei Jahre früher verliehen worden, eine Auszeichnung, die Kohlrausch beantragt hatte, um dem erfolgreichen Forscher die gebührende Anerkennung zum Ausdruck zu bringen.

Dem neuen Tätigkeitsgebiet hat Kurlbaum eine Veröffentlichung gewidmet, die er gemeinsam mit W. Jaeger herausbrachte. Sie bezieht sich auf die Beschreibung eines rotierenden Unterbrechers für Kapazitäts- und andere Messungen, einen Apparat, der in der Reichsanstalt und in andern Laboratorien vielfach Verwendung gefunden hat.

Im übrigen wandte sich Kurlbaum, soweit es sein neues Amt gestattete, wieder den Strahlungsmessungen zu. Eine sehr bekannt gewordene Strahlungsarbeit nahm er gewissermaßen von der alten zur neuen Tätigkeit mit herüber. Das ist jene Untersuchung, die er gemeinsam mit Holborn durchführte, und die den schlichten Titel: „Über ein optisches Pyrometer“ trägt. Es handelte sich hier um die Konstruktion des Glühfadenpyrometers, das in genial einfacher Weise mit großer Genauigkeit beliebig hohe Temperaturen zu messen gestattet. Es ist allen Physikern aus Wissenschaft und Technik, die sich mit der Messung von Glühtemperaturen zu beschäftigen haben, so vertraut, daß sich eine nähere Beschreibung des Instrumentes hier erübrigt, um so mehr, als dieses Thema noch in einem Vortrag des heutigen Abends behandelt werden wird. Nicht unerwähnt lassen möchte ich aber, daß in der genannten Veröffentlichung zum erstenmal der in glücklichster Weise gebildete und soviel gebrauchte Fachausdruck „schwarze Temperatur“ eingeführt wurde.

An die Entwickelung und Erprobung des optischen Pyrometers, das die Autoren ohne jeden Patentschutz zur allgemeinen Benutzung freigaben, schlossen sich zunächst zwei wichtige Untersuchungen über die Temperatur und das Reflexionsvermögen der leuchtenden Flammen an, durch die eine große Zahl von Untersuchungen ähnlicher Art angeregt wurde. Die neue und interessante Methode der Temperaturmessung beruht darauf, daß man durch die Flamme die Strahlung eines hocherhitzten Körpers schickt und dessen Helligkeit so einstellt, daß sie in einem bestimmten Wellenlängenbereich unverändert erscheint, gleichgültig ob die Flamme in den Strahlengang gebracht wird oder nicht. In diesem Falle emittiert die Flamme, von kleinen Korrektionen abgesehen, ebensoviel wie sie absorbiert, und nach dem Kirchhoffschen Gesetz ist die wahre Temperatur der Flamme gleich der leicht meßbaren schwarzen Temperatur des Strahlers zu setzen.

Hierauf folgten zwei interessante Arbeiten, die Kurlbaum zusammen mit Günther-Schulze ausführte. Die erste bezog sich auf die Strahlung der Nernstmaße und führte zu dem Ergebnis, daß die untersuchten Stifte aus

dieser Substanz bei mäßiger Glut im Grün eine Stelle deutlich bevorzugter Emission besitzen, die bei höherer Heizung mehr und mehr verschwindet. Bemerkenswert ist auch der in dieser Arbeit zum erstenmal deutlich hervortretende und auch heute noch nicht restlos erfüllte Wunsch, den umständlich zu handhabenden großen schwarzen Körper mit elektrisch heizbarer Platinfolie für die Zwecke der optischen Pyrometrie durch eine Lampe mit reproduzierbarer Flächenhelligkeit zu ersetzen und dadurch ein bequemes Helligkeitsnormal zweiter Ordnung zu schaffen.

Die zweite Arbeit mit Günther Schultze, die die Temperaturmessung an nicht leuchtenden Flammen zum Gegenstand hatte, bildet eine sehr wichtige Ergänzung zu der eben erwähnten Untersuchung über die leuchtenden Flammen. Die wiederum originelle Methode besteht darin, daß die Flamme durch ein Metallsalz gefärbt wird, und die Umkehr der Spektrallinien durch einen hinter der Flamme stehenden sogenannten kontinuierlichen Strahler von genau regelbarer Helligkeit bewirkt wird. Eine einfache Überlegung zeigt, daß auch in diesem Falle die schwarze Temperatur des auf die Linienumkehr eingestellten kontinuierlichen Strahlers gleich der wahren Temperatur der Flamme ist.

Im Herbst des Jahres 1904 schied Kurlbaum unter lebhaftem Bedauern seiner Kollegen aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, um dem Ruf an die Charlottenburger Hochschule zu folgen. Auch ihm selbst mag der Abschied von der Stätte langjähriger Tätigkeit nicht leicht geworden sein, und oft hat ihn sein Weg von der Hochschule in die gelben Backsteinbauten der Marchstraße zurückgeführt. Dieses Institut, mit dessen Begründer Werner v. Siemens Kurlbaum durch seine Gattin nahe verwandt war, blieb seine eigentliche wissenschaftliche Heimat, und die Reichsanstalt betrachtete ihn stets als einen ihrer Besten.

Nachdem er als Nachfolger von Adolf Paalzow, der damals im Alter von 81 Jahren in den Ruhestand trat, an die Seite von Heinrich Rubens gerückt war, nahm in Kurlbaums amtlicher Tätigkeit der Lehrberuf die erste Stelle ein, die bisher der Forschertätigkeit vorbehalten war; und als Rubens im Jahre 1908 die Technische Hochschule verlassen hatte, um an die Berliner Universität überzusiedeln, hatte Kurlbaum die Hauptlast des großen physikalischen Ordinariats zu tragen. Sie wuchs ständig mehr an und erreichte nach dem Kriege einen geradezu erdrückenden Umfang.

Zu eigenen physikalischen Arbeiten kam Kurlbaum an der Technischen Hochschule leider nicht; von späteren Veröffentlichungen habe ich nur noch seinen Bericht vom Jahre 1911 über seine Messung der Sonnentemperatur zu erwähnen, die er in der klaren Luft Oberägyptens, und zwar auf dem alten Fort Takuk bei Assuan durchgeführt hat. Wenn auch während dieser an Eindrücken so reichen Expedition, die er gemeinsam mit Adolf Miethe unternahm, nicht alle Pläne verwirklicht werden konnten, so war doch die Methode, welche Kurlbaum anwandte, um die ungeheuere Helligkeit der Sonne bis zu einer mit gewöhnlichen Mitteln meßbaren Größe herabzudrücken, wieder durchaus neuartig zu nennen. Er ließ die Sonnenstrahlen unter einem Winkel von 45° auf eine diffus reflektierende weiße Fläche von Magnesiumoxyd fallen, wodurch die Lichtschwächung dem Quadrat des Verhältnisses vom Sonnenradius zum Radius der Erdbahn proportional wurde.

Eine umfangreiche wissenschaftliche Tätigkeit, von der wenig nach außen bekannt geworden ist, hat Kurlbaum während des Krieges ausgeübt. Als alter Reserveoffizier beim 1. Garderegiment stellte er sich im Jahre 1914, trotzdem er das dienstpflichtige Alter bereits um mehr als ein Jahrzehnt überschritten hatte, den Militärbehörden zur Verfügung und wurde der Artillerie-Prüfungskommission zugeteilt, bei der er bis zum Ende des Krieges als Referent tätig war. In dieser Stellung hat er dem Vaterlande manch wertvollen Dienst erwiesen. Besonders erwähnen möchte ich seine Mitarbeit bei der photogrammetrischen Aufnahme der Geschoßbahnen gewisser Geschütze, die nahe der Front in den Stranddünen von Ostende aufgestellt waren. An Untersuchungen dieser Art, die später auf den

Schießplätzen im Innern des Landes fortgesetzt wurden, schloß sich die umfangreiche Prüfung eines akustischen Verfahrens zur Erkundung des Standortes feindlicher Geschütze. Im letzten Kriegsjahr war er hauptsächlich mit der Erprobung von Scheinwerfern hoher Lichtstärke beschäftigt, einer Aufgabe, die ja zu seinem speziellen Arbeitsgebiet gehörte, und der er sich darum mit besonderer Freude widmete. Er besaß eine unverkennbare Liebe zum Soldatentum, das mit seiner großen Nähe zur Natur und der Pflege des kameradschaftlichen Geistes durchaus Kurlbaums Wesen entsprach. Davon legen auch die vielen freundschaftlichen Beziehungen, welche er als Soldat überall gewann, ein lebendiges Zeugnis ab.

Bereits vor dem Kriege nahm er gern Gelegenheit, mit militärischen Stellen in Berührung zu kommen. So war er viele Jahre stellvertretender Vorsitzender der Versuchsanstalt für Handfeuerwaffen. Vom Sommer 1903 bis zum Herbst 1904 übernahm er den Unterricht für Physik an der Kriegsakademie, und im Jahre 1895 hatte er sehr vorzeitig im Vergleich zu dem gewöhnlichen Brauch eine Ordensauszeichnung erhalten, weil er namhaft an der Fertigstellung des von hoher militärärztlicher Seite herausgegebenen Werkes „Über die Wirkung und die kriegschirurgische Bedeutung der neuen Handfeuerwaffen" mitgearbeitet hatte. Hieran schlossen sich seine Veröffentlichungen „über die Bedeutung der Röntgenschen Strahlen für medizinisch-chirurgische Zwecke" sowie „Über die Sprengwirkung schnellfliegender Geschosse" und „Die Durchschlagswirkung von Geschossen".

Wenn wir zurückblicken auf das, was der Physiker Kurlbaum unserer Wissenschaft geschenkt hat, so sehen wir voll Bewunderung auf eine ganze Reihe schöner Ideen, die in einer Anzahl wichtiger Apparate und Meßmethoden Gestalt gewonnen haben. Ich nenne nur die absolute Messung der Strahlungsenergie, den elektrisch heizbaren schwarzen Körper für hohe Temperaturen, das optische Pyrometer, die optische Methode zur Temperaturmessung von Flammen. Jede einzelne dieser Ideen steht gewissermaßen am Anfang eines neu entdeckten Weges, den weiter zu beschreiten er andern überließ. In diesem Sinne war er eine Führernatur, die von ihrem Überfluß andern gibt, und von der man nicht fordern darf, daß sie sich in Kleinarbeit erschöpft. Kurlbaum war ein Experimentalphysiker von Rang, wie es heute nur wenige gibt. Der Theorie und Spekulation war er abhold, wenigstens interessierte sie ihn wohl kaum mehr, als ihn alle nicht zu seinem Spezialfach gehörenden Teilgebiete der Naturwissenschaft interessierten.

Er sah ja die ganze Welt ständig durch die naturwissenschaftliche Brille. Ihn beschäftigte die Frage, warum ein Riß im Anstrich der Zimmerdecke auf der einen Seite dunkler erscheint als auf der anderen und warum die Teeblätter in der Tasse beim Umrühren nicht an den Rand gelangen, sondern in der Mitte bleiben, ebensosehr wie der Magnuseffekt und die Bewegung einer ins Wasser rollenden Kugel. Seine Gedanken über die Natur kamen in systematischer Weise in den zahlreichen Vorträgen zum Ausdruck, die er alljährlich in der Mittwochsgesellschaft hielt, einem Kreis führender Männer aus den verschiedensten Gebieten der Wissenschaft und der Wirtschaft. Bezeichnend ist das letzte Thema, über das er in der Februarsitzung dieses Jahres sprach: „Es kann die Spur von meinen Erdentagen nicht in Äonen untergehen." Er schilderte unter Anführung zahlreicher Beispiele, wie alle Ereignisse in der Natur Spuren hinterlassen, und daß es nur darauf ankomme, sie richtig zu lesen, um in die Jahrhunderte und Jahrtausende, ja bis in die Zeiten der Entstehung unserer Erde zurückblicken zu können.

Auch die Spur von Kurlbaums Erdentagen soll nicht sobald verwischt werden. Dafür werden nicht nur seine Freunde sorgen, so lange sie noch auf der Erde wandeln, dahin werden nicht nur seine Kinder und Enkelkinder für diese und die kommenden Generationen wirken; die deutsche Physik wird auch noch in den spätesten Zeiten seinen Namen nennen, wenn sie sich der historischen Entwickelung in der Epoche ihres gewaltigen Aufschwunges um die Wende des 19. zum 20. Jahrhundert erinnert.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Beeinflussung der Dielektrizitätskonstanten durch elektrostatische Felder.

(Leipziger Dissertation.)

Von F. Kautzsch.

Die aus der Debyeschen kinetischen Theorie der Dielektrika folgende Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten flüssiger Medien von einem äußeren angelegten Felde veranlaßte bereits Ratnowsky (1) und später Herweg (2), nebst seinem Mitarbeiter Poetzsch zu diesbezüglichen experimentellen Untersuchungen. Die vorliegende Arbeit zielt auf analoge Feststellungen hin, insbesondere wurde die von Herweg für diese Zwecke glücklich gewählte Substanz, der Äthyläther nochmals untersucht. Von anderen als Dipolflüssigkeiten bereits bekannten Stoffen, nämlich Chloroform, Chlorbenzol, Bromoform, Brombenzol und Methylenchlorid erwiesen sich nur die beiden erstgenannten als geeignet für Versuche, bei denen es zur Aufrechterhaltung starker elektrischer Felder statischer Art auf weitgehend herabgesetztes Leitvermögen ankommt, sofern man von einer Untersuchung an Gemischen mit dipolfreier nichtleitender Komponente absehen will. Außer den genannten Dipolflüssigkeiten wurden noch Schwefelkohlenstoff und Hexan als dipollose Substanzen der Einwirkung äußerer Felder unterworfen.

Vorversuche.

Vor Aufnahme der endgültigen Untersuchungen wurden verschiedene Meßmethoden zur Bestimmung geringer Kapazitätsänderungen hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit für die vorliegenden Verhältnisse überprüft. Die von Falckenberg (3) beschriebene Differentialresonanzmethode erwies sich dabei als äußerst empfindlich, konnte jedoch bei einer Wellenlänge von etwa 300 m nicht auf der notwendigen Konstanz gehalten werden. Die hierbei vorgesehenen Schwingungskreise wurden erregt mit einer R. S. V.-Röhre von Telefunken, im Differentialkreis wurde eine Verstärkerröhre verwendet. Im Galvanometerkreis war eine Kompensationsschaltung eingefügt, wobei als Indikator ein Siemens-Drehspulgalvanometer mit einer Empfindlichkeit von etwa 10^{-8} Ampere/Skalenteil diente. Geringe Kapazitätsänderungen, wie sie z. B. durch Bewegung der Hand des Beobachters in 4 m Entfernung von den Schwingungskreisen erzeugt wurden, konnten durch erhebliche Ausschläge des Instruments registriert werden. Es änderte sich jedoch daneben die Einstellung des Instruments fortgesetzt sprunghaft um mehrere Skalenteile, was auch durch Auswechseln der Röhren nicht behoben werden konnte.

Eine weitere Untersuchung bezog sich auf die von Dowling (4) angegebene Schaltung. Hierbei wird eine Änderung der Kapazität im Schwingungskreise in Beziehung gesetzt zu der dadurch hervorgerufenen Änderung des Anodenstromes der Röhre. Wie bei der vorher erwähnten Anordnung wurde mit einer Kompensationsschaltung gearbeitet. Die Empfindlichkeit ließ sich je nach der Frequenzstelle variieren. In den für die geplanten Messungen in Betracht kommenden Bereichen traten indes wiederum unkontrollierbare spontane Änderungen am Indikator auf, die zum Teil als Detektoreffekt der zur Kompensation benutzten Schiebewiderstände erkannt wurden. Nach Ersetzen der letzteren durch Stöpselrheostaten blieben die Störungen merklich kleiner, konnten aber nicht auf das erforderliche Minimum herabgesetzt werden.

Da in den beiden erwähnten Anordnungen die Kompensationskreise bei nicht schwingendem Generator einwandfrei arbeiteten, muß der Grund für das Versagen dieser Methoden für die vorgesehenen Zwecke darin zu suchen sein, daß bei der mit der Frequenz gesteigerten Empfindlichkeit spontane Vorgänge innerhalb der Generatoren in ihren Auswirkungen von der gleichen Größenordnung werden wie die zu messenden Kapazitätsänderungen im Schwingungskreise.

Ferner wurde noch die von Geffcken und Richter angeregte und von Ch. Francke (5) beschriebene und benutzte Methode des an einen Generatorkreis induktiv angekoppelten Schwingungskreises überprüft. Die Empfindlichkeit ist hierbei am größten in der Nähe der kritischen Kopplung, sie kann aber nicht ausgenutzt werden, weil an dieser Stelle die Frequenz sehr labil ist. Für eine Wellenlänge von etwa 250 m erwies sich diese Anordnung erst dann genügend konstant, als die Empfindlichkeit im wesentlichen der einer einfachen Überlagerungsschaltung entsprach, wie sich durch direkten Vergleich zeigen ließ. Daher konnte auf den Zwischenkreis verzichtet werden und auf die einfachere Herwegsche Schaltung (2) zurückgegangen werden. Es versteht sich von selbst, daß bei diesen Untersuchungen Sorgfalt auf gute Kontakte und möglichst kurze, festverlegte Leitungsführung, sowie einwandfreie Betriebsbedingungen für die Generatoren verwendet wurde, und daß die Beobachtungen erst 1 bis 2 Stunden nach Ingangsetzen der Apparatur erfolgten.

Die schließlich benutzte Meßmethode entsprach im wesentlichen der Herwegschen. Das beigefügte Schaltschema zeigt die benutzte Anordnung. Der Meßkreis enthält den Versuchskondensator nebst einer Leidener Flaschenbatterie in Reihe geschaltet. Ein weiterer analog gebauter Schwingungskreis, in einiger Entfernung vom ersten aufgestellt, dient als Überlagerer. Beide Aggregate waren in geerdete Drahtkäfige eingeschlossen und wurden betrieben mit REO 64 Röhren von Telefunken bei einer Anodenspannung von etwa 70 Volt. Induktiv mit ihnen war ein aperiodischer Detektorkreis lose gekoppelt, welcher die gleichgerichtete Schwebungsfrequenz einem 3-Röhrenverstärker zuführte. Mit letzterem wurde ein Telephon betrieben. Außerdem enthielt die Anordnung noch einen dritten Schwingungskreis (in der Figur nicht angegeben), der als Tongenerator ausgebildet war und die von Herweg ursprünglich benutzte Stimmgabel ersetzte.

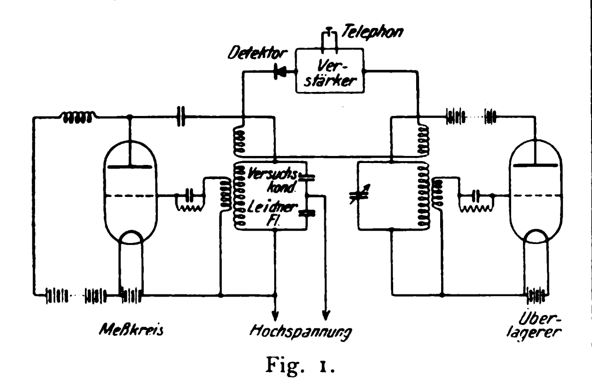


Fig. 1.

Er würde betrieben mit einer Telefunken-R. S. V.-Röhre; der durch ihn erzeugte Normalton wurde mit Hilfe eines eingeschalteten Telephons vernehmbar gemacht. Zum bequemen Vergleich der beiden Töne, von denen also der eine durch das Zusammenwirken von Schwingungsmeßkreis und Überlagererkreis, und der zweite direkt infolge der akustischen Frequenz des Tongenerators zustande kam, waren die beiden genannten Telephone mit etwa 10 cm Abstand in einem kurzen, mit Filz akustisch abgedämpften Papprohr gegeneinander gestellt. Mittels eines Gummischlauches, der durch ein Loch in die Mitte der Pappröhre einmündete, konnten die Töne bzw. Schwebungen dem Ohr des Beobachters mit der erforderlichen Lautstärke zugeführt werden. Nach dem Vorgange von Grüneisen und Merckel (6) war in die Gitterkreise der 3 benutzten Schwingungsgeneratoren je ein Widerstand von etwa 30 000 Ohm nebst Überbrückungskondensator von etwa 10 000 cm gelegt. Zum selben Zweck der Konstanthaltung der Frequenz wurde möglichst mit unterheizten Röhren gearbeitet. Die Empfindlichkeit der benutzten Anordnung betrug je nach der Frequenz $1 - 2 \cdot 10^{-6}$, wobei diese Zahl das Verhältnis der noch meßbaren Kapazitätsänderung zur Gesamtkapazität angibt.

Der Versuchskondensator.

Vor Inangriffnahme der Messungen erwies sich eine Untersuchung verschiedener Formen des Meßkondensators als notwendig. Als erstes Objekt wurde ein Zweiplattenkondensator in zylindrischem Glasgefäß mit eingeschmolzenen Zuführungen, der bereits zu Untersuchungen über den Kerreffekt benutzt worden war, geprüft. Mit Benzol als Dielektrikum ergab sich bei Anlegen eines statischen elektrischen Feldes von 10 000 Volt auf 2 mm Abstand eine Vergrößerung der Kapazität, was auf eine Annäherung der Platten infolge der Kraftwirkung der Ladungen zurückzuführen war. Dasselbe trat ein bei einer Kondensatorkonstruktion, die aus drei konzentrischen metallischen Hohlzylindern bestand, wobei der mittlere Zylinder etwa 8 cm Durchmesser hatte. Die Dicke der Wandungen betrug etwa 1 mm; jeder Zylinder hatte 2 diametral angebrachte, in ein Glasgefäß eingeschmolzene Zuführungen. Die 2 mm-Abstände wurden durch eingeschobene Glasstäbe fixiert. Daß trotz der scheinbaren Stabilität dieses Kondensators bei Anlegen des Feldes eine Vergrößerung der Kapazität eintrat, führte zu dem Schlusse, daß bei den wirkenden elektrostatischen Kräften sowohl die Fixierstäbe als auch die Einschmelzstellen Deformationen erlitten, was zu Änderungen der Abstände führte. Daraufhin wurde als Flüssigkeitsbehälter ein flachzylindrisches metallisches Hohlgefäß von 22 cm Durchmesser und 6 cm Höhe benutzt. In diesem ruhte auf 3 kleinen zylindrischen und nach oben abgerundeten Metallstücken eine Stahlplatte von 18 cm Durchmesser und 0,7 cm Dicke. Diese stellte nebst dem Gefäß die eine Kondensatorbelegung dar. Als zweite Belegung diente eine weitere Stahlplatte von gleichen Dimensionen, die auf 3 plangeschliffenen Quarzzylinderchen von 6 mm Durchmesser und 2 mm Höhe (von Zeiß, Jena angefertigt) auf der zuerst angeführten Platte lagerte. Mit Benzol als Dielektrikum ergab sich bei Anlegen eines Feldes von neuem eine Kapazitätsvergrößerung, was auf eine Deformation der Quarzzwischenstücke zurückgeführt werden mußte, denn dieselbe Wirkung stellte sich bei Belastung mit Gewichten ein, die innerhalb eines Faradayschen Gefäßes auf die Platten gesenkt wurden. Die Rechnung zeigte, daß die elektrostatische Kraftwirkung des benutzten Feldes (10 000 Volt auf 2 mm Abstand) gleichkam einer Belastung mit 0,7 kg für Benzol und mit 1,3 kg für Äthyläther als Dielektrikum. Weitere Berechnungen unter Zuhilfenahme des Kompres-

sionsmoduls von Quarz zeigten, daß die Platten infolge von Unebenheiten nicht voll auf den Flächen der Fixierquarze auflagen und damit einen Grund zu gesteigertem Druck auf die Unterlage gaben. Durch Einlegen dünner Scheiben aus Zinnfolie wurden die Auflageflächen infolge der Nachgiebigkeit dieses Materials vergrößert, jedoch konnte dadurch die Deformation nicht vollständig beseitigt werden.

Um endlich eine befriedigende Lösung der Stabilitätsfrage zu erlangen, wurde folgender Entwurf für das Kondensatorgefäß ausgeführt (Fig. 2). Aus einem Stahlvollzylinder von 26 cm Durchmesser und 4,34 cm Höhe wurde konzentrisch zur Mantelfläche eine zylindrische Einsenkung von 20 cm Durchmesser und 1,14 cm Tiefe ausgefräst. In diesen Hohlraum wurde auf

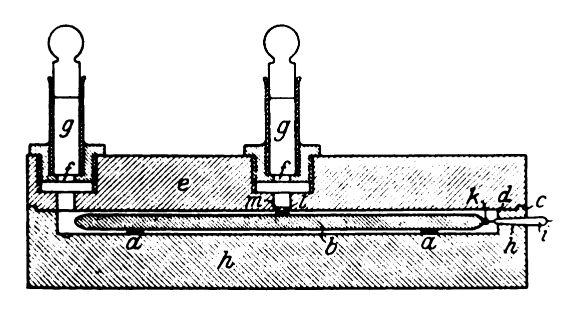


Fig. 2.
Versuchskondensator.

die schon erwähnten 3 Quarzzylinderchen *a*, eine runde Stahlplatte *b* von 18 cm Durchmesser und 0,74 cm Dicke gelagert. Darüber ruhte auf der verbliebenen, mit einem Führungsring *c* versehenen Umrandung *d* des Gefäßes der 3 cm starke Deckel *e* in 2 mm Abstand von der Zwischenplatte *b*. Dieses Verschlußstück wurde mit 5 Schrauben auf dem Gefäßrand *d* befestigt. Es enthielt zwei senkrechte Durchbohrungen *f* mit Gewinden, durch welche in Metall eingekittete Glasröhren *g* als Zuführungsstellen für die Flüssigkeit eingeschraubt werden konnten. Als Bindemittel zwischen Metall und Glas wurde Wasserglas verwendet. Die aufgesetzten Glasröhren konnten mittels Glasstopfen abgeschlossen werden. Bei dieser Ausführung bildete das gesamte Gefäß die eine Kondensatorbelegung, während die eingelagerte Platte *b* die zweite darstellte, welche auf Grund vollkommener Symmetrie der Anordnung einseitigen elektrostatischen Kraftwirkungen nicht mehr unterlag. Der Auflagerand *d* zwischen Gefäß und Deckel wurde durch Ringe aus Bleifolie abgedichtet, ihre Dicke wurde dabei so bemessen, daß die Abstände der Mittelplatte *b* von Boden und Deckel des Gefäßes genau gleich wurden. Ursprünglich war geplant, der mittleren Platte *b* die Spannung mittels eines Metallstabes, der durch die mittlere Deckeldurchbohrung *f* geführt und auf die Platte *b* aufgeschraubt werden konnte, zuzuleiten, während der andere Pol an die Außenseite des Gefäßes gelegt wurde. Bei einwirkendem Feld verursachten jedoch Änderungen der Oberflächenspannung ein erhebliches Aufsteigen der Flüssigkeit in dem mit der Spannungsleitung versehenen Zuflußrohr und ein entsprechendes Absinken des Niveaus im anderen Rohr, was eine merkliche Kapazitätsänderung zur Folge hatte. Daher wurde die Zuführung zur inneren Platte *b* durch eine seitliche konische Einbohrung *h* in die Wandung des Gefäßes gelegt. Sie erfolgte mittels eines Drahtes mit Platinansätzen, der in einen mit dem Konus übereinstimmenden Glasschliff *i* beiderseits eingeschmolzen war und durch eine seitliche Klemmschraube *k* an der Platte *b* befestigt werden konnte. Um ein Verschieben der Mittelplatte *b* beim Transport zu verhindern, wurde sie in der Mitte mit einem Schraubenkopf *l* versehen, über den ein durchlochter Porzellanstern *m* geschoben werden konnte, der seinerseits in die mittlere Durchbohrung *f* des Deckels ragte und dort festgehalten wurde. Die sich gegenüberliegenden Flächen der Kondensatorbelegungen wurden plangeschliffen, poliert und der Innenteil des Gefäßes vergoldet. Beim Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Bildung von Luftblasen durch Ankippen des Gefäßes bei vorsichtiger Handhabung tunlichst vermieden. Durch wiederholtes schnelles Einpressen der Glasstopfen wurden etwa entstandene Bläschen nach den höher gestellten Teilen des Kondensators gedrückt, wo sie durch das seitliche Rohr *g* entweichen konnten. Bei dieser Konstruktion ließen sich unter der Einwirkung des Feldes keine Kapazitätsänderungen mehr nachweisen, die auf Deformationen beruhten. Außerdem wurde die Stabilität dieses Gefäßes noch durch Belastung mit 5 kg geprüft, es ergab sich keine Änderung, obgleich bei der benutzten Anordnung Abstandsänderungen der Platte im Betrag von $1{,}7 \cdot 10^{-7}$ cm nachweisbar gewesen wären.

Spannungsanordnung.

Die Hochspannung zu den Versuchen wurde von zwei hintereinandergeschalteten Gleichstrommaschinen geliefert, die zusammen bis etwa 12 000 Volt gaben. Zur Blockierung der Hochspannung wurde im Schwingungskreis *C* in Reihe mit dem Versuchskondensator *a* eine große Leidener Flaschenbatterie *b* von etwa 30000 cm Kapazität geschaltet (Fig. 3). Die Messung der Spannung erfolgte mittels eines Millivoltmeters *c*, das nebst einem Vorschaltwiderstand *d* von etwa 30 Megohm an die Spannungszuführungen gelegt war. Ferner enthielten die

Spannungsleitungen je einen Widerstand *e* von etwa 1 Megohm als Sicherung bei etwaigen Durchschlägen des Dielektrikums; außerdem erfuhren dadurch Beeinträchtigungen der Tonreinheit des Überlagerungstones, die gelegentlich durch Funkenbildung am Maschinenkollektor bewirkt wurden, eine weitaus größere Dämpfung als dies mit Drosseln erreichbar war. Variiert wurde die Spannung durch Änderung der Erregung der

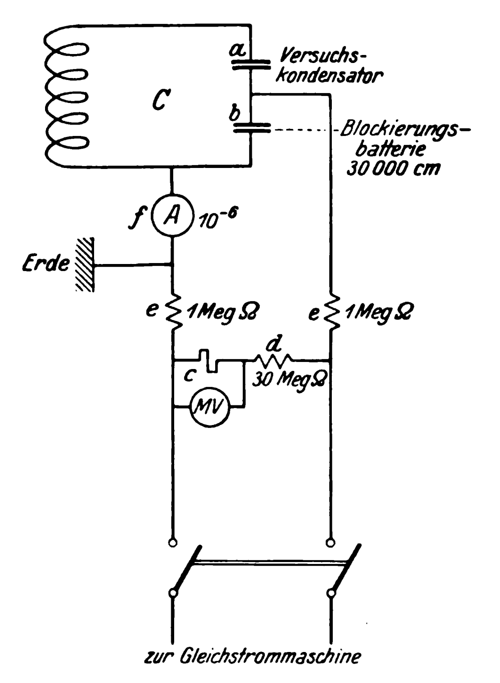


Fig. 3.
Zuführung der Hochspannung.

Maschine, was vom Beobachtungsplatze aus mit Hilfe von Schiebewiderständen vorgenommen werden konnte. Die Ablesung des Spannungsmessers erfolgte ebenfalls von dort aus. Ferner war in der Schaltung noch ein Amperemeter *f* vorgesehen (Empfindlichkeit 10^{-6} Ampere pro Skalenteil), welches jederzeit eine Kontrolle des von der Hochspannung bewirkten Stromes durch die Meßanordnung gestattete. An- und Abschalten der Hochspannungszuleitung zeigte keinen Einfluß auf die Frequenz des Meßkreises.

Störungsquellen.

Anläßlich der Prüfung der Stabilität des beschriebenen Meßkondensators mit Benzol als Dielektrikum ergab sich bei Anlegen eines starken Feldes in vielen Fällen eine geringe Vergrößerung der Kapazität, die eben noch konstatiert werden konnte, und die sich regelmäßig mit einer gewissen Verzögerung einstellte, um nach einigen Sekunden wieder zu verschwinden, während beim Abnehmen der Spannung keine Änderung festgestellt werden konnte. Die Vermutung, daß als Ursache für diesen unsymmetrischen verzögerten Effekt eine Störung dielektrischer Art, herrührend von der zur Blockierung der Hochspannung im Schwingungskreis verwendeten Leidener Flaschenbatterie, gelten könne, wurde bestätigt durch eine Untersuchung verschiedener solcher Glaskondensatoren. Zur näheren Beurteilung dieser Störung wurde der eigentliche Versuchskondensator, der zur Aufnahme des flüssigen Dielektrikums diente, aus dem Meßkreis entfernt, und an seine Stelle verschiedene Leidener Flaschen mit Kapazitäten von einigen 100 bis einigen 1000 cm eingeschaltet und einzeln nacheinander bezüglich ihres Verhaltens bei Belastung mit Hochspannung geprüft. Die im Meßkreis vorhandene Blockierungsbatterie behielt bei diesen Versuchen ihren Platz bei. Es zeigte sich nun, daß eine jede der 5 eingeschalteten Leidener Flaschen, die gerade zur Verfügung standen, auf Spannung reagierte durch Änderung der Kapazität, und zwar traten bei den verschiedenen Versuchsobjekten verschiedene Erscheinungen auf. Während bei der einen Kategorie die Kapazitätsänderung mit dem Felde anwuchs und bei konstantem Feld wesentlich erhalten blieb, kam bei einer anderen Art ein Wiederabfallen der Kapazitätsänderung nach Einstellen des Feldes zustande. Meist verhielten sich die Veränderungen unsymmetrisch, d. h. dem Anlegen der Spannung entsprach eine andere Kapazitätsänderung als dem Verschwinden der Spannung. Es kamen dabei Änderungen des Schwebungstones um mehrere Oktaven vor. Ferner wurden sowohl Vergrößerungen als auch Verkleinerungen der Kapazität unter Einwirkung des Feldes beobachtet. Die Erscheinungen gestalteten sich noch unübersichtlicher, als festgestellt werden konnte, daß dasselbe Objekt bei scheinbar gleichen Bedingungen an verschiedenen Tagen verschieden reagierte, d. h. es konnte an derselben Leidener Flasche bei Anlegen des Feldes einmal eine Kapazitätsvergrößerung eintreten, während das andere Mal aus demselben Anlaß eine Verkleinerung eintrat. Daher konnten die Verhältnisse nicht zahlenmäßig erfaßt werden, und es scheint, daß mehrere Komponenten zu dem beobachteten Effekt beitragen; z. B. war die Art der Änderung abhängig vom Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Dies führte zu der Vermutung, daß die aufgeklebten Stanniolbelegungen je nach dem augenblicklichen Wassergehalt des Klebmittels deformiert würden; es können außerdem aber auch dielektrische Nachwirkungen eine Rolle spielen, ebenso wie Kriechströme, die ihren Weg über das feste Dielektrikum nehmen, eine Kapazitätsänderung vortäuschen können.

Nach diesen Feststellungen mit beliebigen Leidener Flaschen wurde eine Prüfung einzelner der Blockierungsbatterie angehörender Aggregate vorgenommen. Es wurde dazu immer eine Einzelkapazität aus der Batterie entfernt und wieder wie die vorher untersuchten Leidener Flaschen an die Stelle des Versuchskondensators in den Meßkreis eingeschaltet, während der Rest der Batterie weiterhin die Funktion der Absperrung der Hochspannung im Meßkreise beibehielt. Die Frequenz des Schwingungskreises war jeweils in erster Linie durch die in Untersuchung stehende Einzelkapazität bestimmt. Diese Nachprüfungen an Teilen der bei den endgültigen Messungen verwendeten Leidener Flaschenbatterie ergaben nun, daß, wenn eine Spannung angelegt wurde, eine merkliche Kapazitätszunahme erfolgte, und zwar trat sie, nachdem sich das Feld ausgebildet hatte, mit Verzögerung ein und klang bei konstantem Feld nach einiger Zeit wieder ab. Der Verlauf eines solchen Versuches war also folgendermaßen: die Apparatur wurde anfangs auf Gleichheit von Überlagerungston und Normalton, also auf Schwebungslosigkeit, eingestellt. Hierauf wurde Spannung auf die Kondensatoren im Meßkreis gegeben bis das Voltmeter der Hochspannungsanordnung einen bestimmten Betrag anzeigte. Daraufhin traten eine abzählbare Anzahl Schwebungen ein (5—6 pro Sek.), die allmählich langsamer wurden und nach 1—2 Minuten ganz ausblieben. Von da an blieb die Einstellung bei gleichbleibendem Feld konstant. Wurde das Feld wieder beseitigt, so wurde ebenfalls eine merkliche Kapazitätsvergrößerung konstatiert, diese wurde aber bereits in Bruchteilen von 1 Sekunde unmerklich. Erst 10—12 Sek. nach Abschalten des statischen Feldes traten von neuem Schwebungen auf (1—2 pro Sek.), die diesmal eine Verkleinerung der Kapazität anzeigten. Nach weiteren 10 Sek. blieben diese Schwebungen wieder aus und die Anordnung zeigte von da an wieder konstante Einstellung. Wiederholungen der Versuche zeigten im wesentlichen dasselbe, dabei wurde auf gleichbleibenden Feuchtigkeitsgehalt des Laboratoriums geachtet. Es zeigten somit diese Nachprüfungen, die zwecks sicherer Kontrolle und einwandfreier Beurteilung mehrere Wochen in Anspruch nahmen, daß für die geplanten Messungen nicht allein die Änderung des Dielektrikums des Flüssigkeitskondensators als kapazitätsändernder Faktor in Betracht kam, sondern, daß gegebenenfalls auch die Blockierungsbatterie die Anzahl der entstehenden Schwebungen beeinflussen konnte. Es kam nun darauf an, abzuschätzen, bis zu welchem Grade dieser störende Einfluß in Rechnung zu ziehen sei. Wie bereits erwähnt, zeigten Untersuchungen mit dem Benzol enthaltenden Flüssigkeitskondensator keine merkliche Kapazitätsänderung für den Fall, daß die Beobachtung vorgenommen wurde, während, bzw. nach dem Abschalten des statischen Feldes. Sowohl während als auch nach dem Verschwinden der Hochspannung blieb die Einstellung vollkommen konstant. Die nachgewiesenermaßen vorhandene Änderung der 30 000 cm Kapazität der Blockierungsbatterie blieb somit in diesem Falle unmerklich infolge des Umstandes, daß bei Hintereinanderschaltung der Kapazitäten die kleinere des Benzolkondensators (450 cm) in vorherrschender Weise die Gesamtkapazität und damit auch Änderungen der Gesamtkapazität bestimmt. Für den Fall, daß das statische Feld an die Anordnung angelegt wurde, traten, wie ebenfalls bereits angeführt, bisweilen Schwebungen auf (0,5—1 pro Sek.), welche auf die dielektrischen Eigenschaften der Blockierungsbatterie zurückgeführt werden müssen. Hiermit stimmt das Resultat aus der Nachprüfung der Aggregate jener Batterie überein, demzufolge dem Anlegen des Feldes eine größere Änderung entsprach als dem Abnehmen. Unter Zugrundelegung dieser Ergebnisse läßt sich berechnen, daß auch für den Fall, daß der Versuchskondensator etwa 1000 cm Kapazität repräsentiert, die infolge der unter Spannung stehenden Leidener Flaschen hervorgerufene Kapazitätsänderung unmerklich bleibt, sofern die Beobachtung nach dem Abschalten des jeweils bestimmten angelegten Feldes erfolgt. Für diesen Fall zeigt sich, daß das Verhältnis der durch die Batterie verursachten Änderung der Kapazität zur Gesamtkapazität die Größenordnung 10^{-7} aufweist, somit unter der Meßgenauigkeit bleibt. Im übrigen blieb auf Grund der Versuche eine Störungsgefahr überhaupt ausgeschaltet, falls die jeweilige Messung innerhalb 1—8 Sekunden nach Abschalten des betreffenden Feldes erfolgt war, was in jedem Falle leicht bewerkstelligt werden konnte.

Ausführung der Messungen.

Nach diesen Vorversuchen wurde an die im weiteren Verlauf zu schildernden Messungen herangegangen. Es wurde zunächst die in den Versuchskondensator eingefüllte Flüssigkeit eine Zeitlang unter der höchsten verfügbaren Spannung gelassen, nachdem diese durch allmähliche Steigerung in Intervallen erreicht war. Dadurch wurde das Leitvermögen der vorher durch Destillation gereinigten Substanzen durch eine Art Kataphorese weiterhin beträchtlich herabgesetzt, wobei noch vorhandene leitende Verunreinigungen an die als Elektroden wirkenden Kondensatorplatten transportiert wurden. (Die Fig. 4 zeigt den Abfall der Leitfähigkeit bei Benzol unter Einwirkung von 6000 Volt auf 2 mm Abstand,

wobei dem regulären Effekt zeitweise eine Störung infolge von stärker leitenden Bestandteilen der Flüssigkeit überlagert erscheint.) Außerdem stellte sich die im Verlaufe dieser Vorbehandlung in Betrieb gesetzte Meßanordnung auf konstante Verhältnisse ein. Das zu den Vorversuchen verwendete Benzol hatte einen Leitwert von $K = 4{,}8 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{Ohm}^{-1}$ gemessen bei 55 000 Volt/cm.

Die Messungen verliefen nun folgendermaßen: Bei der höchsten erreichten Spannung wurde mittels eines im Überlagererkreise befindlichen Kompensationskondensators auf Schwebungslosigkeit eingestellt. Nun wurde die Spannung durch langsames Regulieren der Erregung

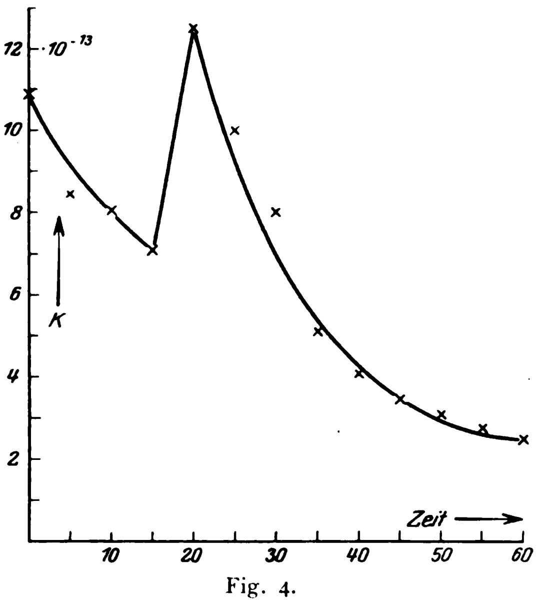


Fig. 4.
Abfallen der Leitfähigkeit von Benzol unter Einwirkung von 30 000 Volt/cm.

des Hochspannungsgenerators auf einen solchen Betrag herabgesetzt, daß die dabei auftretenden Schwebungen leicht an Hand der Stoppuhr abgezählt werden konnten. Nach erfolgter Abzählung wurde mit Hilfe des erwähnten Kompensationskondensators die Richtung der Kapazitätsänderung, die zu dem Auftreten der Schwebungen Anlaß gab, festgestellt. Daraufhin wurde die Spannung wieder auf den Ausgangsbetrag erhöht, und nach erfolgter Neueinstellung auf Schwebungslosigkeit das Verfahren so oft wiederholt, bis die Anzahl der Beobachtungen für die Bildung eines einwandfreien Mittelwertes ausreichend schien. Bei den Untersuchungen an Äthyläther z. B. war dieses erste Beobachtungsintervall gegeben durch die Spannungen 11 000 und 9200 Volt. Mit ganz analogen Verfahren schlossen sich daran die weiteren Intervalle 9200—6550 Volt, 6550—4000 Volt und schließlich 4000—0 Volt an. Durch Addition der in jedem Intervall gemessenen Schwebungen pro Sekunde $\Delta n'$ ergaben sich dann, von 0—4000 Volt beginnend, die Werte Δn für die einzelnen Spannungsbeträge 4000, 6550, 9200 und 11 000 Volt.

Meßergebnisse.

Gemäß der Thomsonschen Formel besteht zwischen Kapazitätsänderung und Frequenzänderung eines ungedämpften Schwingungskreises bei konstanter Selbstinduktion die Beziehung: $\frac{\Delta C}{C} = -\frac{2\Delta n}{n}$. Im vorliegenden Fall bestand die Gesamtkapazität C des Schwingungskreises aus 2 in Reihe geschalteten Kapazitäten C_1 und C_2, wobei C_2 groß war gegen C_1. Bei den Messungen änderte sich merklich nur die Kapazität C_1, so daß aus: $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ gefolgert werden kann:

$$\frac{\Delta C}{\Delta C_1} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C^2}{C_1^2},$$

so daß sich ergibt: $\frac{\Delta C_1}{C_1} = -\frac{2\Delta n}{n} \cdot \frac{C_1}{C}$. Hieraus folgt, sofern der Kondensator C_1 ein Dielektrikum der Konstanten ε enthält:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{2\Delta n}{n} \cdot \frac{C_1}{C} \quad \text{und} \quad \Delta \varepsilon = -\frac{2\Delta n}{n} \cdot \frac{C_1}{C} \cdot \varepsilon$$

Äthyläther (von Kahlbaum, wasserfrei über Natrium destilliert, zur Analyse). Nach 3maliger Destillation und anschließender Reinigung durch Kataphorese ergab sich bei 58 000 Volt/cm gemessen als Leitwert:

$$K = 4{,}6 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{Ohm}^{-1}.$$

Hierzu ist noch zu bemerken, daß der wesentliche Anteil des Stromüberganges zwischen den Kondensatorplatten als Kriechstrom an den den Abstand fixierenden Quarzscheiben entlang anzusehen ist. Dies konnte aus Erscheinungen bei gelegentlichen Durchschlägen geschlossen werden, wobei sich Kohlenstoffbrücken auf den Rändern der Zwischenlagestückchen niederschlugen, sowie Aufrauhungen daselbst bildeten, neben einer Verrußung der metallischen Belegungen in der Umgebung. Es wird bei analogen Versuchen die Isolierfähigkeit der Medien gesteigert werden können durch Vermeidung von Zwischenstücken, was beispielsweise durch Verwendung einer massiven zylindrischen Anordnung erreicht werden kann.

Die Messungen an Äthyläther gaben folgende Resultate:



$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= 2{,}54\ \mathrm{sec}^{-1} \text{ bei } 4\,000 \text{ Volt} \\ \Delta n_2 &= 6{,}54\ \mathrm{sec}^{-1} \text{ ,, } 6\,550 \text{ Volt} \\ \Delta n_3 &= 11{,}57\ \mathrm{sec}^{-1} \text{ ,, } 9\,200 \text{ Volt} \\ \Delta n_4 &= 15{,}06\ \mathrm{sec}^{-1} \text{ ,, } 11\,000 \text{ Volt.} \end{aligned}$$

Die Werte entsprechen hierbei einer Verkleinerung der D.-K. unter der Einwirkung der angegebenen Spannungsbeträge.

Jeder Wert Δn ist als Mittelwert aus je 300 Einzelablesungen anzusehen.

Zur Berechnung von $[\Delta \varepsilon]$ wurde gemessen:
C_1 (Kapazität des Versuchskondensators) = 840,9 cm,
C (Gesamtkapazität des Schwingungskreises) = 809,3 cm.
λ (Wellenlänge) = 210 m, also $n = 1{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{sec}^{-1}$.
Wird ferner gesetzt $\varepsilon = 4{,}35$, so ergeben sich nach der obigen Formel die beziehungsweisen Werte:

$$\begin{aligned} [\Delta \varepsilon_1] &= 16{,}40 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_2] &= 42{,}23 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_3] &= 74{,}71 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_4] &= 92{,}24 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Wie bereits Herweg begründete, kommen diese Änderungen zustande aus einem Zusammenwirken des Dipoleffekts und einer adiabatischen Erwärmung des Dielektrikums infolge der Überlagerung der hohen Gleichspannung durch die schnellen elektrischen Schwingungen des Meßfeldes oder thermodynamisch gesprochen: infolge der Verschiebungsarbeit, welche das an den molekularen Ladungen angreifende Wechselfeld gegen die Einstellung der Ladungen im statischen Feld leistet. Unter der Voraussetzung, daß der kalorische Effekt, welcher durch eine Einwirkung des hochfrequenten Meßfeldes allein zustande kommt (Vorspannung $E = 0$), unmerklich bleibt, wegen der Kleinheit der Spannungsamplitude (im vorliegendem Fall 70 Volt), gilt nach Herweg:

$$[\Delta \varepsilon]_{ad} = -0{,}884 \cdot 0{,}239 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{T \cdot \alpha^2 \varepsilon^2}{s \cdot c} \cdot \mathfrak{E}^2.$$

Diese Beziehung folgt aus dem Helmholtzschen Ansatz für diese Korrektion und entspricht unter Bezugnahme auf die Debyesche Benennung dem quadratischen elektrokalorischen Effekt (7). In der Formel bedeutet T die absolute Temperatur, α den Temperaturkoeffizienten der D.-K., s die Dichte, c die spezifische Wärme des Dielektrikums. $\mathfrak{E}$ ist in Volt/cm einzusetzen. Da diese Änderung von ε gleichsinnig mit dem Dipoleffekt geht, so erhält man die vom letzteren allein verursachte Änderung durch Verkleinerung der Werte $[\Delta \varepsilon]$ um die entsprechenden Werte $[\Delta \varepsilon]_{ad}$, so daß also wird $\Delta \varepsilon_D = [\Delta \varepsilon] - [\Delta \varepsilon]_{ad}$, wenn $\Delta \varepsilon_D$ die reine Dipoländerung bezeichnet.

Für den Fall des Äthyläthers ist zu setzen: $T = 294$, entsprechend der Versuchstemperatur 21° C; $s = 0{,}717$; $c = 0{,}56$; $\alpha = 0{,}0046$; $\varepsilon = 4{,}35$. Da ferner der Abstand der Kondensatorplatten $d = 0{,}205$ cm, wird $\mathfrak{E} = \frac{E}{d} = \frac{E}{0{,}205}$.

Hieraus errechnet sich:

$$\begin{aligned} [\Delta \varepsilon_1]_{ad} &= 2{,}36 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_2]_{ad} &= 6{,}32 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_3]_{ad} &= 12{,}48 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_4]_{ad} &= 17{,}84 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

und es folgt für die Dipoländerungen:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1 &= 14{,}04 \cdot 10^{-6} \\ \Delta \varepsilon_2 &= 35{,}91 \cdot 10^{-6} \\ \Delta \varepsilon_3 &= 62{,}23 \cdot 10^{-6} \\ \Delta \varepsilon_4 &= 79{,}40 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

im Sinne einer Verkleinerung.

Chloroform (Chloroform Anschütz, chem. rein aus Salizylidchloroform, bezogen durch Merck). Nach 2maliger Destillation unter Lichtabschluß und nach Kataphorese war $K = 2{,}4 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{Ohm}^{-1}$ bei 57000 Volt/cm gemessen.

Die Versuchsergebnisse sind folgende:

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= 3{,}64\ \mathrm{sec}^{-1} \text{ bei Spannung } E_1 = 5250 \text{ Volt} \\ \Delta n_2 &= 7{,}18\ \mathrm{sec}^{-1} \text{ bei Spannung } E_2 = 7900 \text{ Volt} \\ \Delta n_3 &= 11{,}35\ \mathrm{sec}^{-1} \text{ bei Spannung } E_3 = 10500 \text{ Volt} \end{aligned}$$

Die Δn entsprechen einer Verkleinerung der D.-K. unter Einwirkung des Feldes und sind Mittelwerte aus je 400 Einzelbeobachtungen.

Mit den Werten:

$$\varepsilon = 5{,}16;\ C_1 = 959{,}9 \text{ cm};\ C = 932{,}6 \text{ cm};\ \lambda = 230 \text{ m};\ n = 1{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{sec}^{-1}$$

ergeben sich die Änderungen der D.-K.:

$$\begin{aligned} [\Delta \varepsilon_1] &= 29{,}74 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_2] &= 58{,}67 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_3] &= 92{,}74 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Laut der Herwegschen Korrektion, in welcher jetzt zu setzen ist: $T = 295$ [1]); $\alpha = 0{,}0041$; $s = 1{,}493$; $c = 0{,}234$; $\mathfrak{E} = \frac{E}{d}$, wo $d = 0{,}205$ cm, erhält man für die adiabatischen Änderungen:

$$\begin{aligned} [\Delta \varepsilon_1]_{ad} &= 5{,}24 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_2]_{ad} &= 11{,}86 \cdot 10^{-6} \\ [\Delta \varepsilon_3]_{ad} &= 20{,}95 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Somit folgen die Dipoländerungen:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1 &= 24{,}50 \cdot 10^{-6} \\ \Delta \varepsilon_2 &= 46{,}81 \cdot 10^{-6} \\ \Delta \varepsilon_3 &= 71{,}79 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

im Sinne einer Verkleinerung.

1) Entsprechend 22° C Versuchstemperatur.

Chlorbenzol (rein von Kahlbaum). Nach Reinigung durch Kataphorese betrug das Leitvermögen $K = 2 \cdot 10^{-13}$ cm^{-1} Ohm^{-1} gemessen bei 59000 Volt/cm. Erst nach Anlegen einer hohen Spannung zeigte sich hier eine Änderung der Frequenz des Meßkreises, die einer Verkleinerung der Kapazität entsprach. Bei 10500 Volt kamen $\Delta n = 3{,}16$ Schwebungen pro Sek. zustande als Mittel von 900 Ablesungen. In Abweichung zu dem im Landolt-Börnstein angegebenen Wert der D.-K. für Chlorbenzol (etwa 11) wurde bestimmt: $\varepsilon = 5{,}86$ bei 18° C. Aus den übrigen Werten: $C_1 = 1150{,}3$ cm; $C = 1109{,}3$ cm; $\lambda = 250$ m, $n = 1{,}2 \cdot 10^6$ sec^{-1} ergibt sich die Verkleinerung: $[\Delta \varepsilon] = 32{,}00 \cdot 10^{-6}$. In der Herwegschen Korrektion ist zu setzen: $T = 293{,}5$ (da die Versuchstemperatur $t = 20{,}5^0$ C), $s = 1{,}108$; $c = 0{,}32$; $\varepsilon = 5{,}86$. Der Wert α wurde in einem besonderen Versuche zu etwa 0,0028 bei 50° C ermittelt. Diesem Wert kommt jedoch nur eine provisorische Bedeutung zu, da die Versuchsanordnung nicht auf empfindliche Temperaturbestimmungen eingestellt war, ferner war kein einwandfreier Temperaturausgleich im Dielektrikum gewährleistet, und es wurde der Einfluß der Erwärmung des Kondensatorgefäßes auf die Messungen vernachlässigt. Rechnet man mit den angegebenen Werten, so folgt für die Verkleinerung der D.-K. durch die adiabatische Erwärmung bei 10500 Volt auf den Abstand 0,205 cm:

$$[\Delta \varepsilon]_{ad} = 12{,}35 \cdot 10^{-6}.$$

Damit ergibt sich:

$$\Delta \varepsilon = 19{,}65 \cdot 10^{-6}$$

im Sinne einer Verkleinerung.

Methylenchlorid erwies sich als ungeeignet für diese Versuche. Die Leitfähigkeit blieb nach 3maligem Destillieren und nach Kataphorese $K = 1{,}2 \cdot 10^{-10}$ cm^{-1} Ohm^{-1} bei 1000 Volt/cm. In einem Nebenversuch wurde die D.-K.: $\varepsilon = 8{,}4$ bestimmt bei 18°.

Bromoform und Brombenzol konnten zwar durch 72stünd. Einwirkung von 1000 Volt/cm in ihrer Leitfähigkeit von 10^{-11} auf 10^{-12} herabgesetzt werden, jedoch genügte diese Reduktion noch nicht, um einwandfreie Resultate zu gewährleisten.

Bei probeweisem Anlegen von 4000 Volt an den Meßkondensator zeigten sich ausgesprochene starke Verzögerungserscheinungen beim Zustandekommen der Schwebungen, was auf einen Temperatureffekt infolge der Erwärmung des Dielektrikums durch relativ großen Stromdurchgang hindeutete. Messungen wurden deshalb nicht ausgeführt.

Schwefelkohlenstoff. Leitvermögen $K = 4{,}8 \cdot 10^{-14}$ bei 56000 Volt/cm. Bei Anlegen von 10500 Volt an den Kondensator erfolgte eine Kapazitätsvergrößerung entsprechend einer Frequenzverkleinerung um $\Delta n = 0{,}98$ sec^{-1} (Mittel aus 200 Beobachtungen). Aus den Versuchsdaten $C_1 = 516{,}3$ cm; $C = 510{,}5$ cm; $\lambda = 170$ m; $n = 1{,}8 \cdot 10^6$ sec^{-1}; $\varepsilon = 2{,}62$ folgt: $[\Delta \varepsilon] = 2{,}90 \cdot 10^{-6}$. Die adiabatische Erwärmung des Dielektrikums verkleinert diese Änderung und ist daher zu addieren, um den reinen Effekt der molekularen Ladungen zu erhalten. Es wird $[\Delta \varepsilon]_{ad} = 0{,}313 \cdot 10^{-6}$, wobei in der Herwegschen Korrektionsformel gesetzt wurde: $T = 293{,}5$ (entsprechend $t = 20{,}5^0$C), $\alpha = 0{,}000922$; $s = 1{,}265$; $c = 0{,}24$; $\varepsilon = 2{,}62$. Somit bekommt man: $\Delta \varepsilon = [\Delta \varepsilon] + [\Delta \varepsilon]_{ad} = 3{,}21 \cdot 10^{-6}$ im Sinne einer Vergrößerung.

Hexan (von Kahlbaum, normal aus Petroleum). Nach 4maliger Destillation und anhaltender Einwirkung eines statischen Feldes zwecks Reinigung war $K = 3{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm^{-1} Ohm^{-1} bei 40000 Volt/cm gemessen. Die Einwirkung von 8000 Volt auf das Dielektrikum hatte keine Änderung der D.-K. zur Folge.

Diskussion der Meßergebnisse.

Debye (7)[1]) leitet im Verlauf seiner kinetischen Theorie der Dielektrika für die Änderung der D.-K. eines flüssigen Mediums folgende Beziehung ab:

$$\Delta \varepsilon = \frac{4\pi}{27} (\varepsilon + 2)^4 N (\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3) \mathfrak{E}^2,$$

wobei $\Delta \varepsilon$ die fragliche Änderung, ε die D.-K., N die Anzahl Moleküle pro ccm und $\mathfrak{E}$ die absolut gemessene Feldstärke bedeuten. Die Größen Θ_1 und Θ_2 kennzeichnen die Konfiguration der Ladungen im Molekül. Insbesondere charakterisiert Θ_1 den Einfluß des Feldes auf die Polarisationselektronen und die dadurch vermittelte Änderung der D.-K. Für Dipolsubstanzen speziell trägt die Größe Θ_2 noch der Wirkung der Momenteneinstellung auf die Gesamtanordnung der Ladungen Rechnung. Θ_3 schließlich repräsentiert ebenfalls beim Vorhandensein von Dipolen den Einfluß der dem schwingenden Meßfeld folgenden Moleküle mit Momentencharakter auf die D.-K.-Änderung, sofern die Frequenz $n < 10^9$ sec^{-1}. Die Größen Θ_1 und Θ_2 kehren in analoger Bedeutung beim Kerreffekt wieder, lediglich modifiziert für die Verhältnisse der optischen Frequenzen, d. h., sie sind dann ausgesprochen frequenzabhängig und vereinigen die bisweilen verschieden gerichteten Einflüsse der optischen Schwingungen und des statischen Feldes auf die Ladungsstruktur und damit auf die elektrische Doppelbrechung in sich.

Auf Grund der angeführten Beziehung wäre zunächst zu erwarten, daß die Änderung der

1) S. 780.



D.-K. quadratisch mit der Feldstärke ansteigt. Die Meßergebnisse sowohl an Äthyläther als auch an Chloroform zeigen im Gegensatz hierzu von etwa 5000 Volt (auf 0,205 cm) an eine deutliche Abweichung von einer Linearität mit E^2

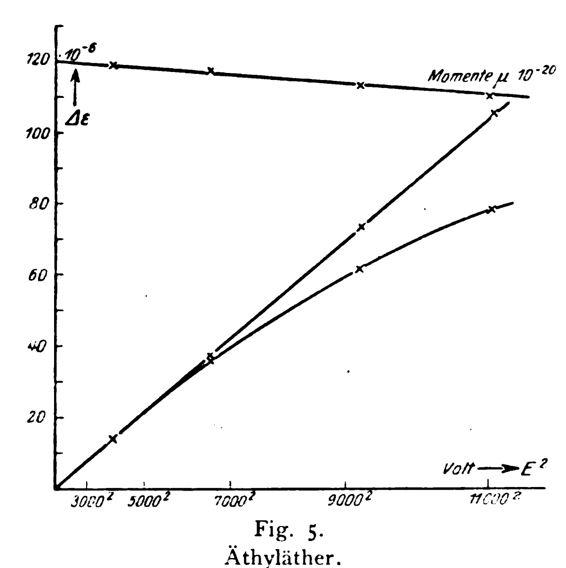


Fig. 5.
Äthyläther.

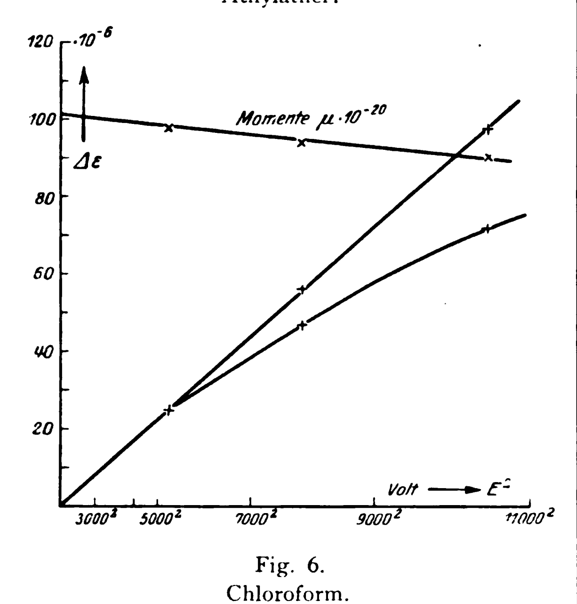


Fig. 6.
Chloroform.

(Fig. 5 und 6) und stellen vielmehr Kurven dar, die auf eine Sättigung hinweisen. Solche Sättigungserscheinungen sieht die Debyesche Theorie auch vor, und dementsprechend gilt die erwähnte Formel nur als erste Näherung. Um aus der Theorie auf die für Sättigungserscheinungen in Betracht kommenden Feldstärken schließen zu können, müßte eine weitere Näherung des Ausdruckes für die Änderung der D.-K. angesetzt werden. Empirisch lassen sich die gefundenen Werte $\Delta\varepsilon$ aus den linearen Werten $\Delta\varepsilon'$, (die man durch Extrapolation aus den $\Delta\varepsilon$ für kleine Feldstärken erhält), innerhalb des beobachteten Bereiches mit einiger Annäherung darstellen gemäß der Formel: $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon' \cdot (1 - CE^2)$, wo für Äthyläther $C = 2\cdot10^{-9}$, für Chloroform $C = 2{,}47\cdot10^{-9}$ ist. In den folgenden Tabellen werden die durch diese Beziehung aus den extrapolierten Werten $\Delta\varepsilon'$ berechneten Änderungen $\Delta\varepsilon$ den beobachteten Werten gegenübergestellt.

Äther

Linearwerte	berechnet	beobachtet
$\Delta\varepsilon_2' = 37{,}7\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_2 = 34{,}4\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_2 = 35{,}9\cdot10^{-6}$
$\Delta\varepsilon_3' = 74{,}3\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_3 = 61{,}7\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_3 = 62{,}2\cdot10^{-6}$
$\Delta\varepsilon_4' = 106{,}2\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_4 = 80{,}5\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_4 = 79{,}4\cdot10^{-6}$

Chlorform

Linearwerte	berechnet	beobachtet
$\Delta\varepsilon_2' = 55{,}5\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_2 = 46{,}8\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_2 = 46{,}8\cdot10^{-6}$
$\Delta\varepsilon_3' = 98{,}0\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_3 = 71{,}0\cdot10^{-6}$	$\Delta\varepsilon_3 = 71{,}8\cdot10^{-6}$

Da mit Rücksicht auf theoretische Folgerungen aus dem Sättigungscharakter der erhaltenen Kurven die Spannungsmessungen sorgfältig kontrolliert wurden, und da sich bei den Nacheichungen mit bewährten Präzisionsinstrumenten in betriebsmäßigem Zustande der Anordnung im Mittel nur Abweichungen von etwa 1 Proz. für die fraglichen Werte ergaben, können die beobachteten Differenzen der D.-K.-Änderungen mit den Linearwerten keinesfalls auf fehlerhaft angesetzte Spannungsbeträge zurückgeführt werden. Eine jede andere Fehlerquelle würde sich jedoch in ähnlichen Beträgen bei den Versuchen mit Benzol, Hexan und Schwefelkohlenstoff ausgewirkt haben, da während der endgültigen Messungen keine Veränderungen an der Anordnung vorgenommen wurden.

Zur Berechnung des molekularen Moments aus der Debyeschen Formel für die Änderung der D.-K. durch statische Felder können unter gewissen Voraussetzungen die Größen Θ_1 und Θ_2 unterdrückt werden, nämlich dann, wenn die betreffende Flüssigkeit eine nur kleine Kerrkonstante aufweist, d. h. wenn Ke etwa dem Betrage $1\cdot10^{-12}\left(\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{erg}}\right)$ nahekommt oder kleiner ist. Dabei ist nach Debye $Ke = B\frac{\lambda}{n_0}$, wo B die gebräuchliche Kerrkonstante, λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes im untersuchten Medium und n_0 der Brechungsindex des unbeeinflußten Materials ist. Gestattet man sich diese Vernachlässigung von Θ_1 und Θ_2 so erhält man für das Moment die Beziehung:



$$\mu = \sqrt[4]{\frac{27\cdot45\cdot k^3\,T^3\,\Delta\varepsilon}{4\pi(\varepsilon+2)^4 N \mathfrak{E}^2}},$$

dabei ist die Definition der Größe Θ_3 benutzt. Es ist

$$\Theta_3 = \frac{1}{45} \frac{\mu^4}{k^3 T^3}.$$

Hierbei bedeutet außer den bereits angegebenen Bezeichnungen das Zeichen k die Plancksche Zahl $= 1{,}346 \cdot 10^{-16}$.

Nach dieser Formel berechnete bereits Herweg das Moment des Äthyläthers aus ähnlichen Kapazitätsmessungen wie die vorliegenden, und es ist zu bemerken, daß sich dabei nur geringfügige Abweichungen von einer strengeren Berechnung ergeben. Im folgenden soll nun der Einfluß der „quasioptischen" Glieder Θ_1 und Θ_2 mit berücksichtigt werden. Sollten diese Größen exakt bestimmt werden, so hätte man die geschilderten Versuche zu wiederholen bei einer Frequenz $n \sim 10^9$ unter der Voraussetzung, daß von $n \sim 10^9$ sec^{-1} ab mit fallenden Frequenzen die Werte Θ_1 und Θ_2 konstant bleiben, d. h. keine Dispersion mehr aufweisen. Θ_3 verschwindet für Frequenzen $> 10^9$. Macht man nun die Annahme, daß der Kerreffekt vom optischen Spektralgebiet aus über das Ultrarot stetig übergeht in den dielektrischen Effekt für langsame elektrische Schwingungen, was mit der Annahme einer stetigen und geringen Dispersion der Kerrkonstanten jenseits des langwelligen Lichts zusammenfällt, so kann man die Werte $(\Theta_1 + \Theta_2)$ für langsame elektrische Schwingungen aus der Kerrkonstanten für rotes Licht mit einiger Annäherung extrapolieren. Dazu setzt man in der Formel für den Kerreffekt das Quadrat des Brechungsindex gleich der D.-K. der betreffenden Flüssigkeit und für die oben definierte Kerrkonstante Ke den für rotes Licht geltenden Wert. Dadurch wird die Debyesche Beziehung für die elektrische Doppelbrechung, nämlich der Ausdruck:

$$\frac{(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2)}{4 n_0^2} \cdot \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon + 2}{3}\right)^2 = Ke,$$

wo

$$\gamma = \frac{3}{4\pi N_0} \cdot \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}$$

und n_0 = Brechungsindex, umgewandelt in die Annäherungsformel für ultrarote Schwingungen

$$Ke\,(\text{rot}) = \frac{\pi \cdot N_0 (\varepsilon + 2)^4 (\Theta_1 + \Theta_2)}{27\,\varepsilon}$$

und also

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \frac{27 \cdot \varepsilon \cdot Ke\,(\text{rot})}{\pi N_0 (\varepsilon + 2)^4}.$$

Die hierdurch erhaltenen Werte für $(\Theta_1 + \Theta_2)$ werden im allgemeinen etwas zu groß ausfallen, da sich die Dispersion von Ke auch noch über das Ultrarot erstreckt; sie geben indes mit einiger Sicherheit an, ob dieser Beitrag zur Änderung der D.-K. im statischen Feld merklich ist oder nicht.

Nach den Angaben von Leiser (8) ist für Äthyläther $100 \frac{B}{B_0} = -20{,}5$, wo B_0 der Kerrkoeffizient für Schwefelkohlenstoff als Bezugseinheit ist. Setzt man für B_0 den Wert von Chaumont: $+3{,}226 \cdot 10^{-7}$, so folgt für $\lambda = 700\,\mu\mu$ und $n_0 = 1{,}36$ der Wert Ke (Äther) $= -3{,}4 \cdot 10^{-12}$. Weiter hat man noch N_0 = Anzahl Moleküle pro ccm zu berechnen; es ist $N_0 = \frac{L \cdot s}{m}$, wo L (Loschmidtsche Zahl) $= 6{,}175 \cdot 10^{23}$ Moleküle pro Grammol und speziell für Äthyläther: s (Dichte) $= 0{,}717$, m (Molekulargewicht) $= 74{,}1$ ist. Damit ergibt sich $N_0 = 5{,}98 \cdot 10^{21}$.

Folglich wird $\Theta_1 + \Theta_2 = -0{,}131 \cdot 10^{-34}$.

Andererseits folgt aus der am Anfang dieses Abschnittes angegebenen Formel für die Änderung der D.-K. die Beziehung:

$$(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3) = \frac{27 \cdot \Delta\varepsilon}{4\pi (\varepsilon + 2)^4 \cdot N \cdot \mathfrak{E}^2},$$

wo $\mathfrak{E}$ absolut einzusetzen ist.

Aus den $\Delta\varepsilon$ für die einzelnen Feldstärken folgt:

$(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3)_{\text{I}} = -7{,}341 \cdot 10^{-34}$ ($E_1 = 4000$ V.)
$(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3)_{\text{II}} = -7{,}001 \cdot 10^{-34}$ ($E_2 = 6550$ V.)
$(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3)_{\text{III}} = -6{,}150 \cdot 10^{-34}$ ($E_3 = 9200$ V.)
$(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3)_{\text{IV}} = -5{,}490 \cdot 10^{-34}$ ($E_4 = 11000$ V.)

Entsprechend ergibt sich hieraus:

$$\Theta_3^{\text{I}} = 7{,}210 \cdot 10^{-34}$$
$$\Theta_3^{\text{II}} = 6{,}870 \cdot 10^{-34}$$
$$\Theta_3^{\text{III}} = 6{,}019 \cdot 10^{-34}$$
$$\Theta_3^{\text{IV}} = 5{,}359 \cdot 10^{-34}.$$

Gemäß der Beziehung $\mu = \sqrt[4]{45 \cdot k^3 T^3 \Theta_3}$ berechnen sich mit $T = 294$ als Momentwerte die Zahlen:

$$\mu_1 = 11{,}90 \cdot 10^{-19}$$
$$\mu_2 = 11{,}77 \cdot 10^{-19}$$
$$\mu_3 = 11{,}38 \cdot 10^{-19}$$
$$\mu_4 = 11{,}06 \cdot 10^{-19}$$

Da das Moment eines Moleküls als konstant angesehen wird, so wird die Variation der gefundenen Werte vorgetäuscht durch die allmählich gesteigerte Sättigungserscheinung. Der Unterschied der gefundenen Werte beträgt im Maximum 8 Proz., während die Herwegschen Werte nur etwa um 4 Proz. voneinander abweichen, ohne einen so ausgesprochenen Gang mit der Feldstärke aufzuweisen, wie es bei den vorliegenden Werten der Fall ist. Letztere verlaufen im Beobachtungsbereich annähernd linear mit E^2. Daraufhin kann man extrapolieren auf μ_0 für

$E = 0$; es folgt dann $\mu_0 = 12{,}02 \cdot 10^{-19}$, dabei ist noch zu bemerken, daß dieser Wert als etwas zu klein angesehen werden muß, wegen der Dispersion von $(\Theta_1 + \Theta_2)$ im Ultrarot. Man kann schließlich innerhalb des beobachteten Bereiches noch ansetzen

$$\mu_i = \mu_0 \left(1 - C E_i^2\right) \quad \text{wo} \quad C = 6{,}2 \cdot 10^{-10}.$$

Zum Vergleich werde angeführt, daß unter Vernachlässigung der „quasioptischen" Glieder sich μ_0 zu $12{,}07 \cdot 10^{-19}$ [1]) ergibt, verzichtet man außerdem noch auf die Herwegsche Korrektion, so wird $\mu_0 = 12{,}53 \cdot 10^{-19}$.

Debye führt bei der Erläuterung der Gleichung für die Änderung der D.-K. an, daß sich noch eine Korrektion bezüglich der Zahl N infolge des Einflusses der Elektrostriktion nötig mache. Nach seiner Bezeichnung ist:

$$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{\delta k}{\delta p} \cdot \frac{\mathfrak{E}^2}{2} \quad \text{oder} \quad = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{\delta p}$$

wo ΔN die Änderung der Anzahl der Moleküle pro ccm infolge der Elektrostriktion ist, und $\frac{\delta \varepsilon}{\delta p}$ die Druckabhängigkeit der D.-K. kennzeichnet. Es wird demnach

$$N = N_0 + \Delta N = N_0 \left(1 + \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{\delta p}\right).$$

Nach Grenacher (9) ist für Äthyläther:

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{\delta p} = 2{,}19 \cdot 10^{-4}\,[\text{Atm.}]^{-1}.$$

Demzufolge ergibt sich $N = N_0(1 + 1{,}177 \cdot 10^{-6})$, wonach der Einfluß der Elektrostriktion zu vernachlässigen ist. $\mathfrak{E}$ entspricht bei dieser Berechnung der höchsten angewandten Spannung $E = 11\,000$ Volt.

Ganz analoge Betrachtungen ergeben sich für Chloroform. Für $(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3)$ findet man

(bei $E_1 = 5250$ Volt) : $-3{,}559 \cdot 10^{-34}$
(bei $E_2 = 7900$ Volt) : $-3{,}002 \cdot 10^{-34}$
(bei $E_3 = 10500$ Volt) : $-2{,}607 \cdot 10^{-34}$.

Dabei ist in der betreffenden Formel $N = 7{,}724 \cdot 10^{21}$ zu setzen. Nimmt man für $Ke = -13 \cdot 10^{-12}$ an (nach Debye in Marx, Handbuch der Radiologie VI, S. 770), so ergibt sich mit $\lambda = 700\,\mu\mu$, $n_0 = 1{,}45$ für $\Theta_1 + \Theta_2$ der Betrag $-0{,}284 \cdot 10^{-34}$. Hiernach berechnen sich im selben Sinne wie bei Äthyläther:

$$\Theta_3^{I} = 3{,}275 \cdot 10^{-34}$$
$$\Theta_3^{II} = 2{,}718 \cdot 10^{-34}$$
$$\Theta_3^{III} = 2{,}323 \cdot 10^{-34}$$

Für das Moment folgen die entsprechenden Werte:

$\mu_1 = 9{,}80 \cdot 10^{-19}$, $\mu_2 = 9{,}36 \cdot 10^{-19}$, $\mu_3 = 8{,}99 \cdot 10^{-19}$ (dabei wird in der Berechnung $T = 295$ eingesetzt).

Extrapolation auf $E = 0$ ergibt

$$\underline{\mu_0 = 10{,}07 \cdot 10^{-19}}.$$

Aus demselben Grunde wie bei Äthyläther ist auch dieser Wert als etwas unterhalb des wirklichen liegend anzusehen[1]). Sänger (Arch. sc. phys. et nat. (5) 8, 273, 1926 Sept.-Okt., C. R. Soc. suisse de phys. Fribourg 1926) findet aus der Temperaturabhängigkeit der D.-K. von Chloroformdampf den Wert $\mu = 9{,}5 \cdot 10^{-19}$. Aus Beobachtungen an verdünnten Lösungen von Chloroform in Benzol und in Tetrachlorkohlenstoff schließt Williams (Williams and Krehma J. Amer. Chem. Soc. **49**, 1676, 2408, 1927) auf die Werte $11{,}0 \cdot 10^{-19}$, bzw. $11{,}5 \cdot 10^{-19}$. Annähernd besteht auch diesmal im Beobachtungsbereich $\mu_i = \mu_0\left(1 - C E_i^2\right)$, wo $C = 1 \cdot 10^{-9}$. Rechnet man nach der von Herweg benutzten Formel, so kommt $\mu_0 = 10{,}26 \cdot 10^{-19}$. Unterdrückt man die Herwegsche Korrektion für die adiabatische Erwärmung, so wird $\mu_0 = 10{,}71 \cdot 10^{-19}$. Die Elektrostriktion ist in analoger Größenordnung wie bei Äthyläther vernachlässigbar.

Chlorbenzol stellt einen Fall dar, bei welchem die „quasioptischen" Glieder eine merkliche Rolle spielen für das Zustandekommen der D.-K.-Änderung. Nach den Arbeiten von Leiser (8) ist für Chlorbenzol (rotes Licht) $100\,\frac{B}{B_0} = +385$, wobei B_0 wieder $= +3{,}226 \cdot 10^{-7}$ gesetzt werden soll. Für $\lambda = 700\,\mu\mu$ und $n_0 = 1{,}5$ ergibt sich Ke zu $+57{,}96 \cdot 10^{-12}$. Zur Auswertung von $(\Theta_1 + \Theta_2)$ ist jetzt N_0 mit $6{,}082 \cdot 10^{21}$ anzusetzen, mit $\varepsilon = 5{,}86$[2]) bekommt man:

$$(\Theta_1 + \Theta_2) = +12{,}576 \cdot 10^{-35},$$

während sich aus der Änderung der D.-K. der Wert

$$(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3) = -6{,}237 \cdot 10^{-35}$$

ergibt für $E = 10\,500$ Volt. Da in diesem Falle der Einfluß von $(\Theta_1 + \Theta_2)$ auf die Änderung von ε entgegengesetzt ist dem von Θ_3, so folgt: $\Theta_3 = 18{,}813 \cdot 10^{-35}$ und hieraus weiter mit $T = 293{,}5$ der Wert

$$\underline{\mu = 8{,}50 \cdot 10^{-19}}.$$

Da wegen der Dispersion des Kerreffekts im Ultrarot der Wert $(\Theta_1 + \Theta_2)$ wieder zu groß

---

1) Der entsprechende Herwegsche Wert ist $\mu = 12{,}00 \cdot 10^{-19}$.

1) Für Chloroform wurden bisher noch keine Momentenbestimmungen auf Grund der Spannungsabhängigkeit der D.-K. ausgeführt.

2) In Abweichung zu Landolt-Börnstein.

angesetzt ist, erscheint das berechnete Moment μ wegen der entgegengesetzten Wirkung von $(\Theta_1 + \Theta_2)$ und Θ_3 jetzt als etwas zu groß[1]). Höjendahl (10) findet aus Beobachtungen von Temperatur- und Konzentrationsabhängigkeit der D.-K. an Benzolgemischen und Extrapolation auf ∞ große Verdünnung den Wert $\mu = 15{,}8 \cdot 10^{-19}$, Williams, loc. cit. den Wert $\mu = 15{,}5 \cdot 10^{-19}$. Ohne Berücksichtigung der Größe $(\Theta_1 + \Theta_2)$ würde man erhalten:

$$\mu = 6{,}45 \cdot 10^{-19};$$

läßt man außerdem noch die Herwegsche Korrektion beiseite, so wird $\mu = 7{,}29 \cdot 10^{-19}$.

Zu den Beobachtungen an Schwefelkohlenstoff ist anzuführen, daß die Änderung der D.-K. lediglich als Wirkung der Polarisationselektronen zustandekommt. In diesem Falle kann man umgekehrt wie bisher aus der Änderung von ε durch das statische Feld auf die Größe der Kerrkonstanten für lange elektrische Wellen bzw. für das ultrarote Gebiet schließen. Aus der Debyeschen Formel für den dielektrischen Effekt ergibt sich bei Einsetzen von $N = 1{,}026 \cdot 10^{22}$ und $E = 10\,500$ Volt: $\Theta_1 = \Theta = +\ 5{,}178 \cdot 10^{-35}$, dabei ist also jetzt $\Theta_2 = \Theta_3 = 0$, weil keine Dipole vorhanden sind. Führt man diesen Wert in die Formel für den Kerreffekt (mit $n_0^2 = \varepsilon$) ein, so folgt $Ke_\infty = +\ 10{,}752 \cdot 10^{-12}$. Es kann in diesem Fall einfach gesetzt werden

$$Ke = \frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon\mathfrak{E}^2}, \text{ wobei } \mathfrak{E}\,(\text{abs.}) = \frac{10\,500 \text{ Volt}}{300 \cdot 0{,}205 \text{ cm}}.$$

Berechnet man aus den Werten B, welche Lyon (Ann. d. Phys. **4**, 46, 764, 1915) in seiner Arbeit über die Dispersion des Kerreffekts für Schwefelkohlenstoff angibt, die entsprechenden Werte Ke nach der Definition von Debye, so erhält man die Kurve der Fig. 7. Daraus ergibt sich, daß der nach den vorliegenden Messungen aus der D.-K.-Änderung infolge eines äußeren Feldes bestimmte Wert

$$Ke_\infty = +\ 10{,}752 \cdot 10^{-12} \left(\frac{cm^3}{erg}\right)$$

zwanglos in die Dispersionskurve eingefügt werden kann oder zumindest einen im Bereiche der möglichen Werte liegenden Betrag darstellt.

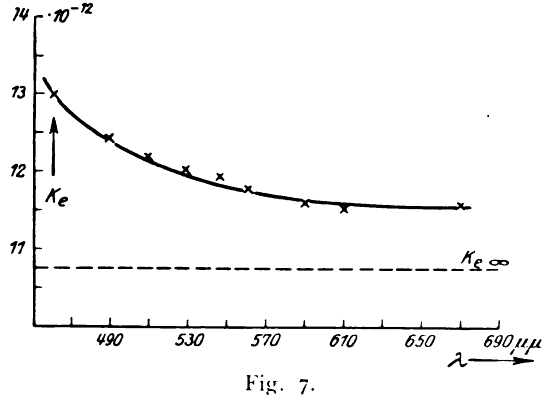


Fig. 7.
Dispersion des Schwefelkohlenstoffs nach N. Lyon.

1) Auch für Chlorbenzol wurde in der vorliegenden Arbeit erstmalig das Moment aus der Spannungsabhängigkeit der D.-K. berechnet.

Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß für Benzol zunächst einmal der adiabatische quadratische elektrokalorische Effekt unmerklich bleibt. Die Herwegsche Korrektionsformel gibt für diesen Fall eine Änderung der D.-K.: $[\Delta\varepsilon]_{ad} = 0{,}151 \cdot 10^{-6}$ an, bei 10 500 Volt auf 0,205 cm, was weit unterhalb der Beobachtbarkeit liegt. Wegen der Kleinheit des Kerreffekts bleibt andrerseits die Einwirkung des Feldes auf die Polarisationselektronen und damit auf die D.-K. ebenfalls jenseits der Meßgrenze. Dasselbe gilt auch für die Versuche mit Hexan.

Zusammenfassung.

Aus der Änderung der Dielektrizitätskonstanten durch elektrostatische Felder wurden unter dem Gesichtspunkt der Debyeschen kinetischen Theorie der Dielektrika die molekularen Momente von Äthyläther, Chloroform und Chlorbenzol bestimmt.

Bei Äthyläther und Chloroform wurden Sättigungserscheinungen für die durch äußere Felder erzeugten Änderungen der Dielektrizitätskonstanten festgestellt. Mit Berücksichtigung der scheinbaren Spannungsabhängigkeit der Dipolmomente wurde für die auf die Spannung $E = 0$ extrapolierten Momente gefunden:

$$\mu_0\,(\text{Äthyläther}) = 12{,}02 \cdot 10^{-19}$$
$$\mu_0\,(\text{Chloroform}) = 10{,}07 \cdot 10^{-19}.$$

Das Dipolmoment von Chlorbenzol ergab sich zu $\mu = 8{,}50 \cdot 10^{-19}$.

Herweg fand aus analogen Versuchen für Äthyläther $\mu = 12{,}00 \cdot 10^{-19}$. Für Chloroform und Chlorbenzol wurden bisher noch keine entsprechenden Messungen ausgeführt. Nach dem Herwegschen Ansatz folgt aus den vorliegenden Messungen:

$$\mu_0 = 12{,}07 \cdot 10^{-19} \text{ für Äthyläther,}$$
$$\mu_0 = 10{,}26 \cdot 10^{-19} \text{ für Chloroform,}$$
$$\mu_0 = 6{,}45 \cdot 10^{-19} \text{ für Chlorbenzol.}$$

Aus der Spannungsabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Schwefelkohlenstoff wurde der der Kerrkonstanten für langsame elektrische Schwingungen entsprechende Wert

$$Ke_\infty = +\ 10{,}75 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\text{cm}^3}{\text{erg}}\right)$$

berechnet. Dieser Wert paßt in die Dispersions-

kurve der Kerrkonstanten unter Bezugnahme auf die Beobachtungen von Lyon im Gebiet der optischen Schwingungen.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten, unvergeßlichen Lehrer Otto Wiener herzliche Worte des Dankes widmen. Der Verstorbene zeigte jederzeit großes Verständnis für die experimentellen Schwierigkeiten der gestellten Aufgabe und erwies sich stets bereit zu diesbezüglichen Erörterungen und Ratschlägen. Als zielbewußter Förderer meiner Bestrebungen und williger Helfer bei persönlichen Anliegen wird er mir in der Erinnerung immer ein wohlwollender Freund und Führer bleiben.

Weiterhin möchte ich nicht versäumen, auch Herrn Prof. Dr. A. Karolus zu danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für das Interesse, das er dem Verlauf der Untersuchungen entgegenbrachte.

Literatur.

1) Ratnowsky, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 497ff., 1913.
2) Herweg, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 572—577, 1919; Zeitschr. f. Phys. **3**, 36—47, 1920; Physik. Zeitschr. **21**, 572—576, 1920; Herweg-Poetzsch, Zeitschr. f. Phys. **8**, 1—12, 1921.
3) Falckenberg, Ann. d. Phys. (4), **61**, 167—172, 1920.
4) John J. Dowling, Proc. Dublin Soc. (N. S.) **16**, Nr. 7, S. 175—184, 1921.
5) Ch. Francke, Ann. d. Phys. (4) **72**, Nr. 10, S. 159—182, 1925.
6) Grüneisen u. Merckel, Zeitschr. f. Phys. **2**, 296, 1920.
7) Debye, im Handb. d. Radiologie VI von Marx, 597ff.
8) Leiser, Abh. d. D. Bunsen-Ges. 1910.
9) Grenacher, Ann. d. Phys. (4), **72**, Nr. 10, S. 138, 1925.
10) Höjendahl, Nature 117, 892, Nr. 2956, 1926.

(Eingegangen 2. Januar 1928.)

Die Verlagerung der Reststrahlen ins sichtbare Spektralgebiet[1]).

Von Georg Joos.

Während wir für das Zustandekommen der Spektren der Atome und Moleküle im gasförmigen Aggregatzustand Vorstellungen besitzen, welche diese Spektren bis in die feinsten Einzelheiten wiederzugeben vermögen, sind die Absorptions- und Emissionsspektren von Kristallen, deren Linien bei tiefen Temperaturen denen der Gasspektren an Schärfe kaum nachstehen, theoretisch noch sehr wenig behandelt worden.

1) Vortrag auf der Tagung des Gauvereins Sachsen-Thüringen-Schlesien in Halle am 7. Januar 1928.

Wenn man, wie es P. Ehrenfest[1]) getan hat, die Grundpostulate der Bohrschen Theorie auf die Kristallspektren überträgt, kommt man zu einer weitgehenden formalen Analogie mit der Theorie der Bandenspektren. Aus diesen noch ziemlich primitiven Ansätzen, die noch einer quantenmechanischen Vertiefung bedürfen, läßt sich eine für die Untersuchung der Reststrahlen nützliche Folgerung ziehen:

Bei den Molekülspektren besteht bekanntlich die in einem Elementarakt umgesetzte Energie $h\nu$ aus drei größenordnungsmäßig verschiedenen Anteilen, dem Elektronensprung, dem Sprung des intramolekularen Schwingungszustands und dem Sprung des Rotationszustands der Molekel. Ist der letzte, kleinste Anteil allein vorhanden, so fällt das emittierte Licht in das ferne U. R. in die Gegend von $100\,\mu$, also in ein für die experimentelle Untersuchung ungünstiges Spektralgebiet. Aus diesem Grund sind die reinen Rotationsspektren bisher noch wenig erforscht. Wenn wir trotzdem heute über die Daten des Rotationszustands der Molekeln sehr gut Bescheid wissen, so wurde diese Kenntnis in erster Linie durch die Analyse der sichtbaren und ultravioletten Banden gewonnen, bei deren Emission noch eine Änderung der beiden andern Teilbeträge stattfindet.

Diese Überlegungen lassen sich auf die Gitterschwingungen von Kristallen übertragen. Die Gitterschwingungen bewirken, wenigstens bei Ionengittern, die Emission bzw. Absorption einer ungefähr ins gleiche Spektralgebiet wie die Rotationsbanden fallenden Strahlung, der sogenannten Reststrahlen. Überlagern wir nun den Reststrahlen einen Elektronensprung, so rückt die ganze Erscheinung in das der Messung viel zugänglichere Spektralgebiet. Leider läßt sich dieser Gedanke gerade auf die einfachsten Kristalle, die Alkalihalogenide, nicht anwenden, und zwar aus folgendem Grund: In diesen Salzen setzt die Absorption des Anions bei viel kürzeren Wellenlängen ein als die des Kations. Die Absorption des Anions ist aber kontinuierlich, denn negative Ionen besitzen nach allem, was wir heute wissen, kein Linienspektrum, sondern nur ein Grenzkontinuum. Wir müssen also Umschau halten nach einem Salz, dessen Kationen in einem der Beobachtung gut zugänglichen Gebiet, wo andererseits die Anionen durchsichtig sind, absorbieren. Damit kommt man zwangsweise auf die Salze der Übergangselemente *Sc* bis *Cu* und ihre Homologe sowie auf die seltenen Erden. Es wäre aber eine Täuschung, wenn man als Träger der Farbe die freien Ionen annehmen

1) P. Ehrenfest, Kamerlingh-Onnes-Festschrift S. 362. Leiden 1922.



würde. Je weiter nämlich die Erforschung der höheren Funkenspektren vordringt, um so mehr Beweise treten zutage für die vom Verf.[1]) vor längerer Zeit der üblichen Auffassung entgegengesetzte Behauptung, daß die Träger der Farbe dieser Salze (und auch des Magnetismus) in Wirklichkeit durch völlige Umordnung und nicht durch stetige Deformation der Elektronenhüllen gebildete Komplexe sind, deren Farbe mit der der freien Ionen so wenig zu tun hat wie die Farbe des Jodmoleküls mit der des Jodatoms. So fällt nach der neuerdings von H. N. Russell und G. Lang[2]) durchgeführten Analyse des zweiten und dritten Funkenspektrums von Titan die Absorption von Ti^{++} nach 1300 A. E., diejenige von Ti^{3+} nach 780 A. E. im Gegensatz zu der tiefen Farbe der Ti-Salze im festen Zustand und in Lösung.

Die Notwendigkeit zu komplexen Kationen greifen zu müssen, bringt eine neue Mannigfaltigkeit herein. Wie bei den Gasmolekülen sind jetzt auch noch Oszillationen der Bestandteile des Komplexes zu erwarten, deren Frequenz von der Größenordnung der intramolekularen Oszillationen sein muß. Wir erhalten dann für die Kristalle ein den Bandenspektren sehr ähnliches Niveauschema: Über die Energiestufen der Elektronenzustände lagern sich wie bei den Molekülen die Stufen der intramolekularen Eigenschwingungen und über diese statt der im Gitterverband natürlich ausgeschlossenen Rotationsstufen die Stufen der Gitterschwingungen. Solange wir die Bindungen als rein harmonisch ansehen, sind die Stufen der intramolekularen Schwingungen und der Gitterschwingungen äquidistant in den Abständen $h\nu_{\text{osz.}}$ und $h\nu_{\text{Gitter}}$. Nach dem Korrespondenzprinzip dürften dann nur Quantensprünge um eine Einheit vorkommen. Die in Wirklichkeit stets unharmonische Bindung bewirkt indes einen Gang in den Abständen und vor allem das Vorkommen von Quantensprüngen um mehr als eine Einheit.

Wellenzahlendifferenzen, welche ihrer Größenordnung nach zu den intramolekularen Schwingungen gehören, sind bei den Absorptions- und Fluoreszenzspektren der Uranyldoppelsalze gefunden[3]) und auch von Ehrenfest in diesem Sinn gedeutet worden. Dagegen sind von Wellenzahldifferenzen, welche auf die Gitterschwingungen hinweisen, keine sicheren Anzeichen gefunden worden. Bei Aufnahmen der Absorptionsspektren von Chromkaliumselenatkristallen und homologer Chromdoppelsalze vom Alauntyp, welche im Jenaer Institut auf Veranlassung des Verf. von Herrn Sauer aufgenommen wurden und über die dieser an anderer Stelle ausführlich berichten wird, fanden sich Linienfolgen bis zu 11 Gliedern mit einem nahezu konstanten Abstand von 43 cm^{-1}. Deutet man diese Linienfolgen durch die Überlagerung der Gitterschwingungen auf einen Elektronen- und vielleicht auch einen Molekülschwingungssprung, so kommt man zu einer Reststrahlwellenlänge von 1/43 cm oder 232 μ. Leider liegen für diese Salze noch keine direkten Messungen der Reststrahlwellenlängen und keine zur Berechnung ausreichenden Angaben über die elastischen Eigenschaften vor, so daß ein Vergleich nicht möglich ist. Die Größenordnung paßt jedenfalls sehr gut zu dem, was bei der Schwere der Gitterbestandteile und der verhältnismäßig losen Bindung zu erwarten ist. Eine andere Folge von engen Dubletts im Abstand von 300 ν-Einheiten dürfte ihre Ursache in intramolekularen Schwingungen haben, deren Träger der Komplex $[Cr(H_2O)_{12}]^{+++}$ ist. Die Trennung der Schwingungen in solche der Gitterbestandteile als Ganzen und „inneren" Schwingungen der Komplexionen ist hier aus dem Grund berechtigt, weil die stärkste Linie — allerdings sehr verwaschen — auch noch in der wässerigen Lösung vorhanden ist, wo zwar noch intramolekulare, aber keine Gitterschwingungen mehr vorhanden sind.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, Januar 1928.

(Eingegangen 25. Januar 1928.)

1) G. Joos, Ann. d. Phys. **81**, 1076, 1926.
2) H. N. Russell u. G. Lang, Astrophys. Journ. **66**, 13, 1927.
3) L. Nichols u. H. L. Howes, Phys. Rev. **11**, 285, 305, 1918; L. Nichols u. E. Merritt, Phys. Rev. **9**, 113, 1917.

Bemerkung zu der Arbeit: F. Ahlborn, Die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen und die Wirklichkeit.

Von L. Prandtl.

Herr F. Ahlborn, dem man die Durchbildung mehrerer Methoden zur Herstellung von schönen Stromlinienbildern der Wasserbewegung verdankt, hat in einem kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz[1]) seine Anschauungen über das Zustandekommen der Wirbel dargelegt und sich mit den Auffassungen von Helmholtz, Lord Kelvin, Lanchester und mir auseinandergesetzt. Ich kann seinen Ausführungen nur zum Teil folgen und möchte die Leser dieser Zeitschrift auf eine sehr ausführliche Diskussion dieses Gegenstandes in dem in Kürze erscheinenden Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt hinweisen, wo ich meine Anschauung eingehend dargelegt habe. Weiter erlaube

1) Diese Zeitschrift **1**, 34, 1928.



ich mir, darauf hinzuweisen, daß eine systematische Darstellung des ganzen hier in Frage kommenden Gebietes in einem Beitrag von mir zu dem Mechanikband des Physiklehrbuches Müller-Pouillet enthalten sein wird, der im Laufe dieses Jahres erscheinen wird. Ich erwähne hier nur, daß dort die Helmholtzsche Lehre von den Diskontinuitäten mit derjenigen von den Grenzschichten in schwach reibenden Flüssigkeiten so verschmolzen ist, daß die Übereinstimmung der Aussagen der Theorie mit den wirklich beobachteten Vorgängen sehr befriedigend geworden ist. Dabei ist man natürlich immer noch weit davon entfernt, die wirklichen Vorgänge in ihrem ganzen Verlauf rechnerisch zu verfolgen, so daß der Versuch bei der Erforschung der Vorgänge nicht entbehrt werden kann.

Göttingen, den 28. Januar 1928.

(Eingegangen 1. Februar 1928.)

BESPRECHUNGEN.

Mitteilungen aus dem Materialprüfungsamt und dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Metallforschung in Berlin-Dahlem. Sonderheft Nr. 11. Gr. 8°. 279 Seiten mit 316 Abbildungen. Berlin, Julius Springer. 1926. M. 24. —.

In diesem Sonderheft sind eine Reihe von Aufsätzen zusammengefaßt, die bereits an anderer Stelle abgedruckt waren. Bei der großen Fülle des hier gebotenen Stoffes ist es nicht möglich, die Ergebnisse der einzelnen Arbeiten eingehend wiederzugeben, es kann vielmehr nur auf die wichtigsten kurz hingewiesen werden. Die einzelnen Veröffentlichungen behandeln:

O. Bauer u. W. Heidenhain, Das Verhalten von Aluminium-Zink-Legierungen. Durch Ermittlung einiger physikalischer Eigenschaften wird versucht, eine Entscheidung zwischen den verschiedenen angegebenen Zustandsschaubildern zu erlangen. Der Verlauf der Kurven der Schwingung, der Schlagfestigkeit und des Korrosionswiderstandes schließen sich dem Bauer-Vogelschen Zustandsdiagramm gut an. Die Legierungen mit 0,75—83 Proz. *Al* arbeiten infolge allmählicher Aufspaltung der chemischen Verbindung Al_2Zn_3, was für den Spritz- und Fertigguß von Bedeutung ist.

O. Bauer u. O. Vollenbruck, Die Härte der Kupfer-Zinn-Legierungen. Die Brinellhärte erreicht einen Größtwert bei der der Verbindung Cu_4Sn entsprechenden Zusammensetzung. Nach Einstellung des Gefügegleichgewichtes ist die Härte durch Erhitzen oder Abschrecken nicht zu beeinflussen.

O. Bauer u. H. Arndt, Das Verhalten einiger Metalle und Legierungen gegenüber der Einwirkung von Plastilin und freiem Schwefel. Der Angriff durch Schwefel und schwefelhaltige Stoffe nimmt in der Reihenfolge: *Cu, Pb* ab und ist bei *Al, Sn, Zn, Mn* kaum oder überhaupt nicht zu bemerken. In Legierungen wirkt am günstigsten Zusatz von *Mn*, nächstdem von *Zn*, *Al* und *Sn*.

G. Sachs, Festigkeitsuntersuchungen an Zink. Es werden die Festigkeitseigenschaften von kaltverformtem *Zn* in Abhängigkeit vom Walzgrad, Versuchsdauer, Glühtemperatur und Orientierung untersucht. Bei kaltgewalztem und bei Raumtemperatur gelagertem *Zn* war keine Änderung der Festigkeit und auch keine Rekristallisation zu beobachten.

F. Saeftel u. G. Sachs, Festigkeitseigenschaften und Struktur einiger begrenzter Mischkristallreihen. Es werden die Festigkeitseigenschaften einiger binärer *Ag*-reicher Mischkristalle bestimmt. Aus ihnen und der Struktur ergeben sich dabei neue Erkenntnisse bezüglich der Mischkristallgrenzen. Ähnlichkeit im Zustandsschaubild hat ihr Analogon im mechanischen Verhalten. Durch Legierungszusätze, die in feste Lösung gehen, wird der Verformungswiderstand (und ähnlich auch der Trennungswiderstand) meist herauf-, die Formänderungsfähigkeit herabgesetzt, die Dehnung (die die Verfestigungsfähigkeit des Stoffes mißt) häufig erhöht.

E. Schiebold, Die Verfestigungsfrage vom Standpunkt der Röntgenforschung. Die Theorien der plastischen Formänderung und Verfestigung werden im wesentlichen von dem (dem Röntgenversuch allein zugänglichen) kristallstrukturellen Standpunkt aus beurteilt, der auf die Theorie der „Biegegleitung" führt, die allerdings noch eines weiteren Ausbaus bedarf (was auch bezüglich der Kenntnis des Zustandes der Grenzflächen längs der Gleitschichten gilt).

G. Sachs, Die Härtung der Metalle. Die Verfestigung durch Kaltverformung wird auf Gitterstörungen, Verkrümmungen der Gleitebenen oder Entstehung elastischer Spannungen zurückgeführt. Ebenso beruht die Härtung der Legierungen auf Verkrümmung der Gleitflächen durch den Eintritt von Atomen in das Gitter, die von den anderen Atomen in ihrer Größe oder ihrem Bau abweichen. Die Härtung durch Wärmebehandlung zeigt die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie die Verfestigung.

G. Sachs, Zur Analyse des Zerreißversuches. Aus der Diskussion der Spannungs-Querschnittskurve wird eine Reihe von Folgerungen abgeleitet.

E. Seidl u. E. Schiebold, Das Verhalten inhomogener Aluminium-Gußblöckchen beim Kaltwalzen. Die makroskopische, mikroskopische, röntgenographische und Festigkeits-Untersuchung des Verhaltens von *Al*-Gußblöcken mit verschieden geformten und gelagerten Kristallen beim Kaltwalzen zeigt, daß sich die Kristalle und Kristallteilchen einer durch den Walzvorgang und den kristallographischen Aufbau gegebenen Endlage (Walztextur) zu nähern suchen, daß das Gußgefüge von großem Einfluß auf die Weiterverarbeitung auf mechanischem Wege ist, und daß sich durch Wahl einer anderen Richtung die Bearbeitbarkeit eines Gußblockes verbessern läßt.

G. Sachs u. E. Schiebold, Wechselseitige Druckversuche an Aluminium. Durch das wechselseitige Stauchen von *Al*-Würfeln wird eine ständig wachsende Verfestigung erzielt, der Reflexionsunterschied zwischen den einzelnen Körnern verwischt und stellen sich die Gitterwürfel in drei gleichwertige Lagen ein.

M. Polanyi u. G. Sachs, Über Auslösen innerer Spannungen durch Glühen. Aus Beobachtungen der beim Glühen von kaltverdrilltem Elektrolytkupfer auftretenden Verformungen folgt, daß Temperaturen bis 100° kaum wirksam sind, und daß der Größtwert der Rückdrillung bei einer bestimmten vom Verformungsgrad abhängigen Temperatur eintritt.

M. Polanyi u. G. Sachs, Über elastische Hysteresis und innere Spannungen in gebogenen Steinsalzkristallen. Die Elastizitätsgrenze von geglühtem und von poliertem Steinsalz wird zu unter 200 bzw. 500 g/mm² ermittelt. Vor Eintritt des Bruches wird stets bleibende Formänderung, nach plastischer Durchbiegung elastische Hysteresis beobachtet. Durch Ablösen der Oberflächenschichten lassen sich innere Spannungen nachweisen.

E. Schiebold, Über graphische Auswertung von Röntgenphotogrammen. Es werden die Eigenschaften des Laue-Diagramms als „Reflexprojektion" diskutiert und gezeigt, wie dieses in Verbindung mit einem Reflexnetz zur Goniometrie des Kristalls mit Hilfe von Röntgenstrahlen verwendet werden kann. Weiter wird auf graphische Methoden beim Laue-, beim Drehkristall-, beim Debye-Scherrer-Verfahren und bei der Bestimmung von Kristallanordnungen eingegangen.

G. Sachs u. E. Schiebold, Über Gitterlagen in deformierten Metallkristallen und Kristallhaufwerken. An Kristallen und Kristallhaufwerken von *Al* werden die bisherigen Deformationstexturen nachgeprüft und einige neue festgestellt.

K. Weißenberg, Der Aufbau der Kristalle. I. Die Systematik der Symmetriegruppen von Punktlagen im Diskontinuum. II. Atomgruppen im Kristall und ihre physikalische Bedeutung. Im ersten Teil wird in großen Zügen eine erschöpfende Systematik der anisotropen homogenen Diskontinua (im wesentlichen nach Schoenflies) und ferner vom Standpunkt der Decktransformation des Diskontinuums eine vollständige Systematik der Gruppen von Symmetrieelementen entwickelt, die einen Punkt in sich überführen können, und mit ihrer Hilfe die Ergebnisse der röntgenographischen Strukturforschung diskutiert. Im zweiten Teil wird eine vollständige Systematik für alle in einem Kristall dynamisch definierten Atomgruppen (Dynaden) abgeleitet und Tabellen angegeben, die gestatten, alle Atomgruppen des Kristalls bei gegebenem Gitter unmittelbar abzulesen.

Berndt.

Pautsch, Methode of applied geophysics for the exploration of oil, ores and other useful deposits. $19^1/_2 \times 26^1/_2$. 82 S., 50 Fig. Houston, Texas. 1927. Bezug für Deutschland: R. Pautsch, Harburg-Wilhelmsburg 4. M. 5.—.

Der Verf. gibt eine Übersicht über die Methoden zur Erforschung der obersten Erdschichten (geophysikalische Aufschlußmethoden). Er betont einleitend, daß diese Methoden seither ein sorgsam gehütetes Geheimnis weniger Gelehrter gewesen seien. Leider geben auch seine Darlegungen nichts über die praktische Durchführung der verschiedenen Methoden; die theoretischen Grundlagen sind mindestens in Deutschland schon eingehender zusammengestellt und wenigstens durch einige Beispiele aus der Praxis belegt worden, die hier nur schematisch angedeutet sind.

Nach einer allgemeinen Einleitung geht der Verf. auf 22 Seiten auf die Drehwage und die Schweremessungen ein. Er gibt die Grundgleichungen und zeichnet Gradienten für einige spezielle Formen von störenden Körpern. Bei der folgenden seismischen Methode skizziert der Verf. den Wellenverlauf und die Laufzeitkurven, er gibt die Grundgleichungen, und die Grundformen der Seismometer. Hinweise auf die Praxis fehlen völlig. Die akustische Methode wird kurz erörtert. Die magnetische Methode kommt mit $7^1/_2$ Seiten zu kurz. Verhältnismäßig eingehend werden die elektrischen Methoden behandelt, und zum Schlusse 1 Seite der radioaktiven Methode gewidmet. Das Buch gibt eine knappe, durch die grundlegenden mathematischen Beziehungen gestützte Einführung in die Grundlagen der Theorie der verschiedenen Methoden, über die, wie erwähnt, sowohl theoretisch wie praktisch bereits viel weitergehende Veröffentlichungen in Deutschland erschienen sind.

Gutenberg.

A. Gyemant, Grundzüge der Kolloidphysik vom Standpunkte des Gleichgewichts. 8°. 93 S. Mit 9 Abb. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. A.-G. Geh. M. 4.50.

Das eigenartige Entgegenwirken von Oberflächenspannung und elektrostatischer Abstoßung, kompliziert durch die Wärmebewegung, das die kolloiden Erscheinungen ausmacht, ist, zum Teil auch durch die Arbeiten des Verfassers, nicht mehr Domäne der Chemie geblieben. In dem vorliegenden Heft werden die exakten mathematischen Formulierungen dieser Fragen gebracht, und man wundert sich, wie wenig „kolloidal" doch die Kolloidchemie mehr ist! Den Anschluß ans Experiment vermißt man freilich in der Darstellung etwas.

G.-M. Schwab.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Hans Reihlen zum a. o. Professor für anorganische und analytische Chemie an der Universität Tübingen, der Privatdozent der Chemie an der Universität Berlin Dr. Walter Schrauth zum Leiter der Deutschen Hydrierwerke in Rodleben bei Roßlau, der Privatdozent der Chemie an der Universität München Dr. Ernst Waldschmidt-Leitz zum Professor der Biochemie an der Technischen Hochschule in Prag, der Privatdozent an der Universität Wien Dr. Reinhard Seka zum a. o. Professor der organisch-chemischen Technologie an der Technischen Hochschule Graz.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Heidelberg Geheimer Rat Dr. Theodor Curtius, der langjährige Schriftleiter chemisch-technologischer Fachblätter Dr. Ing. Oskar Markfeld in Berlin, der frühere ord. Professor der Experimentalphysik und Naturwissenschaften an der Universität Leiden Dr. Hendrik Antoon Lorentz, der ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Danzig Geh. Regierungsrat Dr. Gustav Roeßler, der emeritierte ord. Professor der anorganisch-chemischen Technologie und analytischen Chemie an der Technischen Hochschule Graz Hofrat Dr. Benjamin Reinitzer.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon
vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye,** Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 5. Ausgegeben am 1. März 1928. **29. Jahrgang.**
Nr. 755. Printed in Germany.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Besprechungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Mit einer Beilage von H. Bechhold in Frankfurt am Main, betreffend: Die Umschau

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 5 — 1. März 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 7 am 5. April 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Dispersion von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante bei starken Elektrolyten[1]).

Von P. Debye u. H. Falkenhagen.

Wie in dieser Arbeit gezeigt werden soll, existiert für die Ionenbewegung in starken Elektrolyten eine Relaxationszeit, welche für die Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante von Wichtigkeit ist. Es soll hier versucht werden, die Verhältnisse zwar nicht vollkommen streng, aber doch so zu behandeln, daß das Charakteristische der zu erwartenden Erscheinung getroffen wird. An einige prinzipielle Punkte der Theorie der starken Elektrolyte mag zunächst erinnert werden[2]).

Die wesentlichsten Kräfte besonders in verdünnten Lösungen zwischen den Ionen sind die Coulombschen Kräfte. Greifen wir ein Ion einer bestimmten Sorte heraus, so wird sich dieses infolge der Wärmebewegung — von äußeren Kräften auf die Ionen sehen wir zunächst ab — in irgendeiner komplizierten Weise bewegen. In jedem Zeitmoment seiner Bewegung denken wir uns den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ von dem Ion aus gezogen. Die Länge und Richtung dieses Fahrstrahls sei während der Bewegung des Ions dauernd dieselbe. Am Ende von $\mathfrak{r}$ stellen wir uns ein kleines Volumenelement dS vor, in dem von Zeit zu Zeit überschüssige Ladungen vorhanden sein werden. In den verschiedenen Zeitmomenten ist die Ladungsmenge von dS eine verschiedene. Zu gewissen Zeiten wird sie positiv, zu anderen Zeiten negativ sein. Wir bilden jetzt den zeitlichen Mittelwert der elektrischen Ladung in dS dividiert durch dS, d. h. die elektrische zeitlich gemittelte Ladungsdichte des betrachteten Volumenelementes; diese so aufzufassende Größe nennen wir im folgenden stets schlechthin die Dichte der Ionenatmosphäre. Als Folgerung des Maxwell-Boltzmannschen Prinzips, das ja in dem betrachteten Falle des statistischen Gleichgewichtes Gültigkeit besitzt, ergibt sich dann, daß die Dichte der Ionenatmosphäre z. B. um ein positives Ion stets negativ und außerdem zentrisch symmetrisch ist. Die Gesamtladung dieser Ionenatmosphäre muß natürlich entgegengesetzt gleich der Ladung des markierten Ions sein. Dieser Umstand bewirkt, daß das Potential um das herausgegriffene Ion, welches bei unendlicher Verdünnung das Coulombsche ist, bei endlicher Konzentration von dem Coulombschen abweicht. Auf der mit der Existenz dieser Atmosphäre unmittelbar verknüpften Ionenenergie ist die Thermodynamik der starken Elektrolyte aufgebaut worden. Es ist aber auch möglich geworden, die Grenzgesetze der Leitfähigkeit starker Elektrolyte, die bei großer Verdünnung gelten, unter Zugrundelegung der eben entwickelten Gedankengänge zu deuten. Bewegt sich ein Ion unter dem Einflusse eines elektrischen Feldes, so

1) Vorgetragen in der Sitzung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 7. Januar in Halle.

2) s. P. Debye und E. Hückel, Physik. Zeitschr. **24**, 185, 305, 1923 und die Diskussion über starke Elektrolyte: Transactions Faraday Society, April 1927. S. 334—544.

wird seine Beweglichkeit davon abhängen, ob und wieviel Ionen in seiner Umgebung vorhanden sind. Einmal wird die Stokessche Reibung verändert, was früher als kataphoretische Wirkung bezeichnet wurde. Zweitens wird die Ionenatmosphäre ihre zentrische Symmetrie einbüßen. Beide Einflüsse verkleinern die Beweglichkeit.

In dieser Notiz soll durchweg auf die Berücksichtigung der kataphoretischen Wirkung verzichtet werden und nur die Dissymmetrie der Ionenwolke bei wechselnder Frequenz untersucht werden. Infolgedessen können die Resultate nur qualitativ sein. Wir werden in einer späteren Notiz die nötigen Verbesserungen anbringen und glauben, durch dieses Verfahren zu einem leichteren Verständnis zu verhelfen.

Bewegt man ein Ion mit konstanter Geschwindigkeit durch die Flüssigkeit, so tritt infolge der erwähnten Dissymmetrie eine bremsende Kraft auf. Sie ist deshalb vorhanden, weil die Dichteverteilung in der Ionenwolke zu ihrer Erzeugung oder Vernichtung eine wenn auch kleine, so doch endliche Zeit braucht. Es ist daher von vornherein zu erwarten, daß eine merkliche Dispersion auftreten sollte, wenn die Zeitdauer der Schwingungen, mit denen gemessen wird, vergleichbar ist mit jener Relaxationszeit. Bekanntlich hat Onsager darauf hingewiesen, daß die Ionen neben ihrer geradlinigen Bewegung noch Brownsche Bewegungsschwankungen ausführen, welche auf die Größe der Relaxationszeit einen Einfluß ausüben. Hierauf beruht seine Verbesserung der Formeln für die Leitfähigkeit. Auch von dieser letzteren Verfeinerung sehen wir in dieser Notiz ab. Die in Aussicht gestellte zweite Notiz wird diesen Punkt ebenfalls mit berücksichtigen.

Es mögen sich in der Lösung von den Ionen der Sorte $1 \ldots p \ldots s$ mit den Ladungen $e_1 \ldots e_p \ldots e_s$ im Volumenelement dS im zeitlichen Mittel $\bar{n}_1 dS \ldots \bar{n}_p dS \ldots \bar{n}_s dS$ befinden. Ferner bedeute D die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels, T die absolute Temperatur der Lösung, k die bekannte Boltzmannsche Konstante

$$(k = 1{,}372 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad})$$

und $\varkappa^2$ die für die Theorie der starken Elektrolyte charakteristische Größe:

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi}{DkT} \sum \bar{n}_p e_p^2. \qquad (1)$$

Ferner sei v_p die konstante Geschwindigkeit des Ions der Sorte p und $\varrho_p v_p$ die Stokessche Reibungskraft. Führt man die Abkürzungen ein

$$\omega_p = \bar{\varrho} \frac{v_p}{kT}$$

$$\bar{\varrho} = \frac{\sum \bar{n}_p e_p^2 \varrho_p}{\sum \bar{n}_p e_p^2}, \qquad (2)$$

so folgt für diese zusätzliche Kraft, die im allgemeinen klein ist gegenüber der Stokesschen Reibungskraft der Wert:

$$-e_p^2 \frac{\omega_p}{6D} \varkappa. \qquad (3)$$

Die Größe $\frac{1}{\varkappa}$ hat die Dimension einer Länge, die charakteristisch ist für die Dichteverteilung in der Ionenwolke. Sie wird im folgenden manchmal als Dicke der Ionenatmosphäre (Größenordnung in cm: 10^{-8} dividiert durch Wurzel aus Konzentration in Mol pro Liter) bezeichnet werden.

I. Die Rolle der Relaxationszeit für nichtstationäre Fälle.

(Beispiel eines verschwindenden Gleichgewichtszustandes).

Wir wollen uns zunächst folgender einfacher Fragestellung zuwenden, auf die der eine von uns schon einmal kurz eingegangen ist[1]). Wir denken uns eine Ladung E von kleinen Dimensionen an einer bestimmten Stelle des Elektrolyten. Die symmetrische Ionenatmosphäre, die der Verteilung des Potentials um das ruhende Ion entspricht, möge ihren Gleichgewichtszustand, der durch das Maxwell-Boltzmannsche Prinzip bestimmt ist, erreicht haben. In einem bestimmten Augenblick ($t = 0$) denken wir uns die Zentralladung E fortgenommen. Es fragt sich, nach welchem Gesetz strebt die Ladungsdichte der Ionenatmosphäre gegen Null. Mit der Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsfunktion kommen wir jetzt nicht mehr aus. Wir müssen vielmehr auf die in der Seite 121 zitierten Arbeit entwickelten allgemeinen Grundgleichungen, die auf der verallgemeinerten Gleichung für die Brownsche Bewegung beruhen, zurückkommen. Die zeitliche Änderung der Anzahl der Ionen der Sorte p hat zwei Ursachen; einmal wird sich diese infolge der Wärmebewegung ändern, zweitens wird eine auf die Teilchen wirksame Kraft $\mathfrak{K}$ die Zahl der Teilchen in einem festzudenkenden Volumenelement ändern. Schreibt man sich den mathematischen Ausdruck auf, der diesen nicht stationären Vorgang beherrscht, so findet sich für ihn die Gleichung:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p} \operatorname{grad} n_p - \frac{n_p \mathfrak{K}}{\varrho_p}\right). \qquad (4)$$

Wir wollen nun annehmen, daß wir es mit einer sehr verdünnten Lösung zu tun haben. Wir können dann in den Ausdruck, der $\mathfrak{K}$ enthält, für n_p den Wert $\bar{n}_p$ einführen, welchem die n_p in größerer Entfernung vom hervorgehobenen Ion

1) P. Debye, Transactions Faraday Society, April 1927, S. 334.



zustreben. Benutzt man diese Vereinfachung, so geht die Gleichung (4) über in

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\operatorname{grad} n_p - \frac{n_p \mathfrak{K}}{\varrho_p}\right). \quad (5)$$

Äußere Kräfte mögen für den jetzt behandelten Fall auf die Ionen nicht einwirken. Wir wollen daher nur innere aus einem Potential Φ ableitbare Kräfte annehmen, die wir setzen können

$$\mathfrak{K} = -e_p \operatorname{grad} \Phi.$$

Ferner setzen wir

$$n_p = \bar{n}_p + \nu_p \quad (6)$$

und erhalten also für die Abweichung der Anzahl der Ionen ν_p der Sorte p von dem konstanten Wert $\bar{n}_p$ folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \nu_p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\operatorname{grad}\nu_p + \bar{n}_p\frac{e_p}{\varrho_p}\operatorname{grad}\Phi\right). \quad (7)$$

Hinzu tritt die Poissonsche Gleichung

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = -\frac{4\pi}{D}\sum e_p \nu_p. \quad (8)$$

Für die Erfassung des Verschwindens des Gleichgewichtszustandes wollen wir das Problem insofern vereinfachen, als wir den Fall des einwertigen KCl herausgreifen, für das die Ionen gleiche Beweglichkeit besitzen. Für diesen Spezialfall gilt folglich

$$\begin{aligned}\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = n; \quad e_1 = E; \quad e_2 = -E; \\ \nu_1 = f; \quad \nu_2 = -f; \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho.\end{aligned} \quad (9)$$

Die grundlegenden Differentialgleichungen lauten demnach für dieses uns weiter interessierende Beispiel

$$\frac{\varrho}{kT}\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + \frac{nE}{kT}\Delta\Phi \quad (10)$$

$$\Delta\Phi = -\frac{8\pi E}{D}f. \quad (11)$$

Führen wir die charakteristische Größe (1) ein, die sich jetzt vereinfacht zu:

$$\varkappa^2 = \frac{8\pi n E^2}{DkT},$$

so entsteht aus (10) nach Einführung von $\Delta\Phi$ aus (11) für die Gleichung, die die zeitliche Änderung von f beherrscht

$$\frac{\varrho}{kT}\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - \varkappa^2 f. \quad (12)$$

Diese Gleichung (12) besitzt eine Gestalt, welche erinnert an diejenige, die die Wärmeleitungsvorgänge beschreibt. Wir wollen sie zunächst dimensionslos schreiben, indem wir eine Zeit Θ einführen, die für alle nichtstationären Vorgänge von Bedeutung ist und die wir Relaxationszeit nennen wollen. Wir setzen also

$$\frac{\varrho}{\varkappa^2 kT} = \Theta; \quad (13)$$

$$\varkappa r = s; \; \frac{t}{\Theta} = \tau. \quad (14)$$

In diesen so eingeführten dimensionslosen Größen erhalten wir folgende partielle Differentialgleichung für f

$$\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}s^2\frac{\partial f}{\partial s} - f = \frac{\partial f}{\partial \tau}. \quad (15)$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $f = f_0$ bekannt; dabei gilt

$$f_0 = -\frac{D}{8\pi E}\varkappa^2\Phi_0 = -\frac{\varkappa^3}{8\pi}\frac{e^{-s}}{s}. \quad (16)$$

Ein Ausdruck für f, der allen Bedingungen genügt, ist der folgende

$$f = -\frac{\varkappa^3}{8\pi}\frac{e^{-s}}{s}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\tau}-\frac{s}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-x^2}dx. \quad (17)$$

Es handelt sich jetzt nur noch darum, diesen Ausdruck zu diskutieren. Man erkennt zunächst, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad (18)$$

ist, daß f für $t = 0$ in f_0 übergeht. Für alle anderen Zeiten t kann man das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{\sqrt{\tau}-\frac{s}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-x^2}dx = J(\tau, s) \quad (19)$$

leicht berechnen. Kennt man J, so weiß man, wie die Verteilungsfunktion f zu verschiedenen Zeiten t und für verschiedene Werte von s aussieht. Folgende Tabelle I liefert eine Übersicht für einige Werte von J als Funktion von s zu einigen verschiedenen Zeiten t $\left(\tau = \frac{t}{\Theta}\right)$.

Tabelle I.

Werte für $J(\tau, s)$.

s	$\tau = 0{,}25$	$\tau = 1$	$\tau = 4$	se^{-s}
0,2	0,336	0,102	—	0,164
0,4	0,444	0,129	—	0,268
0,5	0,500	0,144	—	0,303
0,6	0,556	0,161	—	0,329
0,8	0,664	0,198	—	0,360
1,0	0,760	0,240	0,0066	0,368
1,2	0,839	0,286	—	0,361
1,4	0,898	0,336	—	0,345
1,6	0,940	0,389	—	0,323
1,8	0,967	0,444	—	0,298
2,0	0,983	0,500	0,017	0,271
2,4	0,996	0,611	—	0,218
2,8	0,999	0,714	—	0,170
3,0	0,999	0,760	0,039	0,149
4,0	0,999	0,921	0,078	0,073
6,0	0,999	0,998	0,240	0,0149
8,0	1	1	0,500	0,0027
10,0	1	1	0,760	0,00045
12	1	1	0,921	

Fragt man, wann $J = \frac{1}{2}$ ist, so lautet die Antwort hierauf: Es ist $J = \frac{1}{2}$, wenn

$$\sqrt{\tau} - \frac{s}{2\sqrt{\tau}} = 0,$$

oder

$$s = 2\tau,$$

oder

$$\varkappa r = \frac{2t}{\Theta},$$

oder

$$t = \frac{\varkappa r}{2}\Theta \quad \text{ist.}$$

Die Tabelle I überzeugt ja sofort auch von dieser einfachen Gesetzmäßigkeit. Wir haben in Tabelle I noch se^{-s} in der letzten Spalte aus folgendem Grunde eingetragen: Man übersieht nämlich das Verschwinden des Gleichgewichtszustandes einfacher, wenn man die Menge Elektrizität dQ bildet, die innerhalb der Kugelschale zwischen r und $r + dr$ liegt, und zwar zu verschiedenen Zeiten genommen. Diese ist

$$dQ = 2Ef4\pi r^2 dr = -E\varkappa se^{-s}Jdr = -yE\varkappa dr, \tag{20}$$

wobei also

$$y = se^{-s}J(s, \tau) \tag{21}$$

ist. y ist ein Maß für die Dichte der Ionenwolke zu verschiedenen Zeiten und in einer Kugelschale der Dicke dr in verschiedenen Entfernungen r vom hervorgehobenen Ion. Wir haben in Fig. 1

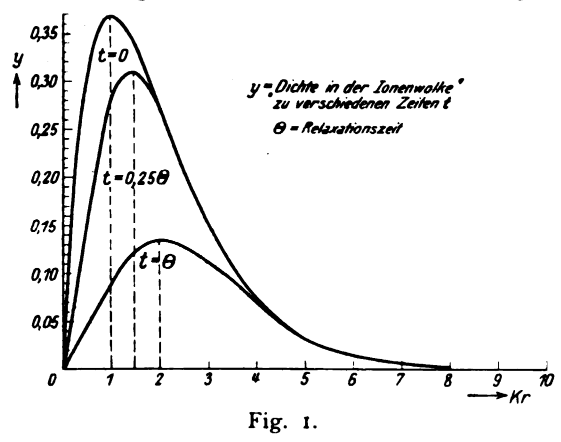


Fig. 1.

y für $\tau = 0$, $\tau = 0,25$ und $\tau = 1$ gezeichnet. y besitzt für jede Zeit ein Maximum, das sich mit wachsender Zeit immer mehr zu wachsenden $\varkappa r$-Werten verschiebt, außerdem dabei mehr und mehr abnimmt. So liegt das Maximum der Dichte y, wie wir jetzt schlechthin immer sagen wollen, zur Zeit $t = 0$ bei $\varkappa r = 1$, ferner zur Zeit $t = 0,25\Theta$ bei $\varkappa r \sim 1,5$ und schließlich zur Zeit $t = \Theta$ bei $\varkappa r \sim 2,0$. Die Maxima selbst verhalten sich für diese Zeiten rund wie

$$0,37 : 0,31 : 0,14.$$

Aus Fig. 1 erkennt man weiter, wie die Dichte der Ionenwolke zur Zeit $t = \Theta$ schon relativ gering ist gegenüber der ursprünglichen zur Zeit

$$t = 0.$$

Nach der vierfachen Relaxationszeit Θ ist die Dichte schon fast verschwunden. Würden wir nämlich in der Fig. 1 noch die Kurve, die $\tau = 4$ entspricht, gezeichnet haben, so wäre sie kaum von der Abszissenachse zu unterscheiden. Der Maximalwert betrüge für sie nur noch etwa 0,006 und läge etwa bei $\varkappa r = 3,5$.

Für die Relaxationszeit gilt nach (13) im Spezialfalle des KCl

$$\Theta = \frac{0,553 \cdot 10^{-10}}{\gamma}, \tag{22}$$

d. h. z. B. für die Konzentration $\gamma = 0,001$ Mol/Liter ist Θ von der Größenordnung 10^{-7} sec. Sie hängt stark von der Temperatur ab, da die innere Reibung ja bekanntlich ebenfalls mit wachsender Temperatur stark abnimmt; außerdem ist sie eine Funktion von der charakteristischen Größe $\varkappa$ und damit der Konzentration γ der Lösung. Die Relaxationszeit, die in ganz anderem Zusammenhange in der Theorie der anomalen Dispersion der Dipolflüssigkeiten eine Rolle spielt, ist in gewöhnlichen Fällen bis 1000mal kleiner als die eben genannte. Wir vermuten daher eine Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstanten in einem relativ leicht zugänglichen Wellenlängengebiet. Experimentell bestehen für diese aus der Theorie gezogene Folgerung in dem von uns behandelten Fall kleiner Feldstärken noch keine Tatsachen. Man kann vermuten, daß die Beobachtungen von M. Wien[1]) über die Abweichungen vom Ohmschen Gesetz bei hohen Feldstärken auch unseren Effekt wahrscheinlich machen, zumal ja Joos[2]) und Blumentritt die Wienschen Beobachtungen wenigstens in ihren Hauptzügen auf Grund der neueren Theorie der Elektrolyte gedeutet haben. Diese Autoren behandeln den stationären Fall mit Berücksichtigung der höheren Potenzen der Feldstärke. Hier wird die Frequenzabhängigkeit für kleine Feldstärken untersucht. Die Überlagerung beider Effekte bildet das allgemeine, noch nicht gelöste Problem.

II. Dispersion der von der Ionenwolke herrührenden Kraftwirkung.

Es handelt sich im folgenden um das Problem, den Leitungs- und Verschiebungsstrom des Elektrolyten auszurechnen unter der Annahme,

1) M. Wien, Ann. d. Phys. **83**, 327—361, 1927 u. Physik. Zeitschr. **28**, 834—836, 1927.

2) G. Joos und M. Blumentritt, Physik. Zeitschr. **28**, 836—838, 1927.

daß die Ionen der Lösung eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω ausführen. Auf Grund der Existenz der endlichen Relaxationszeit der Ionenwolke kann man sich leicht anschaulich den Verlauf der Kraftwirkung auf das Ion, soweit sie von der Ionenatmosphäre herrührt, als Funktion der Frequenz überlegen. Man erkennt dann, daß mit wachsender Frequenz der Absolutwert dieser Kraft allmählich gegen 0 hinstrebt. Infolge der Relaxationszeit wird aber auch eine Phasendifferenz zwischen dieser Kraft und der Bewegung des Ions auftreten. Der letztere Umstand bedeutet, daß die Stromdichte auch eine Komponente besitzt, die proportional ist mit der zeitlichen Änderung der elektrischen Feldstärke, also mit einer Phasendifferenz von 90^0 gegenüber der elektrischen Feldstärke schwingt. Das bedeutet, daß außer dem Leitungsstrom noch ein Verschiebungsstrom existiert. Dieser Verschiebungsstrom steht dann ohne weiteres im Zusammenhange mit der Dielektrizitätskonstante, während der Leitungsstrom die Leitfähigkeit ergibt. Wir gehen in folgender Weise vor. Zunächst greifen wir zurück auf die partiellen Differentialgleichungen (4), die den nichtstationären Fällen zugrunde liegen. Diese beziehen sich auf das ruhende Koordinatensystem X, Y, Z. Da nun die Ionen harmonische Schwingungen ausführen und uns im wesentlichen die auf der Existenz der Ionenatmosphäre beruhenden Kraft auf die Ionen interessiert, die dann im Verein mit der äußeren parallel X wirkenden elektrischen Feldstärke und der Stokesschen Reibungskraft den Verschiebungs- und Leitungsstrom ergibt, ist es zweckmäßig, die partiellen Differentialgleichungen auf ein Koordinatensystem zu beziehen, das sich mit den Ionen mitbewegt und welches wir x, y, z nennen. Die Integration dieser partiellen Differentialgleichungen liefert das Potential und damit die Kraft auf die Ionen. Die Hauptfrage ist also die, wie ändert sich die Kraftwirkung eines schwingenden Ions der Ladung e_p gegenüber der des stationär bewegten Ions ab? Die partiellen Differentialgleichungen, die die nichtstationären Fälle beherrschen, lauten für die Anzahl der Ionen der Sorte p im cm^3:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \mathrm{Div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{Grad}\,n_p - \frac{n_p\,\mathfrak{K}}{\varrho_p}\right). \qquad (23)$$

Sie beziehen sich zunächst auf das ruhende Koordinatensystem X, Y, Z. Wir haben daher Div und Grad in (23) geschrieben. Es ist von vornherein klar, daß das Potential Φ, das wir für den nichtstationären Fall suchen, ebenfalls in dem sich mit dem hervorgehobenen Ion parallel X mitbewegenden Koordinatensystem keineswegs stationär ist. Die Koordinaten des hervorgehobenen Ions seien ξ, 0, 0. Dabei ist

$$\xi = a e^{i\omega t}; \qquad \dot{\xi} = a i \omega e^{i\omega t}. \qquad (24)$$

Wir führen jetzt ein Koordinatensystem x, y, z ein, welches sich mit seinem Ursprung im bewegten Ion befindet und sich mit ihm mitbewegt, vermöge der Beziehungen

$$x = X - \xi; \quad y = Y; \quad z = Z; \quad t = t'. \qquad (25)$$

Folglich ist

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} = -\dot{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x};\\ &\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial z}; \quad \begin{aligned}\mathrm{div} &= \mathrm{Div};\\ \mathrm{grad} &= \mathrm{Grad}.\end{aligned}\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Unsere Differentialgleichungen lauten in bezug auf dieses Koordinatensystem (dabei ist der Strich bei t wieder fortgelassen)

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} - \dot{\xi}\frac{\partial n_p}{\partial x} = \mathrm{div}\left\{\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,n_p - \frac{n_p\,\mathfrak{K}}{\varrho_p}\right\} \qquad (27)$$

Für die Kraft $\mathfrak{K}$ können wir schreiben

$$\mathfrak{K} = e_p\,\mathfrak{E} - e_p\,\mathrm{grad}\,\Phi. \qquad (28)$$

Folglich geht das System der Gleichungen (27) über in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n_p}{\partial t} - \dot{\xi}(t)\frac{\partial n_p}{\partial x}\\ &= \mathrm{div}\left\{\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,n_p - \frac{n_p e_p\,\mathfrak{E}}{\varrho_p} + \frac{n_p e_p\,\mathrm{grad}\,\Phi}{\varrho_p}\right\}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi = -\frac{4\pi}{D}\sum n_p e_p.\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Für hinreichend verdünnte Lösungen dürfen wir wieder in den beiden letzten Gliedern der Klammer auf der rechten Seite für n_p den konstanten Wert $\bar{n}_p$ einführen. Die Abweichungen der Ionenzahl der Sorte p im cm^3 nennen wir ν_p, setzen also

$$n_p = \bar{n}_p + \nu_p.$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Gleichungen (29) ein, so entsteht das System: ($\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \nu_p}{\partial t} - \dot{\xi}\frac{\partial \nu_p}{\partial x} = \mathrm{div}\left\{\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,\nu_p + \frac{\bar{n}_p e_p}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,\Phi.\right\}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi = -\frac{4\pi}{D}\sum e_p \nu_p.\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Für den Spezialfall $\dot{\xi} = 0$ resultiert hieraus sofort die Maxwell-Boltzmannsche Verteilung:

$$\begin{aligned} \nu_p = \bar{\nu}_p &= -\frac{\bar{n}_p e_p}{kT}\,\Phi_0\\ \Delta\Phi_0 &= \varkappa^2\Phi_0 \qquad (31)\\ \Phi_0 &= \frac{e_p}{D}\,\frac{e^{-\varkappa r}}{r}.\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall führen wir die Abweichung der Ionenzahl im cm³ von der stationären ein und bezeichnen dieselbe mit μ_p; ferner nennen wir die Abweichungen des Potentials Φ vom stationären Werte φ. Es gilt also

$$\nu_p = \nu_p + \mu_p; \quad \Phi = \Phi_0 + \varphi. \tag{32}$$

Wir versuchen nun, das System (30) durch den Ansatz (32) zu befriedigen, wobei $\Phi_0 = \frac{e_p e^{-\varkappa r}}{Dr}$ ist. Wir setzen weiter an:

$$\mu_p = f_p e^{i\omega t} \quad \varphi = v e^{i\omega t}. \tag{33}$$

Für f_p und v folgen dann die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} & i\omega f_p - i\omega a \frac{\partial \nu_p}{\partial x} \\ & \quad = \operatorname{div}\left\{\frac{kT}{\varrho_p}\operatorname{grad} f_p + \frac{n_p e_p}{\varrho_p}\operatorname{grad} v\right\} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \Delta v = -\frac{4\pi}{D}\sum e_p f_p. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Von diesen Gleichungen können wir sofort drei Lösungen (35), (36) und (37) angeben von der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} v &= a\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \\ f_p &= -\frac{n_p e_p}{kT} a \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= A\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r} \\ f_p &= -\frac{n_p e_p}{kT}\frac{K^2}{K^2 - \frac{i\omega\varrho_p}{kT}} v \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \\ f_p &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Dabei ist K durch die Beziehung gegeben:

$$\frac{DkT}{4\pi} = \sum \frac{n_p e_p^2}{K^2 - \frac{i\omega\varrho_p}{kT}}. \tag{38}$$

Durch Einsetzen der Lösungen in die Differentialgleichung (34) überzeugt man sich leicht von deren Richtigkeit. Die allgemeine Lösung unseres Problems führt dadurch, daß man die drei Lösungen (35), (36) und (37) zusammensetzt, zu dem Potential Φ:

$$\Phi = \frac{e_p}{D}\left|\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + a e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + A e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r} + B e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right|. \tag{39}$$

Man entwickelt jetzt die Ausdrücke $\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$ und $\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r}$ in eine Reihe:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\varkappa r}}{r} = \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa^2}{2} - \frac{\varkappa^3 r}{3} + \frac{\varkappa^4 r^2}{1\cdot 2\cdot 4} - \frac{\varkappa^5 r^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} + \cdots\right)\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r} = \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{K^2}{2} - \frac{K^3 r}{3} + \cdots\right)\cos\vartheta.$$

Nun darf die Entwicklung des Zusatzpotentials in der Nähe des Ions nicht unendlich werden, infolgedessen dürfen in (39) die Glieder, die proportional sind zu $\frac{1}{r^2}$, nicht vorkommen. Ferner darf die Ladungsdichte, welche von den Zusatzladungen herrührt, ebenfalls in der Nähe des Ions nicht unendlich werden. Es müssen demnach die Bedingungen erfüllt sein

$$a + A + B = 0$$

$$\varkappa^2 a + K^2 A = 0,$$

d. h.

$$A = -\frac{\varkappa^2}{K^2}a; \quad B = \left(\frac{\varkappa^2}{K^2} - 1\right)a. \tag{40}$$

Damit ist der definitive Ausdruck für das Potential[1]) Φ gefunden. Entwickelt nach Potenzen von r, ergibt sich

$$\Phi = \frac{e_p}{D}\left[\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \frac{\varkappa^2}{3}(K - \varkappa) a e^{i\omega t} r\cos\vartheta + \cdots\right| \tag{41}$$

1) Man kann zu der Lösung (41) für den Spezialfall des KCl auch in folgender Weise gelangen. Geht man in ganz ähnlicher Weise vor, wie Debye und Hückel in ihren Arbeiten, nur unter der Verallgemeinerung, daß die Geschwindigkeit des Ions geschrieben wird:

$$\bar{v} e^{i\omega t},$$

so führen diese Überlegungen zu der partiellen Differentialgleichung für v:

$$\Delta(\Delta v - K^2 v) = -\varkappa^2 \bar{\omega}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}.$$

Mit Hilfe der Variation der Konstanten ergibt sich als spezielle Lösung dieser Differentialgleichung

$$-\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\frac{\omega}{\varkappa^2 - K^2} e^{i\omega t} = \frac{e}{D}\omega\frac{e^{-\varkappa r}\left(\frac{\varkappa}{r} + \frac{1}{r^2}\right)}{\varkappa^2 - K^2}\cos\vartheta\, e^{i\omega t}.$$

Die partikulären Integrale der homogenen Gleichung

$$\Delta(\Delta v - K^2 v) = 0$$

sind

$$\frac{d}{dr}\frac{e^{-Kr}}{r}\cos\vartheta; \quad \frac{d}{dr}\frac{e^{+Kr}}{r}\cos\vartheta; \quad r^2\cos\vartheta; \quad \frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

Die zusätzliche Feldstärke, welche das Ion erfährt, ist also

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{e_p}{D}\frac{\varkappa^2}{3}(K-\varkappa)\,a\,e^{i\omega t}. \qquad (42)$$

Führen wir in (42) die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ des Ions, wobei gilt:

$$\dot{\xi} = i\omega a e^{i\omega t}$$

ein, so können wir für die Kraft, die das schwingende Ion erfährt, auch schreiben:

$$-e_p\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{e_p^2}{3D}\frac{\varkappa^2\dot{\xi}}{i\omega}(K-\varkappa). \qquad (42')$$

Man kann sich aus der Gleichung (38) für jeden Elektrolyten die Größe K ausrechnen und kennt damit die Kraft auf das schwingende Ion. Besonders einfach werden die Rechnungen, wenn wir wieder den schon oben behandelten Spezialfall der KCl-Lösung den weiteren Erörterungen zugrunde legen. Es gilt hierfür

$$e_1 = -e_2 = e,\ \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho,\ \bar{n}_1 = \bar{n}_2 = n,\ \dot{\xi} = \bar{v}e^{i\omega t}.$$

Für diesen Spezialfall wird die Größe K^2:

$$K^2 = \varkappa^2\left(1 + i\frac{\omega\varrho}{kT}\frac{1}{\varkappa^2}\right) = \varkappa^2(1 + i\omega\Theta). \qquad (43)$$

Wir setzen für dieses Beispiel:

$$\varkappa + K = \varkappa + \varkappa\sqrt{1 + i\omega\Theta} = \varkappa(a + ib). \qquad (44)$$

Nach (13) resultiert für die Kraftwirkung auf das Ion die komplexe Form:

$$-\frac{\varkappa e^2}{3D}\frac{\varrho\bar{v}e^{i\omega t}}{kT(a+ib)} = -\frac{\varkappa e^2}{3D}\frac{\varrho\bar{v}(a-ib)e^{i\omega t}}{kT(a^2+b^2)}. \qquad (45)$$

Wir setzen diese Kraft gleich:

$$-K^* e^{i(\omega t + \Delta)} = K^* e^{i(\omega t + \pi + \Delta)}. \qquad (46)$$

Folglich gilt:

$$K^* = \frac{\varkappa e^2}{3DkT}\frac{\varrho\bar{v}}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (47)$$

$$\operatorname{tg}\Delta = -\frac{b}{a}. \qquad (48)$$

Setzt man

$$a + ib = 1 + \alpha\cos\beta + i\alpha\sin\beta,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\omega\Theta$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\Theta}{\sin 2\beta}}$$

ist, so kann man K^* und Δ für jedes $\omega\Theta$ leicht berechnen.

Wie man aus der Formel (47) ersieht, besitzt die Kraft auf das schwingende Ion einen anderen absoluten Wert als den, welcher dem stationären Falle entspricht. Dieser Absolutwert der Kraft geht, wie ja ohne weiteres ersichtlich, für die Frequenz $\omega = 0$ in den von Debye und Hückel angegebenen (3) über. Für Frequenzen ω, die sehr klein sind gegenüber der Größe $\frac{1}{\Theta}$, weicht der Absolutwert dieser Kraft nur bis auf Größen zweiter Ordnung in ω von dem stationären ab. In diesem Falle ist folglich die absolute Größe dieser Kraft nur ganz wenig kleiner als die des mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegenden Ions. Nähert sich die Frequenz dem Werte $\omega = \frac{1}{\Theta}$, so weicht der Absolutwert der Kraft schon etwas mehr von dem stationären ab, und für ganz große ω gegenüber $\frac{1}{\Theta}$ geht die Kraft umgekehrt proportional mit ω gegen 0. Wir haben in Fig. 2 das Verhältnis der absoluten Größe der Kraft auf das schwingende Ion zu der des stationär be-

---

Folglich lautet die allgemeine Lösung

$$\Phi = \Phi_0 + \left[\frac{e}{D}\,\bar{\omega}\,\frac{e^{-\varkappa r}\left(\frac{\varkappa}{r} + \frac{1}{r^2}\right)}{\varkappa^2 - K^2} + A'\frac{d\frac{e^{-Kr}}{r}}{dr} + A''\frac{d\frac{e^{-Kr}}{r}}{dr} + \frac{B'}{r^2} + B''r^2\right]e^{i\omega t}\cos\vartheta.$$

Dabei ist, da das Potential für $r = \infty$ nicht unendlich werden darf $A'' = B'' = 0$. Die Endlichkeit des Zusatzpotentials und der Zusatzdichte in der Nähe des Ions ergibt für die Konstanten A' und B' die Werte

$$A' = \frac{e}{D}\frac{\bar{\omega}}{\varkappa^2 - K^2}\frac{\varkappa^2}{K^2};$$

$$B' = \frac{e\bar{\omega}}{D(K^2 - \varkappa^2)} + \frac{e\bar{\omega}\varkappa^2}{D(\varkappa^2 - K^2)K^2}.$$

Vergleichen wir diese Konstanten mit den obigen (40), so muß gelten

$$A' = \frac{e}{D}\frac{\bar{\omega}}{\varkappa^2 - K^2}\frac{\varkappa^2}{K^2} = -\frac{\varkappa^2}{K^2}\frac{ae}{D};$$

d. h.

$$a = -\frac{\bar{\omega}}{\varkappa^2 - K^2}.$$

Daß diese Beziehung erfüllt ist, erkennt man sehr einfach auf folgende Weise. Es muß gelten, da

$$\dot{\xi} = ai\omega e^{i\omega t} \text{ und } \bar{\omega} = \frac{\varrho\bar{v}}{kT}$$

ist,

$$a = -\frac{\varrho}{kT}\frac{ai\omega}{\varkappa^2 - K^2};$$

oder

$$1 = -\frac{\varrho}{kT}\frac{i\omega}{\varkappa^2 - K^2}.$$

Hieraus folgt

$$K^2 = \varkappa^2 + \frac{i\omega\varrho}{kT}.$$

Diese Beziehung ist identisch mit der Beziehung (43), womit der Beweis der Richtigkeit unserer Behauptung erbracht worden ist.

wegten Ions als Funktion von $\omega\Theta$ aufgetragen. Dieses Verhältnis ist in der Fig. 2 mit δ bezeichnet worden.

Nachdem wir nunmehr wissen, wie der Absolutwert der Kraft als Funktion der Größe $\omega\Theta$ und damit der Frequenz ω verläuft, wenden

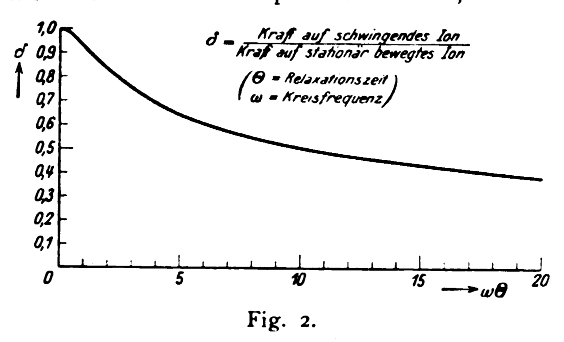


Fig. 2.

wir uns jetzt der Phasendifferenz $\pi + \Delta$ zu, mit welcher die Kraft auf das schwingende Ion gegenüber seiner Geschwindigkeit verläuft. Die Formeln (48) ergeben ja ohne weiteres die Phasendifferenz $\pi + \Delta$ der Kraft gegenüber der Geschwindigkeit und zwar ist die Phase Δ negativ. Für sehr kleine Werte von ω steigt die negative Phase Δ proportional zu ω an. Bei $\omega = \frac{1}{\Theta}$ beträgt sie etwa -12^0. Schließlich für den Fall ganz hoher Frequenzen gegenüber der Frequenz $\frac{1}{\Theta}$ nähert sie sich immer mehr und mehr dem Wert -45^0. In Fig. 3 ist der Verlauf der Phasendifferenz Δ als Funktion der Größe $\omega\Theta$ aufgetragen. $\Delta + \pi$ ist also die Phase zwischen Kraft und Geschwindigkeit des schwingenden

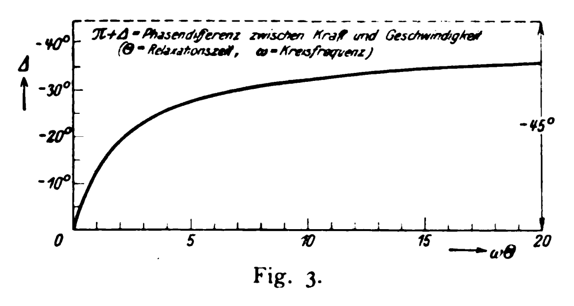


Fig. 3.

Ions. Dadurch, daß der Ausdruck der Kraft auf das schwingende Ion eine komplexe Form besitzt, wird, wie wir jetzt zeigen wollen, außer der Dispersion der Leitfähigkeit auch eine solche der Dielektrizitätskonstante des starken Elektrolyten bewirkt.

Zusammenfassend (vgl. auch Tabelle II) können wir bemerken, daß für sehr kleine ω die Kraft auf das schwingende Ion und die Stokessche Reibungskraft sich in Phase zueinander befinden, während hingegen für sehr große ω diese beiden Kräfte keineswegs mehr in Phase sind. Ferner nimmt der Absolutwert der Kraft auf das Ion mit wachsender Frequenz immer weiter und weiter ab und nähert sich schließlich für sehr hohe Frequenzen dem Werte 0. Dem letzten Umstand ist es zuzuschreiben, daß infolge der Abnahme der bremsenden Kraft auf das Ion, welche der Ionenatmosphäre ihr Bestehen verdankt, schließlich nur noch die Stokessche Kraft auf das Ion einwirkt: infolgedessen nähert sich die molekulare Leitfähigkeit des starken Elektrolyten mit wachsender Frequenz dem Werte, welcher der Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung entspricht, wenn man, was wir in dieser Arbeit der Einfachheit halber tun wollen, von der kataphoretischen Wirkung absieht. Wir wollen jetzt die Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante der Lösung als Funktion von ω rechnerisch ableiten.

III. Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante.

Wieder möge der Spezialfall eines einwertigen Elektrolyten vorliegen, in dem die Ionen gleiche Beweglichkeit besitzen. Es möge eine äußere Feldstärke $Ee^{i\omega t}$ auf den Elektrolyten einwirken. Die Frequenz des elektrischen Wechselfeldes[1]) sei ω. Wenn die Ionenkraft, die wir vorhin diskutiert hatten, nicht vorhanden wäre, müßten sich die elektrische Kraft und die Stokessche Reibungskraft $\varrho\bar{v}$ im Gleichgewicht halten. Man kann nun, was für das Folgende von Bedeutung ist, von dem Anlaufvorgang, während dessen die Ionen ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht haben, absehen. Wie man sich leicht überlegt, stellt sich ein Ion von der Masse m bereits nach einer Zeit von der Größenordnung $\frac{m}{\varrho} \sim 10^{-13}$ sec auf den konstanten Geschwindigkeitswert ein. Diese Zeiten sind nun ganz wesentlich kleiner als die, welche für unser Problem der Dispersion der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten als Folge einer endlichen Relaxationszeit von Bedeutung sind. Wir können daher ruhig annehmen, daß die Ionen momentan dem elektrischen Felde folgen.

In unserem Falle müssen sich äußere elektrische Feldstärke, Stokessche Reibungskraft und die bremsende Ionenkraft das Gleichgewicht halten. Es besteht sonach die Gleichung

$$eEe^{i\omega t} - \varrho i\omega a e^{i\omega t} - \frac{e^2\varkappa^2}{3D}\varkappa \cdot a e^{i\omega t}\left(\sqrt{1 + i\omega\Theta} - 1\right) = 0\,. \tag{49}$$

1) E bedeutet in III den Absolutwert der elektrischen Feldstärke, während es in I die Zentralladung des Ions angibt.



Hieraus rechnet sich die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ aus zu:

$$\dot{\xi} = i\omega a e^{i\omega t}$$
$$= \frac{eEe^{i\omega t}}{\varrho} \frac{1}{1 + \frac{e^2\varkappa^2}{3D}\frac{\varkappa\Theta}{\varrho}\left(\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta}\right)} \quad (50)$$

Da nun die Größe $\frac{e^2\varkappa^2}{3D}\frac{\varkappa}{\varrho/\Theta}\left(\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta}\right)$ klein ist gegenüber der Einheit, können wir für die Geschwindigkeit auch schreiben

$$\dot{\xi} = \frac{eEe^{i\omega t}}{\varrho}\left[1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta}\right]. \quad (51)$$

Mit der Geschwindigkeit ist aber die elektrische Stromdichte $\mathfrak{i}$ verknüpft mittels der Gleichung $\mathfrak{i} = 2ne\dot{\xi}$. Setzt man hierfür den Wert der Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ aus (51) ein, so resultiert für die Stromdichte der Ausdruck

$$\mathfrak{i} = \frac{2ne^2}{\varrho} Ee^{i\omega t}\left[1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta}\right]. \quad (52)$$

Verschiebungsstrom und Leitungsstromdichte zusammengenommen müssen folglich gleich sein

$$J = \frac{i\omega D}{4\pi}Ee^{i\omega t}$$
$$+ \frac{2ne^2}{\varrho}Ee^{i\omega t}\left[1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta}\right]. \quad (53)$$

Nun ist nach der phänomenologischen Maxwellschen Theorie die gesamte Stromdichte J gleich der Summe von Verschiebungs- und Leitungsstrom. Folglich besteht die Beziehung

$$J = \lambda\mathfrak{E} + \frac{D'}{4\pi}\dot{\mathfrak{E}} = \lambda Ee^{i\omega t} + \frac{i\omega D'}{4\pi}Ee^{i\omega t}. \quad (54)$$

Der reelle Teil der rechten Seite der Gleichung (54) liefert demzufolge die elektrische Leitfähigkeit; der imaginäre Teil der rechten Seite von (54) ist mit der Dielektrizitätskonstante der Lösung verknüpft. In Formeln geschrieben findet sich für die Leitfähigkeit λ bzw. den Zuwachs der Dielektrizitätskonstante D' der Lösung gegenüber der Dielektrizitätskonstante D des Lösungsmittels folgendes Gleichungssystem

$$\lambda = \frac{2ne^2}{\varrho}\cdot \text{Reeller Teil von}\left[1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta}\right] \quad (55)$$
$$D' - D = \frac{4\pi}{\omega}\frac{2ne^2}{\varrho}\cdot \text{Imagin. Teil von}\left[1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta}\right]. \quad (56)$$

Um den reellen bzw. imaginären Teil zu bilden, kann man entweder die trigonometrischen Formeln auf S. 127 verwenden oder auch schreiben:

$$\frac{\sqrt{1+i\omega\Theta}-1}{i\omega\Theta} = \sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}-1}{2\omega^2\Theta^2}} - i\left[\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}+1}{2\omega^2\Theta^2}} - \frac{1}{\omega\Theta}\right]. \quad (57)$$

Hieraus ergeben sich die Formeln für die Leitfähigkeit und den Dielektrizitätskonstantenüberschuß zu

$$\lambda = \frac{2ne^2}{\varrho}\left[1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}-1}{2\omega^2\Theta^2}}\right] \quad (58)$$

$$D' - D = 4\pi\frac{2ne^2}{\varrho}\frac{e^2\varkappa}{3DkT}\Theta\left[\sqrt{\frac{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}+1}{2}-1}{\omega^2\Theta^2}}\right]. \quad (59)$$

Zu jedem Werte von $\omega\Theta$ sind die Größen λ und $D'-D$ als Funktion von $\omega\Theta$ gefunden. Führt man den Wert der Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung λ_∞ ein:

$$\lambda_\infty = \frac{2ne^2}{\varrho} \quad (60)$$

und setzt man

$$\frac{e^2\varkappa}{6DkT}2\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}-1}{2\omega^2\Theta^2}} = \frac{e^2\varkappa}{6DkT}x_1(\omega\Theta), \quad (61)$$

so können wir die Formel für die Leitfähigkeit (58) auch schreiben

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty} = \frac{e^2\varkappa}{6DkT}x_1(\omega\Theta). \quad (62)$$

Für sehr kleine $\omega\Theta$ strebt die Funktion x_1 gegen Eins. Führen wir für die Leitfähigkeit im stationären Falle die Bezeichnung λ_0 ein, so gilt

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_\infty} = \frac{e^2\varkappa}{6DkT}. \quad (63)$$

Bilden wir jetzt den Quotienten von (62) und (63), so resultiert die Beziehung

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0} = x_1(\omega\Theta). \quad (64)$$

Eine ähnliche Überlegung wollen wir jetzt für den Dielektrizitätskonstantenüberschuß durchführen. Die Formel (59) läßt sich in der Form schreiben

$$D'_\omega - D = 4\pi\frac{2ne^2}{\varrho}\frac{e^2\varkappa}{3DkT}\Theta x_2(\omega\Theta). \quad (63')$$

Dabei ist die Abkürzung eingeführt

$$x_2(\omega\Theta) = \left| \frac{\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}+1}{2}} - 1}{\omega^2\Theta^2} \right| . \quad (65)$$

Für kleine Werte von $\omega\Theta$ strebt x_2 gegen 1/8, vgl. Tabelle (II). Folglich wird, wenn wir den Dielektrizitätskonstantenüberschuß bei der Frequenz 0 mit $D'_0 - D$ bezeichnen:

$$D'_0 - D = 4\pi \frac{2ne^2}{\varrho} \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\Theta \frac{1}{8} . \quad (66)$$

Zusammenfassend bemerken wir, daß mit den Abkürzungen (64) und (65) die Formeln für den Leitfähigkeitsdefekt und den Dielektrizitätskonstantenüberschuß auf die Form gebracht werden können:

$$\lambda_\infty - \lambda_\omega = \lambda_\infty \frac{e^2\varkappa}{6DkT} x_1(\omega\Theta)$$

$$D'_\omega - D = 4\pi \frac{2ne^2}{\varrho} \frac{e^2\varkappa}{3DkT} \Theta x_2(\omega\Theta) .$$

Für die zahlenmäßige Berechnung des Leitfähigkeitsdefektes bzw. des Dielektrizitätskonstantenüberschusses ist es angebracht, an diese Formeln (62) und (63') anzuknüpfen. Für die graphische Darstellung hingegen ist es zweckmäßiger, die Größen $\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0}$ bzw. $\frac{D'_\omega - D}{D'_0 - D}$ als Funktion von $\omega\Theta$ zu bilden. Wir haben in Fig. 4 und 5

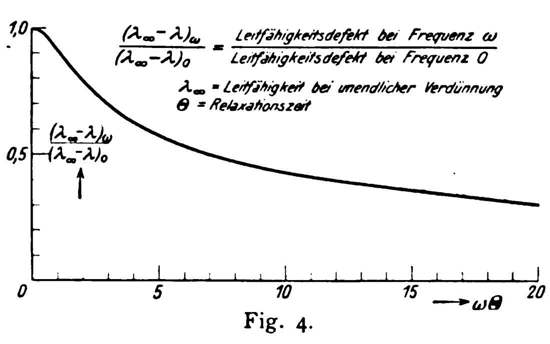


Fig. 4.

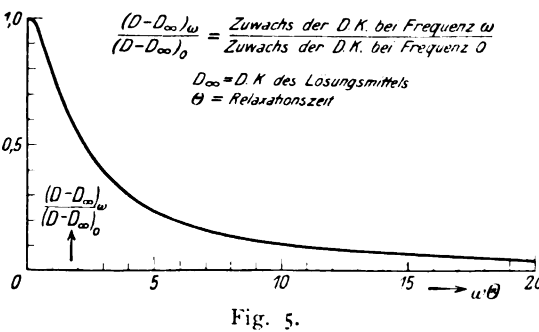


Fig. 5.

diese Größen, die also mit der Bezeichnung $x_1(\omega\Theta)$ bzw. $8 \cdot x_2(\omega\Theta)$ in Übereinstimmung sind, in Abhängigkeit von $\omega\Theta$ aufgetragen. Die Fig. 4 enthält den Quotienten aus Leitfähigkeitsdefekt bei Frequenz ω und Leitfähigkeitsdefekt bei Frequenz 0 als Funktion von $\omega\Theta$. Man sieht deutlich aus der Fig. 4, daß eine Dispersion der Leitfähigkeit des starken Elektrolyten vorliegt. Für sehr hohe Frequenzen ω gegenüber $1/\Theta$ nähert sich die Leitfähigkeit λ dem Werte, der der unendlichen Verdünnung entspricht[1]). Für sehr kleine Werte von ω gegenüber $\frac{1}{\Theta}$ weicht der Ausdruck $\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0}$ nur wieder in zweiter Ordnung in $\omega\Theta$ von 1 ab. Daher hat die Kurve $x_1(\omega\Theta)$ für sehr kleine Werte von $\omega\Theta$ parabolische Gestalt und besitzt für $\omega = 0$ eine horizontale Tangente. In Fig. 5 ist der Quotient des Zuwachses der Dielektrizitätskonstanten der Lösung bei der Frequenz ω und des Zuwachses der Dielektrizitätskonstanten bei der Frequenz 0 als Funktion von $\omega\Theta$ graphisch dargestellt.

Für sehr kleine Werte von ω hat die Kurve wieder die Gestalt einer Parabel mit horizontaler Tangente bei $\omega = 0$, während für große Werte von ω die Dielektrizitätskonstante der Lösung gleich der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels wird. Beobachtet man demnach in einem Elektrolyten eine Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten über den Normalwert des Lösungsmittels, so ist dieses noch kein Beweis dafür, daß undissoziierte Moleküle infolge Dipolwirkung jenes Verhalten verursachen. Unser Resultat bedeutet, daß dieselbe Wirkung auch in einer völlig dissoziierten Lösung infolge Rückwirkung der Ionenwolke auftreten kann.

In der folgenden Tabelle II haben wir noch einmal den Absolutwert der Kraft auf das schwingende Ion, die Phase, die Größe $\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda}$ und $\frac{D'_\omega - D}{D'_0 - D}$ als Funktion von $\omega\Theta$ angegeben. Dabei sind zur Berechnung, zur Kontrolle sowohl die trigonometrischen Formeln auf S. 127 als auch die analytischen Formeln (57) benützt worden. Die Genauigkeit der Zahlen ist größer als 1 Proz.

Zum Schlusse einige Zahlenangaben für das Beispiel des KCl.

Da die molekulare Leitfähigkeit des KCl den Wert $65 + 65 = 130$ besitzt, besteht die Beziehung

$$\frac{\gamma}{1000} 135 E 3 \times 10^9 = \frac{2ne^2 E}{\varrho \cdot 300} = \frac{2\gamma N e^2}{1000 \cdot \varrho} \frac{E}{300} .$$

1) Dieses Resultat bedarf infolge der kataphoretischen Wirkung die schon mehrfach hervorgehobene Korrektion.



Tabelle II.

$\omega\Theta$	δ	Δ	$x_1 = \frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0}$	$x_2(\omega\Theta)$	$\frac{D'_\omega - D}{D'_0 - D} = 8x_2$
0	1,00	0°	1,00	0,125	1,000
0,1	0,999	— 1° 26′	0,999	0,125	0,999
0,2	0,998	— 2° 50′	0,996	0,124	0,996
0,5	0,980	— 6° 50′	0,972	0,116	0,928
1,0	0,930	— 12° 15′	0,910	0,098	0,784
2,0	0,832	— 19° 05′	0,786	0,068	0,544
3,0	0,755	— 23° 02′	0,694	0,0493	0,3944
4,0	0,690	— 25° 44′	0,624	0,0375	0,3000
5,0	0,645	— 27° 31′	0,572	0,0298	0,2384
6,0	0,608	— 28° 54′	0,532	0,0245	0,1960
7,0	0,573	— 30° 07′	0,498	0,0206	0,1648
8,0	0,547	— 30° 55′	0,470	0,0176	0,1408
9,0	0,524	— 31° 40′	0,446	0,0153	0,1224
10,0	0,507	— 32° 19′	0,426	0,0135	0,1080
12,0	0,469	— 33° 30′	0,392	0,0108	0,0864
15,0	0,431	— 34° 41′	0,354	0,00813	0,0650
18,0	0,398	— 35° 25′	0,324	0,00644	0,0515
20,0	0,380	— 35° 57′	0,308	0,00506	0,0405
∞	0	— 45°	0	0	0

Hierin ist die elektrische Feldstärke in Volt pro Zentimeter angegeben. Da N als Loschmidtsche Zahl pro Mol den Wert hat

$$N = 6{,}06 \cdot 10^{23},$$

folgt für die Beweglichkeit des KCl-Ions

$$\varrho = 0{,}236 \cdot 10^{-8} \text{ dyn sec cm}^{-1}.$$

Hieraus berechnen sich die Ausdrücke

$$\lambda_\infty, \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_\infty}, D'_0 - D$$

zu

$$\lambda_\infty = 1{,}171 \cdot 10^{11} \cdot \gamma$$

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_\infty} = 0{,}386 \cdot \sqrt{\gamma}$$

$$D'_0 - D = 2{,}42 \cdot \pi \sqrt{\gamma}.$$

Diese Angaben beziehen sich auf die Frequenz $\omega = 0$. Die Ausdrücke für die Frequenz ω ergeben sich leicht nach (62) und (63′). Dabei ist für Θ gemäß (22) zu setzen:

$$\Theta = \frac{0{,}553 \cdot 10^{-10}}{\gamma}.$$

Ferner beziehen sich diese Ausdrücke auf $T = 291{,}2$, wo $D = 81{,}3$ ist.

Wählen wir etwa als Konzentration $\gamma = \frac{1}{1000}$, so beträgt der Zuwachs der Dielektrizitätskonstante für diese Konzentration und die Frequenz 0, für die er ja den größten Wert annimmt, 0,24. Rechnet man sich die Wellenlänge aus, bei welcher dieser Zuwachs auf die Hälfte gesunken ist, so gilt hierfür

$$\lambda_{im} = \frac{4{,}74 \cdot 10^{-2}}{\gamma}$$

wobei λ in Meter zu messen ist.

Nimmt man wieder als Konzentration $\gamma = \frac{1}{1000}$, so folgt als Wellenlänge der Wert

$$\lambda_{im} = 47{,}4 \cdot m.$$

Der Leitfähigkeitsdefekt dagegen ist zur Hälfte aufgehoben bei einer Wellenlänge

$$\lambda'_{im} = \frac{1{,}49 \cdot 10^{-2}}{\gamma} \quad \text{d. h. für } \gamma = \frac{1}{1000}$$

bei $\lambda'_{im} = 14{,}9$ m.

Wir möchten zum Schluß noch folgendes bemerken. Es gibt eine große Reihe von Messungen über den Verlauf der Dielektrizitätskonstante von starken Elektrolyten als Funktion der Konzentration. Es ist bisher nicht möglich gewesen, diese Messungen miteinander in Einklang zu bringen[1]). Manche Autoren finden eine Änderung, andere keine. Aus den Messungen von Walden und von Sack, die auch theoretisch verständlich sind, folgt eine Abnahme der Dielektrizitätskonstante proportional der Konzentration. Nehmen wir als Frequenz 0, so finden wir einen Dielektrizitätskonstantenzuwachs, welcher proportional ist mit $\sqrt{\gamma}$. Man überlegt sich leicht, daß unser Effekt keineswegs mit diesen Messungen im Widerspruch zu stehen braucht. Die Ursache der Abnahme der Dielektrizitätskonstante nach Sack ist eine gänzlich verschiedene von der, die wir in dieser Arbeit zugrunde legten. In Wirklichkeit werden beide Effekte überlagert und man erkennt sofort, daß dann bei außerordentlich geringen, der Messung un-

1) Vergleiche die demnächst erscheinende Monographie: P. Debye, Polar Molecules, Chem. Catalogue Co., New York. Deutsch bei S. Hirzel in Leipzig.

zugänglichen Konzentrationen, die Dielektrizitätskonstante einen Maximalwert besitzt; sie nimmt bei ebenfalls kaum der Messung zugänglichen Konzentrationen den Wert der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels an und schließlich mit wachsender Konzentration ab. Erst dieser letzte Bereich ist der Messung wieder zugänglich.

Zum Schlusse sei hervorgehoben, daß diese Notiz im wesentlichen nur eine charakterisierende Beschreibung der zu erwartenden Erscheinung enthält, deren quantitative Erfassung aus den mehrfach im Text erwähnten Gründen noch nicht vollständig ist. Die notwendigen Ergänzungen werden in einer demnächst folgenden Notiz enthalten sein.

Der eine von uns möchte an dieser Stelle dem International Education Board für die Ermöglichung seines Aufenthalts in Leipzig seinen herzlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 30. Januar 1928.)

Das asymmetrische Zweizentrenproblem nach der Wellenmechanik und ihre Anwendung auf die Kristalltheorie (Streuvermögen der Atome).

Von K. F. Niessen.

Das Streuvermögen der Atome in Kristallgittern vom Diamant- und Wurzittyp wird als Zweizentrenproblem berechnet, dessen Wellenmechanik zuerst näher entwickelt wird.

Zusammenfassung.

Die Kristallgitter vom Diamant- oder Wurzittyp können aufgebaut gedacht werden mittels Zweizentrenproblemen. Letztere sind symmetrisch beim Diamanttyp und asymmetrisch beim Wurzittyp. Deshalb beginnen wir in § 1 mit der Wellenmechanik des asymmetrischen Zweizentrenproblems.

Ein Differentialverfahren wird angegeben, das uns gestattet, das Verhältnis zwischen der Elektronenladung auf der einen und der auf der anderen Seite (getrennt durch die Mittelebene, senkrecht auf der Verbindungslinie der Zentren) bei beliebiger nicht zu großer Asymmetrie in den positiven Ladungen der Zentren sofort auf Größen zurückzuführen, die einem symmetrischen Problem entnommen sind.

In § 2 wird für die Anwendung auf den Kristallbau der Sonderfall betrachtet, daß die Gesamtladung der Zentren $+e$ ist.

Das Verhältnis der Elektronenladungen links und rechts läßt sich im beliebigen asymmetrischen Fall näherungsweise durch Funktionen ausdrücken, die O. Burrau in seiner Theorie des H_2^+ Ions schon numerisch berechnet hat.

Es wird gezeigt, wie in den genannten Kristallgittern solche neutralen Zweizentrenprobleme in Wechselwirkung stehen, und wie daraus die Ladung der Elektronen„wolke" zu berechnen ist, die von den Bindungselektronen herrührt und jeden Atomrest einhüllt. Dabei wird angenommen, daß die Atome alle ihre äußeren Elektronen für die Bindung abgeben, so daß als „Atomreste" die (zwar kontrahierten) Edelgaskonfigurationen auftreten, die den Atomen im periodischen System voraufgehen. Als Streuvermögen der Atome benutzten wir die Elektronenzahl im Atomrest, vermehrt um die in $-e$ ausgedrückte Ladung der sie umhüllenden Elektronenwolke. Wir bekommen so das Streuvermögen als Funktion des Atomabstandes und der Zahlen p_1 und p_2, die die Spalten des periodischen Systems angeben, wo die neutralen Atome stehen.

Die berechneten Werte sind in guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

§ 1. Sind r_1 und r_2 die Abstände vom Elektron zum linken, bzw. rechten Zentrum (deren Ladungen $k_1 e$ und $k_2 e$ sein mögen), so lautet die Schrödingersche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E+\frac{k_1e^2}{r_1}+\frac{k_2e^2}{r_2}\right)\psi=0$$

worin E die Energiekonstante darstellt.

Befinden sich die Zentren in den Punkten:

$$x=-c,\quad y=0,\quad z=0$$
$$x=+c,\quad y=0,\quad z=0$$

und führt man elliptische Koordinaten ein:

$$\lambda=\frac{r_1+r_2}{2c}\qquad \mu=\frac{r_1-r_2}{2c}$$

sowie als dritte Koordinate den Winkel φ zwischen einer festen und einer beweglichen Ebene, beide durch die x-Achse gehend, und bedient man sich noch, wie Burrau[1]), der dimensionslosen Größen:

$$\varepsilon=\frac{2c}{a_H}\quad\left(\begin{array}{l}a_H=\text{erster Bohrscher}\\ \text{Kreis im } H\text{-Atom}\end{array}\right)$$
$$\gamma=\frac{E\varepsilon^2}{4E_H}\quad\left(\begin{array}{l}E_H=\text{Energiewert im}\\ \text{unangeregten } H\text{-Atom}\end{array}\right)$$

so läßt sich die nullte Eigenfunktion schreiben als:

$$\psi=C\,\psi_\lambda(\lambda)\,\psi_\mu(\mu),\tag{1}$$

worin ψ_λ und ψ_μ nachstehenden Gleichungen genügen[2])

$$(\lambda^2-1)\frac{d^2\psi_\lambda}{d\lambda^2}+2\lambda\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}+[A+(k_1+k_2)\,\varepsilon\lambda-\gamma\lambda^2]\,\psi_\lambda=0\tag{2}$$

1) O. Burrau, Det. Kgl. Danske Videnskabernas Selskab. 7, 14, 1927.

2) O. Burrau, l. c. für den Fall $k_1=k_2=1$.

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\psi_\mu}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d\psi_\mu}{d\mu} + [-A + (k_2 - k_1)\varepsilon\mu + \gamma\mu^2]\,\psi_\mu = 0, \tag{3}$$

A ist hierin eine Separationskonstante.

Setzt man:

$$\psi_\lambda = \frac{v_\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}, \quad \psi_\mu = \frac{v_\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \tag{4}$$

so bekommt man aus (2) und (3) für v_λ und v_μ [1]):

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + K_\lambda v_\lambda = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + K_\mu v_\mu = 0 \tag{6}$$

mit den Abkürzungen:

$$K_\lambda = \frac{1 + [A + 2\varkappa\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2](\lambda^2-1)}{(\lambda^2-1)^2} \tag{7}$$

$$K_\mu = \frac{1 + [-A + 2p\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2}, \tag{8}$$

wo

$$2\varkappa = k_1 + k_2 \tag{9}$$

$$2p = k_2 - k_1 \tag{10}$$

Wir nehmen $k_2 > k_1$ also $p > 0$ an.

Da der Bereich von λ, μ angegeben wird durch:

$$1 \leq \lambda \leq \infty$$
$$-1 \leq \mu \leq +1$$

müssen wir, damit ψ überall endlich bleibt, fordern:

$$v_\mu(-1) = 0 \qquad v_\mu(+1) = 0$$
$$v_\lambda(+1) = 0 \qquad v_\lambda(+\infty) = 0\,.$$

Die letzte Bedingung folgt allerdings nicht notwendig aus der Endlichkeit von ψ für $\lambda = \infty$.

Betrachtet man aber die Differentialgleichung (5), so sieht man sofort, daß für $\lambda = \infty$ v_λ sich verhält:

$$\text{entweder wie } v_\lambda = e^{-\sqrt{\gamma}\lambda} \tag{11}$$

$$\text{oder wie } v_\lambda = e^{+\sqrt{\gamma}\lambda} \tag{11a}$$

Im letzteren Falle würde ψ_λ und damit ψ gewiß unendlich für $\lambda = \infty$; deshalb können wir nur (11) benutzen, was also auf die Forderung $v_\lambda(+\infty) = 0$ hinausläuft.

Wir brauchen von den Differentialgleichungen (5) und (6) also nur Eigenfunktionen, und zwar die nullten, weil wir den Grundzustand untersuchen wollen. Bei gegebenem Abstand der Zentren, d. h. bei gegebenem ε, sind A und γ durch die Grenzbedingungen festgelegt. Burrau bestimmte diese A und γ als Funktionen von ε im Falle $k_1 = k_2 = 1$, jedoch mittels ganz anderer Gleichungen mit anderen Grenzbedingungen. Wenn man aber mit unseren Funktionen v_μ und v_λ die Funktionen ψ_λ und ψ_μ für den Fall $k_1 = k_2 = 1$ bestimmt, so ergibt sich, daß diese dann den Burrauschen Grenzbedingungen genügen. Man beweist nämlich leicht aus (5) und (6), daß in der Umgebung von

$\lambda = 1$, v_λ sich verhält wie $\sqrt{\lambda - 1}$ und

in der Umgebung von

$\lambda = \infty$, v_λ sich verhält wie $e^{-\sqrt{\gamma}\lambda}$, daß

andrerseits in der Umgebung von

$$\mu = \mp 1, v_\mu \text{ sich verhält wie } \sqrt{1 \pm \mu} \tag{12}$$

und deshalb zu Funktionen:

$$\sigma_\mu = -\frac{d\psi_\mu}{d_\mu} : \psi_\mu$$

$$\sigma_\lambda = -\frac{d\psi_\lambda}{d_\lambda} : \psi_\lambda$$

führen, die den von Burrau aufgestellten Grenzbedingungen genügen.

Im Falle $k_1 \neq 1$ oder $k_2 \neq 1$ brauchen wir aber für A und γ andere Funktionen von ε. Wir könnten diese bezeichnen mit

$$\underset{k_1 k_2}{A}(\varepsilon) \text{ und } \underset{k_1 k_2}{\gamma}(\varepsilon)\,.$$

Zum Zwecke späterer Betrachtungen empfiehlt es sich mehr die in (9) (10) eingeführten Indizes $\varkappa$ und p zu benützen, und die Funktionen deshalb anzudeuten mit:

$$\underset{\varkappa p}{A}(\varepsilon) \text{ und } \underset{\varkappa p}{\gamma}(\varepsilon)\,.$$

Diese Größen sind von großer Wichtigkeit für unser Problem. Kennt man sie bei gegebenem ε, so wird es möglich sein die (nun wirklich bestehenden) Eigenfunktionen v_μ und v_λ zu konstruieren (auf welchem Wege werden wir später sehen), also auch nach (1) (4) die Ladungsdichte als Funktion der Raumkoordinaten anzugeben, und so das Verhältnis der Gesamtladung links und rechts zu bestimmen.

Wir werden zuerst die Größen $\underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon)$ und $\underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon)$ auffinden, die also einem symmetrischen Problem mit $p = 0$ entsprechen. Sie treten auf in:

$$\frac{d^2}{d\mu^2}\underset{\varkappa\ 0}{(v_\mu)} + \frac{1 + [-\underset{\varkappa 0}{A} + \underset{\varkappa 0}{\gamma}\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2}\underset{\varkappa\ 0}{(v_\mu)} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\underset{\varkappa\ 0}{(v_\lambda)} + \frac{1 + [\underset{\varkappa 0}{A} + 2\varkappa\varepsilon\lambda - \underset{\varkappa 0}{\gamma}\lambda^2](\lambda^2-1)}{(\lambda^2-1)^2}\underset{\varkappa\ 0}{(v_\lambda)} = 0, \tag{14}$$

welche Differentialgleichungen im Besitz nullter Eigenfunktionen sind.

Wenn Burrau bei seiner Rechnung für das H_2^+ Ion auch unseren Weg eingeschlagen, also Funktionen v_μ und v_λ eingeführt hätte, so

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. 29, 52, 1928.

wäre er auf die Differentialgleichung gestoßen:

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + \frac{1 + [-A + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2} v_\mu = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + \frac{1 + [A + 2\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2](\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2-1)^2} v_\lambda = 0 \quad (16)$$

wo die Funktionen A und γ dieselben sind, wie er sie in seinen σ-Gleichungen findet und die er numerisch berechnet hat, und zwar A als Funktion von γ und ε als Funktion von γ. Es ist aber leicht daraus graphisch A und γ als Funktionen von ε zu erhalten. Wiewohl diese in unserer Bezeichnungsweise $\underset{10}{A}(\varepsilon)$ und $\underset{10}{\gamma}(\varepsilon)$ heißen sollten, folgen wir hier (und nur hier, d. h. im Falle $k_1 = k_2 = 1$) der Bezeichnungsweise von Burrau und nennen sie einfach $A(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$. Sie sind aus seinen Tabellen nach obigem als bekannt anzusehen.

Nach Definition von $A(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$ besitzen die Differentialgleichungen (15) und (16) auch Eigenfunktionen, wenn man z. B. nimmt:

$$\varepsilon = \varkappa\varepsilon'$$
$$A = A(\varkappa\varepsilon')$$
$$\gamma = \gamma(\varkappa\varepsilon').$$

Das läßt sich in bezug auf die Differentialgleichungen (13) und (14) auch so lesen: Letztere haben Eigenfunktionen, wenn man in ihnen nimmt:

$$\underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon) = A(\varkappa\varepsilon')$$
$$\underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon) = \gamma(\varkappa\varepsilon')$$
$$\varepsilon = \varepsilon'.$$

Der Grund dafür ist, daß in (13) (14) das Produkt $\varkappa\varepsilon$ auftritt überall dort, wo in (15) (16) ε steht.

Man kann die Funktionen $\underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon)$ und $\underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon)$ also einfach aus den bekannten Kurven $A(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$ ableiten, indem man alle Abszissen mit $\varkappa$ dividiert und die Ordinate ungeändert läßt.

Ist $p \ll \varkappa$, dann ist:

$$\underset{\varkappa p}{A}(\varepsilon) = \underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon) + \left(\frac{d\underset{\varkappa p}{A}}{dp}\right)_{\varkappa 0} dp$$

$$\underset{\varkappa p}{\gamma}(\varepsilon) = \underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon) + \left(\frac{d\underset{\varkappa p}{\gamma}}{dp}\right)_{\varkappa 0} dp$$

Die Differentialquotienten lassen sich (selbst bei beliebigem $\varkappa$ und p) folgendermaßen aus den Differentialgleichungen (5) und (6) bestimmen.

Setzt man in diesen

$$\varepsilon = \varepsilon,\ A = \underset{\varkappa p}{A}(\varepsilon),\ \gamma = \underset{\varkappa p}{\gamma}(\varepsilon),$$

so besitzen sie nach Definition von A und p nullte Eigenfunktionen.

Das ist auch der Fall, wenn man setzt:

$$\varepsilon = \varepsilon$$
$$A = \underset{\varkappa p}{A}(\varepsilon) + \frac{d\underset{\varkappa p}{A}}{dp} dp$$
$$\gamma = \underset{\varkappa p}{\gamma}(\varepsilon) + \frac{d\underset{\varkappa p}{\gamma}}{dp} dp.$$

Die Differentialgleichungen sehen im letzten Falle so aus:

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + \left(K_\lambda + \frac{dK_\lambda}{dp} dp\right) v_\lambda = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + \left(K_\mu + \frac{dK_\mu}{dp} dp\right) v_\mu = 0, \quad (18)$$

haben also die Form:

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + (K_\lambda + L_\lambda\delta) v_\lambda = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + (K_\mu + L_\mu\delta) v_\mu = 0 \quad (20)$$

worin δ ein kleiner Parameter ist.

Ist nun v_μ die Eigenfunktion von (6) und $v_\mu + \eta_\mu\delta$ die nämliche von (20), so findet man bei Vernachlässigung von Termen mit δ^2 und Anwendung von (6) sofort für η_μ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta_\mu}{d\mu^2} + K_\mu\eta_\mu = -L_\mu v_\mu$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\eta_\mu(-1) = 0, \quad \eta_\mu(+1) = 0. \quad (21)$$

Wird diese Gleichung mit v_μ und Gleichung (6) mit η_μ multipliziert, so ergibt sich nach Subtraktion

$$v_\mu \frac{d^2\eta_\mu}{d\mu^2} - \eta_\mu \frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} = -L_\mu v_\mu^2$$

und daraus nach Integration von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$:

$$\int_{-1}^{+1} L_\mu v_\mu^2 d_\mu = \left|\eta_\mu \frac{dv_\mu}{d\mu} - v_\mu \frac{d\eta_\mu}{d\mu}\right|_{-1}^{+1} = 0.$$

Wählt man umgekehrt L_μ so, daß obige Gleichung befriedigt ist, so besitzt die Differentialgleichung (20) eine nullte Eigenfunktion, sobald die Differentialgleichung (6) eine solche hat. Besitzt analog die Differentialgleichung (5) eine nullte Eigenfunktion und wählt man in (19) die „Störungsfunktion" L_λ so, daß

$$\int_1^\infty L_\lambda v_\lambda^2 d\lambda = 0$$

ist, so hat die letztere Differentialgleichung auch wieder eine nullte Eigenfunktion.



Zur Bestimmung von $\frac{dA}{dp}$ und $\frac{d\gamma}{dp}$ (die Indizes $\varkappa$ und p lassen wir der Einfachheit halber vorläufig fort), haben wir also:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dK_\mu}{dp} v_\mu^2 \, d\mu = 0,$$

$$\int_{+1}^{\infty} \frac{dK_\lambda}{dp} v_\lambda^2 \, d\lambda = 0$$

oder ausgeschrieben:

$$-\frac{\partial A}{\partial p}\int_{-1}^{+1} \frac{v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu + 2\varepsilon \int_{-1}^{+1} \frac{\mu}{1-\mu^2} v_\mu^2 \, d\mu + \frac{\partial \gamma}{\partial p}\int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2}{1-\mu^2} v_\mu^2 \, d\mu = 0$$

$$+\frac{\partial A}{\partial p}\int_1^{\infty} \frac{v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda - \frac{\partial \gamma}{\partial p}\int_1^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} v_\lambda^2 \, d\lambda = 0,$$

also:

$$\frac{d}{dp}\left(A_{\varkappa p}\right) = \frac{\varepsilon}{N}\int_1^{\infty} \frac{\lambda^2 v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\mu v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu \qquad (22)$$

$$\frac{d}{dp}\left(\gamma_{\varkappa p}\right) = \frac{\varepsilon}{N}\int_1^{\infty} \frac{v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\mu v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu \qquad (23)$$

mit:

$$N = \int_1^{\infty} \frac{v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda \int_{-1}^{+1} v_\mu^2 \, d\mu + \int_1^{\infty} v_\lambda^2 \, d\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu.$$

Hierin sind v_μ und v_λ eigentlich mit Indizes $\varkappa$ und p zu versehen.

Für das Verhältnis zwischen der gesamten negativen Elektrizität H_1 auf der linken Hälfte (wo $-1 \leqq \mu \leqq 0$) und der auf der rechten Hälfte (H_2), (wo $0 \leqq \mu \leqq +1$) haben wir:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\int_{-1}^{0}\int_1^{\infty}\int_0^{2\pi} \psi^2 (\lambda^2-\mu^2)\, d\mu\, d\lambda\, d\varphi}{\int_0^1\int_1^{\infty}\int_0^{2\pi} \psi^2 (\lambda^2-\mu^2)\, d\mu\, d\lambda\, d\varphi}$$

weil das Raumelement $d\Omega$:

$$d\Omega = c^3 (\lambda^2-\mu^2)\, d\lambda\, d\mu\, d\varphi$$

ist, und der Normierungsfaktor von ψ offenbar herausfällt.

Nach (1), (4) haben wir:

$$\left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\varkappa p} = \frac{\int_{-1}^{0}\int_1^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} (v_\lambda^2 v_\mu^2)_{\varkappa p}\, d\mu\, d\lambda}{\int_0^1\int_1^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} (v_\lambda^2 v_\mu^2)_{\varkappa p}\, d\mu\, d\lambda} =$$

$$= \frac{J + J_1 p}{J' + J_1' p} \qquad (24)$$

wobei:

$$J = \int_{-1}^{0}\int_1^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} (v_\lambda^2 v_\mu^2)_{\varkappa 0}\, d\mu\, d\lambda$$

$$J' = \int_0^1\int_1^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_1 = \int_{-1}^{0}\int_1^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \left|\frac{d}{dp}(v_\lambda^2 v_\mu^2)_{\varkappa p}\right|_{\varkappa 0} d\mu\, d\lambda$$

$$J_1' = \int_0^1\int_1^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

während p^2 vernachlässigt wurde.

Eigentlich wird immer $\left(\frac{p}{\varkappa}\right)^2$ vernachlässigt, wie es dem wirklichen Zweizentrenproblem besser entspricht. Da der Koeffizient von $\frac{p}{\varkappa}$ auch $\varkappa$ enthält, haben wir sofort die Entwicklung nach p ausgeführt.

Da $\left(v_\mu^2\right)_{\varkappa 0}$ dem symmetrischen Problem angehört, ist sie eine gerade Funktion in μ und man sieht sofort, daß

$$J = J' \qquad (25)$$

Zur Berechnung von J_1 und J_1' brauchen wir:

$$\left|\frac{d}{dp}\left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)_{\varkappa p}\right|_{\varkappa 0} = 2\left(v_\lambda^2 v_\mu\right)_{\varkappa 0}\left(\frac{dv_\mu}{dp}\right)_{\varkappa 0} + 2\left(v_\mu^2 v_\lambda\right)_{\varkappa 0}\left(\frac{dv_\lambda}{dv}\right)_{\varkappa 0}, \qquad (26)$$

also:

$$\left(\frac{dv_\mu}{dp}\right)_{\varkappa 0} \text{ und } \left(\frac{dv_\lambda}{dp}\right)_{\varkappa 0}.$$

Dazu betrachten wir die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + K_\mu v_\mu = 0$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + (K_\mu + L_\mu \delta)\, v_\mu = 0$$

mit den Eigenfunktionen v_μ, bzw. $v_\mu + \eta_\mu \delta$, wo für η gilt:

$$v_\mu \frac{d^2 \eta_\mu}{d\mu^2} - \eta_\mu \frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} = - L_\mu v_\mu^2 . \tag{27}$$

Nehmen wir später

$$\delta = dp, \quad L_\mu = \frac{\partial K_\mu}{\partial p},$$

so wird:

$$\eta_\mu = \frac{d v_\mu}{dp} .$$

Vorläufig arbeiten wir aber mit den noch nicht spezialisierten Gleichungen weiter.

Setzt man in (27) für η_μ:

$$\eta_\mu = z v_\mu$$

so hat man für z:

$$\frac{d^2 z}{d\mu^2} + 2 \frac{\frac{d v_\mu}{d\mu}}{v_\mu} \frac{dz}{d\mu} = - L_\mu$$

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{C}{v_\mu^2} - \frac{1}{v_\mu^2} \int L_\mu v_\mu^2 d\mu = \frac{C' - \int\limits_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} .$$

Also nach wiederholter Integration:

$$z = D + \int\limits_{-1}^{\mu} \frac{C' - \int\limits_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} d\mu .$$

Hieraus folgt für η_μ:

$$\eta_\mu = D v_\mu + v_\mu \int\limits_{-1}^{\mu} \frac{C' - \int\limits_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} d\mu . \tag{28}$$

Die Integrationsgrenzen wurden schon so gewählt, daß $\eta(-1) = 0$. Nach (21) soll auch $\eta(+1) = 0$ sein. In (28) würde der Integrand für $\mu = \mp 1$ zwei Unendlichkeitsstellen haben und dort sein:

$$\frac{C'}{v_\mu^2(-1)} \text{ und } \frac{C' - \int\limits_{-1}^{+1} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2(+1)} = \frac{C'}{v_\mu^2(+1)} .$$

Über diese Stellen hinweg integriert würden die Beiträge von der Ordnung

$$\frac{C'}{v_\mu(-1)} \text{ und } \frac{C'}{v_\mu(+1)}$$

[vgl. (12)] und nach Multiplikation mit $v_\mu(-1)$, bzw. $v_\mu(+1)$ würde der zweite Term in (28) für $\mu = +1$ nicht verschwinden. Deshalb muß:

$$C' = 0$$

sein. Auch ist klar, daß, wenn identisch $L_\mu = 0$ ist, auch $\eta_\mu = 0$ sein soll, so daß wir zu nehmen haben:

$$D = 0 .$$

Schließlich ergibt sich also:

$$\eta_\mu = - v_\mu \int\limits_{-1}^{\mu} \frac{\int\limits_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} d\mu .$$

Analog würde für Gleichung (5) mit der Eigenfunktion v_λ und Gleichung (19) mit der Eigenfunktion $v_\lambda + \eta_\lambda \delta$ für η_λ folgen:

$$\eta_\lambda = - v_\lambda \int\limits_{1}^{\lambda} \frac{\int\limits_{1}^{\lambda} L_\lambda v_\lambda^2 d\lambda}{v_\lambda^2} d\lambda.$$

Spezialisieren wir nun wieder dadurch, daß wir

$$d = dp, \; L_\mu = \frac{\partial K_\mu}{dp}, \; L_\lambda = \frac{\partial K_\lambda}{\partial p}$$

und überdies $p = 0$ nehmen, so haben wir nach (8) (7) einzusetzen:

$$L_\mu = \frac{- \left.\frac{\partial A}{\partial p}\right|_{p=0} + \mu^2 \left.\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right|_{p=0}}{1 - \mu^2} + \frac{2 \varepsilon \mu}{1 - \mu^2}$$

$$L_\lambda = \frac{\left.\frac{\partial A}{\partial p}\right|_{p=0} - \lambda^2 \left.\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right|_{p=0}}{\lambda^2 - 1} .$$

Die benötigten Differentialquotienten haben wir für $\varkappa$ und p in (22) (23) gefunden.

Da $(v_\mu^2)_{\varkappa\, 0}$ eine gerade Funktion von μ ist, ist also

$$\left.\frac{\partial A}{\partial p}\right|_{p=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right|_{p=0} = 0 .$$

Wir brauchen also nur zu substituieren:

$$L_\mu = \frac{2 \varepsilon \mu}{1 - \mu^2}, \; L_\lambda = 0$$

und finden:

$$\left.\frac{\partial v_\mu}{\partial p}\right|_{p=0} = \left.\eta_\mu\right|_{p=0} = -v_\mu \int\limits_{-1}^{\mu} \frac{\int\limits_{-1}^{\mu} \frac{2\varepsilon\mu}{1-\mu^2} v_\mu^2\, d\mu}{v_\mu^2}\, d\mu$$

$$\left.\frac{\partial v_\lambda}{\partial p}\right|_{p=0} = \left.\eta_\lambda\right|_{p=0} = 0.$$

Wir haben also nach (26):

$$\left|\frac{d}{dp}\left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)_{\varkappa\, p}\right|_0 = -4\varepsilon v_\mu^2 v_\lambda^2 \int\limits_{-1}^{\mu} \frac{\int\limits_{-1}^{\mu} \frac{\mu v_\mu^2}{1-\mu^2}\, d\mu}{v_\mu^2}\, d\mu$$

mit $\varkappa = \varkappa$, $p = 0$ als Indizes für v_μ und v_λ.

Zerlegen wir diesen Ausdruck mittels einer Konstanten P und einer ungeraden Funktion $U(\mu)$:

$$\left|\frac{d}{dp}\left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)_{\varkappa\, p}\right|_0 = -4\varepsilon v_\lambda^2 v_\mu^2 \left(P + U(\mu)\right),$$

so ist:

$$U(\mu) = \int\limits_0^{\mu} \frac{\int\limits_{-1}^{\mu} \frac{\mu \left(v_\mu^2\right)_{\varkappa 0}}{1-\mu^2}\, d\mu}{\left(v_\mu^2\right)_{\varkappa 0}}\, d\mu$$

und P selber ein Integral von -1 bis 0 statt von 0 bis μ. Wir haben nun:

$$J_1 = -4\varepsilon \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)_{\varkappa 0} \left(P + U(\mu)\right) d\lambda\, d\mu \tag{29}$$

$$J_1' = -4\varepsilon \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{1}^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d\lambda\, d\mu. \tag{30}$$

Wegen (24) (25) ist aber bei Vernachlässigung von p^2:

$$\left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\varkappa\, p} = 1 + \frac{J_1 - J_1'}{J} p.$$

Benutzen wir in J als neue Integrationsvariable: $\mu = -\mu$, so ergibt sich, daß P aus $J_1 - J_1'$ fortfällt und daß die Beiträge beider U sich addieren wegen $U(-\mu) = -U(\mu)$.

Nach Eintragen von (29) (30) bekommen wir also:

$$\left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\varkappa\, p} = 1 + p \underset{\varkappa 0}{D}(\varepsilon)$$

wobei:

$$\underset{\varkappa 0}{D}(\varepsilon) = \frac{8\varepsilon}{N} \int\limits_0^1\int\limits_1^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)_{\varkappa 0} U(\mu)\, d\mu\, d\lambda,$$

also nur aufgebaut ist aus Größen, die dem symmetrischen Falle $(\varkappa, 0)$ angehören.

Wir brauchen offenbar die Eigenfunktionen $(v_\mu)_{\varkappa 0}$ und $(v_\lambda)_{\varkappa 0}$ der Differentialgleichungen (13) und (14), worin wir gesetzt haben:

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

$$\underset{\varkappa 0}{A} = \underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon') = A(\varkappa\varepsilon')$$

$$\underset{\varkappa 0}{\gamma} = \underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon') = \gamma(\varkappa\varepsilon').$$

Für eine numerische Berechnung empfiehlt es sich aber mehr zu den Funktionen $(\psi_\lambda)_{\varkappa 0}$ und $(\psi_\mu)_{\varkappa 0}$ zurückzukehren, wofür wir hatten:

$$(\psi_\mu)^2_{\varkappa 0} = \frac{\left(v_\mu^2\right)_{\varkappa 0}}{1-\mu^2}\,; \quad \left(\psi_\lambda^2\right)_{\varkappa 0} = \frac{\left(v_\lambda^2\right)_{\varkappa 0}}{\lambda^2-1}. \tag{31}$$

Zerlegen wir noch:

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda^2 - 1) + (1 - \mu^2)$$

so können alle Doppelintegrale in Produkte einfacher Integrale transformiert werden und wir gelangen zu:

$$\underset{\varkappa 0}{D}(\varepsilon) = 4\varepsilon \frac{\int\limits_0^1 \psi_\mu^2 U(\mu)\, d\mu \int\limits_1^{\infty} \lambda^2 \psi_\lambda^2\, d\lambda - \int\limits_0^1 \mu^2 \psi_\mu^2 U(\mu)\, d\mu \int\limits_1^{\infty} \psi_\lambda^2\, d\lambda}{\int\limits_0^1 \psi_\mu^2\, d\mu \int\limits_1^{\infty} \lambda^2 \psi_\lambda^2\, d\lambda - \int\limits_0^1 \mu^2 \psi_\mu^2\, d\mu \int\limits_1^{\infty} \psi_\lambda^2\, d\lambda}$$

mit:

$$U(\mu) = \int_0^{\mu} \frac{\int_{-1}^{\mu} \mu \psi_\mu^2 d\mu}{(1-\mu^2)\psi_\mu^2} = d\mu$$

wo wiederum die Indizes $\varkappa$ und o bei ψ_μ und ψ_λ hinzuzudenken sind.

Für $(\psi_\mu)_{\varkappa\,0}$ und $(\psi_\lambda)_{\varkappa\,0}$ haben wir nach (2), (3) bei $\varepsilon = \varepsilon'$ die Gleichungen:

$$(\lambda^2-1)\frac{d^2\psi_\lambda}{d\lambda^2} + 2\lambda\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda} + \left[\underset{\varkappa 0}{A} + 2\varkappa\varepsilon'\lambda - \underset{\varkappa 0}{\gamma}\lambda^2\right]\psi_\lambda = 0$$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\psi_\mu}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d\psi_\mu}{d\mu} + \left[-\underset{\varkappa 0}{A} + \underset{\varkappa 0}{\gamma}\mu^2\right]\psi_\mu = 0,$$

wo wir die Indizes $\varkappa$, o bei ψ_λ und ψ_μ fortgelassen haben.

Führen wir mit Burrau ein:

$$(\sigma_\mu)_{\varkappa\,0} = -\frac{1}{(\psi_\mu)_{\varkappa\,0}}\frac{d}{d\mu}(\psi_\mu)_{\varkappa\,0} \qquad (32)$$

$$(\sigma_\lambda)_{\varkappa\,0} = -\frac{1}{(\psi_\lambda)_{\varkappa\,0}}\frac{d}{d\lambda}(\psi_\lambda)_{\varkappa\,0}, \qquad (33)$$

so bekommen wir, wenn die Indizes $\varkappa$, o vorläufig durch einen Strich bei σ ersetzt werden:

$$\frac{d\sigma_\lambda'}{d\lambda} = \sigma_\lambda'^2 - \frac{\gamma(\varkappa\varepsilon')\lambda^2 - 2(\varkappa\varepsilon' - \sigma_\lambda')\lambda - A(\varkappa\varepsilon')}{\lambda^2-1}$$

$$\frac{d\sigma_\mu'}{d\mu} = \sigma_\mu'^2 + \frac{\gamma(\varkappa\varepsilon')\mu^2 + 2\sigma_\mu'\mu - A(\varkappa\varepsilon')}{1-\mu^2}.$$

Setzt man $\varkappa\varepsilon' = \varepsilon$, so sind die Gleichungen genau die von Burrau bei $\varepsilon = \varepsilon$, und die Lösung ist also:

$$\left.\begin{matrix}(\sigma_\lambda)_{\varkappa\,0} \\ (\sigma_\mu)_{\varkappa\,0}\end{matrix}\right\} \text{ beim Parameter } \varepsilon = \varepsilon' \;=\; \left.\begin{matrix}\sigma_\lambda \\ \sigma_\mu\end{matrix}\right\} \text{ von Burrau}^{1)} \text{ bei } \varepsilon = \varkappa\varepsilon'$$

Die Funktionen im rechten Glied können wir aber nach der von Burrau angegebenen Entwicklungen bestimmen, nämlich

σ_μ von $\mu = 0$ und von $\mu = \pm 1$ aus,
σ_λ von $\lambda = 1$ und von $\lambda = \infty$ aus.

Wir brauchen nur seine A, γ und ε zu nehmen bei $\varepsilon = \varkappa\varepsilon'$.

Sind $(\sigma_\lambda)_{\varkappa\,0}$ und $(\sigma_\mu)_{\varkappa\,0}$ so gefunden, dann folgen aus (32) (33):

$$(\psi^2{}_\mu)_{\varkappa\,0} = e^{-2\int_{-1}^{\mu}(\sigma_\mu)_{\varkappa\,0}d\mu} \qquad (32\text{a})$$

$$(\psi_\lambda{}^2)_{\varkappa\,0} = e^{-2\int_{1}^{\lambda}(\sigma_\lambda)_{\varkappa\,0}d\lambda} \qquad (33\text{a})$$

1) Diese Funktionen sollten in unserer Bezeichnungsweise eigentlich $(\sigma_\lambda)_{1\,0}$ und $(\sigma_\mu)_{1\,0}$ heißen.

und dann aus (31) $(v_\mu^2)_{\varkappa\,0}$ und $(v_\lambda^2)_{\varkappa\,0}$ und so kann man $D_{\varkappa 0}$ bestimmen.

In § 2 wird uns jedoch nur das Verhältnis der Elektronenladung links und rechts interessieren in Zweizentrenproblemen, wo die Zentren zwar eine verschiedene positive Ladung tragen, aber doch immer eine Gesamtladung $+e$ besitzen.

Für solche neutrale Zweizentrenprobleme ist nach (9)

$$\varkappa = \frac{1}{2}.$$

Für derartig kleine Werte von $\varkappa$ wird die Bestimmung von σ_λ und σ_μ bei $\varepsilon = \varkappa\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon'$ recht einfach, wenn wir, wie es in der Kristalltheorie erlaubt ist, $\varepsilon' < 4$ oder 5 wählen.

Für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 1$ fand Burrau $\gamma = 0{,}724$, $A = 0{,}251$. Die σ_μ-Funktion (von Burrau) kann man konstruieren mit den von ihm angegebenen Reihenentwicklungen von $\mu = 0$ aus und von $\mu = \pm 1$ aus. Es ergibt sich, daß die Kurve fast genau eine Gerade ist, und zwar:

$$\sigma_\mu = -A\mu. \qquad (34)$$

Die größte Abweichung hat man bei $\mu = 1$. Dort ist nach Burrau:

$$\sigma_\mu = \sigma_1 = \frac{1}{2}(A-\gamma) = -0{,}236$$

und der Fehler würde hier also $\frac{3A-\gamma}{2} = 0{,}015$ betragen, was relativ äußerst klein ist.

Auch für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 2$ weicht die σ_μ-Kurve wenig von einer Geraden ab. Für $\varepsilon = 2$ fand Burrau nämlich $\gamma = 2{,}202$, $A = 0{,}810$ und der größte Fehler ist dann 0, 11, noch ziemlich klein in bezug auf $\sigma_1 = -0{,}70$.

Die Annäherung von σ_μ mittels einer Geraden (34) wird überall dort zweckmäßig sein, wo

der maximale Fehler $\ll \sigma_1$

also $$\frac{3A-\sigma}{2} \ll \frac{\gamma-A}{2}.$$

Nun fand Burrau schon, daß bei kleinen Werten von γ (d. h. nach den Kurven für γ) bei kleinen Werten von ε immer die Beziehung

$$\gamma = 3A$$

näherungsweise galt, so daß wir die Annäherung (34) für die Burrausche Kurve benützen können, wenn es sich um einen Parameter

$$0 < \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} < 2$$

handelt.

Das gibt nun nach (31) (32a) (33a)

$$\underset{1/2\ 0}{(v_\mu^2)} = e^{-A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)} (1-\mu^2)\, e^{A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)\mu^2}$$

und hiermit findet man leicht:

$$U(\mu) = -\frac{1}{2A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)} \int_0^\mu \frac{e^{A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)(1-\mu^2)} - 1}{1-\mu^2}\, d\mu.$$

Beide Formeln sind in $\underset{1/2\,0}{D(\varepsilon')}$ einzutragen. Dort brauchen wir auch noch die Integrale mit $\underset{1/2\ 0}{(v_\lambda^2)}$. Wie gesagt, ist $\underset{1/2\ 0}{(\sigma_\lambda)}$ bei $\varepsilon = \varepsilon'$ identisch mit der Burrauschen Funktion σ_λ bei $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$.

Für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 1$ fand er: $A = 0{,}251$, $\gamma = 0{,}724$.

Nach der von ihm angegebenen Reihenentwicklung läßt sich die Funktion σ_λ nun darstellen.

Die Ordinate σ_λ ändert sich nur wenig und immer monoton. Diese fängt bei $\lambda = 1$ an mit dem Werte

$$\sigma_{1\lambda} = \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)}{2} - \frac{\gamma\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)}{2} = 0{,}763$$

und nähert sich asymptotisch dem Werte:

$$\sigma_\infty = \sqrt{\gamma\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)} = 0{,}851.$$

Einen gleichartigen Verlauf zeigt die σ_λ-Kurve für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 2$ ($\gamma = 2{,}202$, $A = 0{,}810$, $\sigma_{1\lambda} = 1{,}304$, $\sigma_\infty = 1{,}484$). Auch hier ändert sich σ_λ relativ nur sehr wenig. Wir werden also für das ganze Gebiet

$$0 < \varepsilon' < 4\,,\ \text{also}\ 0 < \frac{\varepsilon'}{2} < 2$$

die Funktion annähernd darstellen durch:

$$\sigma_\lambda = \sigma_\infty - \frac{\sigma_\infty - \sigma_1}{\lambda},$$

die auch monoton verläuft, den richtigen Wert in $\lambda = 1$ gibt und für $\lambda = \infty$ asymptotisch zu σ_∞ geht. Hiermit bekommen wir dann:

$$\underset{1/2\ 0}{(v_\lambda^2)} = e^{2\sigma_\infty}(\lambda^2 - 1)\, \lambda^{2(\sigma_\infty - \sigma_1)}\, e^{-2\sigma_\infty \lambda}$$

und so die in D auftretenden Integrale nach λ. Nach einfacher Herleitung gelangt man dann zu der Formel (wenn wir statt ε' wieder ε schreiben):

$$\underset{1/2\,0}{D(\varepsilon)} = -\frac{4\varepsilon}{A} \frac{\int_0^1 (K-\mu^2)\, e^{A\mu^2} \int_0^\mu \frac{e^{A(1-\mu^2)}-1}{1-\mu^2}\, d\mu\, d\mu}{\int_0^1 (K-\mu^2)\, e^{A\mu^2} d\mu},$$

worin für A zu denken ist: $A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ und:

$$K = \frac{\int_1^\infty \lambda^2 \psi_\lambda^2\, d\lambda}{\int_1^\infty \psi_\lambda^2\, d\lambda} = \frac{\int_1^\infty \lambda^{2(\sigma_\infty - \sigma_1 + 1)}\, e^{-2\sigma_\infty \lambda}\, d\lambda}{\int_1^\infty \lambda^{2(\sigma_\infty - \sigma_1)}\, e^{-2\sigma_\infty \lambda}\, d\lambda}.$$

Zum Zwecke einer numerischen Berechnung führen wir lieber ein endliches Integrationsgebiet ein mittels:

$$\lambda = \frac{1}{t}$$

und bekommen dann:

$$K = \frac{\int_0^1 t^{2(\sigma_1 - \sigma_\infty - 2)}\, e^{-\frac{2\sigma_\infty}{t}}\, dt}{\int_0^1 t^{2(\sigma_1 - \sigma_\infty - 1)}\, e^{-\frac{2\sigma_\infty}{t}}\, dt}.$$

Da $\lambda^2 \geqq 1$ ist $K > 1$ und da $A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ und $\mu^2 < 1$, sehen wir sofort, daß

$$\underset{1/2\,0}{D(\varepsilon)} < 0\,,$$

in Übereinstimmung mit einem vom Verfasser[1]) bewiesenen Theorem, nach welchem die Ladungsdichte in zwei symmetrisch gelegenen Punkten links immer kleiner ist als rechts, wenn links das schwächer positiv geladene Zentrum steht. Dort war das Resultat nur qualitativ, jedoch für beliebige positive Ladungen der Zentren bewiesen. Hier ist unser Ergebnis quantitativ, gilt aber nur dort, wo die Asymmetrie der zentralen Ladungen nicht zu groß ist, so daß $\left(\frac{p}{\varkappa}\right)^2$ zu vernachlässigen war. Nichts steht im Wege in dieser Methode auch noch den Term mit p^2 in Rechnung zu bringen, aber wir möchten darauf der Einfachheit halber verzichten.

§ 2. Berechnen wir nun das Streuvermögen der Atome in den Kristallgittern vom Diamant- und Wurzittyp.

Vorläufig betrachten wir die Gitter von *BeO*, und *C*.

Jedes Atom (z. B. *Be*) steht dann im Zentrum eines Oktaeders, in dessen vier Eckpunkten sich jedesmal ein Atom der anderen Art (z. B. *O*) befindet, aber auch dieses steht im Zentrum eines von vier Atomen erster Art (*Be*) gebildeten Oktaeders. Zwischen diesen Oktaedern befinden sich große Lücken, wie man z. B. an den Abbildungen in Ewalds Buch sehen kann. Das berechtigt uns, die Oktaeder in erster Näherung einzeln zu betrachten.

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. **29**, 52, 1928.

Eigentlich sollte man nicht von „Atomen" *Be*, *O*, usw. sprechen, denn wir nehmen an, daß die Atome all ihre äußeren Elektronen abgeben, wenn sie zu einem Kristallgitter zusammentreten. Die abgegebenen Elektronen sorgen für die Bindung der übriggebliebenen positiven Atomreste. Diese Atomreste sind in den betrachteten Fällen Heliumkonfigurationen, aber außerordentlich verkleinert, wegen der hohen positiven Ladung des Kernes.

Wir werden deshalb diese *K*-Schale in den Kern gezogen denken und betrachten die Atomreste als positive Punktladungen $+p_1 e$ und $+p_2 e$, wenn das Atom ursprünglich in der p_1-ten, bzw. p_2-ten Spalte des periodischen Systems gestanden hat.

in allen Gittern vom Diamant- und Wurzittyp von Grimm und Sommerfeld[1]) vorgeschlagen.

Ein Atomrest erster Art, dessen Ladung $+p_1 e$ war, wird so von 8 Elektronen „besucht", gleichfalls der Atomrest mit Ladung $+p_2 e$.

Die Fig. 1 stellt diese Bindung schematisch dar. Früher nahm Verfasser an, daß die Elektronen jedesmal in Gruppen von zwei auf einer Ellipse liefen. Wir wissen nun nach Schrödinger, daß es solche Bahnen nicht gibt, daß vielmehr die Elektronen räumlich zu verschmieren sind.

Wir möchten annehmen, daß diese Verschmierung jedes Elektrons in erster Näherung wie in einem Zweizentrenproblem stattfinden wird.

Die Frage ist nur, welche Ladungen den Zentren dabei zuzuschreiben sind.

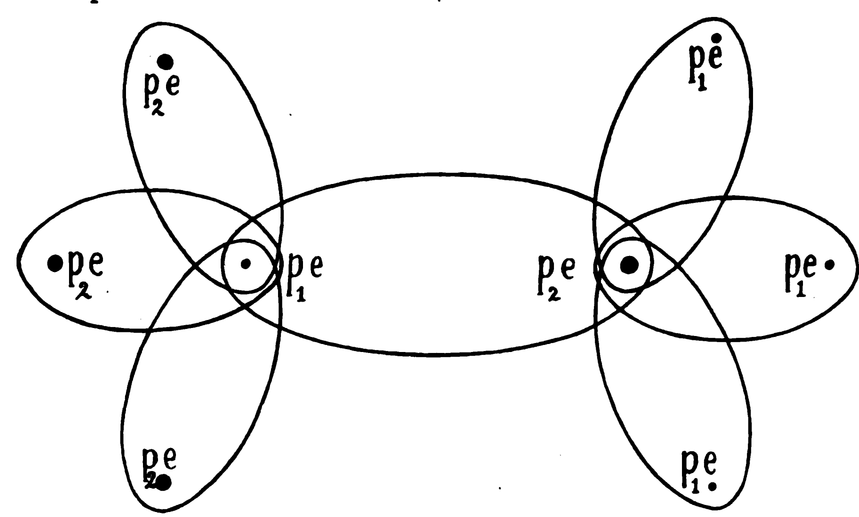


Fig. 1.

Für alle bis jetzt bekannten Kristalle von Diamant- und Wurzittyp ist:

$$4 - p_1 = p_2 - 4, \qquad (35)$$

d. h. die Atome stehen gleich weit von der vierten Spalte entfernt (oder befinden sich in derselben). Es werden aus jedem Paare ungleichartiger Atome also $p_1 + p_2 = 8$ Elektronen frei.

Von diesen sorgen nur 2 Elektronen für die Bindung von beiden Atomresten. Denn das erste Atom gibt zwar p_1 Elektronen ab, hat aber 4 Nachbarn und gibt einem dieser sozusagen $\frac{p_1}{4}$ Elektronen. Umgekehrt empfängt es von einem bestimmten Nachbar auch nur $\frac{p_2}{4}$ Elektronen, so daß wir mit der Gesamtzahl frei gewordener Elektronen in Übereinstimmung bleiben, wenn wir annehmen, daß die Bindung zweier Nachbarn jedesmal durch 2 Elektronen [nämlich $(p_1 + p_2):4$] zustande kommt. Eine solche Bindung wurde

Wir können die wellenmechanisch verteilte Ladung eines einzelnen Elektrons in zwei Hälften zerlegen: in eine Wolke von der Ladung $-w_1 e$ um dem Atomrest R_1 und in eine andere von der Ladung $-w_2 e$ um R_2 (vgl. Fig. 2). Weil wir die ganze Ladung $-e$ so aufteilen wollen, haben wir:

$$w_1 + w_2 = 1\,. \qquad (36)$$

Man kann darum einen plausiblen Wert für w_1 und w_2 einzeln bekommen. Störten die Elektronen einander nicht, so würden wir nehmen:

$$\frac{w_1}{w_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\varkappa'\ p'},$$

wobei $\varkappa' = \frac{p_1 + p_2}{2}$ und $p' = \frac{p_2 - p_1}{2}$, da die Zentren dann ungeschwächt mit ihren Ladungen $+p_1 e$ und $+p_2 e$ auf das Elektron einwirken

1) H. Grimm und A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. **36**, 36, 1926.

würden. Die Elektronen aber stören einander und wenn wir ein einzelnes Elektron betrachten, das die Verbindung zwischen den in Fig. 2 gezeichneten Atomresten R_1 und R_2 unterhält, so sehen wir dieses in der Gegend von R_1 gestört von 6 „fremden" Elektronen, die zwischen R_1 und 3 anderen Atomresten zweiter Art hin- und herlaufen, indem es in der Gegend von R_2 auch von 6 fremden Elektronen (wieder anderen) gestört wird. Seinen Kollegen (denn es gibt ja zwei Elektronen zwischen den gezeichneten R_1 und R_2) stört es sowohl bei R_1 wie bei R_2 und unterwegs. Wir werden nun diese komplizierte Störung in erster Näherung dadurch in Rechnung bringen, daß wir um R_1 eine negative Wolke von der Gesamtladung $-7w_1e$ und um R_2 eine derartige von der Gesamtladung $-7w_2e$ annehmen.

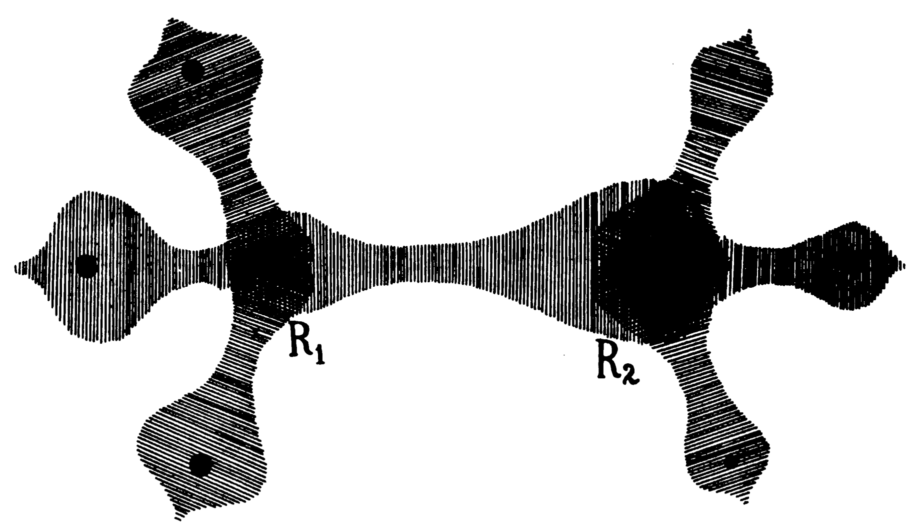


Fig. 2.

Alle Elektrizität die sich innerhalb zweier um R_1 bzw. R_2 (mit $\frac{1}{2}R_1R_2$ als Radius) beschriebenen Kugeln befindet und von den störenden Elektronen herrührt, denken wir uns (nur für die Bahnbestimmung des gesondert betrachteten Elektrons) in R_1 und R_2 zusammengezogen.

Wie groß nun die effektiven Ladungen:

$$(p_1 - 7w_1)e \text{ und } (p_2 - 7w_2)e$$

sind, nach welchen das eine Elektron durchschnittlich von R_1 und R_2 angezogen wird, wissen wir noch nicht, weil ja w_1 und w_2 noch unbekannt sind.

Aber wir können diese effektiven Ladungen zu gleicher Zeit mit w_1 und w_2 aus ein und derselben Gleichung bestimmen. Sie müssen ja so sein, daß das eine Elektron wellenmechanisch von ihnen so verteilt wird, daß die Ladung auf der einen Hälfte wieder $-w_1e$ und die auf der anderen Hälfte wieder $-w_2e$ beträgt.

Das Verhältnis der Ladung links und rechts können wir nach § 1 angeben, denn die Gesamtladung der Zentren beträgt nun, in e als Einheit ausgedrückt:

$$2\varkappa = p_1 + p_2 - 7(w_1 + w_2).$$

Also ist nach (35) und (36):

$$\varkappa = \frac{1}{2},$$

d. h. wir haben es hier mit neutralen Zweizentrenproblemen zu tun, wobei:

$$\varkappa = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{p_2 - p_1 - 7(w_2 - w_1)}{2}. \qquad (37)$$

Das Verhältnis der Ladungen links und rechts ist dabei:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1 - w_2}{w_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\varkappa\; p} = 1 + \underset{1/2\,0}{D}(\varepsilon)\cdot p. \qquad (38)$$

Daraus ergibt sich für w_2 bei Vernachlässigung von p^2

$$w_2 = {}^1/_2 - \frac{p}{4}\underset{1/2\,0}{D}(\varepsilon).$$

Setzt man noch den Wert (37) für p ein, mit $w_1 = 1 - w_2$ und führt man noch eine Größe u ein mittels:

$$p_2 - 4 = 4 - p_1 = u,$$

so daß u im periodischen System den horizontalen Abstand der Atome zu der vierten Spalte mißt, so bekommt man die Formel:

$$w_2 = {}^1/_2 + u\,\frac{\underset{1/2\,0}{D}(\varepsilon)}{7\underset{1/2\,0}{D}(\varepsilon) - 4}. \qquad (39)$$

Nun könnte man aus den Beobachtungen von

Ott[1]) auch einen Ausdruck für w_2 ableiten. Er fand das Streuvermögen ungefähr mit der Annahme neutraler Atome in Übereinstimmung. Nach den Experimenten muß man also schließen auf:

$$p_1 - 8\,w_1 = 0,$$
$$p_2 - 8\,w_2 = 0,$$

woraus z. B.

$$w_2 = \frac{p_2}{8} = \frac{4+u}{8} = {}^1/_2 + \frac{u}{8} \qquad (39\mathrm{a})$$

Wir haben nun ganz auf theoretischem Wege für w_2 den Ausdruck (39) gefunden, worin der Faktor $\frac{D}{7D-4}$ für $D = 0$ bis $D = -\infty$ die Werte von 0 bis $1/7 = 0{,}143$ durchläuft.

Sie ist entstanden aus der Forderung, daß die Verteilung jedes Elektrons den effektiven Ladungen der Zentren entsprechen sollte, welche umgekehrt auch wieder von der Elektronenverteilung abhingen, so daß eine Wechselwirkung entstand, die in den Gleichungen (38) und (37) zum Ausdruck kam. Die Tatsache, daß schon dadurch eine Formel (39) für w_2 entstand, die durch ihre Form und Größe schon einigermaßen an die experimentelle Formel (39a) erinnert, spricht sehr für die Richtigkeit unserer Auffassung.

Nur wenn $\underset{1/2\,0}{D}(\varepsilon)$ nahe an Null herankommt, würde unsere Theorie nicht haltbar sein.

$\underset{1/2\,0}{D}(\varepsilon)$ war eine Funktion des Atomabstandes ($\varepsilon\, a_H$). Ist dieser null ($\varepsilon = 0$), so sind die Zentren zusammengefallen und die Elektronenwolke umhüllt das Doppelzentrum kugelsymmetrisch, so daß dann links und rechts sich gleichviel Ladung befindet, weshalb:

$$\underset{1/2\,0}{D}(0) = 0\,.$$

Für einen Atomabstand, wo $0 < \varepsilon < 4{,}5$ konnten wir $\underset{1/2\,0}{D}(\varepsilon)$ nach der in § 1 gegebenen Methode berechnen. Es ergeben sich dann die in Tabelle 1 gesammelten Werte.

Tabelle 1.

ε	D
0	0
1	−2
2	−4
3	−7
4	−11

Bei der Ableitung unserer Formel (39) wurde die Asymmetrie stets nur bis zur ersten Potenz in Rechnung gebracht. Mathematisch streng gilt die Formel also nur für kleine Werte von u, die offenbar keine physikalische Bedeutung haben, weil $u = 0, 1, 2, 3$ ist. ($u = 4$ tritt nicht auf, da die Edelgase keine Verbindung bilden.)

1) H. Ott, Zeitschr. f. Krist. **61**, 529, 1925; **62**, 217, 1925; Zeitschr. f. Phys. **22**, 212, 1924.

Für solche Werte von u gibt unsere Formel nur eine erste Annäherung. Nach den experimentellen Tatsachen (vgl. 39a) ist es aber sehr wahrscheinlich, daß diese erste Näherung die Hauptrolle spielt.

Wir werden unsere Formel deshalb auch anwenden für $u = 1, 2, 3$.

Für ihre Anwendbarkeit auch für solche u-Werte spricht die Tatsache, daß sie uns immer

$$\tfrac{1}{2} < w_2 < \tfrac{1}{2} + \frac{3}{7} < 1$$
$$0 < w_1 < \tfrac{1}{2}$$

gibt, da w_2 bei $D = -\infty$ und $u = 3$ seinen höchsten Wert $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$ erreicht und dann noch unter 1 bleibt.

Es könnte befremden, daß wir niemals $w_2 = 1$, $w_1 = 0$ finden können, wie es doch bei $\varepsilon = \infty$ nach Hund der Fall sein soll. Der Grund liegt darin, daß dieser asymmetrische Zustand sich nicht von einem symmetrischen aus entwickeln läßt, da bei $\varepsilon = \infty$ das stärker geladene Zentrum alle Elektronenladung an sich zieht, wie wenig seine positive Ladung auch die des anderen Zentrums übertrifft.

Der kleinste Atomabstand (in C) im Kristallgitter beträgt 1,54 A^0. Da der Bohrsche Radius im unangeregten H-Atom, $a_H = 0{,}53$ A^0 ist, hat man hier $\varepsilon = 3$.

Für die meisten Kristallgitter vom Diamant- und Wurzittyp liegt der Atomabstand zwischen 2 A^0 und 2,5 A^0, also beträgt ε dort 4 bis 5.

Man bedenke, daß unsere Formel für w_2 nur Gültigkeit hat für Kristalle, deren Atome auf die K-Schale abbauen, also für BeO, C, weil dann die inneren Schalen, die überdies wegen der großen Kernladung noch sehr kontrahiert werden, mathematisch in dem Kern gedacht werden können.

Für die anderen Kristallgitter, wo beide oder eins der Atome auf die L-Schale abbauen, kann unsere Formel a priori nur eine grobe Annäherung geben. Zwar wird der Einfluß dieser Schalen indirekt in Rechnung gebracht durch den experimentell bestimmten größeren Atomabstand, aber in wieweit es erlaubt ist, dann noch mit reinen Zweizentrenproblemen zu rechnen, läßt sich nicht so einfach untersuchen. Wir werden versuchsweise unsere Formel auch auf jene Kristallgitter anwenden.

Sind die Atome im periodischen System weit von der vierten Spalte entfernt, so muß man in der Entwicklung nach der früheren Größe p auch noch höhere Potenzen von p betrachten. Aus der Definition von D geht aber hervor, daß D sein Zeichen ändern muß, wenn die Zentren vertauscht werden, so daß es nur von ungeraden Potenzen

von p abhängen kann, so daß wir auch noch in solchen Fällen nicht zu schlechte Ergebnisse erwarten können, wenn unsere Formel (39) benutzt wird.

Haben wir nun auf dem beschriebenen Wege w_2 und $w_1 = 1 - w_2$ gefunden, so ist auch das Streuvermögen S der Atome bekannt. Das Verhältnis ist offenbar:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{Z_1 - p_1 + 8 w_1}{Z_2 - p_2 + 8 w_2}$$

wo Z_1 und Z_2 die Ordnungszahlen der Atome im periodischen System sind, so daß Zähler und Nenner im rechten Glied sozusagen die Elektronenzahlen angeben.

Wir haben nun für die in Tabelle 2 erwähnten Kristalle die Werte für S_1/S_2 nach Formel (39) berechnet. Vollständigkeitshalber fügen wir noch die aus der früheren Kosselschen Bindungstheorie folgende hinzu. Diese berechnet man mit:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{Z_1 - p_1}{Z_2 - p_1},$$

weil Kossel annahm, daß die p_1 äußeren Elektronen vom ersten Atom die äußere Schale des anderen Atoms zu einer vollständigen Edelgasschale ergänzen. Die benutzten Atomabstände findet man in Å-Einheiten in Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen, 5. Aufl., 1. Ergänzungsband, S. 393, 396, 397.

Kristall	ε	$-D$	u	w_2	w_1	S_1/S_2 Verfasser	S_1/S_2[1]) Exper.	S_1/S_2 Kossel
Diamant C	3	7	0	0,5	0,5	1	1	0,2
Silicium Si	4,5	14	0	0,5	0,5	1	1	0,56
Zinkblende ZnS	4,5	14	2	0,774	0,226	1,84	1,9	1,56
AlN	3,6	9	1	0,634	0,366	1,83	1,8—2,3	1
Carborund SiC	3,6	9	0	0,5	0,5	2,33	2,33	1
BeO	3,1	7,5	2	0,766	0,234	0,48	0,5—0,67	0,2

Die befriedigende Übereinstimmung zwischen unseren theoretischen Werten und den experimentellen Tatsachen spricht sehr für die Richtigkeit der Grimm-Sommerfeldschen Auffassung des Bindungsprozesses, wenn diese nur nach obigem in Verbindung mit der Wellenmechanik gebracht wird. Daß hier wirklich ein Walten der Wellenmechanik statt der älteren Quantentheorie ans Licht tritt, sieht man am deutlichsten bei ZnS. Dafür fand Verfasser[2]) früher nach der alten Theorie: $S_1/S_2 = 2{,}36$ — 2,38, was damals zu dem Schluß führte, daß etwas in der Auffassung unrichtig sein mußte (S. 303). Offenbar war die Quantentheorie selber schuld daran und es konnte nur mittels der Wellenmechanik Übereinstimmung mit der Erfahrung erhalten werden.

Ohne die aus Tabelle 2 hervorgehende Übereinstimmung konnte es schon eine Stütze der Theorie heißen, daß wir für „mathematisch" kleine Werte von u eine Formel für w_2 bekamen, die bei den gewöhnlichen Atomabständen in Kristallen ($\varepsilon = 3$ bis 5) durch ihre Form und Größe an die experimentell abgeleitete Formel (39a) erinnerte.

Utrecht, 31. Dezember 1927.

(Eingegangen 2. Januar 1928.)

1) H. Ott l. c.
2) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. **27**, 302, 1926.

Über die Brownsche Bewegung.

Von
Kulesh Ch. Kar und Mohinimohan Ghosh.

Im Jahre 1906 leitete Einstein[1]) statistisch eine Formel für den quadratischen Mittelwert des von einem Brownschen Teilchen in einer bestimmten Zeit erreichten Abstandes ab, die nachher akzeptiert worden ist. Im demselben Jahre hat Smolukowski[2]) eine davon verschiedene Formel statistisch abgeleitet, die sich von der Einsteinschen Formel durch den Zahlenfaktor $\frac{64}{27}$ unterscheidet. Später haben Langevin[1]) und Einstein und Hopf[2]) die Einsteinsche Formel dynamisch abgeleitet. In dieser Arbeit leiten wir die Einsteinsche Formel für die Brownsche Bewegung her, durch die von einem der Verfasser entwickelte Theorie[3]) der Bewegung eines Teilchens unter periodisch wiederholten Impulsen.

1) Einstein, Ann. d. Phys. **19**, 371, 1906.
2) Smolukowski, Ann. d. Phys. **21**, 756, 1906.

1) Langevin, Compt. rend. **146**, 530, 1908.
2) Einstein u. Hopf, Ann. d. Phys. **33**, 1105, 1910.
3) K. C. Kar, Physik. Zeitschr. **24**, 63, 1923.

Die Schwingung eines gedämpften Teilchens ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \varepsilon^2 x = 0. \tag{1}$$

Wenn die Bewegung durch die Anfangsgeschwindigkeit hervorgerufen ist, ist ihre Lösung

$$x_t = \frac{u_{t'}}{p} e^{-b(t-t')} \sin p(t-t'), \tag{2}$$

wo $p^2 = \varepsilon^2 - b^2$ und $u_{t'}$ die zurzeit $t = t'$ verliehene Geschwindigkeit.

Für die auf die x-Richtung bezogene Brownsche Bewegung eines Teilchens gilt nun die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} = 0, \tag{3}$$

wo $2b = \frac{6\pi\xi a}{m}$ und ξ den Reibungskoeffizienten des Suspensionsmittels, m die Masse, a den Radius des Teilchens bedeuten.

Die Lösung von (3) ist offenbar

$$x_t = \frac{u_{t'}}{ib} e^{-b(t-t')} \sin ib(t-t') \tag{4}$$

oder

$$x_t = \frac{u_{t'}}{2b}(1 - e^{-2b(t-t')}) \tag{5}$$

und daher

$$\dot{x}_t = u_{t'} \cdot e^{-2b(t-t')}. \tag{6}$$

Wenn infolge der Zusammenstöße mit den umgebenden Molekülen ein periodischer Impuls auf ein Brownsches Teilchen wirkt, jedesmal im Zeitmoment $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots n\tau$, so werden

$$x_{n\tau} = \frac{1}{2b}[u_n(1 - e^{-2bn\tau}) + u_{n-1}(1 - e^{-2b(n-1)\tau}) + \cdots + u_1(1 - e^{-2b\tau})] \tag{7}$$

und

$$\dot{x}_{n\tau} = u_n e^{-2bn\tau} + u_{n-1} e^{-2b(n-1)\tau} + \ldots + u_1 e^{-2b\tau} + u_0 \tag{8}$$

Nimmt man die Scharmittelwerte für alle Brownschen Teilchen, nämlich

$$\overline{u_n u_{n-1}} = \overline{u_n u_{n-2}} = \ldots = 0,$$

so hat man durch Quadrierung von Gleichung (7) und (8)

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{1}{4b^2}[\overline{u_n^2}(1 - e^{-2bn\tau})^2 + \overline{u_{n-1}^2}(1 - e^{-2b(n-1)\tau})^2 + \cdots + \overline{u_1^2}(1 - e^{-2b\tau})^2] \tag{9}$$

und

$$\overline{\dot{x}^2_{n\tau}} = \overline{u_n^2} e^{-4bn\tau} + \overline{u_{n-1}^2} \cdot e^{-4b(n-1)\tau} + \ldots + \overline{u_1^2} e^{-4b\tau} + \overline{u_0^2}. \tag{10}$$

Nehmen wir $\overline{u_n^2} = \overline{u_{n-1}^2} = \ldots = \overline{u_0^2}$, so haben wir

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{\overline{u_n^2}}{4b^2}\left[n - 2 \cdot \frac{1 - e^{-2b(n+1)\tau}}{1 - e^{-2b\tau}} + \frac{1 - e^{-4b(n+1)\tau}}{1 - e^{-4b\tau}} + 1\right] \tag{11}$$

und

$$\overline{\dot{x}^2_{n\tau}} = \overline{u_n^2} \cdot \frac{1 - e^{-4b(n+1)\tau}}{1 - e^{-4b\tau}}. \tag{12}$$

Nach (12) folgt daraus

$$m\overline{\dot{x}^2_{n\tau}} = KT = m\overline{u_n^2} \cdot \frac{1 - e^{-4b(n+1)\tau}}{1 - e^{-4b\tau}} \tag{13}$$

kombiniert man Gleichung (11) und (13) um $\overline{u_n^2}$ zu eliminieren, so hat man

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{KT}{4mb^2}\left[(n+1) \cdot \frac{1 - e^{-4b\tau}}{1 - e^{-4b(n+1)\tau}} - 2 \cdot \frac{1 + e^{-2b\tau}}{1 + e^{-2b(n+1)\tau}} + 1\right] \tag{14}$$

Wenn n unendlich groß ist, ist

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{KT}{4mb^2}[(n+1) \cdot (1 - e^{-4b\tau}) - 2(1 + e^{-2b\tau}) + 1]. \tag{15}$$

Nimmt man $4b\tau$ sehr klein gegen 1, so wird

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{KT}{4mb^2}(n+2) \cdot 4b\tau = \frac{KT}{mb} \cdot n\tau. \tag{16}$$

Setzen wir $2b = \frac{6\pi\xi a}{m}$ und $n\tau = t$, so erhalten wir die Einsteinsche Formel

$$\overline{x_t^2} = \frac{KT}{3\pi\xi a} t. \tag{17}$$

Kalkutta, Physikalisches Laboratorium, Presidency College, November 1927.

(Eingegangen 29. November 1927.)

Zur Feldtheorie von Elektrizität und Gravitation.

Von Leopold Infeld.

Die vorliegende Abhandlung versucht eine verallgemeinerte Weltgeometrie anzugeben, die zu einer neuen Theorie von Gravitation und Elektrizität führen soll. Sie stützt sich auf die Einsteinsche Idee der Einführung unsymmetrischer Komponenten der Parallelverschiebung[1]).

§ 1. Mathematische Vorbemerkungen[2]).

Es sei ein n-dimensionales Kontinuum gegeben mit den Komponenten der Parallelverschiebung Γ_{ik}^{l}. Die Symmetrie der Γ_{ik}^{l}, also auch die Gültigkeit des „Parallelogrammgesetzes" wird vorläufig nicht vorausgesetzt. Die Komponenten eines Vektors A^i erfahren bei Parallelverschiebung um dx^i, in einem gegebenen Koordinatensystem, eine Änderung gemäß der Relation:

$$dA^l = -\Gamma_{ik}^{l} A^i dx^k. \tag{1}$$

Wenn das Γ_{ik}^{l}-Feld gegeben ist, so können auf bekannte Weise die Ableitungen irgendwelcher Tensoren bestimmt werden. Dies legt den Gedanken nahe, die Komponenten der Parallelverschiebung durch gewisse Tensoren und ihre Ableitungen festzulegen.

Es sei ein beliebiger symmetrischer Tensor $\overline{g_{ik}}$ gegeben, dessen (in den Indizes i und k symmetrische) Ableitungen

$$\frac{\partial \overline{g_{ik}}}{\partial x^l} - \overline{g_{is}}\Gamma_{kl}^{s} - \overline{g_{sk}}\Gamma_{il}^{s} = \overline{Q_{ikl}} \tag{2}$$

sind. Diese $\frac{1}{2} n^2 (n+1)$ Gleichungen (2) genügen aber nicht, um aus ihnen die n^3 Komponenten Γ_{ik}^{l} zu bestimmen. Es lassen sich die noch fehlenden $\frac{1}{2} n^2 (n-1)$ Gleichungen aufstellen, wenn die Ableitungen $\overline{S_{ikl}}$ eines beliebigen (z. B. kovarianten) antisymmetrischen Tensors $\overline{\varphi_{ik}}$ bekannt sind. Es seien dies die Gleichungen:

$$\frac{\partial \overline{\varphi_{ik}}}{\partial x^l} - \overline{\varphi_{is}}\Gamma_{kl}^{s} - \overline{\varphi_{sk}}\Gamma_{il}^{s} = \overline{S_{ikl}} \tag{3}$$

in denen $\overline{S_{ikl}}$ in den Indizes i und k antisymmetrisch sind.

Es folgt aus den Gleichungen (2) und (3), daß die Kenntnis der kovarianten Ableitungen eines beliebigen symmetrischen und eines beliebigen antisymmetrischen Tensors zur Bestimmung des Γ_{ik}^{l}-Feldes führt.

Rein formal lassen sich die Gleichungen (2) und (3) in eine Gleichung

$$\frac{\partial \overline{\gamma_{ik}}}{\partial x^l} - \overline{\gamma_{is}}\Gamma_{kl}^{s} - \overline{\gamma_{sk}}\Gamma_{il}^{s} = \overline{P_{ikl}} \tag{4}$$

zusammenfassen, wo

$$\overline{\gamma_{ik}} = \overline{g_{ik}} + \overline{\varphi_{ik}} \tag{5}$$

und

$$\overline{P_{ikl}} = \overline{Q_{ikl}} + \overline{S_{ikl}}. \tag{6}$$

Umgekehrt: Aus den Gleichungen (4) können immer die Gleichungen (2) und (3) gewonnen werden.

Die durch (2) und (3) bestimmten Γ_{ik}^{l} sind keine Tensorkomponenten. Es können aber aus ihnen Tensoren abgeleitet werden. Die Transformationsgleichungen für Γ_{ik}^{l} bei einem Übergang zu einem gestrichenen System lauten:

$$\Gamma'^{l}_{ik} = \Gamma_{st}^{m} \frac{\partial x'^l}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} - \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^s \partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \tag{7}$$

Wenn wir also $J_{ik}^{\cdot\cdot l}$ durch die Gleichung

$$J_{ik}^{\cdot\cdot l} = \Gamma_{ik}^{l} - \Gamma_{ki}^{l} \tag{8}$$

definieren, so folgt aus (7), daß $J_{ik}^{\cdot\cdot l}$ ein in den Indizes i und k antisymmetrischer Tensor ist. Endlich bilden wir noch auf bekannte Weise den Riemannschen Tensor

$$R_{ikl}^{m} = -\frac{\partial \Gamma_{ik}^{m}}{\partial x^l} + \Gamma_{sk}^{m}\Gamma_{il}^{s} + \frac{\partial \Gamma_{il}^{m}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^{s}\Gamma_{sl}^{m} \tag{9}$$

und daraus durch Verjüngung:

$$R_{ikl}^{l} = R_{ik} = -\frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial x^l} + \Gamma_{sk}^{l}\Gamma_{il}^{s} + \frac{\partial \Gamma_{il}^{l}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^{s}\Gamma_{sl}^{l} \tag{10}$$

§ 2. Das Γ_{ik}^{l}-Feld unserer Weltgeometrie.

Um die Komponenten der Parallelverschiebung unserer vierdimensionalen Welt zu bestimmen, muß zunächst irgendeine Wahl eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors getroffen werden, sodann müssen die Ableitungen dieser Tensoren gegeben sein. Nun liegt der Gedanke nahe, den metrischen Fundamentaltensor g_{ik} als den symmetrischen Tensor, die elektromagnetische Feldstärke φ_{ik} als den antisymmetrischen Tensor zu wählen. Werden mit Q_{ikl} und S_{ikl} die Ableitungen dieser Tensoren bezeichnet, so nehmen die Gleichungen (2) und (3) die folgende Form an:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{is}\Gamma_{kl}^{s} - g_{sk}\Gamma_{il}^{s} = Q_{ikl}, \tag{11}$$

1) A. Einstein, Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1925, S. 414—419.

2) Vgl. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül. Berlin, Julius Springer. 1925, II. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, Bd. 8 „American Math. Soc. Coll. Publ." 1927.

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} - \varphi_{is}\Gamma^s_{il} - \varphi_{sk}\Gamma^s_{il} = S_{ikl}. \quad (12)$$

Um aus diesen $40 + 24 = 64$ Gleichungen die Komponenten Γ^l_{ik} berechnen zu können, müssen vorher die Komponenten Q_{ikl} und S_{ikl} angegeben werden.

Der Wert von Q_{ikl} hängt aufs engste mit der Änderung zusammen, die die Länge eines Maßstabes bei einer Verschiebung erfährt. Die Möglichkeit der Ausführung irgendwelcher Messungen stützt sich aber in der allgemeinen Relativitätstheorie auf das folgende Postulat[1]): „Zwei starre Stäbe, die einander gleich sind, bleiben immer einander gleich, d. h. wir können jedem starren Stabe eine Zahl zuordnen, die seine Länge ausdrückt". Aus diesem Postulate geht hervor, daß auch hier, wie in der Riemannschen Geometrie

$$Q_{ikl} = 0 \quad (13)$$

gesetzt werden muß.

Für S_{ikl} wäre aber der analoge Ansatz $S^{ikl} = 0$ unmöglich, da $S_{ik}^{\cdot\cdot k}$ also auch der Stromvektor immer gleich Null sein müßte, was im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden soll. Die in § 1 entwickelte Geometrie lieferte uns den Tensor dritter Stufe $J_{ik}^{\cdot\cdot l}$, der wie $S_{ik}^{\cdot\cdot l}$ in den Indizes i und k antisymmetrisch ist. Es soll also für den Tensor $S_{ik}^{\cdot\cdot l}$ der möglichst einfache Ansatz gemacht werden:

$$S_{ik}^{\cdot\cdot l} = J_{ik}^{\cdot\cdot l} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}. \quad (14)$$

Man erhält dann zur Bestimmung der Γ^l_{ik} folgende 64 Gleichungen:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{is}\Gamma^s_{kl} - g_{sk}\Gamma^s_{il} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} - \varphi_{is}\Gamma^s_{kl} - \varphi_{sk}\Gamma^s_{.il} = g_{sl}J_{ik}^{\cdot\cdot s} = J_{ikl}. \quad (16)$$

§ 3. Folgerungen.

1. Im speziellen Falle, wenn kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist, erhält man aus (16):

$$J_{ik}^{\cdot\cdot l} = 0; \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki} = 0. \quad (17)$$

Aus (15) und (17) folgt, daß bei Abwesenheit des elektromagnetischen Feldes der Fall der Riemannschen Geometrie mit symmetrischen Komponenten der Parallelverschiebung vorliegt.

2. Aus den Gleichungen (16) geht die geometrische Interpretation des Stromvektors J_i hervor. Man erhält nämlich durch Verjüngung von $J_{ik}^{\cdot\cdot l}$ in den Indizes k und l:

$$J_i = J_{ik}^{\cdot\cdot k} = \frac{\partial \varphi_{i.}^{k}}{\partial x^k} + \varphi_{i.}^{s}\Gamma^k_{sk} - \varphi_{s.}^{k}\Gamma^s_{ik}. \quad (18)$$

Die Maxwellschen Gleichungen verlieren in unserer Weltgeometrie ihre einfache Form. Die Gleichung (18) vereinfacht sich, wenn wir die Rechnung nur in erster Annäherung ausführen, d. h. wenn wir voraussetzen, daß die Abweichungen der g_{ik} von den Werten, die dieser Tensor in der speziellen Relativitätstheorie annimmt, und daß weiter die Größen $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$, Γ^l_{ik}, $J_{ik}^{\cdot\cdot l}$, φ_{ik} sehr klein sind, so daß ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Man erhält dann aus (18) die Maxwellschen Gleichungen in der einfachen Form:

$$\frac{\partial \varphi_{i.}^{k}}{\partial x^k} = J_{ik}^{\cdot\cdot k} = J_i. \quad (19)$$

3. Aus dem Tensor J_{ikl} kann ein antisymmetrischer Tensor dritter Stufe T_{ikl} auf folgende Weise gebildet werden:

$$T_{ikl} = J_{ikl} + J_{kli} + J_{lik}. \quad (20)$$

Nach Ausrechnung erhält man:

$$T_{ikl} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^k} + \varphi_{sl}J_{ik}^{\cdot\cdot s} + \varphi_{si}J_{kl}^{\cdot\cdot s} + \varphi_{sk}J_{li}^{\cdot\cdot s}, \quad (21)$$

oder in der oben beschriebenen Annäherung:

$$T_{ikl} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^k}. \quad (22)$$

§ 4. Die Differentialgleichungen für g_{ik} und φ_{ik}.

Aus den Gleichungen (15) und (16) folgen die Γ^l_{ik} Werte für gegebene g_{ik} und φ_{ik}. Es sollen jetzt die Differentialgleichungen angegeben werden, die zur Bestimmung der Tensoren g_{ik} und φ_{ik} in materiefreien Räumen führen.

Im Anschluß an die Riemann-Einsteinsche Weltgeometrie soll die Aufstellung eines möglichst einfachen Ansatzes versucht werden, und zwar:

$$R_{ik} = 0. \quad (23)$$

Zwecks Berechnung von (23) wollen wir zunächst die Γ^l_{ik} aus (15) bestimmen. Man erhält:

$$g_{ls}\Gamma^s_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{ks}J_{il}^{\cdot\cdot s} + g_{is}J_{kl}^{\cdot\cdot s} + g_{ls}J_{ik}^{\cdot\cdot s}\right) \quad (24)$$
$$= [ik, l] + \frac{1}{2}(J_{ilk} + J_{kli} + J_{ikl})$$

1) L. Infeld, Sur la mésure du temps et de l'espace dans la physique classique et dans la théorie de la relativité (II). C. R. Soc. Polon. de Phys. 3; 2.



und daraus:

$$\Gamma^l_{ik} = \{ik,l\} + \frac{1}{2}(J^{\ l}_{i\cdot k} + J^{\ l}_{k\cdot i} + J^{\cdot\cdot l}_{ik}), \quad (25)$$

oder unter Berücksichtigung von (16) in der oben beschriebenen Annäherung:

$$\Gamma^l_{ik} = \{ik,l\} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^s}\delta^{sl} + \frac{\partial \varphi_{k.}^{\ \ l}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{i.}^{\ \ l}}{\partial x^k}\right). \quad (26)$$

δ^{ik} ist gleich den Werten, die g^{ik} in der speziellen Relativitätstheorie annimmt.

Die Spaltung der R_{ik} in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil unter Vernachlässigung der Glieder von höherer Ordnung ergibt:

$$R_{ik} + R_{ki} = -\frac{\partial(\Gamma^s_{ik} + \Gamma^s_{ki})}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^s_{ks}}{\partial x^i} = 0 \quad (27)$$

$$R_{ik} - R_{ki} = -\frac{\partial(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki})}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ks}}{\partial x^i} = 0. \quad (28)$$

Indem man in (27) die Werte Γ^l_{ik} aus (26) einsetzt und die Relation

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\{is,s\} = \frac{\partial}{\partial x^i}\{ks,s\} \quad (29)$$

berücksichtigt, erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki}) = -\frac{\partial}{\partial x^s}\{ik,s\} + \frac{\partial}{\partial x^k}\{is,s\} = 0 \quad (30)$$

die mit der entsprechenden Gleichung der Einsteinschen Gravitationstheorie identisch ist.

Aus (28) folgt nach Berechnung

$$\frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki}) = \frac{1}{2}\left(\delta^{ls}\frac{\partial^2 \varphi_{ki}}{\partial x^l \partial x^s} + \frac{\partial J_i}{\partial x^k} - \frac{\partial J_k}{\partial x^i}\right) = 0. \quad (31)$$

Aus Gleichung (30) und (31) geht hervor, daß das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld (in erster Approximation) voneinander unabhängig sind, da die Gleichungen (30) die φ_{ik} und die Gleichungen (31) die g_{ik} nicht enthalten.

Die Gleichungen (31) bilden eine Folgerung der Maxwellschen Gleichungen. In der Tat, ersieht man gleich, daß aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_{i.}^{\ \ k}}{\partial x^k} = J_i \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad (32)$$

die Gleichungen (31) erhalten werden können. Aus den erhaltenen Gleichungen (19) und (31) läßt sich aber auf die Gültigkeit von (32) nicht schließen. Das zweite Maxwellsche Gleichungssystem kann in den Symbolen unserer Weltgeometrie (vgl. § 3) durch die Gleichung

$$T_{ikl} = 0 \quad (33)$$

ausgedrückt werden. Wird also unsere Weltgeometrie durch die Gleichungen (33) beschränkt, so erhält man nicht nur eine Folgerung des zweiten Maxwellschen Gleichungssystems, sondern das zweite Maxwellsche Gleichungssystem selbst.

Den Inhalt der Theorie bilden also die 80 Gleichungen (15), (16) und (23), die zur Bestimmung der 80 Unbekannten führen sollen.

Man gelangt zu einem System von 84 Gleichungen (die das Feld überbestimmen), wenn auch die Erfüllung von (33) verlangt wird.

Zusammenfassung.

Die Theorie, deren vorläufige Skizze hier entwickelt wurde, stützt sich auf folgende Voraussetzungen:

1. Die Komponenten der Parallelverschiebung sind im allgemeinen Falle nicht symmetrisch.
2. Die Länge eines Stabes wird durch den Transport nicht geändert.
3. Die Ableitungen $(\varphi_{ik})_l$ der elektromagnetischen Feldstärke sind:

$$(\varphi_{ik}) = g_{sl}(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki}) = J_{ikl},$$

$J^{\cdot\cdot k}_{ik} = J_i$ stellt uns dann den Stromvektor dar.

4. Im materiefreien Felde gilt die Gleichung:

$$R_{ik} = 0.$$

Aus diesen Voraussetzungen folgen die Einsteinschen Gravitationsgleichungen und die Maxwellschen Gleichungen in erster Approximation.

Seminar für theoretische Mechanik an der Universität Warschau.

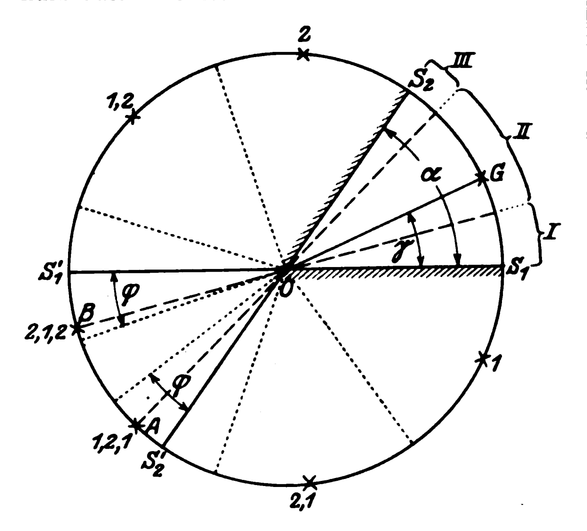
(Eingegangen 20. Januar 1928.)

Die Bilder im Winkelspiegel.

Von H. Maurer.

Herr T. Oryng kündigt in der Physik. Zeitschr. **29**, 41, 1928 eine ausführliche Arbeit über die Anzahl der Bilder im Winkelspiegel an. Es ist anzunehmen, daß diese Arbeit inhaltlich einen Teil meiner Arbeit „Über die Theorie des Winkelspiegels" darstellen wird, die ich im „Archiv der Mathematik und Physik" 2. Reihe Teil IX, 1890, S. 1—17 veröffentlicht habe. Ich sage einen Teil, da Herr Oryng nur von der Anzahl entstehender Bilder eines Lichtpunktes im Winkelspiegelraum spricht, während ich außerdem die Frage behandelt habe, wieviele von diesen geometrisch entstehenden Bildern man von jedem Augpunkte aus sehen kann. Denn nur in einem Spezialfall kann man alle geometrisch entstehenden Bilder

von jedem Ort im Winkelspiegelraum sehen; und in anderen Fällen gibt es überhaupt keinen Augpunkt, von dem aus alle entstehenden Bilder erblickt werden können. Ich möchte deshalb die Ergebnisse jener alten, vergessenen Arbeit hier kurz zusammenstellen.



Es sei (s. Figur) $S_1OS_2 = \alpha$ der Winkelraum vor beiden Spiegeln. Der zu spiegelnde Punkt G habe vom Spiegel S_1 den Winkelabstand γ; und es sei $\gamma \leqq \alpha - \gamma$.

Die zuletzt an S_1 gespiegelten Bilder haben von S_1 aus in den Raum hinter S_1 hinein die Winkelabstände γ, $2\alpha - \gamma$, $2\alpha + \gamma$, $4\alpha - \gamma$, $4\alpha + \gamma$ usw., die zuletzt von S_2 gespiegelten von S_2 in den Raum hinter S_2 hinein die Winkelabstände $\alpha - \gamma$, $\alpha + \gamma$, $3\alpha - \gamma$, $3\alpha + \gamma$ usw. In den Raum hinter beiden Spiegeln $S'_1\,OS'_2$ — er heiße der tote Raum — fallen stets nur 2 Bilder A und B. Die Geraden AO und BO, über O verlängert, teilen den Raum S_1OS_2 in 3 Sektoren I II III, in denen ein Auge verschieden viele Bilder $s_1\, s_2\, s_3$ sieht.

Die Anzahl n der geometrisch entstehenden Bilder hängt von den Winkeln γ und α in der Art ab, daß man zu α zwei Größen p und φ zu bestimmen hat aus der Gleichung $180^0 = p\alpha + \varphi$, wo p eine ganze Zahl und $0 \leqq \varphi < \alpha$ ist.

Die folgende Tabelle gibt für die zu unterscheidenden Beziehungen zwischen φ und γ, die von p abhängigen Anzahlen n der entstehenden Bilder, und die Anzahlen $s_1\, s_2\, s_3$ der in den drei Sektoren I II III sichtbaren Bilder, wobei für jeden Fall ein Beispiel angegeben ist. Die Tabelle ist im allgemeinen ohne weiteres verständlich; nur die Sonderfälle bedürfen einer gewissen Erläuterung.

Im Fall $\varphi = 0$ ist α ein geradzahliger Teil des Kreisumfangs. Dann decken sich die beiden in den toten Raum fallenden Bilder Punkt für Punkt, wo immer der gespiegelte Gegenstand liegt. Der mittlere Sektor II verschwindet. Dieser Fall ist der einzige, in dem man alle entstehenden Bilder von jedem Ort des Spiegelwinkelraumes aus sieht.

Die in den anderen Sonderfällen erwähnten halben Bilder bedeuten, daß ein Bild genau auf einen Rand des toten Sektors fällt, also ein Randsektor I bzw. III verschwindet. Denkt man sich in solchem Fall ein zu spiegelndes Körperelementchen, so entsteht von ihm im betreffenden Rand des toten Raumes zunächst ein ganzes Bild,

Anzahl der Bilder beim Spiegelwinkel α und Lagenwinkel γ.

$180 = p\alpha + \varphi$, p = ganze Zahl, $0 \leqq \varphi < \alpha$; $\gamma \leqq \alpha - \gamma$

Beziehung zwischen φ, γ und $(\alpha - \gamma)$	Gesamtzahl n der Bilder	Anzahl sichtbarer Bilder im Sektor I	Sektor II	Sektor III	Beispiele α_0	φ_0	γ_0	p	n
Grenzfall $\varphi = 0$	$2p - 1$ [1])	$2p - 1$	Sektor = 0	$2p - 1$	60	0	beliebig	3	5
$0 < \varphi < \gamma$	$2p$	$2p - 1$	$2p$	$2p - 1$	85	10	25	2	4
Sonderfall $\varphi = \gamma$	$2p + 1/2$, p gerade	Sektor = 0	$2p + 1/2$	$2p + 1/2 - 1$	75	30	30	2	$4\frac{1}{2}$
	$2p + 1/2$, p ungerade	$2p + 1/2 - 1$	$2p + 1/2$	Sektor = 0	55	15	15	3	$6\frac{1}{2}$
$\gamma < \varphi < \alpha - \gamma$	$2p + 1$, p gerade	$2p + 1$	$2p$	$2p - 1$	40	20	5	4	9
	$2p + 1$, p ungerade	$2p - 1$	$2p$	$2p + 1$	32	20	10	5	11
Sonderfall $\gamma < \varphi = \alpha - \gamma$	$2p + 1 + 1/2$, p gerade	$2p + 1 + 1/2$	$2p + 1/2$	Sektor = 0	65	50	15	2	$5\frac{1}{2}$
	$2p + 1 + 1/2$, p ungerade	Sektor = 0	$2p + 1/2$	$2p + 1 + 1/2$	50	30	20	3	$7\frac{1}{2}$
Sonderfall $\varphi = \gamma = \alpha - \gamma = \frac{\alpha}{2}$	$2p + 2/2$	Sektor = 0	$2p + 2/2$	Sektor = 0	72	36	36	2	$4\frac{2}{2}$
$\varphi > \alpha - \gamma > \gamma$	$2p + 2$	$2p + 1$	$2p$	$2p + 1$	100	80	40	1	4

1) Eigentlich $2p$; aber 2 Bilder fallen zusammen.

dessen aus dem toten Raum herausragender Teil (volkstümlich gesagt: herausragende Hälfte) noch einmal gespiegelt wird. Und da die beiden an gleicher Stelle des Randes im toten Raum entstehenden Halbbilder entgegengesetzter Teile des Raumelements abbilden, ist das letzte Halbbild besonders zu zählen. Die gebrochene Zahl der Bilder gilt für einen kleinen in Umgebung des betreffenden γ-Wertes ausgedehnten Körper tatsächlich, da für seine Hälfte zwei verschiedene Bilderanzahlen gelten. Das Zusammenfallen gleicher Bilder an demselben Ort gilt in diesen Sonderfällen nicht wie im Falle $\varphi = 0$ für alle Werte von γ, sondern nur für einen scharfen γ-Wert. Der Fall $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ (α ein ungeradzahliger Teil des Vollkreises) bietet deshalb keinerlei Besonderheit von dem Punkte abgesehen, für den gleichzeitig $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ ist.

Die nachstehende Formel gibt die Anzahl n der entstehenden Bilder für alle Fälle richtig an: $n = 2p + \frac{1}{2}\{2 - [\gamma - \varphi] - [\alpha - \gamma - \varphi]\} + [\varphi] - 1$, wo die eckigen Klammern $+1$, ± 0 bzw. -1 bedeuten sollen, je nachdem ihr Inhalt positiv, Null, bzw. negativ ist.

Allgemein — auch für die Sonderfälle, wenn man in ihnen die immer positiv in der Tabelle einzuschreibenden halben Bilder wegläßt (die nur für einen Punkt einen gewissen mathematischen Sinn haben) — gelten die folgenden Sätze:

Teilt man den Winkelraum vor beiden Spiegeln in derselben Weise in drei Sektoren, wie der Raum hinter beiden Spiegeln durch die zwei in ihn fallenden Bilder des Gegenstandes geteilt wird, so erblickt ein Auge vom mittleren Sektor aus stets eine gerade Anzahl von Bildern, von jedem Randsektor aus stets eine ungerade Anzahl von Bildern. Die Lage des Gegenstandes und die Größe des Spiegelwinkels ist gleichgültig; sie bestimmen nur die Größe der Sektoren.

Die Anzahl s_2 der vom mittleren Sektor des Spiegelwinkels α aus sichtbaren Bilder, hängt nicht vom Lagenwinkel γ des Gegenstandes, sondern nur vom Spiegelwinkel α ab. Sie ist stets $s_2 = 2p$, wo die ganze Zahl p der Gleichung genügt:

$$180^0 = \alpha p + \varphi \text{ und } 0 \leq \varphi < \alpha \text{ ist.}$$

In den Randsektoren sieht das Auge je nach Lage des Gegenstandes $(2p - 1)$ oder $(2p + 1)$ Bilder. Die Gesamtzahl n der geometrisch entstehenden Bilder steigt von $2p$ bis $(2p + 2)$ an, während φ im Verhältnis zu γ und $(\alpha - \gamma)$ anwächst. Im Fall $n = 2p + 2$, der für φ größer als γ und $(\alpha - \gamma)$ eintritt, gibt es keinen Ort, von dem aus alle entstehenden Bilder zugleich sichtbar sind; man muß dann, um sie alle zu sehen, den Augpunkt wandern lassen.

Im Sonderfall $\varphi = 0$ fallen zwei Bilder an denselben Ort, so daß ein Auge von überall nur $(2p - 1)$ verschieden liegende Bilder sieht.

Berlin, Januar 1928.

(Eingegangen 27. Januar 1928.)

Bemerkung zu der Arbeit der Herren R. Jaeger u. A. Kußmann über Gleichstromverstärkung, ihre Anwendung zu Meßzwecken und ihre Grenzen.

Von O. Feußner.

Ich bekomme leider erst jetzt Kenntnis von einem Aufsatz der obengenannten Herren in Nr. 19 der „Physikalischen Zeitschrift 1927", und möchte nur kurz darauf hinweisen, daß ich in meiner Doktor-Dissertation aus dem Jahre 1920 das grundlegende Prinzip der Gleichstrom-Verstärkung mit Hilfe von Eingitter-Elektronenröhren niedergelegt habe. Die Veröffentlichung konnte allerdings erst mit Rücksicht auf die damaligen Zeitverhältnisse im Jahre 1923 in der Zeitschrift für „Fernmeldetechnik" Heft Nr. 7 und 8 erfolgen. Es scheint, als ob der Aufmerksamkeit der Herren Jaeger und Kußmann diese meine Veröffentlichung entgangen ist, da sie weder in ihrer Arbeit in der Physikalischen Zeitschrift, noch in einer früheren Arbeit (erschienen in den Wissenschaftlichen Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern) darauf Bezug nehmen.

Erwiderung auf vorstehende Bemerkung.

Von R. Jaeger und A. Kußmann.

Die in der obigen Zuschrift benannte Arbeit haben wir in unserer Zusammenstellung nicht erwähnt, da sie sich mit Wechselstrommessungen an Elektroneneingitterröhren befaßt und keinerlei Hinweise auf das hier behandelte Problem enthält. Allerdings gibt Verf. eine Rückleitungsschaltung mit zwei Röhren und Ohmschen Widerständen an, mit der man die Steilheit der Anodenstromcharakteristik theoretisch beliebig erhöhen kann. Wie wir in unserem Text S. 648 erwähnt haben, sind derartige Schaltungen schon früher von verschiedenen Autoren in der Literatur der drahtlosen Telegraphie mitgeteilt worden (A. Blondel, C. R. **169**, 676, 1919; M. Latour, Rad. Rev. **1**, 471, 1920; L. B. Turner [Callirotron], Rad. Rev. **1**, 317, 469, 1920; Scott-Taggart (Biotron), Rad. Rev. **2**, 601, 1921). Wir geben Herrn Feußner zu, daß seine Arbeit

in diesem Zusammenhang in die Zitate der Arbeit von R. Jaeger und H. Scheffers (Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siem.-Konz. 4, 233, 1925) hätte aufgenommen werden müssen.

Schlußwort.

Von O. Feußner.

An und für sich halte ich die ganze Frage nicht für so wichtig, um daran eine Erörterung zu knüpfen. Nur die meinem Gefühl nach etwas sehr stark betonte Hervorhebung der eigenen Leistungen ließ mir den Hinweis auf schon früher erfolgte Untersuchungen gerechtfertigt erscheinen. Im einzelnen sei noch bemerkt: In der Veröffentlichung in der „Fernmeldetechnik" sind zwar nur die Wechselstrommessungen aufgeführt, es ist aber ausdrücklich erwähnt, daß die Einrichtung frequenzunabhängig sei, in der Dissertation selber sind Angaben bezüglich der Gleichstromverwendung ausführlich enthalten. Ich glaubte im übrigen, daß die obige Bemerkung für Fachleute genügte, um den Verwendungsbereich abzugrenzen. Da meine Untersuchungen schon im Frühjahr 1920 abgeschlossen wurden, so liegen übrigens die von Herren Jaeger und Kußmann zitierten ältesten Arbeiten gleichzeitig mit meinen Untersuchungen, nicht früher.

BESPRECHUNGEN.

F. R. Moulton, Einführung in die Himmelsmechanik. 2., durchgesehene Auflage, autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. W. Fender. 8⁰. 412 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. Preis M. 20.—.

Das bereits in zweiter Auflage erschienene Buch von Moulton hat nunmehr auch eine Übersetzung durch W. Fender in Berlin erfahren. Das M.sche Buch kommt, auch in Deutschland, insofern einem Bedürfnis entgegen, als tatsächlich keine Einführungen in die Himmelsmechanik vorhanden sind, während andererseits ein derartiges einführendes Werk für den Anfänger sehr erwünscht ist. Wohl ist das große Tisserandsche Werk zur Mechanik des Himmels immer noch das beste Buch zum Studium dieses Gebietes, aber für den Anfänger wenig geeignet. Wenn auch jeder Wissenschaftler der englischen Sprache unbedingt mächtig sein muß, so bietet eine gute Übersetzung doch besondere Vorteile und Annehmlichkeiten, indem vor allem durch etwaige sprachliche Zweifel entstehende sachliche Bedenken des Lesers behoben werden und deshalb ein klares, schnelleres Studium des Werkes möglich ist.

Die Vorzüge des M.schen Buches sind verschiedener Art. Bei aller Klarheit und Einfachheit der Darstellung wurde der Weg auch zu den schwierigeren Teilen der Himmelsmechanik freigelegt und angeregt, indem auch das Dreikörper-Problem in einem Umfange von mehr als einem Drittel des ganzen Buches behandelt wird, soweit es bei einer Einführung mittels geometrischer und analytischer Behandlungsweise der Theorie der Mond- und Planetenbewegung möglich ist. Zuerst werden dabei die strengen Ergebnisse des asteroidischen Falles des Dreikörper-Problems, speziell auch der Lagrangeschen Lösungen abgeleitet. Alle diese Untersuchungen sind zwar nicht so formuliert, daß eine unmittelbare numerische Anwendung möglich ist, was aber auch nicht der Zweck einer Einführung sein kann. Dagegen sind zur theoretischen Übung in allen Kapiteln zahlreiche Aufgaben gestellt, die eine Vertiefung des Verständnisses herbeizuführen geeignet sind. Eine wertvolle Verbindung aller Kapitel bilden die am Schlusse jeden Kapitels gegebenen geschichtlichen Übersichten und Literaturangaben.

Was für die Darstellung des Dreikörper-Problems gilt, gilt auch für alle anderen Kapitel, die das Potential und die Anziehung von Körpern von allgemein ellipsoidischer Figur behandeln und bis zu Ivorys Methode vordringen. In einem weiteren Kapitel über das Zweikörperproblem werden alle Vorbereitungen für die Anwendung auf die Bahnbestimmung der Planeten nach Laplace und Gauß getroffen. Die Laplacesche Methode wäre besser unterblieben, da sie nicht angewendet wird und andererseits die neueren Methoden der Bahnbestimmung von der Wurzel der Laplaceschen Methode sehr weit entfernt sind oder überhaupt keine Beziehungen zu ihr haben.

Diesen Hauptkapiteln geht in 3 einleitenden Kapiteln eine Darlegung der Hauptergebnisse der analytischen Mechanik vorher, ergänzt durch zahlreiche Aufgaben und geschichtliche Übersichten. Mit Rücksicht auf die spätere Behandlung des Zwei- und Dreikörper-Problems wird speziell die Theorie der Zentralbewegung eingehend behandelt.

Wer nicht sofort die Kenntnisse mitbringt, die zum Studium der Tisserandschen Mechanik des Himmels notwendig sind, wird in dem Moultonschen Buche ein gutes und überall anregendes Werk zur Einführung in das weite Feld der Mechanik des Himmels besitzen, zumal nach der durch die sorgfältige Fendersche Übersetzung gegebenen Erleichterung zum Studium des Buches. Wilkens.

H. Meldau, Technische Navigation und Meteorologie. (Nachtrag zur 10. Aufl. von Breusing-Meldau, Steuermannskunst.) Unter Mitwirkung von F. A. Fischer, J. Georgi und H. Maurer herausgegeben von H. Meldau. 176 S. Mit 89 Abb. Bremen, G. Winter. 1927. Geb. M. 6.—.

Den Leser dieser Zeitschrift dürfte vornehmlich der 5. Abschnitt des Buches interessieren, das Kapitel über Meteorologie, das bis auf einen vom Herausgeber bearbeiteten Abschnitt über tropische Orkane von Georgi herrührt. Obwohl es vorwiegend für die praktischen Bedürfnisse des Seefahrers geschrieben ist — es werden übrigens auch die Probleme der großen Luftfahrt behandelt, — so sind durchaus die physikalischen Grundlagen der meteorologischen Erscheinungen klar und prägnant zum Ausdruck gebracht. Manche



Abschnitte, wie die über Niederschlags- und Wolkenformen, über die optischen und besonders über die elektrischen Erscheinungen in der Atmosphäre sind zu knapp behandelt. Sehr gut sind bei aller Kürze die Darstellung der Luftströmungen, der Bjerknesschen Zyklonentheorie, der meteorologischen Instrumente und ihrer Benutzung. Acht Tafeln sowie die Beigabe der von der Deutschen Seewarte herausgegebenen Wolkentafeln vervollständigen neben 50 durchweg gut ausgewählten und ausgeführten Figuren die Ausstattung.

Besonders ansprechend ist nach Ansicht des Referenten die sehr anregende und klare Darstellungsweise; er möchte die Ansicht aussprechen, daß nach Beseitigung der vorstehend erwähnten kleinen Mängel eine Sonderausgabe dieses Abschnittes ein vorzügliches Einführungsbuch in die Meteorologie auch für Nichtseefahrer darstellen würde.

Der Inhalt der übrigen Abschnitte, die den Kreiselkompaß, das Anschütz-Selbststeuer, den Kursschreiber, die modernen Lotmittel und den Bordfunkpeiler behandeln, liegt dem Interessengebiet des Physikers etwas fern, da dem Zwecke des Buches entsprechend das Hauptgewicht auf die technische Ausführung und die nautische Verwendung der Apparate gelegt werden mußte. Zahn.

E. Mosch, Lehrbuch der Physik. Oberstufe, 4. Heft. 23 × 16. X u. 229 S. Mit 199 Abb. Leipzig, G. Freytag. 1927. Geb. M. 4.80.

Mit dem vorliegenden Band findet das an dieser Stelle schon teilweise besprochene Unterrichtswerk seinen Abschluß. Um gleich seine wichtigsten Vorzüge zu nennen: Es verwendet grundsätzlich das praktische Maßsystem, auch bei magnetischen Messungen, was besonders klärend wirken dürfte. Die Stoffverteilung und die Auswahl der Aufgaben verrät eine wirklichkeitsnahe und gegenwartsfrohe Einstellung des Verfassers. Technische und wissenschaftliche Gesichtspunkte kommen beide zu ihrem Recht.

Das Buch gliedert sich in drei Hauptabschnitte. Der erste (83 S.) behandelt nach einem sehr kurzen Einleitungskapitel über Elektrostatik und galvanische Elemente die Erscheinungen des Galvanismus und der Elektrodynamik, der zweite (44 S.) berichtet über „Ion und Elektron", in typischer Weise das Ineinanderwirken von theoretischer und experimenteller Forschung widerspiegelnd, der dritte (43 S.) behandelt elektrisches Feld, elektrische Schwingungen und Wellen. Es folgen Aufgaben (17 S.), ein geschichtlicher Überblick (22 S.) und eine Anzahl Tabellen (12 S.).

Diese Inhaltsangabe zeigt deutlich, wie sehr der Verfasser bemüht ist, schnell zu den modernen Interessengebieten vorzudringen und man kann mit seiner Darstellung im wesentlichen völlig einverstanden sein. Doch müssen einige Bedenken geäußert werden. Vor allem scheint mir die Grundlegung der Spannungsmessung ungünstig. Ihre Definition mit Hilfe des Arbeitsbegriffs (S. 15—17) ist logisch einwandfrei, aber reichlich abstrakt und vor allem unpraktisch. Es ist wohl besser vom Normalelement auszugehen und die Spannungsaddition anschaulich durch Reihenschaltung von Elementen zu definieren, während die Auffassung, als sei der Ausschlag eines Elektrometers ohne Hilfsladung proportional zur Spannung (S. 10), bestimmt gerade bei kleinen Ausschlägen irrig ist. Andererseits wird das Joulesche Gesetz, experimentell abgeleitet, nachträglich immer noch den Zusammenhang zwischen Spannung, Elektrizitätsmenge und Energie aufdecken. Ferner hat der Verfasser die Frage der Benennungen nicht konsequent behandelt. Von den zwei Möglichkeiten, entweder nur mit Maßzahlen zu rechnen, oder, was aus theoretischen und praktischen Gründen sicher besser ist, alle physikalischen Größen als benannte Zahlen aufzufassen und mit den Benennungen symbolisch zu rechnen, zieht Mosch die letzte vor. Dann dürfte man aber nur Zahlen, nicht allgemeine Ausdrücke, wie $\frac{E}{I}$ usw. mit Benennungen versehen. (Vgl. etwa S. 18 Z. 2 von unten u. S. 27, Z. 3 von unten.)

Dann noch einiges weniger Wichtige: Bei dem Versuch auf S. 53 muß unbedingt angegeben werden, daß der Galvanometerwiderstand groß sei gegen den des Drahtes. Daß B stets proportional H sei (S. 55), kann doch für ferromagnetische Stoffe nicht mitbehauptet werden. S. 148 Z. 3 muß es heißen $\frac{t}{\sqrt{LC}}$ statt $t \cdot \sqrt{LC}$.

Immerhin fallen diese Ausstellungen gegenüber den eingangs erwähnten Vorzügen nicht erheblich ins Gewicht, so daß man das Buch mit Anerkennung begrüßen kann. E. Nies.

J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik. I. Band. Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Gr. 8°. X u. 365 S. Mit 39 Abbildungen. Berlin, J. Springer, 1926. M. 28.50, geb. M. 29.70.

„Auf leichte Verständlichkeit habe ich überall den größten Wert gelegt", zitiert Konrad Knopp in einem jüngst erschienenen Hefte der Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung gelegentlich seines Nachrufs auf H. v. Mangoldt dessen Vorwort zu seinem bekannten Lehrbuch. Und er fährt fort: „Wie wenige Autoren dürfen das heute von sich sagen! Überblickt man die Lehrbuchliteratur der letzten zwanzig oder fünfundzwanzig Jahre — und ich meine nur die, die vor ein strenges Forum der Wissenschaft sich wagen dürfen —, so möchte man fast meinen, daß ihre Autoren sich in steigendem Maße das entgegengesetzte Ziel gesetzt hätten, sich jedenfalls vor allem bemüht hätten, auf einem Minimum von Raum ein Maximum von Gelehrsamkeit zu entfalten." So gewiß sich das Frenkelsche „Lehrbuch" vor ein strenges Forum der Wissenschaft wagen darf, es verdient wohl schon aus dem letztgenannten Grunde kaum den Namen eines Lehrbuchs. Hinzuzufügen wäre, daß man zwar — vielleicht — die Zeit für gekommen halten mag, die Elektrodynamik rein systematisch darzustellen und von jeder historischen Entwicklung abzusehen, etwa Abraham, Larmor, Planck, Poynting in einzeiligen Anmerkungen auftreten zu lassen — nicht befreunden sollte sich der Leser eines Lehrbuchs mit der völligen Abkehr vom mütterlichen Boden des Experiments. Die Kluft zwischen experimenteller und theoretischer oder gar mathematischer Physik wird von der andern Seite — man denke an Kaufmanns, an Mies, an Pohls Lehrbücher des Gebiets — in so dankenswerter und erfolgreicher Weise zu überbrücken gesucht, daß die Theoretiker das Ihre tun sollten. Bei Frenkel erscheint sie tiefer als je. Von der Goetheschen Mahnung „Dich im Unendlichen zu finden, mußt unterscheiden und dann verbinden" bleibt nur das Unterscheiden übrig.

Hat man sich jedoch zu dieser Entsagung durchgerungen, so bewundert man von der knappen und

sehr sorgfältig geformten Bereitstellung der Hilfsmittel der Vektoren- und Tensorenrechnung in der Einleitung an immer wieder das große formale Geschick im ganzen neben vielen geistreichen Wendungen im einzelnen. So geht der erste Abschnitt, der die von der Zeit unabhängigen elektromagnetischen Wirkungen behandelt, in seinem ersten Kapitel „Elektrostatische Wirkungen und Energieprinzip" nicht von den Einzelladungen, sondern von Dipolen aus, während die Einzelladungen, ein Beispiel für oben Gesagtes, als Dipol mit dem zweiten Ende in sehr großer Entfernung erscheinen, wodurch dann die elektrische Feldstärke über das Drehmoment hineinkommt. Man wird vielleicht über die Begründung dieses Vorgehens, nämlich „daß die Elektrizität sich immer[1]) aus entgegengesetzt gleichen Ladungen, d. h. Dipolen, zusammensetzt", zu streiten geneigt sein, man wird nur widerwillig die Einfachheit der Einführung in Kauf geben — ihr methodischer Vorteil, das ist die elegante und einheitlich durchgeführte Analogie zwischen elektrischen Dipolen und stationären elektrischen Strömen (2. Kapitel: „Elektrokinetische (magnetische) Wirkungen und Energieprinzip"), ist unbestreitbar. Das 3. Kapitel behandelt die Struktur der elektrischen und magnetischen Felder nach dem Äquivalenzprinzip, eben dem Prinzip von der Übereinstimmung des magnetischen Feldes eines elementaren Stromes mit dem elektrischen eines gleich orientierten und momentengleichen Dipols. Das 4. Kapitel, „Darstellung willkürlicher Systeme durch Multipole; Potentialtheorie" schließt, sehr abstrakt werdend, den Abschnitt.

Abschnitt 2 stellt die von der Zeit abhängigen elektromagnetischen Wirkungen in drei Kapiteln dar: 1. „Die allgemeinen Gesetze des elektromagnetischen Feldes", in dem die Behandlung des Oszillators und der elektromagnetischen Wellen neben manchem andern als besonders gelungen hervorgehoben sei; 2. „Das elektromagnetische Feld bewegter Punktladungen (Elektronen)" — hier unter anderm die Behandlung des punktförmigen Elektrons nach Liénard und Wiechert und nach Herglotz — und 3. „Energie und Bewegungsgröße bei zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Erscheinungen; Dynamik der Elektronen", das z. B. die energetischen Probleme des punktförmigen und des nicht punktförmigen Elektrons, die Grundlagen der elektromagnetischen Theorie der Masse, die Kritik der Theorie der ausgedehnten Elektronen enthält.

Der dritte Abschnitt, „Die Relativitätstheorie", gibt erst eine Begründung der Theorie; hier wo man Verbundenheit mit dem Experimente weniger erwartet, kann man sich dem Genusse der gedrängten, formgewandten Darstellung ganz hingeben. Dann folgt die Anwendung der Relativitätstheorie auf die elektromagnetischen Erscheinungen und ein Kapitel über die relativistische Mechanik.

Dieser erste Band will, vergleiche seinen Untertitel, die Bewegungs- und Wechselwirkungsgesetze elektrisch geladener Teilchen untersuchen, ebenso wie man die Mechanik mit den entsprechenden Gesetzen ungeladener Partikeln beginnt. Und wie man hier zu den Modellen starrer und nichtstarrer Körper fortschreitet, soll der zweite Band der makroskopischen, der dritte der mikroskopischen Elektrodynamik der materiellen Körper gewidmet sein.

1) Vom Referenten gesperrt.

Buchwald.

A. Kistner, Deutsche Meister der Naturwissenschaft und Technik. 8°. I. Bd. 198 S. Mit 7 Bildnissen. II. Bd. 212 S. Mit 6 Bildnissen. 2. Aufl. München, Kösel & Pustet. 1925.

Das Werkchen erzählt in anregender und auch dem Laien verständlicher Weise von den Leistungen der deutschen Bahnbrecher: Copernicus, Kepler, Guericke, Leibniz, Goethe, Gauß, Liebig, Ohm, Mayer, Clausius, Bunsen, Kirchhoff, Helmholtz, Hertz, Gutenberg, Senefelder, Reichenbach, Fraunhofer, Borsig, Krupp, Siemens, Schichau, Otto und Langen, Lilienthal. Mit besonderer Sorgfalt ist jeweils der Zusammenhang des Lebenswerks mit der Folgezeit bis in die Gegenwart gezeigt. Eine Reihe von Bildnissen nach den Originalen des Deutschen Museums sind beigegeben.

E. Nies.

W. Gerlach, Materie, Elektrizität, Energie. Band VII der naturwissenschaftlichen Reihe wissenschaftlicher Forschungsberichte. 2. Aufl. Dresden u. Leipzig, Theodor Steinkopff. 1926. Gr. 8°. XII u. 291 S. Mit 119 Fig. Geh. M. 15.—, geb. M. 16.50.

Die erste Auflage dieses Buches wurde in dieser Zeitschr. **24**, 396, 1923 ausführlich besprochen, so daß wir uns mit einer kurzen Anzeige der von 195 auf 286 Textseiten erweiterten Neuauflage begnügen dürfen. Der überaus reichhaltige Stoff wird jetzt in 30 Kapiteln abgehandelt; die Darstellung ist lebendig und anregend, und durch ein recht ausführlich gehaltenes Sachregister wird eine rasche Orientierung wesentlich erleichtert.

Harry Schmidt.

Tagesereignisse.

„Ferienkurs". Im Zoologischen Institut der Universität Jena (Schillergäßchen) wird vom 26. bis 31. März 1928 der VII. Ferienkurs in Refraktometrie, Interferometrie und Spektroskopie abgehalten, unter Leitung von Prof. Dr. P. Hirsch, Oberursel i. Th. und Dr. F. Löwe, Jena. Die Kurse bestehen in täglich 2—3 Stunden Vortrag und 2—3 Stunden Übung. Anfragen und Anmeldungen sind bis spätestens 20. März an Herrn A. Kramer, Jena, Schützenstr. 72 zu richten, der auch auf Wunsch über Unterkunftsmöglichkeit (Studentenzimmer usw.) Auskunft erteilt. Die Teilnehmerzahl ist auf 50 begrenzt.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Erlangen Dr. Karl Kohl für Physik, an der Universität München Dr. Erich Lange für physikalische Chemie, an der Universität Wien Dr. Ing. Fritz Feigl für anorganische Experimentalchemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Freiburg (Breisgau) Dr. Robert Schwarz zum ord. Prof. der Chemie an der Universität Frankfurt a. M., der Dekan der Schule für Physik und Chemie am Pennsylvania State College Professor Dr. Gerald Wendt zum Direktor des Battelle Memorial Institute in Columbus (Ohio).

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye,** Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 6. | Ausgegeben am 15. März 1928. Nr. 784. Printed in Germany. | 29. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Besprechungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 6 | 15. März 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 8 am 10. April 1928

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Studien zur radioaktiven Strahlung.

Von K. W. F. Kohlrausch.

1. Bekanntlich geben schnellbewegte α- und β-Teilchen bei Durchdringung der Materie bzw. Durchquerung der materiellen Atome ein Mittel an die Hand, das Atominnere wie mit einer Sonde zu untersuchen. Insbesondere eine Seite der dabei auftretenden Erscheinungen, nämlich die Einzelstreuung und zwar hauptsächlich die der α-Teilchen, gehört zu den Erfahrungsgrundlagen, auf denen die Vorstellungen über den Bau des Atomes, speziell des Rutherfordschen Atommodells beruhen. Eine andere Seite der Erscheinungen dagegen, nämlich die Energieverluste und der damit zusammenhängende Begriff der Reichweite einerseits und die Verwendung eines Teiles dieser Energie zur Ionisierung andererseits, wurde bisher dem eingangs erwähnten Endzweck der Korpuskularstrahlungsforschung nur zögernd zugeführt. P. Lenard, unstreitig der beste Kenner der Kathodenstrahlerscheinungen, lehnt es z. B. rundweg ab, den induktiven Weg zu beschreiten bzw. seine Berechtigung anzuerkennen. Und in den Darstellungen der an α- und β-Teilchen gemachten Erfahrungen findet man häufig, daß die heutigen Vorstellungen über die Wechselwirkung zwischen bewegtem Teilchen und Atom nicht einmal als ordnendes Prinzip verwendet werden.

Dies ist umso verwunderlicher, als in der Bohrschen Theorie der Geschwindigkeitsverluste und Ionisierung, die sehr häufig zitiert, aber recht selten verwendet wird, ein Instrument gegeben ist, mit dessen Hilfe man nicht nur die sehr vielseitigen Erscheinungsformen vom einheitlichen Standpunkt übersehen, sondern auch manche abseits stehende Erfahrung als logische Folge des einheitlichen Grundgedankens erklären kann. Es hat den Anschein, als ob die unhandliche Form und die im ersten Augenblick abschreckende Kompliziertheit der Bohrschen Aussagen daran schuld seien, daß ihnen nicht jene Stellung eingeräumt wurde, die ihnen, wie das folgende zeigen soll, ihrer Verwendbarkeit nach zukommt; Bohr[1]) selbst hat seine Formeln nur relativ und stichprobenweise an der Erfahrung geprüft.

Es kann nicht der Zweck dieser Schrift sein, die oft sehr schwierigen theoretischen Überlegungen Bohrs in extenso wiederzugeben; außer auf die Originalarbeit sei diesbezüglich verwiesen auf die Berichte von R. Seeliger[2]) und W. Bothe[3]), ferner auf den Artikel Laues im Marxschen Handbuch der Radiologie, Bd. VI, p. 54ff., sowie auf die Bothesche Darstellung im Handb. d. Physik, Bd. XIV, p. 1ff. Im Folgenden werden in zwei Teilen einerseits die Geschwindigkeitsverluste bzw. Reichweite, Luftäquivalent, Bremsvermögen usw., andererseits die Ionisation bei α- und β-Strahlen behandelt.

I. Die Energieverluste beim Durchgang durch Materie.

2. Die Bohrsche Theorie der Geschwindigkeitsverluste.

Die weiters verwendeten Buchstaben mögen folgende Bedeutung haben. μ, e seien Ruhmasse und Ladung des Elektrons; m, q, v Masse, Ladung und Geschwindigkeit des bewegten

1) N. Bohr, Phil. Mag. **25**, 10, 1913; **30**, 581, 1915.
2) R. Seeliger, Jahrb. d. Rad. u. El. **16**, 19, 1919
3) W. Bothe, Jahrb. d. Rad. u. El. **20**, 46, 1923

Teilchens. L' sei die Zahl der Atome im cm^3, L die Zahl im Mol; N sei die Atomnummer und zugleich die Zahl der Hüllenelektronen des Atomes. Wenn dann D die Dichte und A das Atomgewicht der durchquerten Materie bedeutet, so ist die Zahl der Elektronen im cm^3 gegeben durch $\frac{LDN}{A}$. Als Zahlenwerte werden im weiteren verwendet: $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ st. E.; $\mu = 9{,}03 \cdot 10^{-28}$ g; $L = 6{,}06 \cdot 10^{23}$; Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, Masse des α-Teilchens $m_\alpha = 6{,}60 \cdot 10^{-24}$ g; seine Ladung $q_\alpha = 2e$. Plancksches Wirkungsquantum $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ Erg. sec.

Die Theorie der Geschwindigkeitsverluste ist bekanntlich die Theorie der Wechselwirkung zwischen bewegtem Teilchen und Hüllenelektron. Der Atomkern bleibt im allgemeinen aus dem Spiel. Würde das bewegte Teilchen, wenn keine Ablenkung einträte, am ruhend gedachten Hüllenelektron in der Entfernung p (Stoßparameter) vorbeigehen, so würde das Elektron die Energie E übernehmen, die im Falle von z. B. Coulombschen Kraftfeldern gegeben ist durch:

$$E = \frac{2}{\mu}\left(\frac{e \cdot q}{v}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2 + p^2},$$

wenn

$$\lambda = \left(\frac{eq}{v^2}\right)\frac{m+\mu}{m\mu}. \qquad (1)$$

Die maximal übertragbare Energie ($p = 0$) wäre somit

$$E_0 = \frac{2m^2\mu}{(m+\mu)^2} \cdot v^2. \qquad (1a)$$

Die Wahrscheinlichkeit, an einem Elektron in der Entfernung zwischen p und $p + dp$ vorbeizukommen ist proportional mit $2\pi p dp$ und da auf der Strecke dx insgesamt $L'N\,dx$ liegen, so wird die für eine Energieabgabe der Größe (1) günstige Trefferfläche $2\pi p dp \cdot L'N\,dx$.

Die Integration über alle möglichen Werte von p liefert den mittleren Energieverlust eines Teilchens auf der Strecke dx zu

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi L'N \int E \cdot p dp. \qquad (2)$$

Ohne auf die Schwierigkeiten dieser Integration einzugehen, sei unter Hinweis auf die oben zitierte Literatur das Bohrsche Ergebnis hingeschrieben:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi L' q^2 e^2}{\mu v^2} \sum^{N} \lg \frac{1{,}123 v^3 \mu m}{2\pi \nu q e(\mu + m)}. \qquad (3)$$

Darin bedeutet ν die Eigenfrequenz des Elektrons; die Formel gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Dauer der Wechselwirkung zwischen Teilchen und Elektron klein ist gegen die Schwingungsperiode $\frac{1}{\nu}$. Bei α-Teilchen von der Geschwindigkeit $v = 2 \cdot 10^9$ cm/sec rechnet Bohr, daß Gl. (3) noch anwendbar ist für Durchquerungen von Atomen mit $N < 10$, bei β-Teilchen mit $v = 2{,}10^{10}$ cm/sec für $N < 100$.

Im Falle von α-Teilchen wird $E_\alpha = \frac{m_\alpha v^2}{2}$, $q_\alpha = 2e$, $m_\alpha \gg \mu$ und man erhält:

$$v^3 \frac{dv}{dx} = C_\alpha \frac{DN}{A}\left[\lg v^3 - \frac{1}{N}\sum \lg \nu + K_\alpha\right] = C_\alpha \frac{DN}{A} \cdot S_\alpha,$$

wenn

$$C_\alpha = \frac{16\pi e^4 L}{m_\alpha \mu} = 2{,}66 \cdot 10^{38};\; K_\alpha = \lg \frac{1{,}123\mu}{4\pi e^2} = -21{,}76. \qquad (4)$$

Im Falle von β-Teilchen ($v = \beta c$; $q_\beta = e$; $m_\beta = \mu$) ergeben sich einerseits durch ihre Massenveränderlichkeit, andererseits durch ihre große Geschwindigkeit Komplikationen, denen Bohr durch Überlegungen gerecht wird, die an Stelle von (3) die folgende Formel ergeben:

$$\frac{dE_\beta}{dx} = \frac{2\pi e^4}{\mu}\frac{L'N}{v^2}\sum^{N}\frac{1}{N}\left[\lg \frac{1{,}123^2 L' N dx}{4\pi \nu^2}\frac{v^2}{1-\beta^2} - \beta^2\right]. \qquad (5)$$

Der Geschwindigkeitsverlust ergibt sich dann unter Berücksichtigung von $E_\beta = \mu c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]$ und $\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx}$ zu:

$$\frac{d\beta}{dx} = C_\beta \frac{DN}{A} \cdot \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\beta^3}\left[\left(\lg \frac{v^2}{1-\beta^2} - \beta^2\right) - \frac{2}{N}\sum \lg \nu + K_\beta\right] = C_\beta \frac{DN}{A}\frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\beta^3} \cdot S_\beta,$$

$$\text{wenn } C_\beta = \frac{2\pi e^4 L}{\mu^2 c^4} = 0{,}30;\; K_\beta = \lg \frac{1{,}123^2}{4\pi} L' N dx. \qquad (5a)$$

Wird vom Experiment nicht die Teilchengeschwindigkeit selbst, sondern der Krümmungsradius ϱ der Teilchenbahn im homogenen transversalen Magnetfeld H gegeben, so ergibt sich aus

$$H\varrho = \frac{\mu c^2}{e} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ und } d(H\varrho) = \frac{\mu c^2}{e}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}} d\beta;$$

$$\frac{d(H\varrho)}{dx} = C'_\beta \frac{DN}{A} \cdot \frac{1}{\beta^3} S_\beta, \tag{5b}$$

wenn $$C'_\beta = \frac{2\pi e^3 L}{\mu c^2} = 509{,}7.$$

Diese Bohrschen Formeln (3) bis (5b) enthalten alle in der Summe S den Ausdruck $\frac{1}{N}\sum \lg \nu$, der ein zwar äußerliches, aber anscheinend wesentliches Hindernis für die praktische Anwendung dieser sowie der ähnlich gebauten Ionisationstheorie bildete. Ersetzt man ν, das in der Bohrschen Theorie die Bedeutung einer Eigenfrequenz im Sinne der klassischen Dispersionstheorie hat, unter Zugrundelegung des Bohrschen Atommodelles und mit Rücksicht auf den Charakter der zu beschreibenden Erscheinung (Energieaufnahme durch das Atom im Normalzustand) durch die Absorptionsgrenzfrequenz, so läßt sich dieser Ausdruck quantitativ auswerten: Bedeutet $R = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3} = 3{,}27 \cdot 10^{15}\,\mathrm{sec}^{-1}$ die Rydbergfrequenz und k die Hauptquantenzahl, so ist die Grenzfrequenz gegeben durch

$$\nu = R\frac{N^2}{k^2}.$$

Wenn man in erster Näherung — der Erfolg derselben muß zeigen, ob ein verfeinertes Vorgehen zweckmäßig ist — alle Nebenquantenbahnen gleichartig behandelt und von Tauchbahnen und Abschirmung absieht, so wird:

$$\frac{1}{N}\sum \lg \nu = \lg R + 2\lg N - \frac{2}{N}\sum \lg k.$$

Z. B. wird für Argon mit 2 Elektronen in der K-Schale ($k = 1$) und 8facher Besetzung der L ($k = 2$) und M-Schale ($k = 3$)

$$\sum \lg k = 2 \lg 1 + 8 \lg 2 + 8 \lg 3$$

und

$$\frac{1}{N}\sum \lg \nu = 39{,}9.$$

Für Al ergäbe sich z. B. der Wert 39,6, während Bohr auf indirektem Wege aus dem Experiment den Wert 39,0 ableitet. Für eine Anzahl von passend gewählten Repräsentanten — hier waren es die Edelgase — kann $\frac{1}{N}\sum \lg \nu$ leicht berechnet werden; als $f(N)$ graphisch aufgetragen erhält man die in Fig. 1 wiedergegebene und für Interpolation an beliebigen N-Stellen zu verwendende Kurve.

Für die praktische Verwendung ist es lohnend, auch für die andern in der Summe S

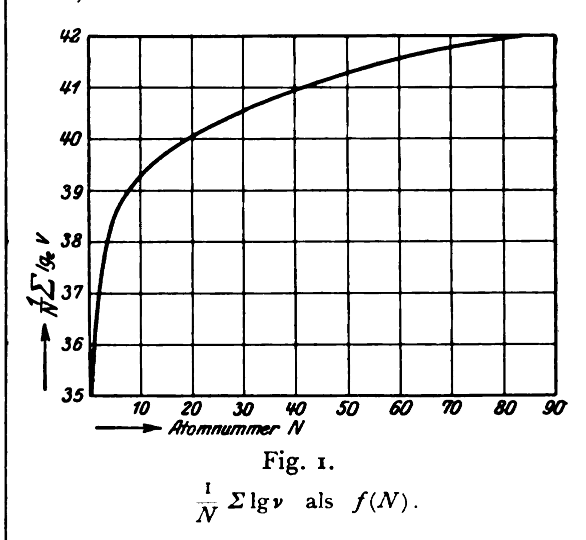


Fig. 1.
$\frac{1}{N}\Sigma \lg \nu$ als $f(N)$.

vorkommenden Größen, wie z. B. K_β oder $\lg\left(\frac{v^2}{1-\beta^2} - \beta^2\right)$ usw. Kurven anzulegen, so daß der zu den Versuchsverhältnissen gehörige Wert S leicht und schnell zusammengesetzt werden kann.

3. Die Geschwindigkeitsverluste der α-Strahlen.

Den Vergleich zwischen Erfahrung und Theorie kann man durchführen, entweder indem man Gl. (4) integriert und jene Schichtdicke x berechnet, die die gegebene Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf den Wert v herabsetzt, oder indem man Gl. (4) selbst verwendet. Letzterer Weg erscheint übersichtlicher und bequemer. Führt man statt v die Variable $u = \frac{v}{v_0}$ ein, so schreibt sich Gl. (4) in der Form:

$$u^3 \frac{du}{dx} = C_1 \lg u + C_2$$

$$C_1 = \frac{3 C_\alpha}{v_0^4} \cdot \frac{DN}{A}; \tag{4a}$$

$$C_2 = \frac{C_1}{3}\left[\lg v_0^3 - \frac{1}{N}\sum \lg \nu + K_\alpha\right] = \frac{C_1}{3} S_\alpha^0.$$

E. Marsden und T. S. Taylor[1]) beobachteten die Änderung der magnetischen Ablenk-

1) E. Marsden u. T. S. Taylor, Proc. Roy. Soc. 88, 443, 1913.

barkeit von α-Teilchen (RaC'), die durch Einschalten von materiellen Schichten (Luft, Al, Cu, Au) in den Weg der Teilchen bewirkt wurde, und berechneten hieraus jene „reduzierte" Schichtdicke $D \cdot x$ (in $g\,cm^{-2}$), die die Anfangsgeschwindigkeit auf den Bruchteil u herabsetzt. Aus dem von ihnen mitgeteilten Zahlenmaterial wurde $u^3 \frac{du}{d(Dx)}$ ermittelt und als Funktion von $\log_{10} u$ aufgetragen; obwohl ein Blick auf Fig. 2 zeigt, daß durch die bei diesem Vorgehen nötigen Differenzbildungen die Genauigkeit der experimentellen Angaben überbeansprucht ist, so ist

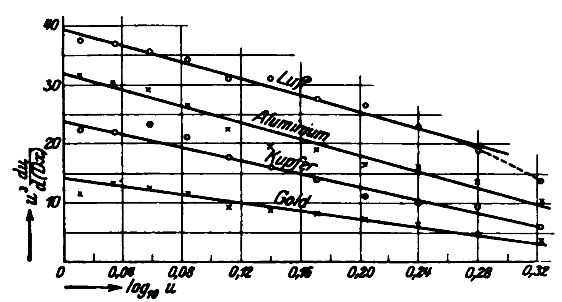


Fig. 2.
Vergleich der Beobachtungen von Marsden-Taylor mit Gl. (4a).

doch die Einordnung der Beobachtungspunkte in gerade Linien zweifelsfrei und bis zu höheren Atomnummern und größeren Geschwindigkeiten gewährleistet, als nach dem Gültigkeitsbereich der Theorie zunächst zu erwarten wäre. Nach Gl. (4a) gibt der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse $\frac{C_2}{D}$, die Neigung $\frac{1}{\log e} \cdot \frac{C_1}{D}$, zwei Größen, die von der Theorie dem Absolutwert nach vorausgesagt und auf die weiter oben geschilderte Art auch berechnet werden können. Die Ausführung ermöglicht den folgenden Vergleich mit der Erfahrung:

		Luft	Al	Cu	Au
$\frac{C_1}{D}$	nach Gl. (4a)	29,2	28,1	26,6	23,4
	nach Fig. 2	31,0	30,6	24,5	15
$\frac{C_2}{D}$	nach Gl. (4a)	38,0	28,1	18,7	7
	nach Fig. 2	39,5	31,9	23,7	14,2

Dabei wurde Luft mit dem fiktiven Atomgewicht 14,4 bzw. mit der Ordnungszahl 7,2 (75 Proz. N_2 mit $N = 7$; 25 Proz. O_2 mit $N = 8$) eingesetzt. Innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Bohrschen Überlegungen sind also die Aussagen der Theorie quantitativ mit der Erfahrung vereinbar; sogar noch bei Cu mit $N = 29$ stimmen die Größenordnungen und erst bei $N = 79$ werden die erwarteten Abweichungen kräftig.

Eine zweite Probe erhält man durch Verwertung neuerer Beobachtungen von S. Rosenblum[1]), der ebenfalls die magnetische Steifigkeit der Bahnen von α-Teilchen (ThC') nach Durchgang durch Metallfolien bestimmt. Er stellt in seiner zweiten Arbeit die Versuchsergebnisse dar durch:

$$D \cdot x = K_R \left(n - \frac{n^2}{10^2} + 35{,}5 \frac{n^3}{10^6} \right),$$

worin K_R eine Materialkonstante und $n = 100\,(1 - u)$ bedeutet. Eine ganz analoge Formel wurde bereits viele Jahre früher von L. Flamm[2]) durch Anwendung der Grundsätze der Fehler- und Ausgleichsrechnung als optimale Darstellung der Messungen von H. Geiger[3]) bzw. Marsden und Taylor (l. c.) abgeleitet. Wird als Variable u eingeführt, so erhält man daraus

$$D \cdot x = 100 K_R [u - u^2 + 0{,}355 (1 - u)^3]. \quad (6)$$

Für die Kurvenneigung im Ursprung ergibt sich daraus

$$\left| \frac{du}{d(Dx)} \right|_{u=1} = \frac{1}{100 K_K}.$$

Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß Rosenblum die Variable $D \cdot x$ in mg/cm² angibt, folgt als Zusammenhang mit der Konstante C_2 der Gl. (4a):

$$\frac{10}{K_R} = \frac{C_2}{D} \quad \text{oder} \quad K_R = \frac{30 D}{C_1 \cdot S_\alpha^0}.$$

In Tabelle I sind einige der zur Berechnung von $\frac{D}{C_2}$ nötigen Zahlenwerte angeführt und das Ergebnis der Rechnung (vorletzte Zeile) den experimentellen Werten Rosenblums (letzte Zeile) gegenübergestellt. Man sieht, daß man — natürlich immer innerhalb des Geltungsbereiches der Theorie, d. i. also für die niederen Atomnummern — eine Übereinstimmung erhält, die angesichts der schematisierenden Berechnung auch quantitativ zunächst völlig hinreicht.

Verwiesen sei in diesem Zusammenhang auf die Zeilen 2 und 3 der Tabelle I; diese zeigen, daß in der Summe S_α^0 (Gl. (4a)) die negativen Glieder, d. i. $\frac{1}{N} \sum \lg \nu$ und K_α, zusammengenommen nahezu den gleichen Wert haben wie die hier vorkommenden Größenordnungen des positiven Gliedes $\lg v_0^3$. Daher wird S_α^0 klein und es wird die Art der Auswertung von $\sum \lg \nu$, also die Art der gewählten Schematisierung von eini-

1) S. Rosenblum, C. R. **183**, 198, 1926; **185**, 851, 1927.

2) L. Flamm, Elster-Geitel-Festschrift S. 601, 1915; L. Flamm u. R. Schumann, Ann. d. Phys. (4), **50**, 655, 1916.

3) H. Geiger, Proc. Roy. Soc. A **83**, 505, 1910.

Tabelle I.
Vergleich zwischen dem theoretisch zu erwartenden und dem experimentell gefundenen Wert der Rosenblumschen Konstanten K_R.

Material	*Li*	*Al*	*Fe*	*Ni*	*Cu*	*Pd*	*Ag*	*Cd*	*Sn*	*Pt*	*Au*	*Pb*
Atomnummer N .	3	13	26	28	29	46	47	48	50	78	79	82
$\frac{1}{N}\sum \lg \nu$	37,75	39,53	40,37	40,47	40,52	41,18	41,22	41,25	41,30	41,89	41,91	41,93
S_α^0	4,86	3,08	2,23	2,14	2,09	1,43	1,39	1,36	1,31	0,72	0,70	0,68
K_R berechnet .	0,25	0,35	0,49	0,50	0,54	0,83	0,85	0,88	0,93	1,79	1,84	1,91
K_R beobachtet .	0,277	0,393	0,505	0,525	0,545	0,711	0,703	0,711	0,729	0,99	0,98	0,985

gem Einfluß auf das Resultat. Man wird daher erwarten, daß durch Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse (Tauchbahnen, Abschirmung, Elektronenbewegung, eventuell Einführung der experimentellen Absorptionsgrenzen) durch Verbesserung der Berechnungsgrundlagen eine merkliche Verbesserung in der Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt werden könnte.

4. Reichweite und Bremsvermögen der α-Strahlen.

Da die Bohrsche Formel (4) oder (4a) für die Geschwindigkeitsverluste bei kleinen Werten von v bzw. u gemäß den Voraussetzungen der Ableitung nicht verwendet werden darf und ihre Aussagen den physikalischen Sinn verlieren, so darf aus ihnen auch nicht die Reichweite R, d. i. jener Wert von x, der u oder v auf Null herabsetzt, durch Integration gewonnen werden. Hat man aber einmal erkannt, daß diese Formeln für große Werte von v anwendbar sind, dann kann man durch eine Anleihe bei der Erfahrung die Theorie wenigstens zu relativen Aussagen über die Reichweiten heranziehen.

Wenn sich nach Flamm und Rosenblum die Geschwindigkeitsverluste entsprechend der Gl. (6) darstellen lassen durch

$$x = c_1 [u - u^2 + c_2 (1 - u)^3],$$

dann ist einerseits die Neigung im Ursprung

$$\left|\frac{du}{dx}\right|_{u=1} = \frac{1}{c_1},$$

andererseits die Reichweite R

$$|x|_{u=0} = R = c_1 c_2,$$

also

$$R = \frac{c_2}{\left|\frac{du}{dx}\right|_{u=1}}.$$

Ersetzt man den Nenner aus der Bohrschen Gleichung (4a), so ergibt sich als halbtheoretische Reichweitenformel

$$R = \frac{c_2}{C_2} = c_2 \frac{A}{DN} \frac{v_0^4}{C_\alpha \, S_\alpha^0}, \tag{7}$$

in der c_2 aus dem Experiment zu entnehmen ist. Rosenblum findet $c_2 = 0{,}355$, gibt aber an, daß die Genauigkeit der Bestimmung zu wünschen übrig läßt. Hier soll daher c_2 aus dem am besten bekannten Wertepaar für $Ra\,C'$, nämlich $R = 6{,}97$ cm in Luft von 760 mm und 15^0 bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 1{,}922 \cdot 10^{29}$ cm/sec bestimmt werden. Da für Luft $C_2 = 4{,}22 \cdot 10^{-2}$ wird, erhält man $c_2 = 0{,}293$.

Als „Luftäquivalent" pflegt man jene Luft-Schichtdicke x zu bezeichnen, die die Anfangsgeschwindigkeit eines α-Teilchens auf denselben Bruchteil u herabsetzt, wie die Schichtdicke x' eines beliebigen Materiales. Aus (4a) sowohl wie aus (7) ergibt sich

$$\frac{x}{x'} = \frac{\frac{D' N'}{A'} \cdot (S_\alpha^0)'}{\frac{DN}{A} \cdot S_\alpha^0}. \tag{8}$$

Als „Bremsvermögen" s bezeichnet man das Verhältnis:

$$s = \frac{\frac{D}{A} \cdot x}{\frac{D'}{A'} \cdot x'}$$

d. i. also das Verhältnis jener Zahl von Atomen in den beiden Substanzen, deren Durchquerung zur gleichen Geschwindigkeitsverminderung führt. Hierfür ergibt sich nach (8)

$$s = \frac{N' (S_\alpha^0)'}{N S_\alpha^0}, \tag{9}$$

wobei die nicht gestrichelten Symbole für die Bezugssubstanz, als welche Luft oder wohl auch Sauerstoff genommen werden, gelten.

Hat man es im beobachteten Material nicht mit Atomen, sondern mit mehr oder weniger kompliziert zusammengesetzten Molekülen zu tun, so wird, insofern man den Elektronen im Molekül noch die gleiche Schwingungsfähigkeit zuschreiben und damit die molekulare Bindung

vernachlässigen kann oder will, zu erwarten sein, daß wegen der durch das Summenzeichen in Gleichung (3) symbolisierten Additivität der Elektronenwirkungen innerhalb des Atomes die Wirkungen der im Molekül vereinigten Atomelektronen ebenfalls durch Summierung gefunden werden müssen. In bezug auf das Bremsvermögen zeigt dann eine einfache Überlegung: Besteht ein Molekül aus z' Atomen der Art X' mit N' Elektronen und zugehörigem Wert $(S_\alpha^0)'$, ferner aus z'' Atomen der Art X'' usw., so gilt für das Bremsvermögen relativ zur Substanz mit N und S_α^0

$$s = \frac{(zNS_\alpha^0)' + (zNS_\alpha^0)'' + \cdots}{NS_\alpha^0} = z's' + z''s'' + \cdots$$

Diese Additivität der atomaren Bremsvermögen wird natürlich nicht mehr vorhanden sein, wenn bei Eintritt des Atomes in das Molekül eine merkliche Änderung der Bindungskräfte der Elektronen stattfindet; dies wird sich um so mehr bemerkbar machen, je geringer die Zahl der Elektronen in den atomaren Komponenten ist, da ja mindestens eines der Elektronen als Bindungselektron fungieren muß. Insbesondere wird also das Elektron des Wasserstoffatomes andere Werte von ν erhalten, sowie H in molekularer Verbindung, und zwar speziell in homeopolarer auftritt. Man wird wohl erwarten, daß die Bindung kräftiger, ν und $\frac{1}{N}\sum \lg \nu$ größer, S_α^0 kleiner, das Bremsvermögen also ebenfalls kleiner wird als im atomaren Zustand.

Qualitativ folgt ferner aus den Ausdrücken 8 und 9: da in $(S_\alpha^0)'$ die Geschwindigkeit, und zwar $\lg v^3$ eingeht, ist das Bremsvermögen ebenso wie das Luftäquivalent als geschwindigkeitsabhängig zu erwarten; da $\frac{1}{N}\sum \lg \nu$ für die einzelnen Substanzen in der Reihenfolge der Atomnummer zunimmt, so werden mit abnehmendem v_0 die Ausdrücke $(S_\alpha^0)'$ für jene Substanzen, deren N kleiner ist als das der Bezugssubstanz prozentuell langsamer abnehmen als S_α^0, für die Substanzen jenseits der Bezugssubstanz jedoch schneller abnehmen als S_α^0. Infolgedessen soll für die ersteren Materialien s mit abnehmendem v_0 wachsen, für letztere abnehmen. Wären die Formeln auch für $v = 0$ wenigstens qualitativ noch brauchbar, so würde aus ihnen gefolgert werden müssen, daß sich für unendlich langsame α-Teilchen alle Materialien gleich verhalten. — Diese qualitativen Folgerungen sind bekanntlich in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung; Luftäquivalent, bzw. Bremsvermögen — bei Gasen von gleichem Druck und Temperatur fallen diese Begriffe zusammen — von H_2 und He nehmen bezogen auf Luft mit abnehmender Geschwindigkeit (bzw. Restreichweite) zu, während sie bei Substanzen, deren $N > 7{,}2$ ist, umso schärfer abnehmen, je größer N ist. Man vergleiche die Beobachtungsergebnisse von E. Marsden und H. Richardson[1]) an Au, Ag, Al und von R. W. Gurney[2]) an den Edelgasen, sowie an O_2 und H_2. Bezüglich der Additivität des Bremsvermögens sei außer auf die klassischen Untersuchungen von W. H. Bragg insbesondere auf die Arbeiten von H. Rausch v. Traubenberg[3]) und K. Philipp[4]) verwiesen.

Zum quantitativen Vergleich diene einerseits Fig. 3, andererseits die Tabelle II. In Fig. 3

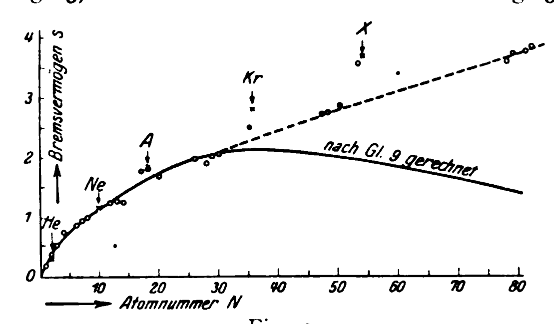


Fig. 3.
Das Bremsvermögen als Funktion der Atomnummer; ausgezogene Kurve nach Gl. 9 berechnet.

wurde zu den von Rausch v. Traubenberg (Ringe) bzw. Gurney (Kreuze) angegebenen Werten des Bremsvermögens (bezogen auf Sauerstoff als Normalsubstanz) die nach (9) berechnete (voll gezeichnete) Kurve eingetragen, die das Bremsvermögen s als Funktion der Atomnummer darstellen soll. Für genügend kleine Werte von N decken sich Beobachtung und Berechnung, für größere N treten erwartungsgemäß Abweichungen ein; überdies sieht man, daß das Experiment anscheinend auf eine Periodizität hinweist, die von der Theorie in ihrer bisher einfachsten Form noch nicht wiedergegeben wird. Eine weniger schematisierende Berechnung von $\frac{1}{N}\sum \lg \nu$ dürfte diesem Mangel leicht abhelfen können.

In Tabelle II wurden die aus den Beobachtungen von Bragg, Gurney und Traubenberg

1) E. Marsden u. H. Richardson, Phil. Mag. **25**, 184, 1913.
2) R. W. Gurney, Proc. Roy. Soc. **107**, 340, 1925.
3) H. Rausch v. Traubenberg, Physik. Zeitschr. **21**, 588, 1920; **22**, 587, 1921; Zeitschr. f. Phys. **2**, 268, 1920.
4) K. Philipp, Zeitschr. f. Phys. **17**, 23, 1923.

Tabelle II.

Die Reichweite R_{15} für α-Teilchen von RaC' in elementaren Körpern; berechnet nach Gl. (7); beobachtet von R. v. Traubenberg, R. W. Gurney (*), W. H. Bragg (**).

	N	beob.	ber.		N	beob.	ber.		N	beob.	ber.
H_2*	1	35,5 cm	27,7 cm	Cl_2**	17	3,91 cm	4,07 cm	Ag	47	19,2 μ	27,8 μ
He*	2	40,2 cm	35,1 cm	A*	18	7,10 cm	7,92 cm	Cd	48	24,2 μ	36,6 μ
Li	3	129 μ	142 μ	Ca	20	78,8 μ	83,0 μ	Sn	50	29,4 μ	44,6 μ
C**	6	8,2 cm	7,9 cm	Fe	26	18,7 μ	20,1 μ	J_2**	53	2,02 cm	3,28 cm
N_2**	7	7,4 cm	7,2 cm	Ni	28	18,4 μ	18,6 μ	X*	54	3,51 cm	6,60 cm
O_2*	8	6,5 cm	6,7 cm	Cu	29	18,3 μ	19,7 μ	Pt	78	12,8 μ	34,5 μ
Ne*	10	11,1 cm	11,4 cm	Zn	30	22,8 μ	25,1 μ	Au	79	14,0 μ	39,0 μ
Mg	12	57,8 μ	60,8 μ	Br_2**	35	2,66 cm	3,03 cm	Tl	81	23,3 μ	68,3 μ
Al	13	40,6 μ	40,6 μ	Kr*	36	4,57 cm	6,20 cm	Pb	82	24,1 μ	73,0 μ

ermittelten Reichweiten den nach Gl. (7) berechneten zahlenmäßig gegenüber gestellt. So wie in Fig. 3 ist die Übereinstimmung bis etwa $N = 30$ im allgemeinen befriedigend; die vorhandenen Abweichungen sind außer auf Versuchsfehler wohl zum Teil darauf zurückzuführen, daß im Experiment nicht am einatomigen Körper, sondern an homeopolaren Verbindungen beobachtet wird, zum Teil vielleicht auf die bereits erwähnte, von der Theorie jetzt noch nicht berücksichtigte Periodizität.

5. Die Geschwindigkeitsverluste der β-Teilchen.

Der Vergleich zwischen Theorie und Experiment leidet unter zweierlei Schwierigkeiten. Einerseits unter der geringen Beobachtungsgenauigkeit, denn es ist nicht leicht, homogene β-Strahlung hinreichender Intensität herzustellen und zugleich die Einflüsse der starken Streubarkeit der β-Teilchen zu vermeiden; andrerseits darunter, daß die zuständigen theoretischen Aussagen für $\frac{dE}{dx}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d(H\varrho)}{dx}$ in der Summe S_β noch dx enthalten, also die Kenntnis der Schichtdicke, mit der wirklich gearbeitet wurde, verlangen. Tabelle III enthält für variiertes β und N die Werte für $\beta^3 d(H\varrho)$, wie sie sich aus Gl. (5b) ergeben, wenn als (reduzierte) Beobachtungs-Schichtdicke $D \cdot x = 0{,}01$ g/cm^2 angenommen wird. Aus der Zahlenzusammenstellung ist ersichtlich, daß $\beta^3 d(H\varrho)$ bei festgehaltener Substanz mit wachsendem β zunehmen, bei festgehaltenem β mit wachsendem N abnehmen soll.

Tabelle III.

$\beta^3 d(H\varrho)$ für verschiedene Werte von β und N und für $D \cdot x = 0{,}01$ g/cm^2 (berechnet nach Gl. (5b)).

$\beta =$	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,99
Al $N = 13$	35,6	38	40,3	41,7	43,4	47,4
Cu $N = 29$	29,3	31,5	33,4	35,0	36,9	40,4
Ag $N = 47$	24,6	26,7	28,5	30,0	31,6	35,1
Sn $N = 50$	23,4	25,4	27,2	28,7	30,3	33,7
Au $N = 79$	19,7	21,6	23,3	24,7	26,2	20,5

Zum Vergleich mit der Theorie seien zunächst die Versuche von W. Wilson[1]) herangezogen, der mit annähernd homogenen β-Bündeln den Geschwindigkeitsverlust beim Durchgang durch 0,0243 cm Al durch (ionometrische) Bestimmung der magnetischen Ablenkbarkeit bestimmte. Seine Beobachtungen erstrecken sich von $\beta = 0{,}89$ bis $\beta = 0{,}95$ und sind zu ungenau, als daß ein Gang von $\beta^3 d(H\varrho)$ deutlich erkennbar wäre; im Mittel ergab sich dafür der Wert 361 ± 20, während Gl. (5b) (mit $dx = 0{,}0243$ cm) den Mittelwert 308 verlangen würde; die Übereinstimmung ist nur der Größenordnung nach erreicht.

Auch die mit der photographischen Methode durchgeführten Beobachtungen von O. v. Baeyer, O. Hahn, L. Meitner[2]), O. v. Baeyer[3]), J. Danysz[4]), W. F. Rawlinson[5]), J. D'Espine[6]) erreichen nicht die für einen exakten Vergleich nötige Genauigkeit; eine in jüngster Zeit erschienene Arbeit von E. Madgwick[7]) über das gleiche Problem scheint allerdings zu größerer Beobachtungsgenauigkeit gelangt zu sein. Doch sind die Ergebnisse — ein leider in der Literatur immer häufiger merkbarer Übelstand — nur in graphischer Darstellung mitgeteilt, daher für den Außenstehenden quantitativ unverwertbar.

Um wenigstens einigermaßen ein Bild vom Werte der Theorie zu erhalten, wurde folgender, allerdings nicht sehr ansprechender Weg eingeschlagen. Tabelle IV enthält (abgesehen von den letzten drei Spalten, die aus den Danyszschen Beobachtungen, die von ihm bereits auf $Dx = 0{,}01$ g/cm^2 reduziert angegeben wurden, errech-

1) W. Wilson, Proc. Roy. Soc. **84**, 141, 612, 1910.
2) O. v. Baeyer, O. Hahn u. L. Meitner, Physik. Zeitschr. **12**, 273, 1911.
3) O. v. Baeyer, Physik. Zeitschr. **13**, 485, 1912.
4) J. Danysz, Ann. chim. phys. (8) **30**, 241, 1913.
5) W. F. Rawlinson, Phil. Mag. **30**, 627, 1915.
6) J. D'Espine, C. R. **182**, 458, 1926.
7) E. Madgwick, Proc. Cambr. Phil. Soc. **23**, 970, 1927.

Tabelle IV.

Beobachtungen von Danysz und D'Espine über den Geschwindigkeitsverlust in 0,01 g/cm^2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	J. Danysz						Theorie	D'Espine
	$\beta^3 d(H\varrho)$					exper. Mittel	theoret. Mittel	exper. Mittel
β	*Al*	*Cu*	*Sn*	*Ag*	*Au*			
0,635	31,8	28,2	26,1	24,9	24,4	27,4	28,8	26,2
0,704	33,3	44,1	38,8	36,1	33,6	37,1	29,4	29,5
0,718	33,2	38,1	29,6	34,4	32,1	33,6	29,6	27,0
0,750	27,7	31,0	26,8	27,7	24,4	27,7	29,9	27,7
0,760	26,1	34,7	27,4	26,6	30,0	29,1	30,0	—
0,770	25,6	—	—	—	—	25,6	39,8	—
0,795	28,7	32,1	24,1	21,1	23,1	25,6	30,5	28,2
0,802	24,8	29,0	—	—	20,7	24,9	32,2	—
0,867	24,2	38,0	34,0	24,8	32,1	32,1	31,5	37,4
0,885	33,4	—	—	—	—	33,4	41,6	39,0
0,942	32,7	29,4	—	48,6	26,9	34,4	33,9	—
0,960	29,5	48,2	50,9	41,9	32,9	38,4	34,4	47,3
exper. Mittel	29,2	35,3	32,3	31,9	28,0	31,2	31,3	32,8
theoret. Mittel	40,5	33,5	29,5	27,5	23,7	—	—	—

neten Werte für $\beta^3 d(H\varrho)$ und zwar für verschiedene β und N. Da die Unregelmäßigkeiten der Zahlen einen direkten Vergleich nicht ermöglichen, wurden die Mittel aus den Vertikalreihen (vorletzte Zeile) sowohl als aus den Horizontalreihen gebildet. Erstere für den Gang mit N, letztere für den Gang mit β. Ferner wurde eine vollkommen analoge, lückenhafte Tabelle der theoretisch zu erwartenden Werte angelegt und in derselben Art sowohl vertikal als horizontal gemittelt; das Ergebnis enthält die letzte Zeile bzw. die achte Spalte. Der Vergleich mit den gemittelten Beobachtungen zeigt: 1. Trotz der großen Beobachtungsfehler — Danysz schätzt sie beim einzelnen $d(H\varrho)$ auf 20 bis 25 Proz. — sind die Generalmittel — nämlich theoretisch 31,3, experimentell 31,2 — praktisch identisch. 2. Die Abhängigkeit des $\beta^3 d(H\varrho)$ von β zeigt sich nur qualitativ im Anstieg der Mittelwerte. 3. Die erwartete Abnahme mit zunehmendem N ist, abgesehen von dem herausfallenden Wert für *Al*, deutlich ausgeprägt, übrigens neuerdings auch von Madgwick wieder bestätigt. — In der letzten Spalte sind noch die von D'Espine erhaltenen Mittelwerte aus Beobachtungen an *Al*, *Cu*, *Ag*, *Au* enthalten; auch sie zeigen steigende Tendenz mit zunehmendem β und geben einen Mittelwert, der ohne Rücksicht auf die (unbekannten) Gewichte der Einzelmessungen gebildet, genügende Übereinstimmung mit der zu erwartenden Größe zeigt.

P. Lenard[1]) hat unter Zusammenfassung und Bewertung sämtlicher vorliegender Messungen als wahrscheinlichsten Verlauf der Geschwindigkeitsverluste $\frac{d\beta}{dx}$ in Aluminium eine Kurve ermittelt, die er formal für $\beta > 0{,}7$ durch

$$\frac{d\beta}{dx} = 8{,}93 \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{\beta} \frac{\text{Lichtgeschw.}}{\text{cm } Al}$$

darstellt. Aus Gl. (5a) würde sich speziell für *Al* analog ergeben:

$$\frac{d\beta}{dx} = 0{,}388 \frac{S_\beta}{\beta^2} \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{\beta} \frac{\text{Lichtgeschw.}}{\text{cm } Al}.$$

Da nun für *Al* S_β von 16,2 bei $\beta = 0{,}8$ bis 19,3 bei $\beta = 0{,}99$ variiert, so ist in der Tat innerhalb dieses Geschwindigkeitsintervalles $0{,}388 \frac{S_\beta}{\beta^2}$ angenähert konstant und im Mittel etwa gleich 8,5; so daß die Lenardsche empirische Formeldarstellung mit der Theorie quantitativ recht befriedigend übereinstimmt. Allerdings darf man über dieser erfreulichen Übereinstimmung nicht die Unsicherheiten vergessen, die theoretisch in der Anwesenheit des dx innerhalb von S_β, experimentell in der Ungenauigkeit der Beobachtungen und in der Art liegt, wie Lenard die Geschwindigkeitsverluste definiert.

6. Die Reichweite der β-Strahlen.

Durch Integration der Gl. (5a) leitet Bohr für die wahre Reichweite R_w, das ist der vom β-Teilchen wirklich zurückgelegte gerade, geknickte oder krumme Weg, den Ausdruck ab:

$$R_w = \frac{1}{C_\beta S_\beta} \cdot \frac{A}{DN} \left| \sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2 \right|. \quad (10)$$

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. Heidelberg 1925 oder Handb. d. Experimentalphys. Bd. 14, 1927.

Setzt man in erster Näherung $\frac{A}{N}$ sowie S_β konstant, so wird

$$D \cdot R_w = \text{konst.} \left[\sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2 \right]. \quad (10a)$$

Ein Ausdruck, der für kleine Werte von β übergeht in

$$D \cdot R_w = \text{konst.} \frac{\beta^4}{4}. \quad (10b)$$

Für genauere Vergleiche wird man für das in der Summe S_β vorkommende dx statt des wahren aber zunächst unbekannten Wertes einen z. B. aus der Formel (10a) errechneten Näherungswert für R_w einsetzen und dadurch schon eine weitgehende, im Hinblick auf die Ungenauigkeit der Beobachtung jedenfalls hinreichende Annäherung an den wahren Wert von R_w erhalten. Mit diesem schrittweisen Verfahren wurde aus Gl. (10) z. B. Tabelle V berechnet, die die reduzierten Reichweiten $D \cdot R_w$ für β-Teilchen verschiedener Geschwindigkeit in verschiedenen Substanzen enthält. Die aus den Zahlen ersichtliche Zunahme von $D \cdot R_w$ mit zunehmendem N stammt fast ausschließlich von der Zunahme des negativen Gliedes $\frac{2}{N} \sum \lg \nu$ in der im Nenner der Gl. (10) stehenden Summe S_β.

Tabelle V.

Reduzierte Reichweite $D \cdot R_w$ in g/cm², berechnet nach Gl. (10).

β	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,99
Luft	0,00026	0,0028	0,020	0,090	0,228	1,35
Al	0,00031	0,0033	0,022	0,098	0,246	1,48
Cu	0,00040	0,0039	0,026	0,116	0,287	1,68
Ag	0,00052	0,0047	0,030	0,135	0,328	1,92
Au	0,00068	0,0057	0,035	0,156	0,375	2,13

Einen einwandfreien Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung lassen nur solche Beobachtungen zu, bei denen die wahre, über alle durch die atomaren Ablenkungen (Streuung) bewirkten Wegkrümmungen verfolgte Bahnlänge der β-Teilchen gemessen wird; die einzige Möglichkeit, dies durchzuführen, bietet die Wilsonsche Nebelmethode. Leider liegt bisher diesbezüglich eine dem Umfang nach nur kleine Statistik vor, die sich überdies aus naheliegenden äußeren Gründen auf Elektronen kleinerer Geschwindigkeit und geringer, innerhalb der Nebelkammer verbleibenden Gesamtweglänge bezieht.

C. T. R. Wilson[1]) stellt seine Beobachtungen dar durch:

$$(E_\beta)_{ekV} = 21 \sqrt{R_w},$$

1) C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. (A) **104**, 1, 192, 1923.

wenn die Energie der β-Teilchen (Photoelektronen) in e-Kilovolt und die Reichweite in cm für Normal-Luft ausgedrückt ist. Umgerechnet ergibt dies (insofern man noch $(E_\beta)_{\text{erg}} = \frac{\mu v^2}{2}$ setzen kann)

$$D \cdot R_w = 0{,}19\, \beta^4$$

Die zur Beobachtung verwendeten Elektronen hatten Geschwindigkeiten von etwa $\beta \simeq 0{,}3$. Setzt man für Luft $N = 7{,}2$, $\frac{A}{N} = 2$, und die Zahl der Atome gleich $2L$, also der doppelten Anzahl der Moleküle, so erhält man aus der Theorie (Gl. (10b))

$$D \cdot R_w = 0{,}06\, \beta^4,$$

also einen dreimal kleineren Koeffizienten. In der Tat stimmen neuere und anscheinend genauere Beobachtungen von L. Meitner[1]) an Elektronen von rund $\beta = 0{,}37$ mit dem Wilsonschen Befund gar nicht überein, sondern ergeben Werte, die um mehr als die Hälfte tiefer liegen. Auch G. A. Anslow[2]) leitet, allerdings auf indirektem Wege, eine der Gl. (10b) analoge Formel aus dem Experiment ab, jedoch für Elektronen mit $\beta < 0{,}1$, für welche die Gültigkeit der Bohrschen Theorie wohl schon in Frage gestellt ist.

Auf eine zweite von W. H. Bragg[3]) vorgeschlagene sehr geistreiche Methode zur Bestimmung der wahren Reichweite R_w, die später noch den Experimenten von G. A. Sutherland und L. H. Clark[4]) zugrunde gelegt wurde, werde hier wegen der, wie dem Verfasser scheint, nicht einwandfreien Voraussetzungen nicht näher eingegangen, obwohl ihre Ergebnisse zu der von der Theorie vorausgesagten Materialabhängigkeit für $D \cdot R_w$ führen.

Im allgemeinen liefert das Experiment nicht die wahre Reichweite R_w, sondern entweder die Lenardsche „Grenzdicke X, d. i. jene Schichtdicke Materie, die die gegebene Strahlgeschwindigkeit bei Normallauf und bei den maximal (häufigst) vertretenen Geschwindigkeitsverlusten zu Null reduziert“, oder die sog. „praktische Reichweite R''. Keine dieser beiden experimentellen Angaben haben einfache theoretische Deutung.

Die praktische Reichweite wird ermittelt, indem jener Teil einer Schwächungskurve, dessen gleichartiger Verlauf über einen größeren Dickenbereich auf ein einheitliches Verhalten der Mehrheit der beteiligten Strahlung schließen läßt,

1) L. Meitner, Naturwiss. **14**, 1199, 1926.
2) G. A. Anslow, Phys. Rev. **25**, 484, 1925.
3) W. H. Bragg, Jahrb. d. Rad. u. El. **7**, 348, 1910.
4) G. A. Sutherland u. L. H. Clark, Proc. Phys. Soc. Lond. **34**, 51, 1922.

Tabelle VI.

Vergleich zwischen den praktischen red. Reichweiten $D \cdot R$ und den theoretischen Werten $D \cdot R_w$ (Gl. 10).

R. W. Varder				B. F. J. Schonland			
β	$D \cdot R$ beob.	$D \cdot R_w$ berechn.	berechn./beob.	β	$D \cdot R$ beob.	$D \cdot R_w$ berechn.	berechn./beob.
0,99	1,36	1,46	1,07	0,524	0,0108	0,0118	1,09
0,981	0,925	0,960	1,04	0,512	0,0095	0,0106	1,12
0,975	0,785	0,795	1,01	0,475	0,0070	0,00630	0,90
0,965	0,580	0,617	1,06	0,380	0,00341	0,00277	0,81
0,948	0,440	0,444	1,01	0,347	0,00232	0,00203	0,88
0,933	0,360	0,361	1,00	0,326	0,00169	0,00166	0,98
0,913	0,279	0,284	1,01	0,298	0,00117	0,00120	1,02
0,882	0,189	0,200	1,06	0,265	0,000664	0,000808	1,22
0,831	0,124	0,128	1,03	0,230	0,000375	0,000502	1,34
0,752	0,064	0,067	1,05	0,214	0,000336	0,000390	1,16
0,631	(0,018)	0,027	(1,51)	0,198	0,000250	0,000290	1,19

extrapoliert wird auf jene Dicke, die bei Weiterbestehen dieses Verhaltens die β-Wirkung auf Null herabsetzen würde. Derartige Beobachtungen wurden ausgeführt von W. Wilson[1]), R.W.Varder[2]), E. Madgwick l.c. nach der Ionisationsmethode, von B. F. I. Schonland[3]) mit dem Faraday-Käfig. Die Ergebnisse dieser Versuche, die sich über einen Bereich von $\beta = 0{,}2$ bis $\beta = 0{,}99$ erstrecken, sind in Fig. 4 einge-

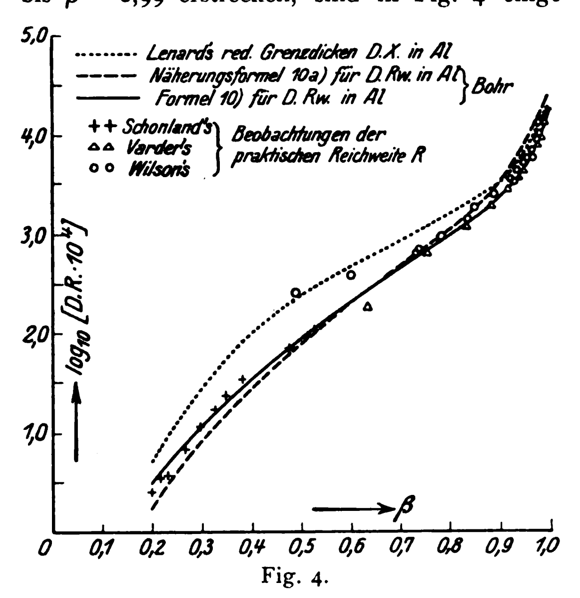


Fig. 4.

tragen; um den Überblick über den ganzen, sich von $D \cdot R = 0{,}00025$ bis $1{,}36\ \mathrm{g/cm^2}$ erstreckenden Kurvenverlauf zu ermöglichen wurde $\lg_{10} [D \cdot R \cdot 10^4]$ als Ordinate, β als Abszisse gewählt. Die punktierte Kurve entspricht der Lage von Lenards reduzierten Grenzdicken $D \cdot X$; die gestrichelte Kurve wurde als erste Näherung nach Gl. (10a) gerechnet, wobei die Konstante (für *Al* und mittleres β) überschlagsweise mit 0,4 eingesetzt wurde; die so erhaltenen genäherten Reichweiten wurden für dx in Gl. (10) eingesetzt und die damit berechneten endgültigen red. Reichweiten $D \cdot R_w$ durch die ausgezogene Kurve dargestellt. Wenn man bedenkt, daß bei diesem Vorgang keinerlei Angleichung an das Experiment nötig war, daß also die Reichweiten von der Theorie dem Absolutwert nach in ihrer Abhängigkeit von Material und Teilchengeschwindigkeit vorausgesagt werden, so kann die Übereinstimmung zwischen Erwartung und Erfahrung ausgezeichnet genannt werden. Um dem Einwand zu begegnen, daß die logarithmische Darstellung Abweichungen beschönigt — die Grenzdicken sind z. B. stellenweise um 300 Proz. zu groß — sind in Tabelle VI die Beobachtungen von Varder und Schonland zahlenmäßig der Theorie gegenübergestellt. Im Mittel liegen die theoretischen Werte um etwa 5 Proz. zu hoch. — Die Beobachtungen Madgwicks fallen, soweit sich dies aus der graphischen Darstellung beurteilen läßt, ganz in den Rahmen der übrigen Ergebnisse. Jedoch muß nochmals daran erinnert werden, daß die „praktische Reichweite" nicht ohne weiteres unmittelbar vergleichbar mit der wahren Reichweite ist.

Was die von der Theorie vorausgesagte Abhängigkeit der red. Reichweite $D \cdot R_w$ vom Material anbelangt, so findet, wie bereits weiter oben erwähnt, Bragg in der Tat den erwarteten Anstieg mit zunehmendem N und zwar in quantitativer Übereinstimmung mit der Berechnung. Bei den Beobachtungen der praktischen Reichweite in verschiedenen Materialien (Wilson, Schonland) zeigt sich jedoch die erwartete Abhängigkeit nicht oder nur schlecht ausgeprägt;

1) W. Wilson, Proc. Roy. Soc. (A) **82**, 612, 1919; **87**, 323, 1912.
2) R. W. Varder, Phil. Mag. **29**, 725, 1915.
3) B. F. I. Schonland, Proc. Roy. Soc. (A) **104**, 235, 1923; **108**, 187, 1925.

vermutlich dürfte dies an der Art der Ermittlung liegen, da der Streuungseinfluß sich bei derlei Beobachtungen stark bemerkbar machen muß. Wenn die Abhängigkeit der Geschwindigkeitsabnahme vom Material doch in ungefährer Übereinstimmung mit der Theorie ist (Tabelle IV), so ist nicht einzusehen, warum eine einwandfreie Beobachtungsmethode nicht auch die richtige Abhängigkeit der Reichweite liefern sollte.

II. Die Ionisierung durch α- und β-Teilchen.

7. Die Thomson-Bohrsche Theorie.

Denkt man sich um die auf kleinen Wegestücken geradlinige Bahn des bewegten Teilchens einen koaxialen Zylinder von der Länge Eins und dem Radius p, so sind in ihm $\pi p^2 L'$ Moleküle vorhanden, deren Elektronen Energiewerte übernehmen können, die nach (1) und (1a) zwischen dem größten Wert E_0 und dem durch p definierten kleinsten Wert E liegen. Schematisiert man zunächst so, daß alle N Elektronen eines Atomes dieselbe Ablösungsarbeit A benötigen, so werden alle jene Moleküle ionisiert, die sich innerhalb eines Zylinders mit dem Radius p_A befinden. Ihre Zahl ist pro Wegeinheit (Lenards differentiale „reine Sekundärstrahlung")

$$\left.\begin{aligned} Z &= \pi p_A^2 \cdot L' N = \pi L' N \lambda^2 \left(\frac{E_0}{A} - 1\right) \\ &= \frac{2\pi}{m}\left(\frac{eq}{v}\right)^2 L' N \left[\frac{1}{A} - \frac{(\mu + m)^2}{2\mu m^2 v^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Dieser Thomsonsche Ausdruck vernachlässigt erstens die Verschiedenheiten der Ablösearbeiten und gibt zweitens nur die „reine Sekundärstrahlung", d. i. die Zahl der Ionenpaare, die unter der direkten Einwirkung des Teilchens erzeugt werden, nicht aber die Zahl der insgesamt erzeugten Paare; denn ein Teil der primär ausgelösten Elektronen wird genügend Energie mitbekommen, um selbst ionisierend wirksam zu werden. Die nötige Weiterführung der Theorie stammt von Bohr.

Sind die Ablösearbeiten verschieden (A_1, $A_2 \ldots A_N$ in jedem Atom) so wird es nach (11) unter allen Elektronen ihrer

$$Z_i = \pi L' \lambda^2 \left(\frac{E_0}{A_i} - 1\right)$$

geben, die eine Energie größer als A_i mitbekommen. Wenn jedes dieser Elektronen die Energie $A_i + J$, $A_i + 2J \ldots A_i + nJ$ usf. benötigt, um seinerseits die Ionisierungsarbeit J, $2J \ldots nJ$ zu leisten und $1, 2 \ldots n$ Ionenpaare zu erzeugen, so ist unter den Z_i δ-Teilchen die Zahl jener, die mehr als die Energie $A_i + nJ$ mitbekommen, gegeben durch

$$Z_{in} = \pi L' \lambda^2 \left[\frac{E_0}{A_i + nJ} - 1\right].$$

Da es somit $Z_{i,0} - Z_{i,1}$ δ-Teilchen gibt, zu denen ein Ionenpaar gehört, $Z_{i1} - Z_{i2}$ mit 2 Ionenpaaren usf., so ist die auf dem Wegzentimeter erzeugte zur δ-Gruppe i gehörige Zahl der Ionenpaare gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_i &= 1\,(Z_{i,0} - Z_{i,1}) + 2\,(Z_{i,1} - Z_{i,2}) + \cdots \\ &= Z_{i,0} + Z_{i,1} + Z_{i,2} + \cdots \end{aligned}$$

Von allen zur Atomart gehörigen N Elektronengruppen zusammen werden auf der Weglängeneinheit insgesamt erzeugt (Lenards differentielle „summarische" Sekundärstrahlung):

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} = \pi L' \lambda^2 \sum^{N} \Bigg[&\left(\frac{E_0}{A_i} - 1\right) + \left(\frac{E_0}{A_i + J} - 1\right) \\ &+ \left(\frac{E_0}{A_i + 2J} - 1\right) + \cdots\cdots \Bigg]. \end{aligned}$$

Solange nun die maximal übertragbare Energie E_0 groß ist gegen alle vorkommenden A_i und J gilt nach Bohr für obige Summe die Näherung:

$$\mathfrak{k} = \pi L' \lambda^2 \frac{E_0}{J} \sum^{N} \lg \frac{E_0}{A_i}.$$

Nach Einsetzen von $\lambda^2 E_0$ (vgl. 1) und nach Darstellung der Ablösearbeiten durch $A = h\nu$ (entsprechend dem Bohrschen Atommodell) ergibt sich

$$\mathfrak{k} = \frac{2\pi e^2 q^2}{\mu} \frac{L' N}{v^2 J} \left[\lg v^2 - \frac{1}{N} \lg \nu + \lg \frac{2 m^2 \mu}{h (m + \mu)^2}\right]. \quad (12)$$

In Verbindung mit der den Energieverlust auf der Wegeinheit darstellenden Gleichung (3) folgt daraus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} J &= \frac{1}{2} \frac{dE}{dx} \frac{\lg v^2 - \frac{1}{N} \sum \lg \nu + \lg \frac{2 m^2 \mu}{h (m + \mu)^2}}{\lg v^3 - \frac{1}{N} \sum \lg \nu + \lg \frac{1{,}123\, m \mu}{2 \pi e q \cdot (m + \mu)}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{dE}{dx} \frac{s}{S} \cdots\cdots \end{aligned} \quad (13)$$

Da das letzte Glied in S für α- und β-Teilchen denselben Wert hat und da das letzte Glied in s für α-Teilchen den Wert $-1{,}29$, für β-Teilchen den Wert $-2{,}68$ hat, so unterscheiden sich s und S wesentlich nur durch die Potenz von v im ersten Glied. Daher ist, wenn man von einer Verfeinerung der Formeln für hochgeschwinde β-Teilchen absieht, die Aussage der Gl. (13) für α- und β-Teilchen gemeinsam: weil $\frac{s}{S}$ ein echter Bruch ist, beträgt die für die eigentliche Ionisierungsarbeit pro cm aufgewendete Energie $\mathfrak{k} \cdot J$ weniger als die Hälfte des gesamten Energieverlustes; und zwar wird für Ionisierungsarbeit um so weniger verwendet

Tabelle VII.
Werte für $s\alpha/S\alpha$ (Gl. (13a))

		H	He	N	Luft	O	Ne	Ar
$s\alpha/S\alpha$ . .	$v = 2 \cdot 10^9$	0,86	0,84	0,74	0,73	0,73	0,70	0,63
	$v = 1 \cdot 10^9$	0,97	0,90	0,82	0,81	0,80	0,77	(0,57)
relat.	$v = 2 \cdot 10^9$	1,18	1,15	1,02	1,0	1,0	0,96	0,86
geg. Luft	$v = 1 \cdot 10^9$	1,20	1,11	1,02	1,0	0,99	0,95	(0.70)

je schneller die Teilchen sind, je kleiner $\frac{s}{S}$ wird, wenngleich diese Geschwindigkeitsabhängigkeit nur gering ist. Gemäß der Ableitung der Gl. (3) und (12) wird der größere Teil der verlorenen Energie anscheinend verbraucht für Atomanregung ohne Ionisierung bzw. für solche Energieüberschüsse, die gerade nicht mehr zur neuerlichen ersten, zweiten, dritten usf. Ionisierung ausreichen.

8. Die Ionisierung durch α-Teilchen.

Für α-Teilchen mit $q_\alpha = 2e$ und $m_\alpha \gg \mu$ schreibt sich Gl. (12):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{k}_\alpha &= c_\alpha \frac{L'N}{v^2 J}\left[\lg v^2 - \frac{1}{N}\sum \lg \nu + \lg \frac{2\mu}{h}\right] \\ &= c_\alpha \frac{L'N}{v^2 J} \cdot s_\alpha \\ c_\alpha &= \frac{8\pi e^4}{\mu} = 1{,}446 \cdot 10^{-9}; \lg \frac{2\mu}{h} = -1{,}29. \end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

Da die Gleichung nur für α-Teilchen größerer Geschwindigkeit gilt, ist aus ihr die auf dem ganzen α-Weg erzeugte Ionenzahl k (Lenards „totale summarische Sekundärstrahlung") nicht ableitbar; dies ist deshalb störend, weil bei den α-Teilchen nur in den seltensten Fällen die differentielle Ionisierung $\mathfrak{k}$, meistens die totale Ionisierung für ein mehr oder weniger großes Stück der Restreichweite bestimmt wird.

In Verbindung mit Gl. (3) oder (4) erhält man speziell

$$\mathfrak{k} \cdot J = \frac{1}{2} \frac{dE_\alpha}{dx} \frac{s_\alpha}{S_\alpha}. \qquad (13a)$$

Den Gang des Verhältnisses s_α/S_α illustrieren die Zahlen der Tabelle VII, die für einige leichtatomige Substanzen und für $v = 2$ bzw. $1 \cdot 10^9$ cm/sec gerechnet sind. Für das folgende wesentlich ist die nochmalige Feststellung, daß die Theorie für schwere Atome bzw. kleine α-Geschwindigkeiten versagt; ferner, daß der Gang des betrachteten Verhältnisses gering ist, insbesondere gering, wenn es sich um Relativwerte, die z. B. auf Luft bezogen sind (Zeile 3 und 4) handelt.

Wird, wie es beim Experiment meist der Fall ist, nicht der absolute Wert von $\mathfrak{k}$, sondern der Relativwert $\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}$ gemessen, wobei als Bezugssubstanz ($\mathfrak{k}$) meist Luft verwendet wird, so gilt nach Gl. (12a) dann, wenn mit gleich schnellen α-Teilchen und in Gasen von gleichem Druck und Temperatur gearbeitet wurde,

$$\frac{\mathfrak{k}'}{\mathfrak{k}} = \frac{N' s'_\alpha}{N s_\alpha} \cdot \frac{J}{J'}. \qquad (14)$$

Wird nicht $\frac{\mathfrak{k}'}{\mathfrak{k}}$ sondern $\frac{k'}{k}$ gemessen, so ergibt sich aus diesem das Verhältnis der differentiellen Ionisierung für den Fall, als das Bremsvermögen s bekannt ist, zu

$$\frac{\mathfrak{k}'}{\mathfrak{k}} = \frac{k'/x'}{k/x} = \frac{k'}{k} \cdot s.$$

Insofern man nach Tab. VII das auf Luft bezogene Verhältnis s_α/S_α nicht nur in den ersten Zentimetern der Reichweite, sondern auch für das Reichweitenende als geschwindigkeitsunabhängig ansehen könnte, wäre ferner nach (13a) für α-Teilchen gleicher Restreichweite

$$\frac{k'}{k} = \frac{s'_\alpha/S'_\alpha}{s_\alpha/S_\alpha} \cdot \frac{J}{J'}. \qquad (14a)$$

und es wäre das Verhältnis der totalen Ionisierung nahe ein inverses Maß der relativen Ionisierungs-Spannungen.

Der Vergleich dieser theoretischen Aussagen mit dem Experiment kann auf mehrere Arten erfolgen; z. B. erstens durch Vergleich von Absolutzahlen, zweitens durch Vergleich von Relativzahlen bezüglich der Abhängigkeit einerseits von v, andererseits vom Material.

Einen Absolutwert für $\mathfrak{k}_{\text{Luft}}$ kann man sich verschaffen, wenn man die sehr genau bekannten Reichweiten und Totalionisierungen von α-Teilchen von RaC' und RaF heranzieht. Ihre Reichweiten in Normalluft sind 6,60 bzw. 3,72 cm, die Reichweitendifferenz beträgt also 2,88 cm. Nach H. Geiger[1]) bzw. H. Fonowitz-Smereker[2]) beträgt die Totalionisierung $(k)_{RaC'} = 2{,}10$ bzw. $2{,}20 \cdot 10^5$; die für Po nach T. S. Taylor[3]) sowie V. Bianu[4]) $(k)_{Po} = 1{,}61$ bzw. $1{,}58 \cdot 10^5$

1) H. Geiger, Proc. Roy. Soc. **82**, 486, 1909.
2) H. Fonowitz-Smereker, Wien. Ber. **131**, 355, 1922.
3) T. S. Taylor, Phil. Mag. **26**, 402, 1913.
4) V. Bianu, Bull. Acad. Roumaine **9**, 115, 1925.

Tabelle VIII.

Berechnung der Braggschen Kurve aus dem Energieverlust.

Verbrauchte Reichweite x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,0	6,2	6,4	6,6	6,7	6,8	6,9
$u = v/v_0$ nach Briggs . .	0,979	0,923	0,868	0,795	0,700	0,575	0,470	0,420	0,350	0,290	0,200	0,150	0,07
$10^6 \cdot dE_\alpha/d_x$ nach Briggs	1,15	1,22	1,33	1,54	1,83	2,35	2,90	3,20	3,50	3,00	2,00	1,00	—
$10^{-4} \cdot \mathfrak{k}_\alpha$ nach Gl. (13a) .	1,89	1,99	2,18	2,53	3,00	3,85	4,75	5,25	5,72	4,92	3,28	1,64	—
i nach Henderson. : .	0,32	0,35	0,38	0,43	0,50	0,64	0,77	0,90	0,97	0,99	0,82	0,60	0,20
i nach Curie-Behouněk	0,41	0,42	0,43	0,46	0,51	0,66	0,80	0,89	0,99	0,98	0,89	0,56	0,20

die mittlere Differenz von $0{,}56 \cdot 10^5$ ist jene Zahl von Ionenpaaren, die von den RaC'-α-Teilchen auf den ersten 2,88 cm ihrer Reichweite, also bei einer mittleren Geschwindigkeit von $1{,}72 \cdot 10^9$ cm/sec erzeugt wurde. Diese Berechnung ist deshalb gestattet, weil nach der Theorie sowohl als nach der Erfahrung der Ionisierungsverlauf bei der Braggschen Kurve nur von der Teilchenenergie und nicht etwa von ihrer Provenienz abhängt. Es wird im Mittel $\mathfrak{k}_\alpha = \frac{0{,}56 \cdot 10^5}{2{,}88} = 0{,}195 \cdot 10^5$ entsprechend einem mittleren $v = 1{,}72 \cdot 10^9$. Andererseits wird $(L'N)_{\text{Luft}} = 39 \cdot 10^{19}$ und s_α für obige Geschwindigkeit und für $N = 7{,}2$ erhält den Wert $s_\alpha = 2{,}5$. Damit wird nach Gl. (12a) die Ionisierungsspannung:

$$J = 24{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ Erg} = 15{,}3 \text{ e.-Volt}.$$

Ein Wert, der durchaus verträglich ist mit dem für Luft zu erwartenden, zwischen N_2 und O_2 gelegenen Mittelwert der Ionisierungs-Spannung, etwa 15,8 e.-Volt.

Den Verlauf der Braggschen Kurve nach (12a) zu berechnen ist untunlich, weil die Gleichung zu bald bei kleineren Geschwindigkeiten versagt. Dagegen soll sich die Änderung von $\mathfrak{k}_\alpha$ mit der Restreichweite in einfacher Weise nach Gl. (13a) aus dem Energieverlust, dessen Verlauf z. B. aus den Geschwindigkeitsmessungen von G. H. Briggs[1]) bekannt ist, berechnen lassen; da das in (13a) auftretende Verhältnis $\frac{s_\alpha}{S_\alpha}$ nach Tab. VII wesentlich weniger geschwindigkeitsabhängig ist, als Zähler oder Nenner für sich genommen, so kann es wohl in erster Näherung konstant gesetzt werden; ein dadurch hereingetragener Fehler würde sich erst am Reichweitenende bemerkbar machen. Tab. VIII vereinigt die der Fig. 5 zugrunde liegenden Zahlendaten. Die Werte der Zeilen 1, 2 und 3 sind der Arbeit von Briggs entnommen; die vierte Zeile enthält die nach Gl. (13a) (mit $J = 24{,}4 \cdot 10^{-12}$ Erg; $\frac{s_\alpha}{S_\alpha} = 0{,}80$) berechneten Zahlen für $\mathfrak{k}_\alpha$, die zur Konstruktion der ausgezogenen Kurve in Fig. 5 dienten. Die beiden letzten Zeilen geben Relativwerte (bezogen auf das Maximum der Braggschen Kurve), die aus Kurven von G. H. Henderson[1]) bzw. J. Curie und F. Behouněk[2]) interpoliert wurden. Die ebenfalls an α-Teilchen von RaC' von H. Geiger[3]) angegebene Braggsche Kurve läßt sich leider in dieser Art nicht auswerten. Die Beobachtungen der beiden letzten Zeilen wurden nach Multiplikation mit $5{,}9 \cdot 10^4$ (Maximum der theoretischen Kurve) ebenfalls in Fig. 5 eingetragen. Abgesehen vom letzten Kurvenstück, für welches die Berechnung überdies wenig genau

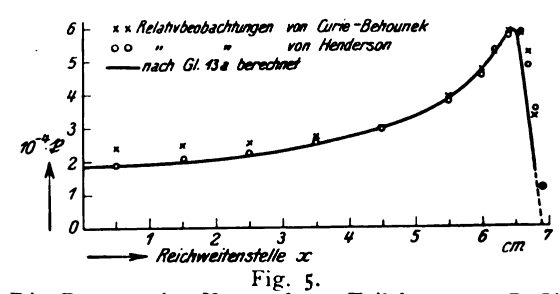


Fig. 5.
Die Braggsche Kurve für α-Teilchen von RaC' berechnet und beobachtet.

durchgeführt werden kann, ist die Übereinstimmung hinreichend gut. Offenbar spielt die Vernachlässigung der Variation von $\frac{s_\alpha}{S_\alpha}$ mit abnehmendem v keine sehr wesentliche Rolle; immerhin wird die durch Planimetrierung der Fig. 5 gewonnene Totalionisation etwas zu klein, nämlich $k = 1{,}85 \cdot 10^5$ statt $2{,}05 \cdot 10^5$. Erinnert sei auch an die Ergebnisse P. Kapitzas, der durch Vergleich des Energieinhaltes eines α-Teilchenstromes mit der Ionisierung an verschiedenen Stellen der α-Bahn zeigte, daß in der Tat an Beginn der Bahn für ein Ionenpaar scheinbar mehr Energie verausgabt wird, als am Reichweitenende, was in qualitativer Übereinstimmung mit den Aussagen der Gl. (13a) steht.

Über die Abhängigkeit der Ionisierung von der Gasart liegt eine größere Anzahl von Beobachtungen vor; jedoch seien hier zum Vergleich

1) G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. **114**, 341, 1927.

1) G. H. Henderson, Phil. Mag. (6) **42**, 538, 1921.

2) J. Curie u. F. Behouněk, Journ. de Phys. (6) **7**, 125, 1926.

3) H. Geiger, Zeitschr. f. Phys. **8**, 45, 1921.

Tabelle IX.

Beobachtetes und berechnetes relatives differentielles Ionisierungsvermögen in verschiedenen Gasen.

Gas	H_2	He	N_2	Luft	O_2	Ne	A
Elektronenzahl im Molekül . .	2,0	2,0	14,0	14,4	16,0	10,0	18,0
Ionis.-Spannung I in e-Volt . .	16,2	25,0	16,0	15,8	15,0	21,0	15,0
$s'a/sa$	2,1	1,6	1,0	1,0	0,94	0,85	0,61
$\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}$ berechnet	0,30	0,14	0,95	1,0	1,08	0,44	0,80
Bremsvermögen s	0,309	0,179	(1)	1,0	0,981	0,437	0,914
relat. Totalionisierung k'/k . .	1,07	1,26	0,98	1,0	1,08	1,28	1,38
$\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}$ beobachtet	0,33	0,22	0,98	1,0	1,06	0,56	1,26

Tabelle X.

Berechnung der Ionisierungsspannung zusammengesetzter Moleküle.

Gas	CH_4	C_2H_2	C_2H_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	C_4H_{12}	C_6H_6
N' Elektronenzahl im Molekül	10,0	14	16,0	18,0	26,0	34,0	42,0	42,0
$\mathfrak{k}'/\mathfrak{k} = s \cdot k'/k$	10,3	1,40	1,65	1,97	3,05	4,02	4,85	4,30
Ionisierungs-Spannung J' . . .	10,7	11,0	10,7	10,0	9,4	9,3	9,4	10,7
Ionisierungs-Spannung J' . . .	9,5	9,9	9,9	10,0	—	—	—	9,6

mit der Theorie nur die Angaben von R. W. Gurney[1]) herangezogen und auf die späteren Versuche von G. E. Gibson und B. W. Gardiner[2]) bzw. Gibson und H. Eyring[3]) verwiesen. Gurney mißt für eine Anzahl von elementaren Gasen sowohl das Bremsvermögen, als die Gesamtionisierung durch ein α-Teilchen, allerdings auf den letzten Wegmillimetern. Der letztere Umstand ist mißlich, denn der Gültigkeitsbereich der Theorie gestattet die Berechnung des zu erwartenden Effektes nach Gl. (14) nur für schnelle Teilchen. In Tabelle IX sind nun angegeben: in der ersten Zeile die Zahl der Elektronen im Molekül, in der zweiten die Ionisierungspannungen, (Landolt-Börnstein), in der dritten s'_α/s_α, in der vierten das nach (14) berechnete, auf Luft bezogene differentielle Ionisierungsverhältnis $\frac{\mathfrak{k}'}{\mathfrak{k}}$ für RaC-α-Teilchen am Reichweitenanfang. Die 5. und 6. Zeile enthalten Gurneys Angaben über Bremsvermögen s und Verhältnis der Totalionisierung $\frac{k'}{k}$, woraus durch Multiplikation $\frac{\mathfrak{k}'}{\mathfrak{k}}$ für das Reichweitenende folgt. Der Vergleich dieser letzten mit der vierten Zeile zeigt, daß zwar nicht quantitative Übereinstimmung auf diesem Wege erzielt wird, daß aber das Wesentliche der Erfahrung von der Theorie vorausgesagt wird, so weit eben der Schluß von schnellen Teilchen auf langsame eine Voraussage gestattet.

Eine weitere Probe der Verwendbarkeit von (14a) kann man durch Heranziehung der Angaben über die Ionisierung zusammengesetzter Moleküle erhalten; insbesondere dann, wenn die Berechnung des Ausdruckes s'_α/s_α keine Schwierigkeiten macht. Bei den Kohlenwasserstoffen z. B. wird man wohl annehmen dürfen, daß das zur Bindung des Wasserstoffes verwendete Elektron sich nicht viel anders benehmen wird, wie die vier Kohlenstoffelektronen der äußersten Schale. So daß man für die Berechnung von s'_α angenähert eine Elektronenkonfiguration wie im Stickstoffatom rechnen und $s'_\alpha/s_\alpha = 1$ ansetzen darf. Dann erhält man die Ionisierungsspannung J' des betreffenden Moleküls einfach aus $J' = \frac{N'}{N} \cdot \frac{k}{k'} \cdot s \cdot J$. Z. B. gibt W. H. Bragg in seinem bekannten Buch „Durchgang von α-β-γ-Strahlen durch Materie" (Leipzig, Barth 1913) auf S. 78 eine Tabelle, aus der Daten über $\frac{k}{k'}$, s für verschiedene Kohlenwasserstoffe entnommen und in Tabelle X zusammengestellt wurden. Die erste Zeile gibt die Zahl der Elektronen im Molekül, die zweite die Braggschen Werte für die relative differentielle Ionisierung bezogen auf Luft, die dritte die mit $J = 15{,}8$ e-Volt daraus berechneten Ionisierungsspannungen J' in e-Volt. Die vierte Zeile enthält Vergleichswerte, die (Handb. d. Phys. 23, S. 767) auf direktem Wege gewonnen wurden. Wieder ist die Übereinstimmung sicher mehr als nur größenordnungsmäßig.

1) R. W. Gurney, Proc. Roy. Soc. **107**, 332, 340, 1925.

2) G. E. Gibson u. B. W. Gardiner, Phys. Rev. (2) **30**, 543, 1927.

3) G. E. Gibson u. H. Eyring, Phys. Rev. (2) **30**, 553, 1927.

Tabelle XI.

Abhängigkeit des $\mathfrak{k}_\beta$ von der Teilchengeschwindigkeit.

β	0,45	0,552	0,622	0,691	0,742	0,782	0,821	0,85	0,89	0,912	0,94	0,952	0,96	0,969
$\mathfrak{k}_\beta$	214,0	155,0	127,0	94,0	0,84	74,0	68,0	61,0	56,0	55,0	53,0	50,0	47,0	46,0
beob. $\beta^2\mathfrak{k}_\beta$	43,5	47,3	49,0	45,0	46,2	45,3	45,9	44,2	44,3	45,8	46,9	45,3	43,5	43,3
ber. $\beta^2\mathfrak{k}_\beta$	32,0	34,2	35,4	37,2	38,0	38,6	39,3	39,7	40,2	40,4	41,0	41,2	41,4	41,6

9. Die Ionisierung durch β-Strahlen.

Für β-Teilchen mit $v = \beta \cdot c, q_\beta = e, m_\beta = \mu$ schreibt sich Gl. (12):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{k}_\beta &= c_\beta \frac{L'N}{\beta^2 J}\left[\lg \beta^2 - \frac{1}{N}\sum \lg \nu + \lg \frac{m c^2}{2h}\right] \\ &= c_\beta \frac{L'N}{\beta^2 \cdot J} \cdot S_\beta \\ c_\beta &= \frac{2\pi e^4}{\mu c^2} = 40{,}2 \cdot 10^{-32}; \lg \frac{\mu c^2}{2h} = 45{,}60\,. \end{aligned}\right\} \quad (12\text{b})$$

Ist J z. B. für Luft gegeben, so kann daraus $\mathfrak{k}_\beta$ für verschiedene Teilchengeschwindigkeit berechnet und mit dem Experiment verglichen werden. Mit $J = 15{,}8$ e-Volt, $L'N = 39{,}10^{19}$, $\frac{1}{N}\sum \lg \nu = 38{,}87$ wird

$$(\mathfrak{k}_\beta)_{\text{Luft}} = \frac{6{,}22}{\beta^2}\left[\lg \beta^2 + 6{,}73\right].$$

Tabelle XI enthält die Angaben von W. Wilson[1]) bzw. S. Bloch[2]) für $\mathfrak{k}_\beta$ im Gebiet schnellerer β-Teilchen; die dritte Zeile gibt den nahe konstanten experimentellen Wert für $\beta^2\mathfrak{k}_\beta$ die vierte Zeile die nach obiger Gleichung gerechneten Werte dieses Produktes. Trotz der Unvollkommenheiten des Experimentes (Mangel an Homogenität der verwendeten Strahlung) sowohl als der Theorie (Nichtberücksichtigung der bei großer Teilchengeschwindigkeit auftretenden Veränderungen) ist auch hier die theoretische Voraussage dem Absolutwert nach in der Erfahrung nahe erfüllt.

Man kann weiter ebenso wie etwa in Tabelle X die differentielle Ionisierung in verschiedenen gasförmigen Verbindungen miteinander vergleichen, die bei gleicher Temperatur und Dichte nach Obigem bzw. nach Gl. (14) in erster Annäherung der im Molekül enthaltenen Elektronenzahl direkt, der Ionisierungsspannung verkehrt proportional zu erwarten ist. Wie wegen der Gleichartigkeit des Ionisierungsmechanismus für α- und β-Teilchen vorauszusagen ist, liefert ein solcher Vergleich nichts, was über die Aussagen der Tabelle X hinausgehen oder ihr widersprechen würde. Für zwei Gase, H_2 und O_2 ist, um ein Beispiel zu geben, die Rechnung in der folgenden Tabelle 12 durchgeführt, und zwar für $\beta = 0{,}8$ und für $J_{\text{Luft}} = 15{,}8$ e-Volt als Bezugswert. Statt der aus andern Messungen bekannten Ionisierungsspannungen 16,2 bzw. 15 e-Volt (letzte Spalte) ergeben sich die Werte 19,8 bzw. 14,7 e-Volt.

1) W. Wilson, Proc. Roy. Soc. (A) **85**, 240, 1911.
2) S. Bloch, Ann. d. Phys. **38**, 559, 1912.

Tabelle XII.

Ionisierungs-Spannung in H_2 und O_2

	$(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})_\beta$	N'/N	s'_β/s_β	J	J'
H_2	0,165	0,139	1,49	19,8	16,2
O_2	1,17	1,11	0,98	14,7	15,0

10. Zusammenfassung.

In den Bohrschen Formeln für den Energieverlust und die Ionisation, die beim Durchgang von α- und β-Teilchen durch Materie eintreten, kommt ein Ausdruck $\frac{1}{N}\sum \lg \nu$ vor. Durch schematisierende Auswertung dieses Ausdruckes kann man die Theorie mit dem Experiment den Absolutwerten nach vergleichen. Dieser in den vorangehenden 9 Abschnitten durchgeführte und auf Energieverlust, Reichweite und Ionisierung sowohl der α- als der β-Teilchen in Abhängigkeit von Teilchengeschwindigkeit und Material erstreckte Vergleich hat ergeben: In allen Fällen erreicht man eine quantitative Übereinstimmung, die in manchen Fällen überraschend gut, in andern Fällen mindestens nicht schlecht zu nennen ist. Sicherlich ist die Übereinstimmung im allgemeinen nicht so gut und so überzeugend, daß man jetzt schon das Gegenüberhalten von Theorie und Experiment seinem eigentlichen Endzweck, der Ermittlung der Atomkonstanten, zuführen könnte. Das mag zum Teil an den Unvollkommenheiten der Theorie liegen — sie ist nur für schnelle Teilchen bzw. niedere Atomnummern verwendbar und besitzt daher einen nur beschränkten Gültigkeitsbereich —, das mag und wird aber auch zum Teil an den Unvollkommenheiten des Experimentes liegen, die man, wenn der Raum es gestatten würde, in jedem einzelnen Fall sehr deutlich aufzeigen könnte. Sicherlich ist aber die mit dieser einfachsten schematisierenden Auswertung erzielte Darstellbarkeit des Experimentes bereits so gut, daß man die Bohrsche Theorie stärker als dies im allgemeinen bisher der Fall

ist, wenigstens als ordnendes Prinzip für die Beschreibung der Erfahrung heranziehen sollte. Vielleicht würde der Experimentator daraus lernen, den Versuch so anzulegen, daß er theoretisch erfaßbar ist, und der Theoretiker seinerseits deutlicher als bisher sehen, welche Mängel der Theorie es sind, die ihre Aussagen oder ihre Anwendbarkeit problematisch machen.

Graz, Physikal. Institut der Technischen Hochschule, 2. Februar 1928.

(Eingegangen 10. Februar 1928.)

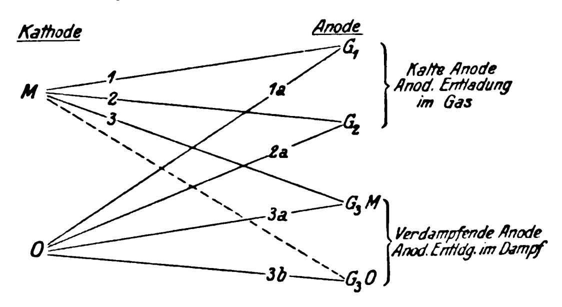
Studien über den Mechanismus des Lichtbogens.

II. Glimmbogen und zischende Bogen.

Von H. Schmick und R. Seeliger.

Im Zusammenhang mit Untersuchungen über den Materialtransport im Eisenbogen, über die an anderer Stelle berichtet werden wird, haben wir einige Beobachtungen über die im Titel genannten Bogenformen angestellt, die in manchen Punkten eine Ergänzung zu den bisher in der Literatur beschriebenen Erscheinungen geben können. Durch die inhaltreichen Untersuchungen von Cady[1]) sowie von Hagenbach[2]) und dessen Mitarbeitern ist man zwar über die als Glimmbogen bezeichnete Entladungsform in allen wesentlichen Punkten unterrichtet und die recht verwickelten Verhältnisse können prinzipiell wohl als hinreichend geklärt gelten. Bei der Lektüre dieser Arbeiten sind wir aber auf einige Punkte gestoßen, deren erneute Diskussion vielleicht von Nutzen sein kann. Denn es bestehen unzweifelhaft noch einige nicht nebensächliche Verschiedenheiten zwischen den Angaben der genannten Forscher und es dürfte auch die Hervorstellung gewisser allgemeiner Gesichtspunkte erwünscht sein.

1. Es empfiehlt sich, die unter der Bezeichnung Bogenentladung zusammengefaßten Formen der raumladungsbeschwerten Entladungen zunächst für den Fall der Metallbogen in zwei Klassen zu unterteilen, die vollständigen Bogen und die Glimmbogen. Als das unterscheidende Merkmal ist anzusehen, daß bei den ersteren die Anode bis zur Verdampfungstemperatur erhitzt ist, während bei den Glimmbogen die Anode kalt bleibt oder jedenfalls noch nicht in merklichem Maß verdampft. Die Vorgänge an der Kathode sind in beiden Klassen dieselben und eben die für die Bogenentladung zum Unterschied von der Glimmentladung typischen. Für abwegig hingegen halten wir es, eine gelegentlich beschriebene[1]) Entladungsform mit kalter Kathode und heißer verdampfender Anode als eine Sonderform des Glimmbogens, also als eine Bogenentladung zu bezeichnen. Denn bei dieser Form handelt es sich um eine wirkliche Glimmentladung und nicht um einen Bogen und es sind lediglich thermische Zufälligkeiten, welche diese Form von der regulären Glimmentladung mit beiderseits kalten Elektroden unterscheiden. Die beiden genannten Klassen stimmen überein mit den von Cady am Eisenbogen untersuchten und von ihm als erstes und zweites Stadium bezeichneten Formen und es scheint uns deshalb die Einführung und scharfe Unterscheidung gerade dieser beiden Formen oder Zustände der Bogenentladung physikalisch durchaus gerechtfertigt zu sein. Die Untersuchungen von Hagenbach haben dann eine Verfeinerung und einen Fortschritt gebracht durch eine genauere Betrachtung der Verhältnisse an den Elektroden. Es sind nämlich in einem Metallbogen zwei Kathodenfälle (am Metall M und am Oxyd O) möglich und vier Anodenfälle (mit ausgedehnter Glimmlichtbedeckung G_1 und mit konzentrierter Glimmlichtbedeckung G_2 an kalter Anode sowie mit verdampfendem Metall G_3M und verdampfendem Oxyd G_3O) und es sind deshalb im ganzen acht verschiedene Bogenformen denkbar, von denen bisher sieben beobachtet wurden. Man kann dies in das folgende übersichtliche Schema bringen, in das wir die Hagenbachsche Bezeichnung der Formen eingeschrieben haben (Form 1—3, 1_a—3_a, 3_b):



2. Eine Wiederholung der von Cady beschriebenen Versuche führte uns zunächst zu einer Bestätigung aller seiner Angaben; am Eisenbogen haben wir dann den Übergang vom Glimmbogen zum vollständigen Bogen etwas genauer untersucht. Die Messungen wurden vorgenommen für

1) W. G. Cady u. H. D. Arnold, Physik. Zeitschr. **8**, 890, 1907; W. G. Cady, ebd. **14**, 296, 1913.

2) A. Hagenbach, Physik. Zeitschr. **10**, 649, 1909; **12**, 1015, 1911; A. Hagenbach u. H. Veillon, ebd. **11**, 833, 1910; E. Banderet, Diss. Basel 1912; W. Frey, Ann. d. Phys. **49**, 937, 1916.

1) W. G. Cady, **14**, 296, 1913.

Elektroden von passend gewählten Dicken, nämlich derart, daß die Elektrodenkuppen sich in schmelzflüssigem Zustand befanden und ihre Größe und Form unverändert beibehielten. Bis zu Stromstärken von 2 Amp. betrug die Dicke des Kathodenstabes 2 mm, die des Anodenstabes 3 mm; bei höheren Stromstärken waren die Dicken 3 und 5 mm. Für die Versuche in Stickstoff und bei Unterdruck bewährte sich auch hier das früher[1]) schon benutzte Metallgefäß mit Wasserkühlung und einem Schauloch. Wie noch bemerkt sei, beziehen sich alle unsere Angaben auf die Bogenformen zwischen Elektroden, die mit einer Kuppe aus Eisenoxyd bedeckt waren. In freier Luft bilden sich solche Kuppen von selbst, für die Untersuchung in Stickstoff wurden sie durch eine vorhergehende Formierung in Luft hergestellt, um in beiden Gasen dieselben Verhältnisse zu haben. Außerdem erwies es sich auch an sich als vorteilhaft, da — wie schon Cady erwähnt — an oxydierten Elektroden der Glimmbogen viel leichter zu erhalten ist und da die Verhältnisse an derartigen Elektroden besonders konstant zu sein scheinen. Wir haben es im folgenden also stets zu tun mit den *a*-Formen bzw. mit der Form 3b. Die Charakteristiken hatten in Luft und Stickstoff qualitativ dieselbe

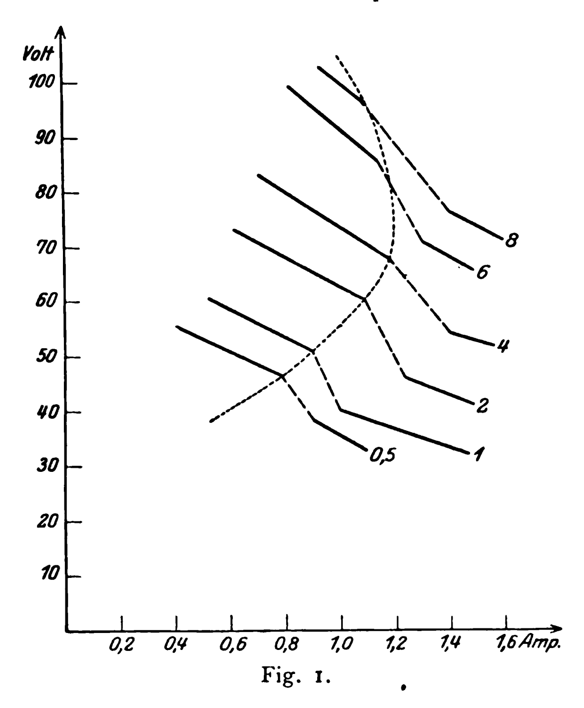


Fig. 1.

Form; in Fig. 1 sind für Bogenlängen zwischen 0,5 und 8 mm solche Charakteristiken für den Bogen in Luft nach unseren Messungen gezeichnet. Überlappungen der beiden Charakteristikenzweige und also je zwei Spannungswerte zu einem Wert der Stromstärke, wie sie Cady und insbesondere Hagenbach über weite Stromstärkebereiche erhalten haben, konnten auch wir bei vorsichtiger Änderung des Vorschaltwiderstandes vor allem bei tieferen Drucken und nachdem die Entladung sich erst einmal eingebrannt hatte, beobachten. An Stelle der in der Fig. 1 gezeichneten Kurven hätte man also eigentlich parallelogrammförmige Kurvenzüge zu zeichnen[1]), die sich im kritischen Gebiet aus je zwei Charakteristikenzweigen und aus zwei Übergangsgeraden zusammensetzen. Wir kommen darauf noch zurück und wollen hier nur bemerken, daß uns vor allem der Übergang in der Richtung Glimmbogen → vollständiger Bogen interessierte und für diesen sich die in der Fig. 1 gezeichnete Sachlage als quantitativ recht genau festlegbar und reproduzierbar ergab.

Im einzelnen haben wir folgende Gesetzmäßigkeiten gefunden, wobei für die quantitative Bewertung allerdings zu bemerken ist, daß die Spannungsstürze nicht durch die Charakteristiken allein gegeben sein werden, sondern daß sie vermutlich auch von den Stabilisierungsbedingungen (Neigung der Widerstandsgerade) abhängen; physikalisch einwandfrei wären sie wohl am besten zu definieren durch die kürzesten orthogonalen Abstände zwischen den sich überlappenden Charakteristikenzweigen.

a) Die Grenzstromstärke, bei der der Umschlag erfolgt, nimmt wie Fig. 1 zeigt, mit zunehmender Bogenlänge zu, jedoch nicht dauernd, sondern nur bis zu einem Maximum, um dann wieder abzunehmen.

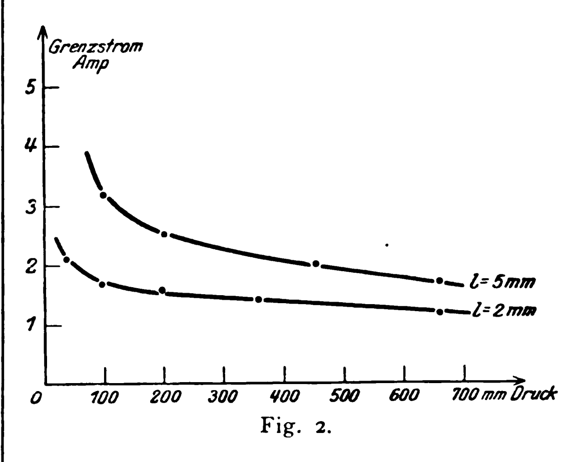


Fig. 2.

b) Die Grenzstromstärke steigt mit abnehmendem Druck, wie dies aus Fig. 2 für zwei Bogenlängen zu entnehmen ist.

1) Physik. Zeitschr. **28**, 605, 1927, Fig. 2.

1) Vgl. z. B. die Figur in der Arbeit von Cady, Physik. Zeitschr. **14**, 296, 1913.

c) Die Spannung, bei welcher der Umschlag erfolgt, nimmt mit zunehmender Bogenlänge zu

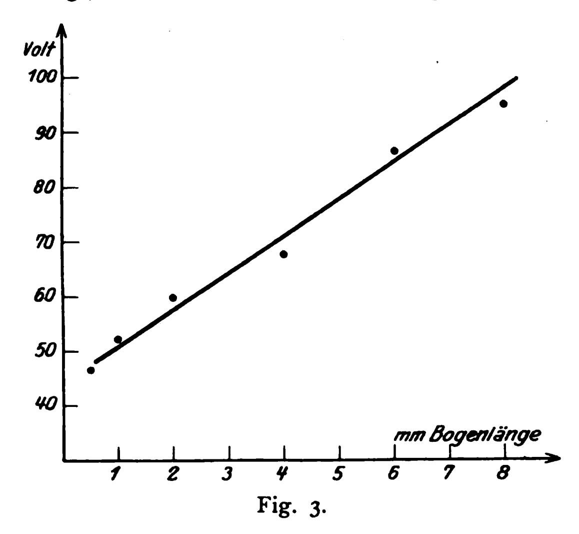


Fig. 3.

und zwar nach Fig. 3 in recht guter Annäherung linear.

d) Auch der mit dem Umschlag verbundene Spannungssturz nimmt mit zunehmender Bogenlänge zu, wofür die Fig. 4 den Beleg gibt.

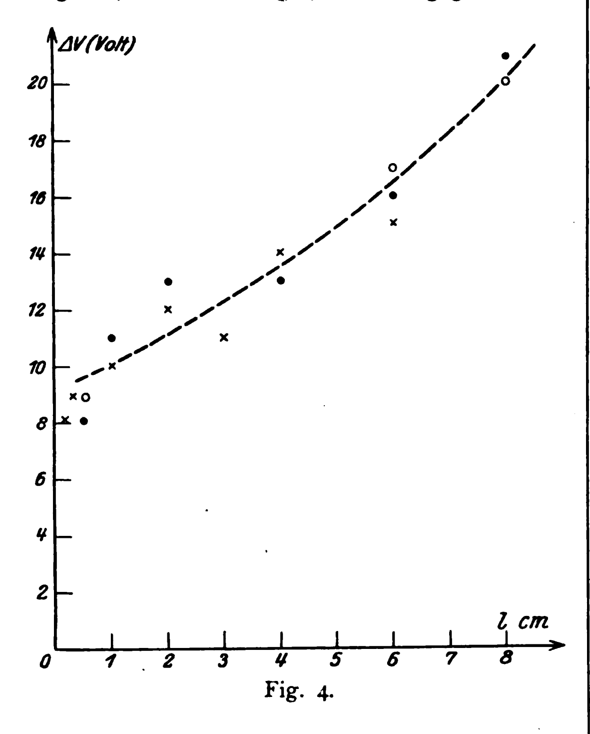


Fig. 4.

Wir werden aus diesen Befunden später noch einige wichtige Folgerungen ziehen. Hier sei nur noch bemerkt, daß die Grenzstromstärke-Druckkurve (vgl. dazu die schematische Fig. 5) in der Strom-Druckebene den Existenzbereich des Glimmbogens von dem des vollständigen Bogens abtrennt, und daß der Existenzbereich des vollständigen Bogens umso kleiner wird, je kleiner der Druck bzw. je größer die Bogenlänge ist. Dies macht in einfacher Weise verständlich, warum in der Arbeit von Banderet bei der verhältnismäßig großen Bogenlänge von 2 cm bei tieferen Drucken nur noch der Glimmbogen untersucht werden konnte (umgekehrt erhält man bei höheren Drucken und insbesondere bei Atmosphärendruck den Glimmbogen nur, wenn man mit der Stromstärke genügend weit heruntergeht). Von Einfluß ist wahrscheinlich auch gewesen, daß Banderet mit Elektrodenstäben von 10 mm Dicke gearbeitet hat und deshalb die Stirnfläche der Anode nicht aus einer homogenen Kuppe bestand.

3. Den Übergang vom Glimmbogen in den vollständigen Bogen kann man (Fig. 5) erzwingen auf zweierlei Weise, nämlich durch Steigerung des Druckes bei konstanter Stromstärke oder durch Steigerung der Stromstärke bei konstantem

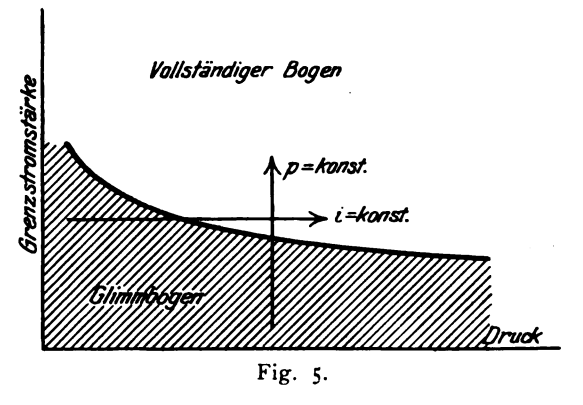


Fig. 5.

Druck. Wir haben die beiden Arten des Überganges an dem stark vergrößerten Projektionsbild verfolgt; die Bilder sind wegen der verschiedenen Farben der einzelnen Entladungsteile von großer Schönheit; sie lassen sich auch leicht photographisch festhalten, eine Wiedergabe unserer Aufnahmen ist im Hinblick auf die von Hagenbach bereits veröffentlichten Bilder aber hier entbehrlich. Das Wesentliche scheinen uns die folgenden Feststellungen zu sein, die sich auf die Beobachtungen in Stickstoff beziehen, in Luft aber abzüglich einiger hier nicht interessierender Einzelhei.en ganz ebenso gelten.

Wenn wir unsere Beobachtungen zunächst einfach beschreiben und uns dabei, lediglich zur Vereinfachung der Ausdrucksweise, bezüglich des Aussehens der anodischen Entladungsteile der Hagenbachschen Nomenklatur (Form 1—3) bedienen, ergibt sich folgendes Bild: Steigert man bei konstanter genügend großer Stromstärke den Druck, so geht die Form 1 zuerst ganz kontinuierlich in die Form 2 über, d. h. die wie eine

diffuse Haut über die Anode gezogene Glimmlichtbedeckung zieht sich allmählich in ihrem zentralen Teil in eine violette pilz- oder kugelförmige Ansatzstelle zusammen; steigert man den Druck weiter, so beginnt sich ebenso kontinuierlich die Form 3 zu entwickeln; d. h. die Anode beginnt zu verdampfen und ihre Umgebung leuchtet dann in dem charakteristischen bläulichen Licht des Eisendampfes. Bemerkenswert ist, daß auch dann noch im zentralen Teil des anodischen Lichtes die violette Ansatzstelle, die bei Form 2 allein vorhanden war, zunächst deutlich sichtbar bleibt. Während der Umbildung der Form 1 in die Form 2 ist in der Charakteristik keinerlei Unstetigkeit zu bemerken. In einem bestimmten Entwicklungsstadium der Form 3 hingegen (d. h. also, nachdem die Anode bereits deutlich begonnen hat, Dampf abzugeben), fällt plötzlich die Brennspannung ab und die Ausbildung dieser Form schreitet spontan bis zu einem stationären Endzustand fort. Vermindert man den Druck, so sind die Erscheinungen die folgenden. Wenn sich bei kleinen Stromstärken der Bogen im Glimmzustand (Form 2) befindet, so verschwindet bei etwa 400 mm der violette pilzförmige Ansatz und es bleibt nur die gleichförmige diffuse Bedeckung der Anode übrig (Form 1). Wenn sich bei größeren Stromstärken (oberhalb des Umschlagpunktes) der Bogen im vollständigen Zustand (Form 3) befand, wird mit abnehmendem Druck der violette Pilz wieder sichtbar, zunächst weiterhin zusammen mit der scharf begrenzten verdampfenden Ansatzstelle und der bläulichen Dampfhülle. Dann beginnt bei etwa 100 mm die gleichförmige diffuse Bedeckung sichtbar zu werden, die sich immer weiter ausdehnt und bei etwa 20 mm die große Anodenkuppe überzieht, während zugleich die Temperatur der Anode abnimmt, bis die Verdampfung vollständig aufgehört hat. Steigert man jedoch bei konstantem Druck die Stromstärke, so ist je nach dem Druck von Anfang an die Form 2 bereits vorhanden oder nicht; im ersteren Fall bleibt diese Form dann auch weiterhin bestehen, bis sie kontinuierlich in den Beginn der Form 3 übergeht, in letzterem erscheint sie überhaupt nicht. Die Form 2 also kann man wie es scheint durch Änderung der Stromstärke allein nicht erzeugen.

Es gewinnen nun in diesem Zusammenhang auch Beobachtungen an Interesse, die der eine von uns (Seeliger) schon vor längerer Zeit gemeinsam mit Herrn Schmekel angestellt hatte, und die sich auf die Veränderungen im Aussehen der positiven Säule und der anodischen Ansatzstelle der Entladung beim Übergang der Glimmentladung in die Bogenentladung bezogen.

Wie wir früher gezeigt haben[1]), entwickelt sich der kathodische Brennfleck der Bogenentladung kontinuierlich aus der Glimmlichtbedeckung der Kathode. Nach der seit langem bekannten Abhängigkeit der Säulenlänge vom Kathodenfall bzw. von der Stromstärke ist es ohne weiteres verständlich, daß die positive Säule dabei zuerst gegen die Anode zurückgedrängt wird, wenn der Kathodenfall zunimmt, daß sie aber dann sich wieder gegen die Kathode hin vorschiebt, wenn das Charakteristikenmaximum überschritten ist und daß sie endlich sprungweise bis unmittelbar an die Kathode vorschießt, wenn der Brennfleck sich ausbildet und der Kathodenfall absinkt. Man kann in diesem Verhalten der Säule eine schöne direkte Illustration und Widerspiegelung der Größe des Kathodenfalls sehen. Wichtiger sind Beobachtungen über die Änderungen des Säulenquerschnitts und der anodischen Ansatzstelle. Wir haben solche angestellt an einer reinen *Hg*-Anode und an einer Kupferanode; um die Vorgänge an der Anode und in der Säule unabhängig und losgelöst von den Vorgängen an der Kathode untersuchen zu können, benutzten wir eine Glühkathode und zwar teils eine fremdgeheizte Oxydkathode der üblichen Art, teils eine aus einem Platinstreifen oder einer Wolframspirale hergestellte Kathode, die sich nach Zündung der Entladung von selbst auf Weißglut hielt.

Die Erscheinungen an der Kupfer- und an der *Hg*-Anode sind in allen wesentlichen Punkten dieselben, ebenso konnten wir keinen prinzipiellen Unterschied zwischen den Erscheinungen an einer Anode aus technisch reinem und aus im Vakuum destilliertem *Hg* und zwischen denen in Bombenstickstoff und in Stickstoff finden, der über glühendem Kupfer nach sorgfältiger Trocknung möglichst von Sauerstoff befreit worden war. Wir beziehen uns im folgenden auf die Beobachtungen an einer Anode aus reinstem im Vakuum destillierten Quecksilber in reinem Stickstoff, die aus einem Quarzrohr halbkugelig hervorschaute. Mit steigendem Strom zieht sich die anodische Ansatzfläche der Entladung zusammen und es entsteht aus der Form 1 die Form 2 mit einer Ansatzstelle in Form eines hellen weißen Kügelchens. Die Ausbildung dieser Form 2 erfolgt durchaus kontinuierlich und ist bei umso kleinerer Stromstärke $i = I_1$ bereits vollendet, je höher der Druck ist. Bei weiterer Steigerung der Stromstärke aber erfolgt nun eine Kontraktion der Säule und zwar bei genügender Stabilisierung ebenfalls kontinuierlich. Die Säule zieht sich zusammen in einen Entladungskanal von kleinem Querschnitt. Auch die Stromstärke

1) Physik. Zeitschr. **27**, 730, 1926.

$i = I_2$, bei der diese Kontraktion vollendet ist, hängt vom Gasdruck ab und nimmt mit zunehmendem Druck ab. Die folgende Tabelle gibt, soweit sich Zahlenwerte überhaupt festlegen lassen, diese Abhängigkeiten wieder:

p(cm)	I_1 (mA)	I_2 (mA)
15	23	95
10	25	95
5	30	110
1	70	150
0,3	110	—

Die Ausbildung beider Formen erfolgt innerhalb eines umso kleineren Strombereiches, je höher der Druck ist und bei den hohen Drucken bereits so rasch, daß man nur bei sehr langsamer Stromstärkeänderung nicht den Eindruck eines plötzlichen Umschlages in die neue Form gewinnt. Eine Trennung zwischen den Formen 2 und der folgenden Entwicklungsstufe in Gestalt der Form 3 läßt sich an einer Quecksilberanode natürlich überhaupt nicht mehr vornehmen. Die Beobachtungen an der Kupferanode deuteten aber darauf hin, daß auch der Übergang von 2 zu 3 parallel gehend mit der beschriebenen Kontraktion der Säule und der zunehmenden Temperatursteigerung der Anode ganz kontinuierlich erhalten werden kann.

4. Wenn auch die Stabilisierungsbedingungen, unter denen der Übergang der einzelnen Formen ineinander kontinuierlich erhalten werden kann, noch genauer untersucht werden müßten, so läßt sich aus den geschilderten Beobachtungen doch mit Sicherheit entnehmen, daß solche kontinuierliche Übergänge überhaupt möglich sind, und es wäre ja auch recht merkwürdig, wenn dies nicht der Fall wäre. Immerhin bleiben noch manche Fragen offen, zu denen einige ergänzende Bemerkungen zu machen nicht unnötig ist.

a) Wie erwähnt, haben wir bei Steigerung der Stromstärke eine ganz kontinuierliche Entwicklung der Form 2 aus der Form 1 beobachtet und dabei ebenso kontinuierlich den linken Ast der in Fig. 1 gezeichneten Charakteristiken erhalten. „Optisch" also konnten wir die beiden Formen 1 und 2 unterscheiden, nicht aber „elektrisch". Dies widerspricht zwar natürlich durchaus nicht dem Ergebnis der Untersuchungen von Hagenbach und Banderet, daß die Form 2 sich von der Form 1 durch die Größe des Anodenfalls unterscheidet, es ergibt sich aber eine Diskrepanz mit dem von Hagenbach am Kupferbogen erhaltenen Ergebnis, daß man für die beiden Formen zwei voneinander getrennte Charakteristiken aufnehmen kann. An der Richtigkeit dieser Feststellung Hagenbachs ist nicht zu zweifeln, so daß hier also tatsächlich eine Schwierigkeit, und zwar wie sich sogleich zeigen wird, eine Schwierigkeit von gewisser grundsätzlicher Bedeutung vorliegt. Hagenbach hat die beiden Charakteristiken, soweit aus seiner Darstellung der Versuchsmethodik zu entnehmen ist, nicht als ganze durchlaufen können, sondern er hat es mit einem Hin- und Herspringen der Entladung zwischen jenen beiden Formen zu tun gehabt und hat aus den Extremalwerten der Brennspannung die beiden Charakteristiken zusammengesetzt. Durch diesen methodischen Kunstgriff wird es möglich, die beiden Charakteristiken experimentell festzulegen, und man kann auch mit Hagenbach an sich von „verschiedenen Graden der Stabilität von Entladungsformen" sprechen und sie durch die „Häufigkeit" des Auftretens einer Form unter den jeweils gegebenen Bedingungen beschreiben. Wenn jedoch wie hier unter scheinbar denselben Bedingungen zwei Formen auftreten, so kann tatsächlich nur eine von ihnen stabil sein, während die andere weniger stabile eben labil ist. Wir sind der Ansicht, daß sich bei dem Wechsel zwischen den beiden Formen die Versuchsbedingungen geändert haben. Diese Annahme hat schon Cady vorgeschlagen und durch Versuche begründet. Er vermutet, „daß die Zusammenziehung der positiven Säule in der Form 2 auf Besonderheiten oder Verunreinigungen der Anodenoberfläche beruht . . ." und dieser Auffassung möchten wir uns anschließen, allerdings mit der Einschränkung, daß nicht immer und unter allen Umständen derartige Ansatzkeime für die Kontraktionsstellen vorhanden sein müssen, sondern daß bei genügender Steigerung von Druck oder Stromstärke die Kontraktion auch ohne sie kontinuierlich stattfindet. Unsere Versuche an einer extrem reinen Quecksilberanode und an der Eisenoxydanode haben dies gezeigt und gerade die letzteren scheinen uns gut in unser Bild zu passen. Denn wir haben die kontinuierliche Zusammenziehung der anodischen Ansatzstelle und die kontinuierliche Ausbildung der Form 2 nur erhalten an einer Eisenoxydkuppe, die vorher mit einer homogenen, glatten, aus dem Schmelzfluß erstarrten Oberfläche versehen worden war und an der die Möglichkeit einer Verunreinigung durch ein Oxydpartikelchen von selbst ausscheidet. Schematisch (Fig. 6) stellt sich die Sachlage bei diesen kontinuierlichen Übergängen u. E. so dar, daß man es mit einer Mischcharakteristik zwischen den fiktiven Charakteristiken der beiden reinen Formen 1 und 2 zu tun hat.

b) Hinsichtlich des Überganges der Form 2 in die Form 3 ist zunächst festzustellen, daß wir für den Beginn dieses Überganges, nämlich für den Beginn der Dampfbildung an der Anode, einen kontinuierlichen Verlauf mit Sicherheit

beobachten konnten; die Grenze zwischen den beiden Formen ist also optisch eine fließende. Weiterhin beobachtet man dann aber stets, daß von einem gewissen Entwicklungsstadium an der Prozeß spontan weitergeht und sich unter Spannungssturz die Ausbildung der Form 3 vollendet. Wir haben uns den Mechanismus des Umschlages

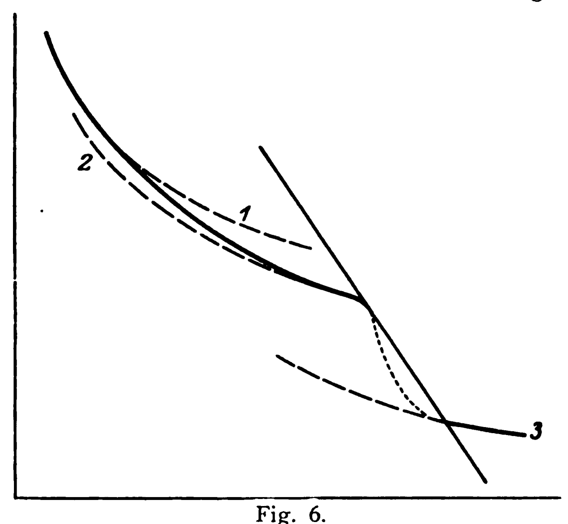


Fig. 6.

offenbar so vorzustellen, daß mit zunehmender Stromstärke die positive Säule sich kontrahiert und hierdurch das Produkt aus Anodenfall und Stromdichte an der Anode steigt. Die Anode beginnt zu verdampfen, die Dichte des Gases + Dampfes vor ihr nimmt zu und die Kontraktion geht deshalb in verstärktem Maß weiter. Diese Vorstellung ist in der Tat geeignet, die experimentellen Befunde im einzelnen verständlich zu machen: 1. Die Charakteristik fällt von einem bestimmten Wert der Stromstärke an steil ab (Fig. 6), die Form 2 wird instabil und zwar praktisch in weiten Grenzen unabhängig von den Konstanten des äußeren Stromkreises. Dies berechtigt, von einer Grenzstromstärke und einem Umschlagpunkt zu sprechen. Es möge noch dahingestellt bleiben, ob überhaupt nicht und unter keinen Umständen — wie dies nach den verfeinerten Stabilitätsuntersuchungen von Dällenbach durchaus möglich sein könnte — ein kontinuierlicher Übergang, zu erreichen ist. In diesem Fall würde natürlich eine Abhängigkeit der Grenzstromstärke von den Stabilisierungsbedingungen (Neigung der Widerstandsgerade) zu erwarten sein. In der umgekehrten Richtung vollständiger Bogen → Glimmbogen liegen die Dinge wie leicht einzusehen ist, natürlich etwas anders und es ist also verständlich, daß man Überlappungen der beiden Äste der Charakteristik erhalten kann. 2. Da bei der Kontraktion der Säule sowohl die Stromstärke wie der Druck eine Rolle spielen, wird nun verständlich, warum die Grenzstromstärke mit abnehmendem Druck zunimmt. 3. Daß die Grenzstromstärke mit zunehmender Bogenlänge zunimmt, hat Cady bereits dadurch erklärt, daß zu der Heizung der Anode durch die Stromarbeit im Anodenfall noch eine Heizung durch die benachbarte Kathode kommt und daß dieser letztere Anteil umso kleiner ist, je größer die Bogenlänge ist. Die von uns festgestellte Abnahme der Grenzstromstärke jenseits einer gewissen Bogenlänge ließe sich allerdings nicht so einfach erklären; verschiedene sich hier bietende Möglichkeiten zu diskutieren, hat ohne diesbezügliche weitere Messungen kaum Zweck. 4. Die Zunahme des Spannungssturzes mit der Bogenlänge findet ihre Erklärung vermutlich dadurch, daß zu der konstanten Differenz der Anodenfälle in den Zuständen 2 und 3 eine mit der Bogenlänge wachsende Differenz der in der Säule liegenden Spannungsfälle kommt; in Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen hätte man dann in der Tat ein ungefähr lineares Anwachsen des Spannungssturzes mit der Bogenlänge zu erwarten.

5. Ein Vergleich der in Fig. 1 gezeichneten Charakteristiken mit den schon von Ayrton für den Kohlebogen aufgenommenen, die in Fig. 7 zum Teil wiedergegeben sind, scheint sogleich auf eine recht weitgehende Analogie zwischen dem Übergang vom Glimmbogen zum vollständigen Bogen und dem Übergang vom

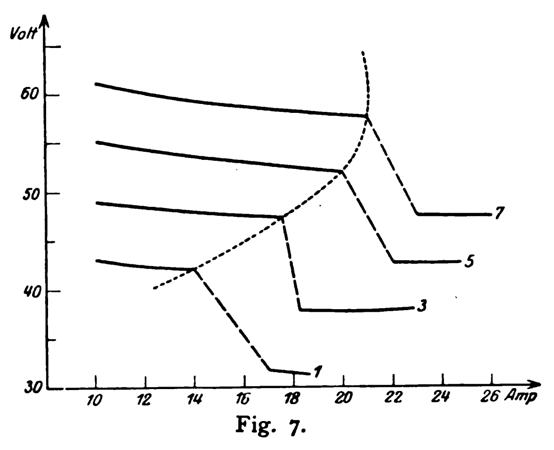


Fig. 7.

ruhigen in den zischenden Zustand hinzuweisen, die sich bei genauerer Betrachtung sogar bis auf die Einzelheiten erstreckt. Die Grenzstromstärke ist in beiden Fällen in qualitativ derselben Weise von der Bogenlänge abhängig und auch die Spannung, bei welcher der Umschlag erfolgt, steigt in beiden Fällen linear mit der Bogenlänge. Auch die Metallbogen beginnen gerade beim Umschlag zu zischen[1]) und in beiden Fällen spielen

1) Vgl. dazu eine demnächst in dieser Zeitschr. erscheinende Mitteilung von Ewest und Rüttenauer über Beobachtungen am Wolframbogen.

offenbar Vorgänge an der Anode die Hauptrolle[1]); denn wie schon Cady zeigte und wir bestätigen konnten, sind die Verhältnisse hinsichtlich der Zischstromstärke in einem Bogen mit einer Metallkathode und einer Kohleanode dieselben wie in einem Reinkohlebogen, sie sind hingegen in einem Bogen mit einer Metallanode und einer Kohlekathode dieselben wie in einem Reinmetallbogen. Diesen Tatsachen stehen jedoch andere gegenüber, die die Analogie zwischen dem Umschlagspunkt der Metallbogen und dem Zischpunkt des Kohlebogens ernstlich stören. Während nämlich nach Fig. 2 für den Eisenbogen die Grenzstromstärke mit abnehmendem Druck steigt, fanden wir für den Kohlebogen eine Abnahme der Zischstromstärke mit abnehmendem Druck; Fig. 8 zeigt dies für eine Bogenlänge von

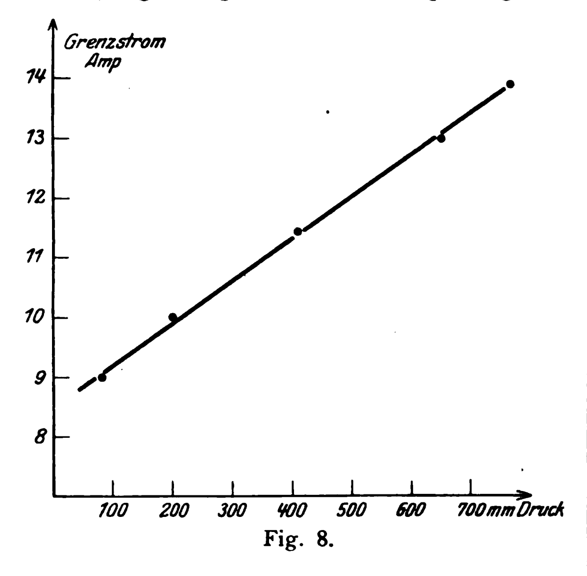


Fig. 8.

2 mm, die größte, die wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln benutzen konnten.

Nun hat schon Cady, allerdings ohne überzeugende Begründung, die Ansicht vertreten, daß der Zischpunkt des Kohlebogens nicht identisch ist mit dem Umschlagspunkt des Glimmbogens in den vollständigen Bogen. Er hat dabei in einer kurzen Bemerkung und leider ohne jede nähere Angabe mitgeteilt, daß es ihm gelungen sei, unterhalb des Zischpunktes noch eine andere Diskontinuitätsstelle in der Charakteristik festzustellen, die dem genannten Umschlag entsprechen sollte. Wir haben nach dieser Kontinuitätsstelle in Stickstoff und Luft bei allen Drucken zwischen 760 und 50 mm an gewöhnlichen sowohl wie an sorgfältig gereinigten und entgasten Kohlen ohne Erfolg gesucht, wenigstens konnten wir niemals mit wirklich überzeugender Sicherheit Anzeichen dafür finden. Die visuelle Beobachtung der im Zischpunkt auftretenden Erscheinungen an der Anode scheint uns aber zweifelsfrei zu zeigen, daß es sich dabei nicht um den Übergang vom Glimmbogen in den vollständigen Bogen handelt und auch der sehr hoch liegende Verdampfungs- bzw. Sublimationspunkt des Kohlenstoffs macht dies theoretisch sehr wenig wahrscheinlich. Wir sehen in dem Zischpunkt des Kohlebogens vielmehr die Analogie zu der Ausbildung der von Hagenbach an Metallbogen entdeckten Zischformen = a-Formen. Eine Fortsetzung der Versuche in einem Edelgas, wo die hier interessierenden Effekte frei von allen chemischen Nebeneffekten sein werden, ist beabsichtigt.

Dem Elektrotechnischen Verein Berlin haben wir für freigebige Bereitstellung von Mitteln, der Notgemeinschaft wiederum für die Gewährung eines Forschungsstipendiums zu danken.

Greifswald, 1. Februar 1928.

(Eingegangen 1. Februar 1928.)

1) Die merkwürdigen Beobachtungen von Pierucci (Nuov. Cim. **2**, 519, 1925) an Kohlebogen mit mehrfachen Kathoden, die dieser Annahme widersprechen, haben wir vergeblich zu reproduzieren versucht.

Die Anwendung der Debyeschen Dipoltheorie auf binäre Flüssigkeitsgemische.

Von John Warren Williams*).

I. Einleitung.

Die Untersuchung der Beziehungen zwischen der DK (Dielektrizitätskonstante) einer Substanz, ihrem Brechungsindex und ihrer chemischen Natur ist für die Physik und Chemie von beträchtlicher Bedeutung geworden. Die Entwicklung kann bis zum Clausius-Mosottischen Gesetz[1]) zurückverfolgt werden, das die Größe der DK, ε, auf den von den Molekülen eingenommenen Bruchteil, u, des Gesamtvolumens zurückführt mittels der Beziehung:

$$\varepsilon = \frac{1 + 2u}{1 - u} \quad \text{oder} \quad u = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \qquad (1)$$

Ein Grammolekül, M, einer Substanz von der Dichte, d, nimmt ein Gesamtvolumen $\frac{M}{d}$ ein. Das dabei von den Molekülen beanspruchte Eigenvolumen ist daher

$$P_0 = \frac{uM}{d} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{M}{d}. \qquad (2)$$

*) National Research Council Fellow.

1) Clausius, gesammelte Abh. Vol. II, S. 135. 1876; Mosotti, Mem. della Soc. ital. Sc. Modena **14**, 49, 1850.

Die Größe P_0 wird die Molekularpolarisation genannt. Es war im Sinne des Mosottischen Ansatzes natürlich, P_0 als eine Konstante anzusehen und Formel (2) als ein Ausdruck dafür zu benutzen, wie ε sich mit der Dichte ändert. Bald erkannte man aber, daß diese Formel viel öfter versagt, als die analoge Beziehung für die Molekularrefraktion, wie sie von Lorenz-Lorentz[2, 3]) abgeleitet worden ist.

$$P = \frac{uM}{d} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\frac{M}{d} \tag{3}$$

[Gleichung (3) geht aus (2) hervor, wenn man nach Maxwell ε durch das Quadrat des Brechungsindex n ersetzt und gibt in vielen Fällen die Dichteabhängigkeit von n recht gut wieder, wenn P als konstant angenommen wird.] So fand man z. B., daß P_0 bei Änderung der Temperatur oder des Aggregatzustandes nicht konstant bleibt, und daß bei binären Gemischen ähnliche Schwierigkeiten auftreten. Diese Verhältnisse führten Debye[4]) zu der Annahme, daß bei der dielektrischen Polarisation neben einfachen Ladungsverschiebungen in den Molekülen außerdem noch eine Orientierung molekularer Dipole auftreten kann. Die Molekularpolarisation und daher auch die gemessene DK ist demnach das Ergebnis zweier Wirkungen: Ein erster Anteil an der Molekularpolarisation, der durch die Ladungsverschiebungen erzeugt wird und von der Temperatur unabhängig ist, während ein zweiter aus der Orientierung der permanenten Dipole hervorgehender Anteil, wie von Debye berechnet wurde, mit zunehmender Temperatur abnimmt. Wir erhalten daher für die Molekularpolarisation den Ausdruck

$$P_0 = \frac{4\pi}{3} N\gamma = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{M}{d} = \frac{4\pi}{3} N\left(\gamma' + \frac{\mu^2}{3kT}\right) \tag{4}$$

wobei:

N = Avogadrosche Zahl,
γ = Polarisierbarkeit eines Moleküls,
γ' = eine Konstante (Polarisierbarkeit durch Lagerungsverschiebung),
μ = das permanente Dipolmoment des Moleküls,
k = Boltzmannsche Konstante.

Diese Gleichung zeigt ohne weiteres die Art, wie sich die Molekularpolarisation mit der Temperatur ändert, denn wir können ja schreiben: $P_0 \cdot T = a + bT$, (5) wobei a und b von T unabhängig sind: $a = \frac{4\pi}{3} N \frac{\mu^2}{3k}$ und $b = \frac{4\pi}{3} N\gamma'$.

2) Lorenz, Wied. Ann. **11**, 70, 1880.
3) Lorentz, ibid. **9**, 641, 1880.
4) Debye, Physik. Zeitschr. **13**, 97, 1912; Marx, Handbuch der Radiologie **6**, 597, 1925.

Es sei hier ausdrücklich betont, daß die Anwendbarkeit dieser Formel nicht eine unbeschränkte ist: denn sie ist abgeleitet worden unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die gegenseitige Beeinflussung der Moleküle nach dem Clausius-Mosottischen Schema berechnet werden kann. Die Theorie ist deshalb in erster Linie zur Anwendung auf die DK von Gasen geeignet, bei denen die gegenseitige Wirkung überhaupt wegfällt. In einer Reihe von Arbeiten[5]) über die Temperaturabhängigkeit der DK von Gasen ist dann auch die Gültigkeit der Formel bestätigt und zur Berechnung von Werten für die Momente der Moleküle verwendet worden.

Bei der Anwendung auf Flüssigkeiten muß man vorsichtiger verfahren. Z. B. ist es nicht zulässig, einfach die DK selbst oder den Temperaturkoeffizienten einer reinen Flüssigkeit zur Berechnung von Dipolmomenten nach dieser Beziehung zu benützen. Hier treffen die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Gleichung im allgemeinen nicht mehr zu. Dagegen können aus Flüssigkeitsgemischen, wie wir in dieser Arbeit zeigen wollen, unter besonderen Vorsichtsmaßregeln quantitative Schlüsse gezogen werden*).

Bezeichnen wir die Polarisierbarkeit eines Moleküls der ersten Substanz mit γ_1, die eines zweiten mit γ_2, so folgt aus (4):

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}(n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2), \tag{6}$$

wobei n_1 und n_2 die Zahl der Moleküle pro cm^3 bedeuten. [Da (6) aus (4) folgt, gelten diese und die nächsten Formeln natürlich nur unter den gleichen Voraussetzungen, wie (4).] Drücken wir die Konzentration in Molenbrüchen aus, so nimmt (6) die Form an,

$$P_{1,2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{f_1 M_1 + f_2 M_2}{d} = f_1 P_1 + f_2 P_2, \tag{7}$$

f_1, f_2 = Molenbruch der Komponente 1 bzw. 2.
M_1, M_2 = Molekulargewicht der Komponente 1 bzw. 2.
P_1, P_2 = Molekularpolarisation der Komponente 1 bzw. 2.

Diese Formel liefert uns eine Molekularpolarisation $P_{1,2}$ der Mischung, die sich aus der DK ε und der Dichte d unter Benutzung eines fiktiven Molekulargewichtes $f_1 M_2 + f_2 M_2$ berechnen läßt. Wir sehen, daß die Polarisation eine lineare

5) Jona, Physik. Zeitschr. **20**, 14, 1919; Weigt, ebd. **22**, 643, 1921; Sänger, ebd. **27**, 556, 1926; **28**, 445, 1927; v. Braunmühl, ebd. **28**, 141, 1927; Maske, ebd. **28**, 533, 1927; Zahn, Phys. Rev. **24**, 400, 1924; Watson, Proc. Royal Soc. A. **117**, 43, 1927 u. a.

*) Erstmals wurde diese Methode von Frl. Lange auf Anregung von Debye in diesem Sinne verwendet. Zeitschr. f. Phys. **33**, 169, 1925.

Funktion der Molenbrüche f_1 und f_2 ist, solange wir P_1 und P_2 als konstant ansehen dürfen.

Wir wollen nun diese Formel anwenden auf den Fall einer Lösung einer Dipolsubstanz in einer dipolfreien Substanz. Für die dipolfreie Substanz dürfen wir wohl die Molekularpolarisation P_1 von der Konzentration unabhängig ansehen. Wir untersuchen nun, wie unter diesen Voraussetzungen P_2 von der Konzentration der gelösten Substanz abhängt. Das Experiment zeigt, daß zweierlei eintreten kann. Bei gewissen Substanzen, z. B. Äthyläther in Benzol, finden wir die Molekularpolarisation P_2 unabhängig von der Konzentration, d. h. wenn wir $P_{1,2}$ als Funktion von f_1 auftragen, erhalten wir eine gerade Linie. Bei anderen Substanzen (und die Mehrzahl der Dipolsubstanzen gehört in diese Klasse) weist diese Kurve jedoch Maxima oder Minima auf. Das zeigt uns schon, daß in diesen Fällen unsere Formeln nicht ohne weiteres angewendet werden dürfen. Als Beispiel für diese zwei Gruppen sind in Tabelle I unsere Messungen an zwei Substanzen wiedergegeben[6]).

Tabelle I.

DK und Dichte von Flüssigkeitsgemischen. Temperatur 25° C.

Gruppe I. Benzol—Äthyläther.

f_1	d_4^{25}	ε	$P_{1,2}$	P_2
100	0,8731	2,282	26,73	54,50
75	0,8297	2,713	33,73	54,50
50	0,7881	3,183	40,65	54,50
25	0,7465	3,691	47,52	54,50
0	0,7077	4,265	54,50	54,50

Gruppe II. Benzol—Chlorbenzol.

f_1	d_4^{25}	ε	$P_{1,2}$	P_2
100	0,8731	2,282	26,73	82,0
90	0,8993	2,623	31,80	77,4
75	0,9361	3,131	38,42	74,5
50	0,9946	3,979	47,71	68,7
0	1,1011	5,610	61,84	61,8

Die Kolonnen der Tabelle bedeuten von links nach rechts: der Molenbruch f_1 des Lösungsmittels (in diesem Falle Benzol), die Dichte der Lösung d_4^{25} die beobachtete DK ε, die Molekularpolarisation der Lösung

$$P_{1,2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{f_1 M_1 + f_2 M_2}{d}$$

und die Molekularpolarisation der zweiten Komponente $P_2 = \frac{P_{1,2} - f_1 P_1}{f_2}$.

6) Williams und Krchma, Jour. Amer. Chem. Soc. **49**, 1676, 1927.

Falls die Bedingungen für die Gültigkeit der Debyeschen Formeln erfüllt sind, können wir nun mit Hilfe von ihnen aus der Molekularpolarisation P_2 das elektrische Moment des gelösten Moleküls berechnen. Wie schon oben erwähnt, besteht die Molekularpolarisation P_2 aus zwei Teilen: der Polarisation infolge Ladungsverschiebungen, P_2'', und der Polarisation infolge der Orientierung fertiger Dipole P_2'. Wir können also schreiben $P_2' = P_2 - P_2''$.

P_2'' wird annäherungsweise berechnet nach der Lorenz-Lorentzschen Formel: $P_2'' = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \frac{M}{d}$, wobei n_0 der Brechungsindex des gelösten Stoffes extrapoliert für die Frequenz 0 bedeutet. Diese Extrapolation kann nur ausgeführt werden, wenn die Substanz keine ultraroten Absorptionen zeigt. Wenn dieses Vorgehen infolgedessen auch nicht als ganz exakt angesehen werden kann, so gibt es doch manchmal, insbesondere für typische Dipolmolekeln, einen genügend genauen Wert für den Teil P_2''. Eine Umgehung dieser Schwierigkeit läßt sich nur durch Messung des Temperaturkoeffizienten der DK sehr verdünnter Lösungen erreichen.

Als Beispiel für die Art der Ausrechnung eines elektrischen Momentes führen wir den Fall des Äthyläthers an:

$$P_2' = P_2 - P_2'' = 54{,}5 - 23{,}0 = 31{,}5 \text{ cm}^3.$$

$$P_2' = \frac{4\pi}{3} N \frac{\mu^2}{3kT} = 31{,}5 \text{ cm}^3.$$

$(N = 6{,}06 \cdot 10^{23},\ k = 1{,}37 \cdot 10^{-16})$

$T = 298^0.$

$\mu =$ elektrisches Moment des Moleküls $= 1{,}22 \cdot 10^{-18}$.

Für die Moleküle der Gruppe (2) müssen wir nur noch entscheiden, welchen Wert von P_2 wir zur Berechnung verwenden wollen. Offenbar müssen wir P_2 für unendliche Verdünnung extrapolieren. Dann ist jedes Dipolmolekül vollständig von dipollosen umgeben und die störenden Wirkungen der Dipolmoleküle untereinander (Assoziation) fallen weg. Diesen Wert werden wir also im folgenden verwenden und zeigen, daß dann die Theorie zu brauchbaren Resultaten führt.

II. Die experimentellen Ergebnisse.

Es sollen nun im folgenden in zusammengefaßter Form die Ergebnisse von Untersuchungen wiedergegeben werden, die in den letzten zwei Jahren im Physikalisch-Chemischen La-

boratorium der „University of Wisconsin" ausgeführt worden sind[7]).

In den hier zitierten Abhandlungen wurden die Ergebnisse der Experimente in Tabellen analog Tabelle I wiedergegeben. Vier dipolfreie Lösungsmittel wurden verwendet: Benzol, Kohlenstofftetrachlorid, Schwefelkohlenstoff und Hexan. Tabelle II enthält die Ergebnisse, berechnet aus der DK, dem Brechungsindex und der Dichte: Die Kolonnen bedeuten von links nach rechts: Name der Substanz, Hinweis auf frühere Publikationen[7]), die Molekularpolarisation P_2 der gelösten Substanz in unendlicher Verdünnung, die der Deformierbarkeit entsprechende Molekularpolarisation P_2'', der Richtungsanteil P_2' und das elektrische Moment μ.

Mit wenigen Ausnahmen sind die Moleküle, deren Momente hier bestimmt worden sind, bekannte organische Verbindungen, sowohl aus der aliphatischen wie aus der aromatischen Reihe. Die DK wurde mit einer elektrischen Resonanzmethode, beschrieben in einem früheren Artikel[8]), bestimmt, ausgenommen im Falle der Lösungen in Kohlenstofftetrachlorid[7, 11]), für die eine Kapazitätsbrücke benutzt wurde. In allen Fällen wurde mit einer Frequenz von 10^6 Schwingungen pro Sekunde gearbeitet. Die Messungen wurden in einem Thermostaten bei 25^0 C ausgeführt. Die Dichtebestimmungen der Lösungen wurden mit einem Ostwald-Sprengelschen Pyknometer bei 25^0 C vorgenommen. Die gewöhnlichen Vorsichtsmaßregeln für exakte Messungen wurden immer beachtet. In den meisten Fällen wurde der Brechungsindex den Tafeln von Landolt-Börnstein oder den „International Critical Tables" entnommen.

III. Diskussion der Resultate.

Die in Tabelle II aufgeführten Moleküle können in die drei folgenden Gruppen eingeteilt werden:

Gruppe I. Moleküle, die kein Moment tragen:

1. Benzol,
2. Kohlenstofftetrachlorid,
3. Schwefelkohlenstoff,
4. Hexan,
5. Zinnjodid,
6. p-Xylol,
7. p-Dinitrobenzol.

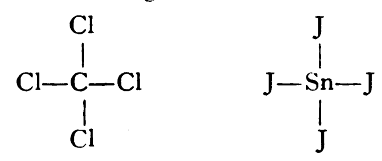
Gruppe II. Moleküle, die sicher ein Moment tragen:

Alle Moleküle, ausgenommen die der Gruppe I und III.

Gruppe III. Moleküle, bei denen die Existenz eines Dipolmomentes noch fraglich erscheint:

1. 1-3-5 Trinitrobenzol,
2. Naphtalin,
3. Jod.

Durch strukturchemische Überlegungen hätte man voraussehen können, daß einige Moleküle der Gruppe I symmetrisch sein und daher kein Moment aufweisen würden. Das ist besonders der Fall für CCl_4 und SnJ_4, die durch die Projektionsformeln dargestellt werden können:



Das Benzolmolekül ist von besonderem Interesse wegen der verschiedenen Konfigurationen, die ihm besonders von organischen Chemikern zugeschrieben worden sind. Man kann sagen, daß praktisch auf Grund jeder dieser Vorstellungen ein Moment 0 erwartet werden müßte. Ob wir die ebene oder die räumliche Anordnung betrachten, immer fallen die Schwerpunkte der positiven und negativen Ladungen zusammen. Die hier ausgeführten Messungen an CS_2 zeigen, daß das Moment kaum von 0 verschieden ist. Als fraglich muß jedoch noch gelten, ob das analoge CO_2 ein festes Moment besitzt oder nicht. Die Experimente von Zahn[5]) weisen darauf hin, daß das Moment praktisch $= 0$ ist, während eine neuere Messung von von Braunmühl[5]) den Wert $0{,}14 \cdot 10^{-18}$ zu geben scheint*). Sollte CO_2 einen von 0 verschiedenen Wert für das Moment zeigen, so müßte man das auch bei CS_2 erwarten. Aber bei den Näherungen, die für die Berechnung des Momentes aus Flüssigkeitsgemischen nötig sind, ist es sehr schwierig, ein so kleines Moment mit Sicherheit nachzuweisen, so daß für diesen Fall zu Untersuchungen an Gasen Zuflucht genommen werden muß. Es kann jedoch kein Zweifel bestehen, daß CS_2 für die Bestimmung von Dipolmomenten gut als dipolfreies Lösungsmittel angesehen werden kann, denn die Ergebnisse solcher Messungen stimmen ausgezeichnet überein mit denen in anderen Lösungsmitteln.

Die Moleküle der zweiten Gruppe sind unsymmetrisch und daher ihrer Natur nach polar.

7) J. Williams and Krchma, Jour. Amer. Chem. Soc. **49**, 1676, 1927; II. Krchma and Williams, ibid. **49**, 2408, 1927; III. Williams and Allgeier, ibid. **49**, 2416, 1927; IV. Williams and Ogg, ibid. **50**, 94, 1928; V. Williams and Schwingel, ibid. **50**, 1928.

8) Williams and Krchma, Jour. Amer. Chem. Soc. **48**, 1888, 1926.

*) Während des Druckes erschien eine neue Arbeit von Stuart (Naturwiss. **16**, 27, 1928), in der für das Moment von CO_2 der Wert $0{,}00 \pm 0{,}02 \cdot 10^{-18}$ angegeben wird.



Tabelle II*).

a) Lösungsmittel: Benzol.

Molekül	Abhandlung	P_2	P_2''	$P_2' = P_2 - P_2''$	μ
Toluol	I	36,3	30,3	6,0	$0,52 \cdot 10^{-18}$
o-Xylol	I	40,8	35,0	5,8	$0,52 \cdot 10^{-18}$
p-Xylol	I	36,7	35,5	1,2	$0,06 \cdot 10^{-18}$
Nitrobenzol	V	348	32,0	316	$3,90 \cdot 10^{-18}$
o-Dinitrobenzol	V	800	35	765	$6,05 \cdot 10^{-18}$
m-Dinitrobenzol	V	338	35	303	$3,81 \cdot 10^{-18}$
p-Dinitrobenzol	V	37,0	34	3	$0,32 \cdot 10^{-18}$
1-3-5-Trinitrobenzol	V	64,5	40	24,5	$1,08 \cdot 10^{-18}$
o-Nitrotoluol	V	331	38	293	$3,75 \cdot 10^{-18}$
m-Nitrotoluol	V	407	38	369	$4,20 \cdot 10^{-18}$
p-Nitrotoluol	V	463	38	425	$4,50 \cdot 10^{-18}$
Benzoesäure	III	43,5	24,6	18,9	$1,0 \cdot 10^{-18}$
Phenol	III	89,0	27,7	61,3	$1,70 \cdot 10^{-18}$
Chlorbenzol	I	82,0	30,2	51,8	$1,55 \cdot 10^{-18}$
Hexan	IV	30,5	29,6	0,9	$0,05 \cdot 10^{-18}$
Schwefelkohlenstoff	IV	22,2	21,1	1,1	$0,06 \cdot 10^{-18}$
Chloroform	I	47,5	21,3	26,2	$1,10 \cdot 10^{-18}$
Kohlenstofftetrachlorid	I	28,2	28,3	—	$0,00 \cdot 10^{-18}$
Äthyläther	I	54,5	23,0	31,5	$1,22 \cdot 10^{-18}$
Jod	III	60,2	28,0	32,2	$1,2 \cdot 10^{-18}$
Zinnjodid	III	26,7	30	—	$0,00 \cdot 10^{-18}$
Silberperchlorat	III	477,0	16	461,0	$4,70 \cdot 10^{-18}$

b) Lösungsmittel: Kohlenstofftetrachlorid.

Molekül	Abhandlung	P_2	P_2''	$P_2' = P_2 - P_2''$	μ
Benzol	II	26,7	25,8	0,9	$0,06 \cdot 10^{-18}$
Toluol	II	33,7	30,3	3,4	$0,40 \cdot 10^{-18}$
Chloroform	II	49,8	21,3	28,5	$1,15 \cdot 10^{-18}$
Äthyläther	II	56,0	23,0	33,0	$1,24 \cdot 10^{-18}$
Methylazetat	II	78,0	18,0	60,0	$1,67 \cdot 10^{-18}$
Äthylazetat	II	87,0	22,2	64,8	$1,74 \cdot 10^{-18}$
Azeton	II	170,0	16,0	154,0	$2,70 \cdot 10^{-18}$
Äthylalkohol	II	73,5	16,0	57,5	$1,63 \cdot 10^{-18}$
iso-amyl-Alkohol	II	86,0	13,0	73,0	$1,85 \cdot 10^{-18}$

c) Lösungsmittel: Schwefelkohlenstoff.

Molekül	Abhandlung	P_2	P_2''	$P_2' = P_2 - P_2''$	μ
Benzol	IV	28,5	25,8	2,7	$0,1 \cdot 10^{-18}$
Nitrobenzol	IV	346,0	32,0	314,0	$3,89 \cdot 10^{-18}$
Phenol	IV	83,6	27,5	56,1	$1,63 \cdot 10^{-18}$
Chlorbenzol	IV	82,5	31,0	51,5	$1,52 \cdot 10^{-18}$
Naphtalin	IV	54,0	43,5	10,5	$0,69 \cdot 10^{-18}$
Hexan	IV	31,6	29,6	2,0	$0,08 \cdot 10^{-18}$
Jod	IV	60,0	28,0	32,0	$1,2 \cdot 10^{-18}$

d) Lösungsmittel: Hexan.

Molekül	Abhandlung	P_2	P_2''	$P_2' = P_2 - P_2''$	μ
Benzol	IV	27,8	25,8	2,0	$0,08 \cdot 10^{-18}$
Nitrobenzol	IV	346,0	32,0	314,0	$3,89 \cdot 10^{-18}$
Chlorbenzol	IV	84,0	31,0	53,0	$1,55 \cdot 10^{-18}$
Naphtalin	IV	55,0	43,5	11,5	$0,72 \cdot 10^{-18}$
Schwefelkohlenstoff	IV	23,1	21,1	2,0	$0,08 \cdot 10^{-18}$

*) Die Werte für P_2' bis 3,0 cm³ müssen der experimentellen Fehler wegen als von 0 nicht unterscheidbar angesehen werden. Für diese Fälle ist μ nicht aus P_2' berechnet, sondern dem wahrscheinlichen Fehler nach geschätzt worden. Die größte Unsicherheit liegt im Werte von P_2''.

Die Größe des Dipolmomentes kann als quantitatives Maß für die Unsymmetrie gelten. Bilden wir Derivate eines symmetrischen Moleküls durch Hinzufügen eines Atomes oder einer Atomgruppe, so erhalten wir gewöhnlich ein unsymmetrisches. Die Moleküle der zweiten Gruppe sind zum großen Teil so gewählt, daß sie den Effekt des Hinzufügens von CH_3 und NO_2 zum Benzolkern zeigen. Der Effekt durch das Hinzufügen einer einzigen CH_3-Gruppe ist klein (Toluol $\mu = 0{,}40 \cdot 10^{-18}$), während der einer einzigen NO_2-Gruppe verhältnismäßig groß ist (Nitrobenzol $\mu = 3{,}9 \cdot 10^{-18}$). Wenn eine zweite gleiche Gruppe hinzugefügt wird (z. B. eine zweite CH_3-Gruppe zu Toluol), so kann das elektrische Moment zu- oder abnehmen, je nach der gegenseitigen Lage der beiden Gruppen. Bei o-Xylol ist der Effekt additiv, und die zwei Gruppen erzeugen daher ein größeres elektrisches Moment ($0{,}52 \cdot 10^{-18}$). Befindet sich die zweite CH_3-Gruppe in Parastellung zur ersten, so resultiert ein symmetrisches Molekül (p-Xylol). Genau das gleiche kann man im Falle des Dinitrobenzols sehen, bei dem das Moment vom Werte $\mu = 6{,}05 \cdot 10^{-18}$ für die Orthoverbindung auf $\mu = 3{,}81 \cdot 10^{-18}$ für die Metaverbindung und auf einen von o nicht zu unterscheidenden Wert für die Paraverbindung heruntergeht. Dies ist ein zweites Beispiel für die Entstehung eines symmetrischen Moleküls bei Hinzufügen von zwei gleichen Gruppen*).

NO_2 — $3{,}9 \cdot 10^{-18}$; NO_2, NO_2 — $6{,}05 \cdot 10^{-18}$; NO_2, NO_2 — $3{,}81 \cdot 10^{-18}$; NO_2, NO^2 — o

Die Tatsache, daß p-Xylol und p-Dinitrobenzol symmetrische Moleküle bilden, kann nicht als Beweis für eine spezielle Gestalt des Benzolkerns angesehen werden, denn ohne Unterschied, ob die C-Atome in einer Ebene oder räumlich angeordnet sind, muß in jedem Falle ein Moment o folgen. Es ist dies leicht ersichtlich bei der Betrachtung der hier gegebenen Diagramme für die zwei Anordnungen. Bei der zweiten Anord-

X 1 6 2 5 3 4 X — X 1 6 2 5 3 4 X

nung ist die erste Gruppe in der Ebene 1—3—5, während die zweite in der Ebene 2—4—6 liegt.

*) Weitere Beispiele wurden von Errera und Smyth und Morgan gegeben, die in Arbeit 7, V) diskutiert wurden.

Aus dem Wert von Nitrotoluol ist klar zu ersehen, daß die CH_3-Gruppe eine Art elektrischen Effekt gibt, während die NO_2-Gruppe die entgegengesetzte Art gibt. Im Falle der Orthoverbindung ist der Einfluß der NO_2-Gruppe teilweise aufgehoben durch die nahe Nachbarschaft der CH_3-Gruppe, so daß das Moment $\mu = 3{,}75 \cdot 10^{-18}$ kleiner ist, als das von Mononitrobenzol. Beim Wandern der CH_3-Gruppe durch die Meta- in die Paralage wächst das elektrische Moment.

NO_2 — 3,9; NO_2, CH_3 — 3,75; NO_2, CH_3 — 4,2; NO_2, CH_3 — 4,5; CH_3 — $0{,}4 \cdot 10^{-18}$

Der Wert des Momentes für p-Nitrotuol ist ungefähr die Summe der Effekte einer einzelnen NO_2-Gruppe ($\mu = 3{,}9 \cdot 10^{-18}$) und einer einzelnen CH_3-Gruppe ($\mu = 0{,}40 \cdot 10^{-18}$), wenn man beachtet, daß sie in entgegengesetzter Richtung wirken.

Interessant ist es, daß Äthyläther ein so großes Moment besitzt. Wir können das vielleicht als Beweis auffassen für eine Konfiguration wie sie von Hund für das Wassermolekül angegeben worden ist.

O^{--}, H^+, H^+ — H_2O; $\mu = 1{,}87 \cdot 10^{-18}$ O, $C_2H_5{}^+$, $C_2H_5{}^+$ — $(C_2H_5)O\,\mu = 1{,}22 \cdot 10^{-18}$

(Der angegebene Wert für das Dipolmoment des Wassermoleküls ist den Messungen von Jona[5]) entnommen.)

Die elektrischen Momente zweier Alkohole (Äthyl und iso-amyl) zweier Acetate (Methyl und Äthyl) und von Aceton sind auch in der Tabelle angegeben. Auf Grund der Größe dieser Momente kann man auf mögliche Konfigurationen der Moleküle schließen.

Die Moleküle dieser zweiten Gruppe sind in der Chemie als typisch polare Substanzen bekannt. Der wichtigste Punkt bei der Bestimmung der elektrischen Momente dieser und auch anderer Substanzen scheint mir die Tatsache, daß damit die Anwendbarkeit einer einfachen Methode zur Bestimmung eines quantitativen Maßes für die elektrische Dissymmetrie der Moleküle bewiesen wurde. Die experimentelle Arbeit besteht nur in der Messung von DK und Dichte eines binären Systems, dessen eine Komponente nichtpolarer Natur ist.

Tabelle III.

Molekül	Lösungsmittel	P_2	P_2''	$P_2' = P_2 - P_2''$	μ
Benzol	CCl_4	26,7	25,8	0,9	$0{,}06 \cdot 10^{-18}$
	CS_2	28,5	25,8	2,7	$0{,}10 \cdot 10^{-18}$
	C_6H_{14}	27,8	25,8	2,0	$0{,}08 \cdot 10^{-18}$
Nitrobenzol	C_6H_6	348	32,0	316	$3{,}90 \cdot 10^{-18}$
	CS_2	346	32,0	314	$3{,}89 \cdot 10^{-18}$
	C_6H_{14}	346	32,0	314	$3{,}89 \cdot 10^{-18}$
Chlorbenzol	C_6H_6	82,0	31,0	51,0	$1{,}52 \cdot 10^{-18}$
	CS_2	82,5	31,0	51,5	$1{,}52 \cdot 11^{-18}$
	C_6H_{14}	84,0	31,0	53,0	$1{,}55 \cdot 10^{-18}$
Naphtalin	CS_2	54,0	43,5	10,5	$0{,}69 \cdot 10^{-18}$
	C_6H_{14}	55,0	43,5	11,5	$0{,}72 \cdot 10^{-18}$
Äthyläther	C_6H_6	54,5	23,0	31,5	$1{,}22 \cdot 10^{-18}$
	CCl_4	56,0	23,0	33,0	$1{,}24 \cdot 10^{-18}$

Die Moleküle der dritten Gruppe müssen erst in verschiedenen Lösungsmitteln und bei verschiedenen Temperaturen gemessen werden, bevor man endgültige Schlüsse auf ihren Dipolcharakter ziehen darf. Der Wert $\mu = 1{,}08 \cdot 10^{-18}$ für 1—3—5 Trinitrobenzol ist sicher von 0 verschieden; in diesem Falle würden wir also dem Molekül ein Moment zuschreiben müssen. Das würde auf eine räumliche Anordnung der Kohlenstoffatome im Benzolkern führen, bei der die C-Atome abwechselnd in zwei Ebenen übereinander liegen würden. Höjendahl[9]) fand ein Moment $0{,}3 \cdot 10^{-18}$ für 1—3—5 Tribrombenzol, einen Wert, den er jedoch als von 0 nicht unterscheidbar angibt. Es ist klar, daß nur genaue experimentelle Ergebnisse eine definitive Einordnung dieser und ähnlicher dreifach substituierter Benzolverbindungen ermöglichen können.

Naphtalin wurde in zwei Lösungsmitteln, CS_2 und Hexan, untersucht, mit dem interessanten Ergebnis, daß seine Molekularpolarisation in unendlich verdünnter Lösung in beiden Fällen praktisch die gleiche ist. Aus der für dieses Molekül angegebenen Struktur konnte kaum auf einen Dipolcharakter geschlossen werden, wie ihn unsere Resultate zeigen. Es wäre daher wünschenswert, diese Messungen noch durch solche bei verschiedenen Temperaturen zu ergänzen.

Die Schwierigkeit im Falle des Jodmoleküls liegt in den chemischen Veränderungen, die allenfalls beim Lösen auftreten können. Bis heute wurden nur zwei Lösungsmittel, Benzol und Schwefelkohlenstoff verwendet. Auch in diesem Falle wäre es erwünscht, mehrere Lösungsmittel und Temperaturen zu benutzen, bevor wir dem Molekül ein Moment mit Bestimmtheit zuschreiben können. Der Wert für das Dipolmoment, wie er hier gefunden wurde, ist größer als man erwartet hätte. Gase wie Wasserstoff und Stickstoff bilden symmetrische Moleküle, und man hätte erwarten können, daß auch Moleküle wie Chlor, Brom und Jod sich ähnlich verhalten würden. Lewis[10]) hat jedoch abgeleitet, daß ein solches Molekül in der einen oder anderen Richtung elektrisch unsymmetrisch werden und daher zu einem festen Moment Anlaß geben kann. Darauf weist auch die Tatsache hin, daß Jod in der Chemie eine zweideutige Rolle spielt, indem es oft als positives Ion, oft aber als negatives erscheint.

Die hier gegebenen Werte sind noch von einem anderen Gesichtspunkte aus von Interesse. Sie zeigen, daß die Molekularpolarisation eines gelösten Moleküls (vielleicht mit Ausnahme des Benzols) unabhängig ist vom dipolfreien Lösungsmittel. Diese Tatsache ist durch Tabelle III besonders herausgehoben worden.

Man hätte vielleicht erwarten können, daß mit Veränderung der DK des Lösungsmittels sich auch die Molekularpolarisation des gelösten Moleküls und damit sein Moment ändern würde. Um dieses nachzuweisen, müßten die Experimente mit viel größerer Genauigkeit, als das hier geschehen ist, ausgeführt werden. Die Genauigkeit der hier mitgeteilten Messungen ist für den größten Teil größer als 0,2 Proz. Ausnahmen davon sind in den Arbeiten[7]) mitgeteilt.

IV. Weitere Probleme.

Wenn auch ein großer Fortschritt in der Bestimmung und Verwertung der elektrischen Momente verschiedenster gelöster Moleküle gemacht worden ist, so bleiben uns doch noch eine ganze Reihe wichtiger Probleme übrig. Um die weitere Anwendungsmöglichkeit analoger Methoden wie die hier beschriebene klarzulegen, möchte ich einige, mir besonders wichtig erscheinende Probleme, erwähnen.

In einer Reihe von Fällen kann die durch Röntgenstrahlen im festen Körper gefundene

9) Höjendahl, Nature **117**, 892, 1926.

10) Lewis, „Valence and the Structure of Atoms and Molecules". Chemical Catalog Company, New York, 1923, p. 83.

Struktur mit der im gelösten Zustande, d. h. wenn jedes Molekül vollständig von nichtpolaren Molekülen umgeben ist, verglichen werden. Es ist z. B. eine offene Frage, ob die C-Atome in Ringverbindungen ähnlich wie im Graphitkristall in einer Ebene liegen, oder ob sie räumlich angeordnet sind, analog dem Diamanten. Bragg[11]) gelangte durch molekular- und kristallsymmetrische Betrachtungen zu der Auffassung, daß die C-Atome im Benzolring räumlich angeordnet sein müssen. Diese Ansicht steht aber im Widerspruch zu den Schlußfolgerungen, die Pauling[12]) auf Grund der Elektronenbahnen und der Valenz in der Bohrschen Theorie gezogen hat. Diese Frage nach der Struktur des Benzols ist auch für den flüssigen Aggregatzustand noch offen und wird vielleicht beantwortet werden können, sobald genügend Werte der elektrischen Momente von Substanzen wie 1—3—5 Tribrombenzol oder 1—3—5 Trinitrobenzol vorliegen.

Auch glaube ich, daß die Kenntnis der elektrischen Momente für die Untersuchung der Löslichkeiten, wie sie von Hildebrand und seinen Mitarbeitern[13]) gefunden worden sind, nützlich sein werden. Die Löslichkeiten gewisser Substanzen, wie sie zum Teil in Tabelle II gegeben wurden, folgen, wie Hildebrand zeigte, gewissen Gesetzmäßigkeiten, besonders was ihren Zusammenhang mit dem inneren Druck anbelangt, wenn auch viele Ausnahmen bekannt sind. Wenn genügend Werte für die DK solcher Lösungen vorliegen, die Momente somit bestimmt werden können, ist es vielleicht möglich, die Unregelmäßigkeiten in dieser und ähnlichen Gesetzmäßigkeiten zu erklären.

Interessant ist es auch, die Werte für die elektrischen Momente, wie sie aus Untersuchungen über den Temperaturkoeffizient der DK von Gasen gefunden worden sind, mit den hier berechneten zu vergleichen. Soweit man bei der kleinen Zahl der zur Verfügung stehenden Resultate Schlüsse ziehen kann, scheint es, daß, während bei einigen Substanzen gute Übereinstimmung zwischen diesen zwei Werten besteht, bei einigen anderen das im gasförmigen Zustande gefundene Moment wesentlich kleiner ist, als das aus der Flüssigkeit berechnete. Sänger[14]) hat diese Frage kurz behandelt.

Die hier angedeuteten Probleme werden zur Zeit im Physikalischen Institut der Universität Leipzig und im „Laboratory of Physical Chemistry of the University of Wisconsin" weitergeführt. Zum Schlusse erlaube ich mir noch, Herrn Prof. P. Debye, auf dessen Anregung dieser Artikel entstanden ist, für das Interesse an der Arbeit und die vielen Anregungen herzlichst zu danken.

V. Zusammenfassung.

1. Es wird eine Anwendung der von Debye erweiterten Clausius-Mosottischen Beziehung auf die Berechnung von elektrischen Momenten aus der DK und der Dichte von geeignet gewählten binären Flüssigkeitsgemischen besprochen.

2. Die elektrischen Momente einer Reihe gelöster Moleküle, entnommen früheren Arbeiten im Journ. of the Amer. Chem. Soc., werden in Tabellenform gegeben.

3. Diese Moleküle werden in zwei Gruppen eingeteilt, je nachdem man sie als polar oder dipolfrei ansehen muß. In einer dritten Gruppe stehen die Moleküle, bei denen die Existenz eines Dipolmomentes bis heute noch nicht sichergestellt ist.

4. Es wird an Hand einer Tabelle gezeigt, daß innerhalb der experimentellen Fehler die Molekularpolarisation und damit das elektrische Moment eines gelösten Moleküls vom dipolfreien Lösungsmittel unabhängig ist.

5. Es wird darauf hingewiesen, daß das so bestimmte Dipolmoment ein quantitatives Maß für die Polarität des Moleküls liefert.

6. Es wird auf die Bedeutung solcher Messungen von Dipolmomenten für verschiedene Gebiete der Physik und Chemie hingewiesen.

Leipzig, Phys. Inst. d. Univers., Januar 1928.

(Eingegangen 15. Februar 1928.)

11) Bragg and Bragg, „X-Rays and Crystal Structure", 4th Edition, G. Bell & Sons, London 1924.

12) Pauling, Jour. Amer. Chem. Soc. **48**, 1132, 1926.

13) Hildebrand, „Solubility". Chemical Catalog Co., New York 1924.

14) Sänger, Physik. Zeitschr. **28**, 455, 1927.

Ein Versuch der Ableitung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes auf thermodynamischem Wege.

Von A. Schükarew.

Das Gesetz der Verteilung der kinetischen Energie oder der Geschwindigkeiten auf die Gasmoleküle schreibt man gewöhnlich wie:

$$\bar{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N (km)^{3/2} v^2 e^{-kmv^2} = A N v^2 e^{-k'v^2},$$

wo $\bar{n}$ die Zahl der Moleküle ist, welche die Geschwindigkeit v besitzen. Seine Ableitung, welche von Maxwell selbst gegeben ist, und welche in verschiedenen Lehrbüchern sich wiederholt, gründet sich auf die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Ableitung ist viel von

J. v. Kries[1]) und Czuber kritisiert, und enthält einige Voraussetzungen, besonders die, daß die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der Geschwindigkeit, welche zwischen v und $v + dv$ liegt, Funktion der Geschwindigkeit selbst ist, also von v selbst abhängt. Dieser Satz ist vollkommen gleich der Voraussetzung, daß die Verteilung der Geschwindigkeiten auf die Moleküle von vornherein unregelmäßig ist, und daß gewisse Anhäufung der mittleren Geschwindigkeiten existiert (oder daß nicht alle Werte der Geschwindigkeit gleich wahrscheinlich sind). Man muß das erwarten, da man aus Nichts durch rein mathematische Deduktion kein Naturgesetz ableiten kann.

Das Maxwellsche Verteilungsgesetz rechtfertigt sich experimentell; es muß darum einen physikalischen Grund besitzen. Folgende kleine Notiz stellt einen Versuch dar, solche Gründe in der Thermodynamik zu finden.

Setzen wir an, daß ein Gasvolumen V, welches bei dem Druck P und Temperatur T N Gasmoleküle enthält, nur aus zwei Sorten von Molekülen besteht, welche die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 haben. Sie sind im Gleichgewicht. Man kann dieses Gleichgewicht wie ein Gleichgewicht zwischen zwei chemischen Isomeren betrachten, deren Konzentrationen C_{v_1} und C_{v_2} sind. Dieses Gleichgewicht stellt sich bekanntlich durch die Gleichung dar

$$\frac{C_{v_1}}{C_{v_2}} = \text{const} = K. \qquad (1)$$

Man kann jetzt unsere Voraussetzung fallen lassen und annehmen, daß unser Gasgemisch aus einer Reihe von Molekülsorten besteht, die die Geschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots$ und in den Konzentrationen $C_{v_1}, C_{v_2}, C_{v_3} \ldots$ vorhanden sind. Man muß dann analoge Gleichungen für jedes Paar von Molekülsorten schreiben.

Die Abhängigkeit der Gleichung (1) von der Temperatur stellt sich durch die Gleichung

$$\frac{d(\lg K)}{dT} = \frac{Q}{RT^2} = \frac{E_1 - E_2}{RT^2} \qquad (2)$$

dar, welche man durch Kombination mit (1) in

$$\frac{d \lg C_{v_1}}{dT} - \frac{d \lg C_{v_2}}{dT} = \frac{E_1}{RT^2} - \frac{E_2}{RT^2}$$

umschreiben kann.

[1]) Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1886, S. 202.

Man kann nun diese letzte Gleichung als Differenz zweier Gleichungen

$$\frac{d \lg C_{v_1}}{dT} = \frac{E_1}{RT^2}$$

$$\frac{d \lg C_{v_2}}{dT} = \frac{E_2}{RT^2}$$

betrachten, und analoge Gleichungen für jede beliebige C_{v_n} schreiben

$$\frac{d \lg C_{v_n}}{dT} = \frac{E_n}{RT^2}. \qquad (3)$$

Streng genommen, kann jede von diesen Gleichungen eine universale Konstante K enthalten, welche von C, T und E unabhängig ist. Wir können aber vorläufig voraussetzen, daß diese Konstante gleich 0 ist. Die Integration der Gleichung (3) gibt

$$\lg C_{v_n} = \lg \frac{n}{V} = -\frac{E_n}{RT} + \text{const}; \quad \frac{n}{V} = A e^{-\frac{E}{RT}}$$

wo n die Zahl der Moleküle darstellt, die die Geschwindigkeit v_n besitzen.

Dividiert man E und R durch N und bezeichnet

$$\frac{E}{N} = e_n; \quad \frac{R}{N} = k,$$

so bekommt man

$$n = A e^{-\frac{e_n}{kT}} . V.$$

Dann sind

$$PV = \tfrac{1}{3} N m v^2; \; e_n = \frac{m v^2}{2},$$

woraus

$$n = A \frac{Nm}{3P} v^2 e^{-\frac{m v^2}{2kT}},$$

setzt man $\frac{m}{3P} = K$ bei konstantem Druck, und $\frac{m v^2}{2kT} = k$ bei konstanter Temperatur, so bekommt man leicht

$$n = K N v^2 e^{-k v^2}$$

oder

$$\frac{n}{N} = K v^2 e^{-k v^2},$$

wo $\frac{n}{N}$ die sog. Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Moleküle mit der Geschwindigkeit v ist.

Charkow (Ukraine), Polytechnisches Institut, November 1927.

(Eingegangen 12. Dezember 1927.)

BESPRECHUNGEN.

M. Lindow, Numerische Infinitesimalrechnung. Gr. 8⁰. VIII u. 176 S. Mit 17 Fig. Berlin u. Bonn, F. Dümmler. 1928. M. 15.—.

Das Buch behandelt Interpolationsrechnung (1. Kap.), numerische Differentiation (2. Kap.), numerische Integration (3. Kap.) und gibt schließlich die numerische Behandlung der Differentialgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Dreikörperproblems (4. Kap.). Besonders wertvoll und zu begrüßen ist es, daß die vorgetragenen Theorien jeweils durch zahlreiche durchgerechnete numerische Beispiele illustriert werden; ferner daß die in der Astronomie verwendeten Näherungsmethoden besondere Berücksichtigung finden, wie es denn der Verfasser im Vorwort als seine Absicht bezeichnet, diese Methoden aus ihrer Verbindung mit ganz speziellen Problemen zu lösen und weitere Kreise auf ihre allgemeine Verwendbarkeit aufmerksam zu machen. Das Werk kann dem Physiker, der sich ja vor allem für die „mathematische Exekutive" interessiert, nur bestens empfohlen werden. — Für eine Neuauflage möchte hier dem dringenden Wunsche zum wenigsten nach einem Hinweise auf die Bedeutung der Fehlerabschätzung Ausdruck gegeben werden. Gewiß ist für die Anwendungen eine Fehlerabschätzung belanglos, soweit es sich darum handelt, für irgendwelche (theoretisch oder empirisch gewonnene) Funktionen (bzw. Integrale aus ihnen usw.) näherungsweise Darstellungen (bzw. Näherungswerte) zu gewinnen, die hinterher an der Erfahrung auf ihre Brauchbarkeit geprüft werden. Gewiß wird der erfahrene Rechner kaum jemals im Zweifel sein über die Genauigkeit seiner Rechnung auch ohne daß er Fehlerabschätzungen vornimmt; er verläßt sich auf seinen Instinkt und findet dessen Zuverlässigkeit durch die Erfahrung in der Regel bestätigt. Trotzdem erfordert wohl schon die Rücksicht auf den Leser, der sich erst als Rechner ausbilden will, mindestens eine, wenn auch nur kurze, prinzipielle Konstatierung, daß die Fehlerabschätzung vom Standpunkte der reinen Mathematik notwendig ist, daß und inwiefern hingegen sie vom Standpunkte der Praxis überflüssig sein kann. Wenn im vorliegenden Buche z. B. vielfach den berechneten „Näherungswerten" die „genauen" Werte zum Vergleich gegenübergestellt werden (vgl. z. B. S. 58), so wird doch erst durch den gewünschten Hinweis der Sinn dieser Gegenüberstellung als einer empirischen (nicht logischen, d. h. mathematischen) Rechtfertigung der betr. „Näherungsmethode" völlig klar. Übrigens ließe sich recht wohl der Fall denken, daß auch in der Praxis eine Fehlerabschätzung erforderlich wird. Haupt.

F. Prášil, Technische Hydrodynamik. 2., umgearbeitete und vermehrte Auflage. Gr. 8⁰. IX u. 303 Seiten. Mit 109 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1926. Geb. M. 24.—.

Prášils Technische Hydrodynamik erschien in 1. Auflage 1913 und stellte im wesentlichen eine Zusammenfassung eigener Arbeiten des Verfassers dar, die darauf hinzielten, der theoretischen Hydrodynamik mehr Eingang in die Kreise der Ingenieure zu verschaffen und gleichzeitig brauchbare graphische Methoden zur Darstellung von Störungsformen zu schaffen. Der Verfasser hat sich damit ein unbestreitbares Verdienst erworben, und das Notwendigwerden der vorliegenden neuen Auflage beweist, daß seinen Bemühungen der Erfolg nicht versagt geblieben ist. Das Physikalische tritt gegenüber den genannten Bestrebungen naturgemäß in den Hintergrund. Jedoch hat der Verfasser auch ihm durch allerlei Strömungsaufnahmen Rechnung getragen, die in guter Reproduktion wiedergegeben sind. Von mehr formal theoretischem Interesse ist noch eine Entwicklung des Verfassers, die von der Annahme ausgeht, daß bei jeder Strömungsform die Dissipation zu einem Minimum wird, und so zu Ergebnissen gelangt, die den formalen Anschluß an die empirischen Widerstandsgesetze (z. B. von Blasius) gestatten. So findet auch der mit irgendwelchen Strömungsproblemen beschäftigte Physiker vielerlei Interessantes. Für den Anfänger ist besonders nützlich der häufig vorhandene Hinweis auf Stellen der Lehrbuchliteratur. L. Schiller.

A. Haas, Atomtheorie in elementarer Darstellung. Gr. 8⁰. VIII u. 204 S. Mit 56 Fig. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1924. Geh. M. 5.40, geb. M. 6.80.

Bei der Abfassung dieses Büchleins, das aus Vorlesungen an der Universität Wien hervorgegangen ist, hatte sich der Verf. das Ziel gesetzt, die Grundideen und die wichtigsten Ergebnisse der modernen Atomtheorie übersichtlich in elementarer Weise darzustellen. Man darf getrost behaupten, daß dieses Ziel voll und ganz erreicht worden ist. Es wird ein Minimum an mathematischen und physikalischen Kenntnissen beim Leser vorausgesetzt, so daß sich jeder einigermaßen vorgebildete Nicht-Physiker ein klares Bild von den Methoden und den Errungenschaften der modernen Atomphysik machen kann. Ein Anhang bringt eine kurze Zusammenfassung des Inhalts der einzelnen Paragraphen, die vielleicht zweckmäßiger jedem Paragraphen im Text vorangestellt werden könnte; ferner finden sich im Anhang eine Übersicht über die häufigsten Bezeichnungen, eine Zusammenstellung der Werte der universellen Konstanten der Atomphysik, eine chronologische Übersicht sowie ein Namen- und ein Sachregister. Harry Schmidt.

J. Salpeter, Einführung in die höhere Mathematik. 3., verbesserte Auflage. Gr. 8⁰. X u. 387 S. Mit 154 Fig. Jena, G. Fischer. 1926. M. 16.—, geb. M. 18.—.

Die vorliegende 3. Auflage des Buches weist gegenüber der 2. Auflage keine wesentlichen Änderungen auf. Hervorzuheben ist an Vorzügen des Buches: Die stete und enge Bezugnahme auf die Probleme der Naturwissenschaften (unter anderm wird der 2. Hauptsatz der Thermodynamik ausführlich besprochen), ferner die leichtverständliche Darstellung, bei welcher doch die nötige Exaktheit gewahrt ist (es ist jeweils ausdrücklich angegeben, wann ein Satz nicht rein arithmetisch bewiesen, sondern aus der „Anschauung" entnommen wird). Vielleicht wäre es zweckmäßig, den Funktionsbegriff (der auf den Zuordnungsbegriff gegründet wird) gleich so zu formulieren, daß auch die empirisch gegebenen Funktionen mit einbezogen sind, was durch Verwendung

des (auch theoretisch wichtigen) Begriffes „Definitionsbereich" bekanntlich ohne weiteres erreicht wird. Die Beweise der Kettenregel (S. 62) und des 2. Satzes von L'Hospital (S. 148/49) bedürfen der Verbesserung; doch fällt dies nicht ins Gewicht gegenüber den sonstigen Vorzügen des Buches, welches für den Physiker zur Einführung sehr geeignet ist.

Haupt.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Zweite Auflage. (Sammlung „Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete" Bd. 23.) Mit einem Anhang: Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung von M. Dehn. Gr. 8⁰. X u. 275 S. Mit 115 Abbildungen. Berlin, Jul. Springer. 1926. M. 16.50, in Lw. M. 18.—.

Die angezeigten „Vorlesungen" von Pasch bilden bekanntlich einen Markstein in der Forschung über die Grundlagen der Geometrie, insofern in ihnen erstmals ein vollständiges Axiomensystem für die Elementargeometrie aufgestellt wurde. Der vorliegende Neudruck ist daher freudig zu begrüßen, zumal der Verfasser verschiedene Vereinfachungen und Ergänzungen eingearbeitet hat (ohne aber das Buch im wesentlichen zu ändern). Der neu hinzugekommene Anhang von M. Dehn gibt einen ausgezeichneten Überblick über die wichtigsten in Frage kommenden Probleme und ihre Behandlung. Das Buch, welches naturgemäß in erster Linie für den Mathematiker wichtig ist, wird auch dem theoretisch interessierten Physiker vieles bieten; wir denken dabei etwa an Erörterungen über den empirischen Ursprung geometrischer Begriffe, oder an die Möglichkeit, sich an Hand des Anhanges über die Grundlegung der Geometrie rasch zu orientieren.

Haupt.

A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. III. Bd. Festigkeitslehre. 10. Aufl. Gr. 8⁰. XIV u. 451 S. Mit 114 Fig. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. Geb. M. 16.60.

Wenn ein Lehrbuch, wie das vorliegende, in zwanzig Jahren zehn Auflagen erlebt, so ist der Referent der Pflicht enthoben, ein Werturteil abzugeben; denn das Buch hat den glänzendsten Experimentalbeweis für seine Brauchbarkeit selbst geliefert. Nachdem es von der vierten bis zur neunten Auflage keinerlei nennenswerten Änderungen erfahren hatte, ist nun die zehnte Auflage nach dem Tode des Verfassers von dessem Sohn O. Föppl sorgfältig überarbeitet worden. Der neue Bearbeiter hat vor allem die im Mittelpunkt seiner eigenen Forschungen stehenden Ergebnisse der dynamischen Festigkeitsuntersuchungen in das Buch aufgenommen. Da über diese Arbeiten die Aussprache noch keineswegs abgeschlossen ist, so wird wahrscheinlich von mancher Seite bezweifelt werden, ob die Ergebnisse jetzt schon lehrbuchreif sind. Auf alle Fälle bildet diese wohl bewußt einseitige, aber mustergültig klare zusammenfassende Darstellung eine brauchbare Grundlage für die weiteren Debatten. Von den vielen kleinen Verbesserungen, welche alle die technische Einstellung des Bearbeiters zeigen, erwähne ich die Neugestaltung der Theorie des Zughakens: diese hatte der frühere Verfasser nur mit formellem Protest gegen ihre Richtigkeit aufgenommen; sie wird jetzt wesentlich überzeugender dargestellt und auf ihre Anwendbarkeit hin geprüft. Im übrigen ist die sehr bewährte Gesamtanlage des Buches die alte geblieben.

R. Grammel.

W. König, Grundzüge der Meteorologie. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Bd. 70.) Kl. 8⁰. 54 S. Mit 3 Tafeln u. 12 Fig. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. M. 1.20.

Es ist sicher keine leichte Aufgabe gewesen, in dem knappen Rahmen von 54 kleinen Oktavseiten eine Übersicht über das gesamte Gebiet der Meteorologie zu geben und man muß die von W. König hier gefundene Lösung mit Recht anerkennen. Die ersten fünf Kapitel befassen sich mit der Allgemeinen Meteorologie, d. i. der Anwendung der Physik auf die Erscheinungen im Luftmeer, die beiden folgenden in der Klimatologie mit dem mittleren Zustand der Atmosphäre und in der Witterungskunde mit dem Einzelvorgang. Die beiden letzten Abschnitte geben eine kurze Beschreibung der meteorologischen Instrumente und der Beobachtungsmethoden. Das Heftchen wendet sich an einen großen Leserkreis und es ist ihm weiteste Verbreitung zu wünschen, da es ganz besonders geeignet erscheint, den Fernstehenden einen ersten Begriff von unserer Wissenschaft zu geben und zum weiteren Studium anzuregen.

Peregrin Zistler.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität München Dr. Erich Lange für physikalische Chemie.

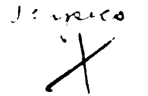
Ernannt: An der Universität Helsingfors Dr. I. O. Palmén zum Dozenten für organische Chemie und E. S. Tomula zum Dozenten für analytische Chemie.

Neuer Lehrauftrag: Der ord. Professor der Chemie an der Forstakademie Hann.-Münden Dr. Edgar Wedekind für Magnetochemie an der Universität Göttingen.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.





Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 7. | Ausgegeben am 1. April 1928. Nr. 755. Printed in Germany. | 29. Jahrgang.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 7 — 1. April 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 9 am 5. Mai 1928.

INHALT:

Eilhard Wiedemann.

Geb. 1. August 1852 — gest. 7. Januar 1928.

Von Gerhard C. Schmidt.

Eilhard Wiedemann wurde am 1. Aug. 1852 zu Berlin geboren als Sohn des damaligen Privatdozenten der Physik Gustav Wiedemann und seiner Frau Clara geb. Mitscherlich, Tochter des Berliner Chemikers. Es waren ihm daher die Naturwissenschaften von Jugend an sowohl durch das väterliche als auch durch das mütterliche Haus nahegelegt. Er besuchte die Gymnasien in Basel, Braunschweig und Karlsruhe, in welchen Orten der Vater die Professur für Physik bekleidete. In letzterer Stadt schloß er 1870 seine Schulbildung durch ein glänzendes Abiturientenexamen ab. Er studierte darauf in Heidelberg unter Helmholtz, Bunsen, Königsberger und besonders Kirchhoff. Der Kirchhoffschen Vorlesungen und Unterweisung im Laboratorium gedachte er noch im Alter mit tiefstem Dank. Das Studium wurde abgeschlossen in Leipzig, wohin sein Vater inzwischen übergesiedelt war; hier promovierte er mit einer bereits in Heidelberg begonnenen Arbeit: Über die elliptische Polarisation des Lichtes und ihre Beziehungen zu den Oberflächenfarben der Körper. Seinen Wunsch, das Studium auf einer anderen Universität fortzusetzen, um womöglich sich dort zu habilitieren, glaubten die Eltern in Rücksicht auf seine schwächliche Gesundheit — er litt an der Lunge — versagen zu müssen. Schweren Herzens mußte er sich fügen. Um sich aber von dem wissenschaftlichen Einfluß des Vaters möglichst frei zu machen, erschloß er sich Arbeitsgebiete, die denen des Vaters ganz ferne lagen. Seine erste große selbständige Arbeit gehört der Wärmelehre an; es ist dies seine bekannte Untersuchung über die spezifische Wärme der Gase. Es lagen damals

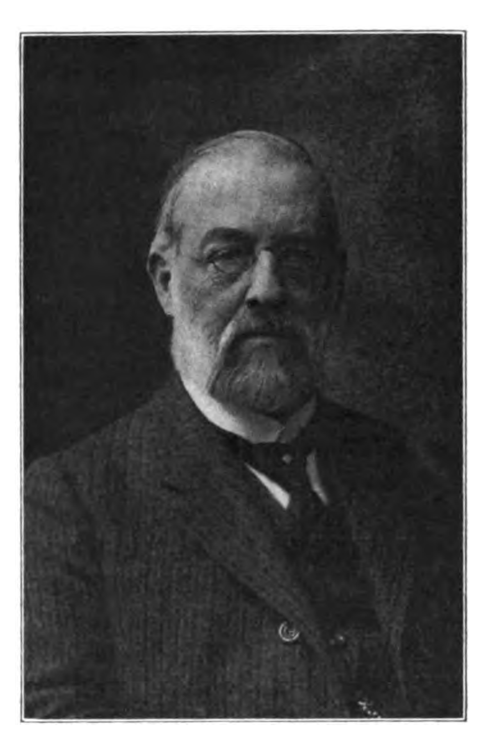
schon die klassischen Untersuchungen von Regnault vor, die mit so außergewöhnlichen Hilfsmitteln und in so beträchtlichen Dimensionen ausgeführt waren, daß eine Wiederholung und Erweiterung derselben mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Laboratorien unmöglich erschienen. Da zeigte der junge, 24jährige Forscher, daß sich der Maßstab der Versuche durch zweckmäßige Abänderungen beträchtlich einschränken ließ, ohne daß ihre Genauigkeit eine wesentliche Einbuße erfuhr. Die wichtigste Veränderung, welche Wiedemann einführte, war die Ausfüllung derjenigen Teile der Gasleitung, in welchen die Aufnahme und Abgabe der Wärme stattfand, durch metallene Drehspäne. Hierdurch wurde die Berührungsfläche zwischen Gas und Metall außerordentlich stark vergrößert, so daß der Wärmeausgleich zwischen beiden sehr schnell erfolgte, während andererseits das gutleitende Füllmaterial den Austausch der Wärme zwischen der Gasleitung und der umgebenden Flüssigkeit im Kalorimeter in vollkommenster Weise vermittelte. Die Genauigkeit der erhaltenen Resultate war mindestens der von Regnault erzielten gleich. In seiner zweiten Arbeit über die spezifische Wärme der Dämpfe konnte Wiedemann dadurch, daß er die gesuchten Werte als direkte Versuchsergebnisse erzielte, während Regnault sie nur auf indirektem Wege berechnete, den französischen Forscher durch die Eleganz der Methode und die Genauigkeit der Resultate weit übertreffen. Durch diese Arbeiten erwies sich Wiedemann als ein Experimentator ersten Ranges. Es folgen darauf optische, und zwar spektralanalytische Untersuchungen. Hier bildet er sich zunächst eine Arbeitshypothese, die ausgehend von der kinetischen Gastheorie die Linien den oszillatorischen Bewegungen der Atome und die Banden den Schwingungen der Atome im Molekül zuschreibt. Aus dieser Theorie folgt, daß Temperaturänderungen von maßgebendem Einfluß auf die Spektra sein müssen. Um dies zu prüfen, maß er auf kalorimetrischem Wege die Wärmeentwicklung, welche beim Durchgang der Elektrizität durch verdünnte leuchtende Gase unter verschiedenen Bedingungen auftritt, und kam zu dem überraschenden Resultat, daß ein Gas bereits weit unter 100° zu leuchten vermag, ein Ergebnis, das ungefähr gleichzeitig von Hittorf gefunden wurde. Hierdurch wurde bewiesen, daß die damals allgemein herrschende Vorstellung, welche die Emission des Lichts der elektrisch angeregten Gase auf eine bis zum Glühen gesteigerte Temperaturerhöhung zurückführte, nicht haltbar sei. Daß tatsächlich die Verhältnisse bei der Emission verwickelter waren, als Wiedemann anfangs annahm, ging aus seiner Untersuchung über den Durchgang der Elektrizität durch gemischte Gase hervor, z. B. Hg und Na in N_2 bzw. H_2. Stets zeigte es sich, daß die Metalldämpfe die Stickstoff- bzw. Wasserstoffbanden vernichteten und allein leuchteten. Daneben veröffentlichte er noch eine Reihe von Arbeiten aus den verschiedensten Gebieten, z. B. eine Methode zur Bestimmung des Brechungsvermögens, über die Leitfähigkeit der Haloidsalze des Bleies usw.

Auf Grund dieser Arbeiten erhielt er bereits 1878 den Titel eines a. o. Professors.

In der Folge erschienen zahlreiche Arbeiten über Entladungserscheinungen, in denen er besonders das Wesen der Kathodenstrahlen zu ergründen versuchte. Eine Fülle von experimentellem Material enthalten die Abhandlungen auf diesem Gebiet; die Ergebnisse durch einen leitenden Gesichtspunkt zusammenzufassen, gelang ihm aber nicht, er sah in den Kathodenstrahlen, wie wohl alle deutschen Physiker damals Lichtstrahlen, und zwar von kleinster Wellenlänge.

Ostern 1886, also nach 10jähriger Privatdozentenzeit folgte er einem Ruf als o. Professor der Physik nach Darmstadt und übersiedelte schon im Herbst desgleichen Jahres nach Erlangen. Diese erste Erlanger Zeit ist wohl die glücklichste seines Lebens gewesen. Zum ersten Male selbständig konnte er den Unterricht und den Laboratoriumsbetrieb nach seinen Plänen einrichten. Dazu kam das Glück seiner jungen Ehe mit einer Frau, die ihn auf das beste ergänzte und durch ihr sonniges Gemüt ihn, den sorgenvollen, zur

Melancholie Neigenden aufheiterte. Trotz der großen Arbeit, die ihm die Einrichtung des Kollegs und der Praktika bereitete, wobei ihm sein aus Leipzig mitgebrachter Assistent Ebert auf das tatkräftigste unterstützte, fand er Zeit, weiter experimentell zu arbeiten. 1887 wies er nach, daß sich die Fluoreszenz in Phosphoreszenz überführen ließ durch Einbetten der Farbstoffe in Gelatine und Eiweiß und im Jahre darauf entwickelte er eine Terminologie für die Leuchtphänomene bei niederer Temperatur, die er als Lumineszenz mit ihren Unterarten bezeichnete, eine Terminologie, welche sich international eingebürgert hat. Darauf folgen eine Reihe von Arbeiten gemeinsam mit Ebert über den Durchgang der Elektrizität durch verdünnte Gase. Sie wiesen hierbei nach, daß der Hertz-Effekt, Herabsetzung des Funkenpotentials durch das Licht, besonders durch ultraviolette Strahlen hervorgerufen wird und sich ausschließlich auf die Bestrahlung der Kathode beschränkt. Wiedemann deutet die Erscheinung richtig, daß Kathodenstrahlen hierbei ausgelöst werden. In weiteren Arbeiten weisen sie nach, daß leuchtende Gase Schirmwirkung ausüben und als erste haben sie die Erscheinungen, welche in verdünnten Räumen unter Erregung wohldefinierter elektrischer Schwingungen auftreten, studiert. Es folgt darauf eine Reihe von Arbeiten gemeinsam mit dem Verfasser dieses Nachrufs, von denen ich nur einige erwähne: Lumineszenz von festen Lösungen, Fluoreszenz von organischen Dämpfen, Fluoreszenz von Natrium und Kalium.





Es herrschte damals in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts in dem kleinen Erlanger Institut ein außergewöhnlich reges wissenschaftliches Leben und den Mittelpunkt bildete Wiedemann. Es ist kein Zufall, daß damals aus dem Institut neben seinen eigenen Untersuchungen Arbeiten von dauerndem Wert hervorgegangen sind; ich erwähne nur den tönenden Flammenbogen von H. Th. Simon, den elektrolytischen Unterbrecher von Wehnelt, die Oxydkathodenstrahlen von demselben, das Hehlsche Gesetz. Eine unverhältnismäßig große Anzahl späterer Gelehrter ist aus dem Erlanger Institut hervorgegangen, genannt seien die späteren Professoren der Physik: H. Ebert, H. Th. Simon, A. Wehnelt, R. Reiger, W. Matthies, H. Geiger, J. Würschmidt, J. Frank. Ich glaube, es ist keiner unter den noch lebenden Schülern, der dieser Zeit nicht mit einem Hochgefühl und mit innigem Dank an Wiedemann gedenkt.

Als Lehrer war Wiedemann hervorragend. Ich habe noch als Assistent seine Vorlesung über Experimentalphysik besucht. Es war ein ästhetischer Genuß mit anzuhören, wie er die Sätze bildete und die Perioden formte. Nie fehlte ihm ein Wort. Und dabei war der Vortrag von einer mustergültigen Klarheit und Einfachheit; Theorien, die nicht vollständig gesichert waren, überging er. Das Kolleg mußte seine Ergänzung finden durch das Praktikum. Er erkannte gleich zu Beginn seiner Erlanger Tätigkeit, daß die Zahl der Physik- und Mathematikstudierenden in Erlangen wegen der Examensverhältnisse in Bayern — das Staatsexamen wurde nur in München abgehalten — nie groß sein würde;

sein Praktikum konnte somit nicht auf diese zugeschnitten sein. Er wendete sich daher hauptsächlich an die, welche Physik als Nebenfach trieben, also Chemiker, Mediziner usw. Von diesem Gesichtspunkt aus hat er sein Praktikumsbuch geschrieben. Das Erlanger Anfängerpraktikum war damals eine Neuerung, heute ist es Gemeingut geworden.

Noch in anderer Beziehung hat sich Wiedemann große Verdienste um die Physik erworben. Er ist der Gründer der Beiblätter. In den älteren Jahrgängen der Annalen hatte Poggendorff durch Übersetzungen die wichtigsten ausländischen Arbeiten den deutschen Physikern zugänglich gemacht, allein die Arbeiten von Regnault füllen gegen 700 Seiten der Annalen. Aber als die Produktion in Deutschland immer mehr zunahm, konnten die fremdsprachigen Abhandlungen kaum noch berücksichtigt werden. Diese Lücke empfand Wiedemann und im Verein mit seinem Vater wandte er sich an Poggendorff behufs Gründung einer Zeitschrift, welche den wichtigsten Inhalt aller ausländischen Arbeiten geben sollte. Poggendorff stimmte diesem Plane zu, erklärte aber, daß er in Anbetracht seines hohen Alters seinen Namen nur dazu hergeben würde, wenn ihm die ganze Arbeit abgenommen würde. Die redaktionelle Tätigkeit übernahm E. Wiedemann, und es ist bezeichnend für seinen scharfen Blick, daß er gleich in dem ersten Heft ein ausführliches Referat gab über eine damals kaum bekannte holländische Arbeit: Über den Übergangszustand zwischen Gas und Flüssigkeit von van der Waals. Durch eine deutsche Übersetzung sorgte er dann dafür, daß sie einem weiteren Kreis zugänglich wurde. 24 Jahre hat er die Redaktion besorgt, 19 Jahre ohne Hilfe, die letzten 5 Jahre habe ich ihm einen Teil der Arbeit abgenommen. Ich kann aus Erfahrung sprechen, wenn ich von der Mühsal dieser, nur selten Dank eintragenden Tätigkeit rede. Jeden Sonnabend bis tief in die Nacht wurden die einzelnen Arbeiten registriert und verteilt, die säumigen Referenten gemahnt, denn es war sein Ehrgeiz, womöglich jede Arbeit 8 Wochen nach ihrem Erscheinen in den Beiblättern zu haben. Zum Redakteur war Wiedemann hervorragend geeignet durch seine Gewissenhaftigkeit, durch seinen nie ermüdenden Fleiß und durch seine außergewöhnlichen Sprachkenntnisse. Er konnte alle für die Beiblätter in Betracht kommenden Sprachen lesen mit Ausnahme von Russisch. Die wichtigsten Kultursprachen sprach er fließend. Ich habe niemanden kennengelernt, dem das Erlernen einer fremden Sprache und das Sprechen in derselben so leicht wurde wie ihm. Als auf einem italienischen Kongreß der Wunsch laut wurde, der italienischen Regierung für ihre Gastfreundschaft und den italienischen Physikern für ihre Organisation zu danken, und sich ein Physiker nach dem anderen wegen Unkenntnis der Sprache weigerte, sprang Wiedemann in die Bresche und hielt aus dem Stegreif in fließendem Italienisch seine Rede. Ich habe oft bewundert, wie er, wenn z. B. englische oder amerikanische Physiker ihn besuchten, sich stundenlang mit ihnen scheinbar mühelos in der fremden Sprache unterhielt. Als Baron Eötvös ihn einmal begrüßte, antwortete er ihm scherzend magyarisch — auf einer Ferienreise in den Karpathen hatte er ungarische Zeitungen in die Hand genommen und bald war er soweit, daß er sich mit den Einheimischen verständigen konnte. Er wurde häufig von der Regierung als Kommissar zur Abhaltung von Abiturientenexamen in die verschiedensten Städte Bayerns geschickt. Er setzte dann die Lehrer und auch die Schüler in Erstaunen, wenn er in zweifelhaften Fällen den Prüfling selbst examinierte. Dabei beschränkte er sich nicht nur auf Mathematik und Naturwissenschaften; die römischen und griechischen Schriftsteller waren ihm völlig vertraut. Ich habe von mehreren Direktoren den Ausspruch gehört: Der einzigste in Bayern, der in allen Fächern des Abiturientenexamens gleich gut zu Hause ist, ist Wiedemann. Seine Vielseitigkeit war staunenswert. Durch seine eigenen Arbeiten blieb er dauernd in Verbindung mit Philologie und Geschichte, mit größtem Interesse verfolgte er aber auch andere Wis-

sensgebiete, z. B. die Entwicklungslehre und italienische Kunstgeschichte. Nur Musik war ihm ein unangenehmes Geräusch und für persönliche Angelegenheiten, die in der kleinen Universitätsstadt eine große Rolle spielten, hatte er gar kein Interesse.

Die Leichtigkeit beim Erlernen von fremden Sprachen und seine Freude an denselben sind wohl der tiefere Anlaß zu seinen arabischen Studien gewesen. Bei einer physikalischen Arbeit mußte er längere Zeit zwischen den einzelnen Beobachtungen warten; untätig sein war ihm aber nicht möglich, andrerseits verbot sich aber, eine zweite Arbeit daneben auszuführen. Da spielte ihm der Zufall eine arabische Grammatik in die Hand, deren Lektüre ihn fesselte, aber nicht so stark in Anspruch nahm, daß seine Aufmerksamkeit von den Beobachtungen abgezogen wurde. Bald erkannte er, daß in den arabischen Manuskripten ein ungehobener naturwissenschaftlich-geschichtlicher Schatz läge und es erfolgen seine zahlreichen, in den verschiedensten Zeitschriften veröffentlichten Beiträge zur Kenntnis der Naturwissenschaften bei den Arabern. In mehreren größeren Abhandlungen hat er die Verdienste der Araber um Mathematik und Naturwissenschaften geschildert. Seine geschichtlichen Studien beschränken sich aber nicht nur auf diese Epoche. Schon um die selbständigen Leistungen der Araber würdigen zu können, mußte er sich eingehend mit den hierhingehörigen Arbeiten der Griechen und Römer beschäftigen. Mit der Geschichte der Naturwissenschaften in der Neuzeit war er völlig vertraut; er hat selbst Beiträge zum Galilei-Problem geliefert.

Wärmstes Interesse brachte Wiedemann allen Unterrichtsfragen entgegen und in einer Reihe von Aufsätzen ist er energisch für eine Umgestaltung des Physikunterrichts eingetreten, dieser dürfe nicht als Appendix zur Mathematik behandelt werden, wie es früher in Bayern der Fall war, sondern müsse ein allgemeiner Bildungsgegenstand werden. Seine zahlreichen Reisen im Ausland benutzte er, um nebenbei den Unterricht der Physik in fremden Landen zu studieren.

Wenn man alle diese Leistungen überblickt, so wird man sie, selbst wenn man sie sehr bescheiden einschätzt, als nicht unbedeutend bezeichnen müssen. Die Anerkennung dafür blieb aus. Trotz der vielen Verschiebungen ist er nie ernstlich für eine Professur an einer größeren Universität in Frage gekommen. Er überwand stets nach kurzer Zeit die Enttäuschung hierüber und stürzte sich mit frischem Eifer ins Experimentieren. Daß er es manchmal empfand, daß alle seine Schüler an die verschiedensten Hochschulen berufen wurden, während er an einer der kleinsten bleiben mußte, ist menschlich, aber es überwog stets alsbald die Freude und freundschaftlich blieb er mit ihnen in Verbindung. Den Hauptgrund für diese Nichtanerkennung hat er klar erkannt, drei Generationen in einem und demselben Fach in exponierter Stellung — und in einer solchen befand sich Wiedemann infolge seiner redaktionellen Tätigkeit — sei nicht tragbar. Schweren Herzens hat er deswegen seine vier Söhne praktischen Berufen zugeführt. Mit besonderer Freude erfüllte es ihn aber, daß sie sich daneben wissenschaftlich betätigten und daß der eine direkt aus der Oberförsterei in die akademische Laufbahn als Professor nach Tharandt und darauf nach Eberswalde berufen wurde.

1898 erkrankte der Vater kurz nachdem er von seinem Lehramt zurückgetreten war. Während der Krankheit führte Eilhard die Redaktion der Annalen; es war sein Wunsch, sie später ganz zu übernehmen und mir die Beiblätter zu übertragen. Ich halte es nicht für angebracht, Vergangenes auszugraben und zu schildern, wie die Redaktion nach dem Tode des Vaters in andere Hände überging. Durch die vorangegangene große Arbeit im Verein mit dem Schmerz über den Verlust des von ihm überaus geliebten Vaters, von dessen Einfluß er sich nie ganz frei gemacht hatte, war sein zarter Körper geschwächt; als dieser Schlag dazu kam, erlitt er einen vollständigen Nervenzusammenbruch. Kein Fremder durfte aber etwas davon merken, als einzigen Arzt zog er seinen alten Hausarzt heran, auf dessen

Verschwiegenheit er sich unbedingt verlassen konnte. Mit eiserner Energie hielt er sein Kolleg ab, am Schluß der Stunde war er aber häufig so erschöpft, daß er in seinem Zimmer in lange Ohnmachten fiel. Auch im Laboratorium verfolgte er die Arbeiten seiner Schüler mit dem größten Interesse. Ich glaube, daß kein Student, ja sogar kaum ein Kollege etwas von dieser schweren Erkrankung gemerkt hat. Daß er diese Zeit überwand, ist das Verdienst seiner Frau, seiner Kinder, die sich zu seiner Freude entwickelten, und seiner Schüler. Daß diese ihm anläßlich seines 60. Geburtstages in großer Zahl persönlich überraschten und durch Eberts Mund ihre Dankbarkeit ausdrückten, war ihm zeitlebens eine liebe Erinnerung. Jahrelang hat er sich schonen müssen; das Arbeiten im Laboratorium war ihm auf das strengste untersagt. Aber ganz untätig konnte er nicht sein; die Physik war ihm vergällt, da warf er sich auf die Geschichte der Naturwissenschaften, besonders auf seine Arabica. Ich kann diese Arbeiten nicht beurteilen; von Fachkollegen habe ich gehört, daß sie hoch eingeschätzt werden. Dies beweisen auch die zahlreichen Dedikationen von in- und ausländischen Gelehrten, welche ihm unter den schmeichelhaftesten Worten ihre Bücher zusandten. Wie hoher Schätzung er sich in Philologenkreisen erfreute, bewiesen auch die warmen Worte, mit denen der Vorsitzende Prof. Schoene anläßlich des Erlanger Philologentages des damals erkrankten Wiedemann gedachte. Trotzdem ging seine Sehnsucht nach dem Experimentieren, und ich glaube, diese Sehnsucht wäre wieder übermächtig geworden und er hätte sich in das Laboratorium gestürzt, wenn nicht der Krieg dazwischen gekommen wäre. Die vierjährige dauernde Sorge um seine fast die ganze Zeit in der Front stehenden Söhne, ihre schweren Verwundungen und Krankheiten, dazu das Fehlen der Mitarbeiter und schließlich die Sorge um das Vaterland ließen ihn nicht zu der Ruhe kommen, die zum Forschen nötig ist. Dazu kam, daß er gesundheitlich durch die Zeit sehr mitgenommen wurde, denn er duldete nicht, daß mehr in das Haus kam, als amtlich genehmigt war. Und als der Krieg zu Ende war, da hatte er wegen Überhäufung mit Unterricht und Examina so viel zu tun, daß er an eigenes Arbeiten gar nicht denken konnte. Als diese unruhevolle Zeit zu Ende war, sah er mit einer gewissen Wehmut ein, daß die Zeit des Experimentierens endgültig vorbei war. So zog er sich ganz auf seine Arabica zurück; sein Plan war, in einem größeren Werk seine Studien zusammenzufassen und die arabische naturwissenschaftliche Epoche zu schildern, es ist nicht fertig geworden und wird wohl für immer ungeschrieben bleiben, denn eine derartige Vereinigung von naturwissenschaftlichen und philologischen Kenntnissen wird sich jedenfalls in absehbarer Zeit nicht wieder in einem Menschen vereinigt finden.

Am Schlusse des W.-S. 1926 übergab er nach 40jähriger Leitung das Institut Prof. Gudden. In seiner Abschiedsvorlesung schilderte er die Entwicklung der Physik in den letzten 50 Jahren, der Zeit, in der er forschend an der Entwicklung teilgenommen hatte. Dieser Schritt in den Ruhestand bedeutete aber kein Ausruhen, er arbeitete weiter und veranlaßte noch mehrere Dissertationen.

Beneidenswert war sein Tod. In einer Handschrift hatte er eine wichtige Stelle gefunden, mit einem gewissen Hochgefühl schlief er ein, um nicht wieder aufzuwachen.

Er hatte sich bei der Beerdigung jede offizielle Rede und jedes offizielle Gepränge verbeten. In dem Krematorium in Nürnberg hatten sich trotzdem zahlreiche Kollegen und Schüler versammelt. Nach den Worten des Geistlichen sprach ich im Namen der Schüler Worte des Gedenkens und des Dankes. Dann senkte sich unter feierlichem Orgelklang der Sarg hinab. Was menschlich an Wiedemann war, ging dahin; es bleibt die Erinnerung an einen hochbedeutenden Mann, der viel Freud, aber auch sehr viel Leid erfahren, der durch Fleiß, Gewissenhaftigkeit und Herzensgüte uns dauernd ein Vorbild sein wird.

(Eingegangen 15. Februar 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Magnetisierbarkeit dünner Manganschichten.

Von H. Freese.

I. Einleitung.

Die magnetischen Eigenschaften des Mangans, des unmittelbaren Nachbarn der Eisengruppe im periodischen System, sind noch nicht so geklärt, daß man sagen könnte: Mangan gehört zu den paramagnetischen bzw. zu den ferromagnetischen Stoffen. Gerade am Mangan hat sich zuerst die übliche Einteilungsweise des magnetischen Verhaltens der Stoffe als unzulänglich erwiesen.

Klassifiziert man nämlich einerseits nach der Größe der Suszeptibilität, so findet man verschieden stark „magnetische" Modifikationen, deren schwächste stärker als alle festen paramagnetischen (außer den seltenen Erden), deren stärkste bedeutend schwächer als die ferromagnetischen Stoffe im Magnetfeld beeinflußt werden.

Will man andererseits nach dem Kriterium unterscheiden, ob die Suszeptibilität von der Feldstärke abhängt oder nicht, so müßte man Mangan als ferromagnetisch ansehen, da es eine ähnliche, erst ansteigende, dann abfallende μ-$\mathfrak{H}$-Charakteristik zeigt, wie die Elemente der Eisengruppe, ja in besonderer Modifikation sogar eine Hystereseschleife mit bedeutender Koerzitivkraft.

Zu welcher Unterscheidungsweise man sich auch entschließen mag, immer sieht man, daß das Mangan in verschiedenen Zuständen auftritt, von denen der eine (normale) mehr Ähnlichkeit mit den paramagnetischen, der andere mehr mit den ferromagnetischen Stoffen hat. Im Folgenden sei daher der Kürze halber einfach von der paramagnetischen bzw. der ferromagnetischen Modifikation des Mangans die Rede.

Um gleich eine ungefähre zahlenmäßige Unterscheidung zu machen: Die Größenordnung der Suszeptibilität[1]) ist bei der

paramagnetischen Modifikation $+ \quad 10 \cdot 10^{-6}$
ferromagnetischen Modifikation $+ 2000 \cdot 10^{-6}$.

Zum Vergleich folgen in Tabelle I die Suszeptibilitäten einiger anerkannt paramagnetischer Stoffe und die Maximalsuszeptibilitäten der Eisengruppe.

II. Historisches.

Folgende Ergebnisse magnetischer Untersuchungen an metallischem Mangan liegen vor.

1) Wo von „Suszeptibilität" ohne weiteren Zusatz die Rede ist, soll hier stets die sog. Massensuszeptibilität gemeint sein.

Seckelson (3) fand an elektrolytischen Schichten (Dicke 500 mμ) und an einem von Bunsen hergestellten größeren Stück eine Suszeptibilität von etwa $4 \cdot 10^{-6}$, außerdem hohe Remanenz.

Unter Richarz untersuchten Gebhardt (4), Ihde (5) und Lepke (6) Gußmangan von Merck, massiv und pulverig und bestimmten χ in Übereinstimmung mit den bei Landolt (1) genannten Autoren Honda, Soné, Ishiwara, Owen zu rund $10 \cdot 10^{-6}$.

Wenn auch in all diesen Arbeiten eine Inkonstanz der Suszeptibilität abhängig von der Feldstärke konstatiert wird (ca. 20 Proz.), so liegt der Mittelwert von χ doch deutlich in der paramagnetischen Größenordnung.

Ganz anders verhält sich nun der Befund von Weiss und Onnes (7) und Kuh (8). Sie messen eine 200 mal größere Suszeptibilität, nämlich etwa $2200 \cdot 10^{-6}$ maximal. Die Herstellung dieser ferromagnetischen Modifikation ist unter IV A genau beschrieben. Wesentlich scheint ein Umschmelzprozeß in Wasserstoff zu sein. Bei Aufnahme der Hystereseschleife finden sie, wie seinerzeit Seckelson, hohe Werte für Remanenz und Koerzitivkraft.

Über weitere Untersuchungen mit denselben Proben berichten St. Loria (9) (magnetooptisch) und nach $5^1/_2$jähriger Zwischenzeit Hadfield, Chénevau und Géneau (10). Nach ihnen scheint χ noch größer geworden zu sein ($2700 \cdot 10^{-6}$) und sinkt bei Ausglühen auf Werte wie $27 \cdot 10^{-6}$ und $130 \cdot 10^{-6}$.

Anschließend seien hier die Strukturuntersuchungen von Mangan erwähnt, die leider nie in direktem Zusammenhang mit magnetischen Messungen gemacht wurden, wohl aber zu Vergleichen anregen können. Westgren und Phragmen (11) vermuten in einem nur bei elektrolytischem Mangan auftretenden tetragonalen Gitter ein Manganhydrid. Ihre Meßwerte stimmen im wesentlichen überein mit denen von Olshausen (12) und Bradley (13).

Den Einfluß von Wasserstoffbeladung versuchte Oxley (14) auf Grund weiterer Experimente an anderen Elementen in der Weise zu deuten, daß das Atom magnetisch gewissermaßen um die Ordnungszahl 1 erhöht wird. Mangan wird ferromagnetisch (wie Eisen), Eisen erhält höhere Koerzitivkraft (wie Kobalt), Palladium wird diamagnetisch (wie Silber).

Auch Hadfield will allein den Wasserstoff für den Ferromagnetismus verantwortlich machen, während Weiss diese Frage offen läßt und Kuh sogar annimmt, der Ferromagnetismus seiner



Tabelle I.

Stoff	Permeabilität $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$	Suszeptibilität pro Volumeinheit $\varkappa$	Suszeptibilität pro Masseneinheit $\chi = \varkappa$: Dichte	Suszeptibilität pro Grammatom $\chi_A = \chi \cdot$ Atomgewicht
Platin	1,0003	$21 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$195 \cdot 10^{-6}$
Palladium	1,0008	$63 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$588 \cdot 10^{-6}$
Neodym (Max. d. selt. Erden)	1,0031	$251 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-6}$	$5230 \cdot 10^{-6}$
Sauerstoff	1,000002	$0,1 \cdot 10^{-6}$	$108 \cdot 10^{-6}$	$1728 \cdot 10^{-6}$
Mangan, paramagn.	1,0009	$73 \cdot 10^{-6}$	$10 \cdot 10^{-6}$	$549 \cdot 10^{-6}$
„ ferromagn. ($H \sim 1500$)	1,0900	$7300 \cdot 10^{-6}$	$1000 \cdot 10^{-6}$	$54900 \cdot 10^{-6}$
„ „ ($H \sim 350$)	1,2470	$19700 \cdot 10^{-6}$	$2700 \cdot 10^{-6}$	$148000 \cdot 10^{-6}$
Kobalt (Maximalwerte)	175	13,8	1,6	94,2
Nickel (Maximalwerte)	1120	89	10	587
Eisen (Maximalwerte)	14600	1155	147	8160

(Daten aus Landolt-Börnstein (1)).
Einen graphischen Vergleich der ferromagnetischen Kurven siehe bei Freese (2).

Proben resultiere aus ihrem extremen Reinheitsgrad, der normale Paramagnetismus dagegen, den man gewöhnlich findet, aus den normalen Verunreinigungen.

III. Fragestellung.

Wie man sieht, weisen diese Forschungen jedenfalls auf die Möglichkeit hin, daß der Ferromagnetismus im Mangan durch Wasserstoffbeladung hervorgerufen werden kann. Um einen weiteren Beitrag zur Kritik dieser Annahmen zu liefern, schlug Herr Professor Zenneck vor, eine starke Gasbeladung des Mangans durch kathodische Zerstäubung in Wasserstoff oder durch Elektrolyse zu versuchen und die dabei erhaltenen dünnen Schichten auf ihre magnetischen Eigenschaften zu prüfen.

Auf diesem Weg ergibt sich außerdem die Gelegenheit, einen etwaigen Einfluß der Schichtdicke zu untersuchen, der bei zerstäubten Nickelschichten bereits festgestellt wurde (15).

Daneben empfiehlt es sich natürlich, die schon von Kuh angegebene Herstellungsmethode für ferromagnetisches Mangan zu reproduzieren.

IV. Herstellung der zu untersuchenden Manganpräparate.

Auf dreierlei Weise wurden die Manganproben bereitet:

A. Mangangewinnung nach Kuh.

Ausgangsmaterial ist: $MnCl_2$ puriss. pro an. von Kahlbaum. In drei Stufen gelangt man über zwei Zwischenprodukte zum metallischen Mangan.

Erste Stufe: Das erwähnte $MnCl_2$ wird in einer bei 50° C gesättigten Lösung als Elektrolyt angesetzt. Anode: Platinblech. Diaphragma: Tonzelle, Kathode: Reinstes Quecksilber. Stromdichte an der Kathode: 0,054 A/cm². Gesamtdauer der Elektrolyse: $4^1/_2$ Stunden. Das entstandene Amalgam wurde mit destilliertem Wasser gewaschen und durch Auspressen zwischen Leder gründlich vom überschüssigen Quecksilber befreit. Bezeichnung: Mangan-Amalgam.

Zweite Stufe: Das Mangan-Amalgam wurde in zwei Porzellanschiffchen gepreßt, die in einem Porzellanrohr unter Durchleitung reinsten Wasserstoffs[1]) in einem Widerstandsofen ca. eine Stunde auf Rotglut erhitzt wurden.

Der Wasserstoffstrom wurde während der ganzen Erwärmung und Abkühlung unterhalten. Es entstand ein schwarzes poröses trocken schwammiges Mangan von geringer Dichte. Bezeichnung: Schwammiges Mangan.

Dritte Stufe: Wie weiter unten beschrieben, wurde das schwammige Mangan nach seinem magnetischen Verhalten sortiert und die unmagnetischen Bestandteile in ein Magnesiaschiffchen gefüllt, das mit der von Kuh als not-

1) Der Weg des Wasserstoffs war folgender:
1. Elektrolysegefäß mit 6,7 Lit. aq. dest., 3 kg KOH. Elektroden (dabei Spülelektrode nach Gaede (16)) aus Reinnickel-Blech.
2. Hahn.
3. Waschflasche mit 100 g aq. dest., 120 g KOH, 5 g Pyrogallol zwecks Absorption der Sauerstoffreste.
4. Waschflasche mit 150 g aq. dest., 5 g $KMnO_4$, 5 g KOH zwecks Absorption der Arsen- und Phosphorwasserstoffe.
5. Trockenturm mit etwa 300 g $CaCl_2$ pur. sicc.
6. P_2O_5-Gefäß.
7. Hahn.
8. Vorratsballon mit Quecksilbermanometer.
9. Hahn.
10. Tombakrohr.
11. Porzellanrohr mit Tiegeln im Ofen.
12. Glas-Druckschlauch- und Kupfer-Leitung zur Vakuum-Ölpumpe von Siemens-Halske.



wendig angegebenen Vorsichtsmaßregel[1]) abermals wie bei der zweiten Stufe in einem Porzellanrohr unter Wasserstoffstrom erhitzt wurde, diesmal aber bis zur Schmelztemperatur des Mangans (1250° C). Wieder blieb der Wasserstoffstrom bis zur völligen Abkühlung eingeschaltet. Als Produkt entstanden perlig zusammengeschmolzene Mangantropfen mit schwach bläulich oder grünschimmernder Oberfläche. Bezeichnung: Umgeschmolzenes Mangan.

B. Mangangewinnung durch Elektrolyse.

Nachdem direkte Elektrolysen auf Platindraht mit den von Seckelson angegebenen Daten ebenso unbefriedigende Resultate zeitigten, wie er selbst es beschreibt, wurde nach folgender neuerer Vorschrift verfahren (Dietz (17)).

Elektrolyt: 100 g aq. dest., 31 g $MnCl_2$, 27 g NH_4Cl. Anode: Platinblech 10,5 cm^2 · 0,2 mm. Kathode: Platin-, Kupfer-, Silber-, Wolfram-Drähte verschiedener Stärke. Stromdichte: 0,25 A/cm^2. Dauer: 1—2 Stunden. Temperatur: 30° C.

Außer Mangan scheidet sich, was für den vorliegenden Fall wesentlich ist, Wasserstoff an der Kathode ab, und es war zur Erzielung dicker, blasenfreier Schichten notwendig, die Kathoden während der Elektrolyse rotieren zu lassen und ständig zu polieren. Vollkommen blasenfreie Schichten gab es zwar nicht, doch war wenigstens das Drahtmaterial unter den für Zerstäubung weiter verwendeten elektrolytischen Niederschlägen völlig verdeckt. Unter denselben Bedingungen wurden auch Kupferbleche vom Format 18 · 18 · 0,05 mm beschlagen. Bezeichnung: Elektrolytmangan.

C. Mangangewinnung durch Zerstäubung.

Aus Veröffentlichungen (18) über Zerstäubung verschiedener Metalle geht hervor, daß das Mangan zu den schwerst zerstäubenden Metallen gehört. Im Einklang hiermit wurde auch bei mir dieser Teil der Arbeit zu dem weitaus langwierigsten. Dazu kommt eine spezielle Hartnäckigkeit des Mangans gegen alle Versuche mechanischer Bearbeitung, die zur Herstellung der Zerstäubungskathoden nicht zu umgehen war. Ausschlaggebend für die Anordnung der Zerstäubungsvorrichtung wurde in erster Linie die bei Vorversuchen deutlich erkennbare Tatsache, daß die Zerstäubung erst bei Stromdichten einsetzt, welche die Kathode in helle Rotglut bringen. Folgende Wege wurden eingeschlagen:

1) Vor und hinter dem Schiffchen je eine Rinne mit lose gehäuftem schwammigem Mangan zwecks Absorption von Sauerstoff.

1. Die nach B erhaltenen, mit ca. $^1/_2$ mm Manganschicht beschlagenen Drähte wurden als Zerstäubungskathode benutzt. Sie ließen sich relativ am leichtesten zum Zerstäuben bringen, mußten jedoch immer zu dem Verdacht Anlaß geben, daß von dem Drahtmaterial, an dem die elektrolytische Schicht haftete, Teile mit zerstäubten. Denn das einigermaßen dichte Elektrolytmangan war nur auf den sehr leicht zerstäubenden Materialien Kupfer, Platin, Silber gelungen, während auf dem schwer zerstäubenden Wolfram nur eine nicht sehr festsitzende Schicht mit großen Löchern zu erzielen war.

2. Reines Manganmetall, das entweder direkt von Kahlbaum bezogen oder aus Manganthermit aluminothermisch von mir selbst hergestellt war, wurde in Schamottetiegeln im Widerstandsofen geschmolzen und im flüssigen Zustand in Magnesiaröhrchen von 1,5 bzw. 3 mm l. W. eingesaugt. Die erstarrten Stäbchen ließen sich zwar auch in Rotglut zerstäuben, machten aber mit der vakuumdichten Befestigung viel mehr Schwierigkeiten als das Elektrolytmangan.

3. Versuche, das Kahlbaum-Mangan in kleinen Stückchen oder in Pulverform durch die Zerstäubungswärme selbst bis zum Zusammenschmelzen zu erhitzen, schlugen deshalb fehl, weil die kleinen Partikelchen bei Steigerung des Feldes aus ihrem Quarzbehälter hinausspritzten.

4. Größere unbearbeitete Stücke des Kahlbaum-Mangans ließen sich nicht auf die zur Zerstäubung anscheinend notwendige Temperatur bringen.

Die brauchbarste Anordnung, mit der die später ausgemessenen Niederschläge schließlich gelangen, zeigt Fig. 1, die dabei interessierenden Daten die folgende Tabelle II.

Tabelle II.

Bezeichnung	Oberfläche der Kathode mm^2	Strom mA	Dauer der Zerstäubung
Z 7	130	15	10 s.
Z 3	120	6	10—20 s.
Z 8	60	20—30	2 h mit Unterbrechung
Z 5	120	6—10	30 s.

Der Druck des nach obiger Beschreibung hergestellten Wasserstoffs wurde durchwegs so reguliert, daß die Dunkelraumgrenze sich in der Nähe der Deckgläschen befand. Die Hochspannungsquelle war ein Funkeninduktor in Serie mit einer Gundelach-Ventilröhre.

Geprüft wurde, ob das für die Versuche verwendete Mangan nicht etwa der ferromagnetischen Modifikation angehörte. Es ergab sich keine Spur einer Anziehung durch einen starken Stahlmagneten.

V. Magnetische Messungen.

A. Qualitative Untersuchungen.

Bei der Reproduktion des Kuhschen Versuches prüfte ich wie er die einzelnen Produkte (s. IV A) mit einem kräftigen Stahlmagneten

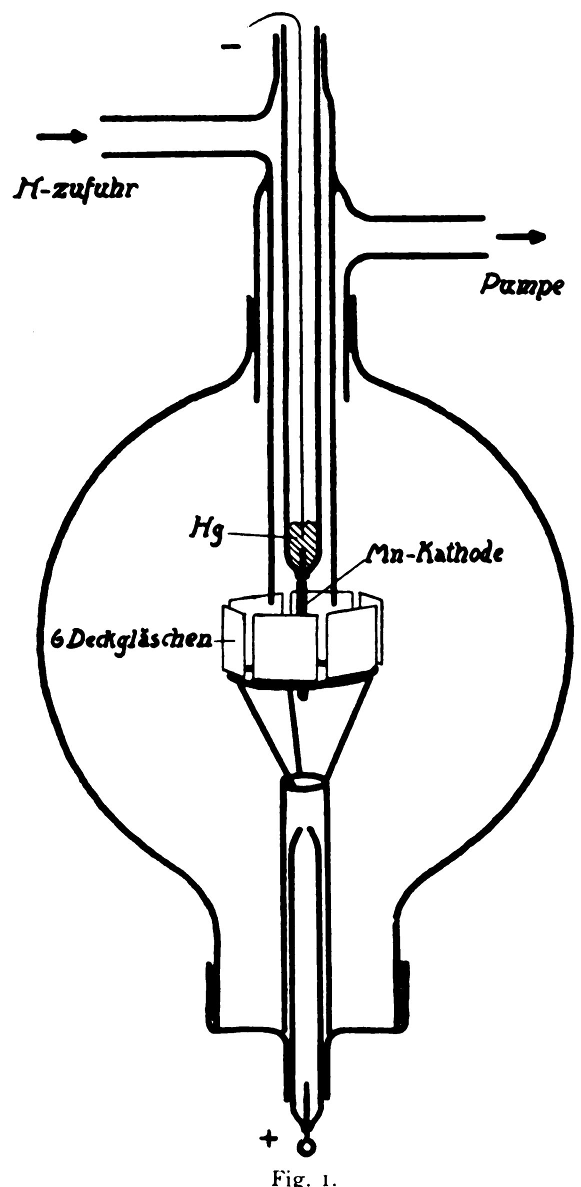


Fig. 1.

und kam nicht zur vollen Übereinstimmung mit seinen Befunden. Wohl zeigt sich in beiden Fällen, daß durch Behandlung mit Wasserstoff anscheinend das Mangan ferromagnetisch gemacht werden kann, aber in den Einzelheiten treten doch folgende Unterschiede auf.

Zunächst wird das erste Zwischenprodukt, das Mangan-Amalgam genau wie bei Kuh überhaupt nicht vom Stahlmagneten beeinflußt, ein Zeichen dafür, daß dieses Ausgangsmaterial für die Wasserstoffbehandlung keinerlei ferromagnetische Bestandteile enthält. Nach dem Glühen in Wasserstoff jedoch erhielt ich ein schwammiges Mangan, von dem etwa 10 Proz. (im Pulverzustand) am Magneten haften blieben, wogegen Kuh dasselbe Material als durchwegs unmagnetisch bezeichnet. Andrerseits waren nach dem Schmelzprozeß in Wasserstoff unter den Stücken des umgeschmolzenen Mangans nur zwei ganz kleine, die vom Magneten angezogen wurden, während das Kuh beim größeren Teil dieses Endproduktes gefunden hat.

Die Tatsache, daß weder Kuh noch ich reproduzierbare Bedingungen zur Gewinnung der ferromagnetischen Modifikation auffinden konnte, veranlaßte mich, diese Versuche nicht weiter zu verfolgen.

B. Quantitative Untersuchung der durch Zerstäubung oder Elektrolyse hergestellten Schichten.

1. Methode.

Das Prinzip der Methode, die sich eng an diejenige von Curie-Weiss (19,6) anschließt, war folgendes:

Die Manganschicht wurde in ein Magnetfeld gebracht und die Kraft, die auf dieselbe ausgeübt wurde, gemessen. Dann brachte man an dieselbe Stelle des Magnetfeldes ein Platinblech von möglichst genau denselben Dimensionen, wie sie die Manganschicht hatte. Ist dann P_0 die Kraft, die das Platinblech von der Masse m_0 und der Suszeptibilität χ_0 in einer bestimmten Richtung erfährt, und bedeutet P, m, χ das Entsprechende

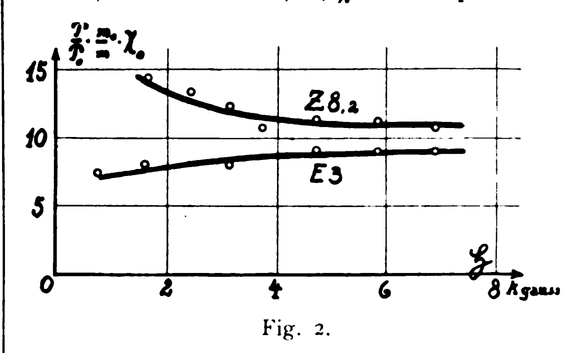


Fig. 2.

für die Manganschicht, und $\mathfrak{H}$ die mittlere Feldstärke am Ort der Probe, so ist:

$$\chi + \frac{1}{2}\mathfrak{H} \cdot \frac{d\chi}{d\mathfrak{H}} = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \chi_0 . \qquad (1)$$

Ändert sich die Suszeptibilität nicht erheblich bei Variation der Feldstärke, so kann man einfach setzen:

$$\chi = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \chi_0 . \qquad (2)$$

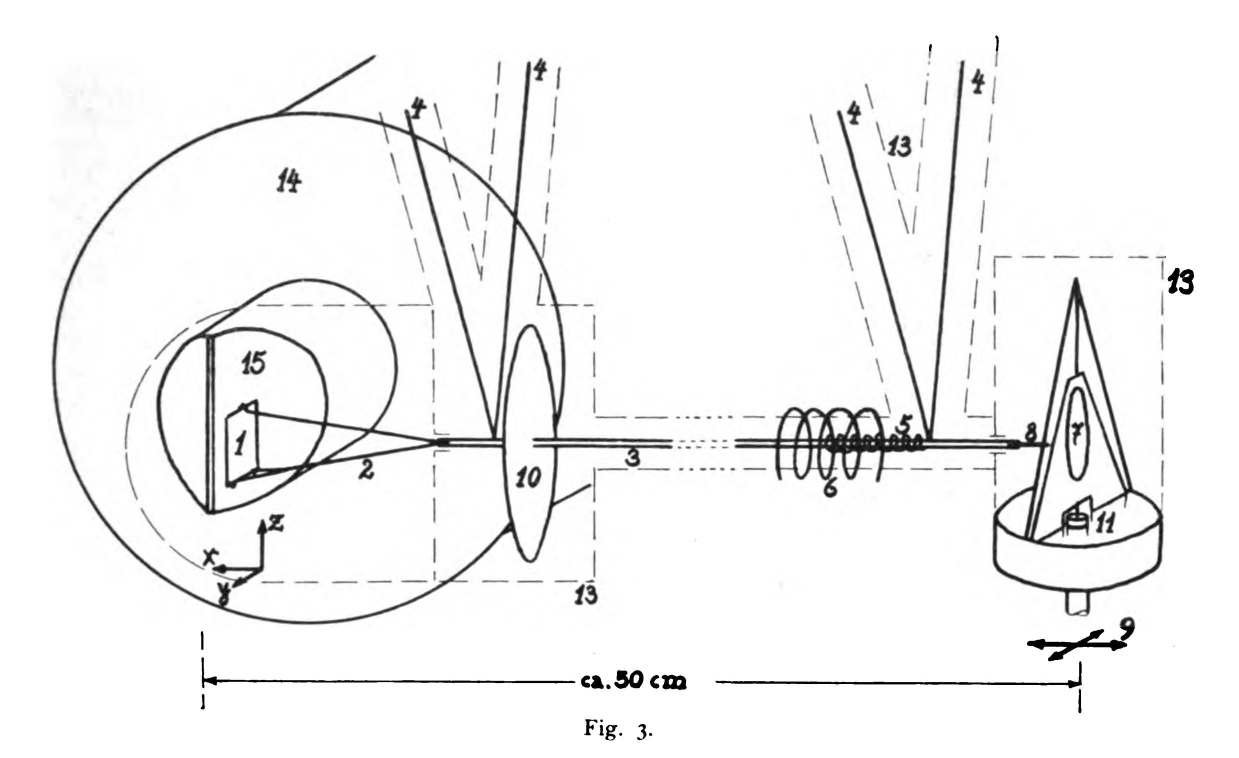


Fig. 3.

Daß diese Vereinfachung tatsächlich gestattet ist, zeigt Fig. 2, wo für zwei typische Proben der Verlauf des Ausdrucks (1) als Funktion der Feldstärke $\mathfrak{H}$ wiedergegeben ist. Die stärker von der Horizontalen abweichenden Werte liegen nur bei schwachen Feldstärken, bei denen die Genauigkeit infolge der sehr klein werdenden Kräfte stark nachläßt. Es wurde deshalb auch der Mittelwert für $P/P_0 \cdot m_0/m \cdot \chi_0$ nur aus den Messungen bei stärkeren Feldern gebildet.

2. Beschreibung der Apparatur (Fig. 3).

Die Probe 1, d. h. der Mangan-Niederschlag auf 18·18 mm großem Kupferblech oder Deckglas wurde mittels der Gabel 2 (Silberdraht) durch ein Glasrohr 3 gehalten, das an zwei Paar V-förmig gespannten Kupferfäden 4 ($d = 0{,}1$ mm) horizontal in seiner Achsenrichtung beweglich hing. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit war die Fadenlänge zu 1 m gewählt. Durch die Fäden erfolgte die Stromzuleitung zu einer auf dem Glasstab befestigten Spule 5, die zusammen mit der koaxialen außen festsitzenden Spule 6 die Kompensation der auf die Probe wirkenden Kraft besorgt. Zur Einstellung in die Nullage bei dieser Kompensation diente der Spiegel 7, auf dessen mit einem Deckglas bedeckte Rückseite eine am Ende des Rohres 3 angebrachte Glasspitze 8 tastete. Die vertikale Spiegelachse war verschiebbar sowohl in Richtung der Rohrachse wie in der dazu senkrechten Horizontalrichtung (s. Pfeile 9). Damit konnte die Drehempfindlichkeit des Spiegels reguliert werden, der mit Fernrohr und Skala die Rückverschiebung der Probe auf einen konstanten Ausgangspunkt zu kontrollieren gestattete. Zwecks ruhiger Einstellung erhielt das Rohr 3 eine Glimmerscheibe 10 für Luftdämpfung, der Spiegel eine Glimmerscheibe 11 für Dämpfung in destilliertem Wasser mit dünner Ölschicht. Das ganze bewegliche System war zum Schutz gegen Luftzug, wie die gestrichelte Linie 13 angibt, in ein Gehäuse aus weiten Glasrohren, Messingbüchsen und sog. Gelatinepapier eingeschlossen.

Das Feld lieferte ein Ruhmkorff-Magnet 14 (nur die eine Hälfte angedeutet), der schneidenförmige Polschuhe 15 von der Schneidenlänge 4 cm besaß. Er stand auf einem in der x-Richtung beweglichen Wagen und konnte mit Schraube und Noniusteilung in die Lage gebracht werden, die für die Messung am günstigsten war (s. vorbereitende Messungen).

Die unerwünschten Nebenwirkungen des Magnetfeldes auf die para- oder diamagnetischen und auf die stromführenden Teile des beweglichen Systems wurden dadurch ausgeschaltet, daß als P in Gleichung (1) die Differenz aus einer Messung mit Haltevorrichtung + Meßobjekt und einer Messung mit Haltevorrichtung allein, und daß nie der einzelne Kompensationsstrom durch die bewegliche Spule 5, sondern immer nur der Mittelwert aus mehreren unter Kommutieren erhaltenen Wertpaaren benutzt wurde. Die

magnetischen Störwirkungen waren außerdem schon durch teilweise Umwicklung des beweglichen Systems mit Wismutdraht und durch Verwendung sehr schwacher Ströme in der von den Polen etwa 40 cm weit entfernten beweglichen Spule 5 stark herabgedrückt.

3. Vorbereitende Messungen.

Außerhalb der Polachse in der negativen x-Richtung (Fig. 3) hat die Kraft P ein Maximum. Sein Ort wurde mit Hilfe der Platinnormalen aufgesucht. Mit Platinnormale soll ein Blech aus reinstem Platin (Heraeus) von denselben Formen und Dimensionen ($18 \cdot 18 \cdot 0{,}05$ mm) wie die

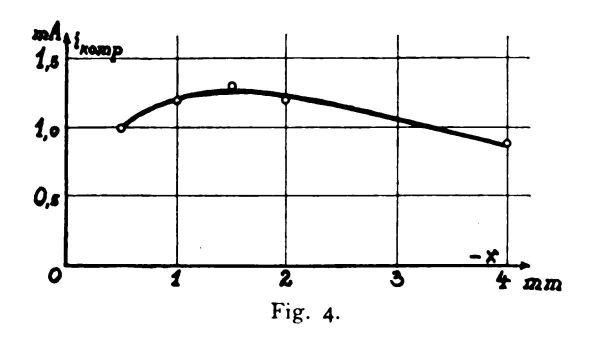


Fig. 4.

später zu untersuchenden kathodisch bestäubten Deckgläschen oder elektrolytisch beschlagenen Kupferbleche bezeichnet werden. Es zeigte sich für alle Magnetisierungsströme derselbe sehr flache Verlauf des Maximums (Fig. 4), so daß die Einstellung im Magnetfeld auf $^1/_{10}$ mm in der x-Richtung vollauf genügte.

Da an diesen Ort des Maximums später die Proben gebracht werden sollten, wurde auch die Feldstärke hier gemessen. Die Meßspule wurde aus emailliertem Kupferdraht ($d = 0{,}2$ mm) auf ein Hartgummiplättchen von $18 \cdot 18 \cdot 0{,}5$ mm Größe gewickelt und in derselben Lage relativ zum Feld verwendet wie sie die Proben später einnahmen. An der Spule lagen ein Rheostat zur Meßbereichumschaltung und ein Spiegelgalvanometer, beide von Edelmann. Die Eichung der Anordnung erfolgte unmittelbar vor und nach den Feldmessungen in der Weise, daß die Meßspule in eine eisenlose lange Eichspule gebracht wurde, deren Strom man ruckartig kommutieren konnte. Sowohl die Kommutierungskurve wie die sehr schmale Hystereseschleife des Magneten wurde aufgenommen.

Schließlich erfolgte am Anfang und am Schluß jeder endgültigen Suszeptibilitätsmessung die Eichung der Apparatur mit der Platinnormalen, wobei für das Platin als Mittelwert der Angaben bei Landolt (1) eine Suszeptibilität von $\chi_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ angenommen wurde.

4. Messung der Suszeptibilität der Manganschichten.

Bei den kathodisch zerstäubten Schichten maß ich zunächst durch Wägung die Massen m und die Kräfte P als Funktion der Feldstärke für Deckglas + Mangan, dann nach Abätzung der Manganschicht mit Salpetersäure m und P für das Deckglas allein. Umgekehrt bei den elektrolytischen Niederschlägen zuerst das Kupferblech allein, dann nach der Elektrolyse das Blech mit dem Manganniederschlag. Die Differenzen geben die m und P für Mangan allein und können in Gleichung (1) eingesetzt werden.

Zur Berechnung der Schichtdicken wurde eine Dichte von 7,3 angenommen.

Tabelle III.

Art	Bezeichnung	Masse mg	Schichtdicke 10^{-6} cm	Suszeptibilität pro Masseneinheit χ
kathodisch zerstäubt	Z 7	0,12	5	$70 \cdot 10^{-6}$
	Z 3¹)	0,39	53	$40 \cdot 10^{-6}$
	Z 8,1	3,25	135	$12 \cdot 10^{-6}$
	Z 5¹)	0,94	150	$20 \cdot 10^{-6}$
	Z 8,2	4,32	180	$12 \cdot 10^{-6}$
elektrolytisch niedergeschlagen	E 1	1,63	45	$20 \cdot 10^{-6}$
	E 2	19,88	1400	$13 \cdot 10^{-6}$
	E 3	64,19	3200	$9 \cdot 10^{-6}$

1) Z 3 und Z 5 waren Ausschnitte von der Größe 6×18 mm.

5. Fehlerdiskussion.

Die hier nicht wiedergegebene genaue Durchrechnung aller Fehlermöglichkeiten liefert für die ungünstigste Annahme, daß sämtliche Fehler mit demselben Vorzeichen in das Endergebnis eingehen, prozentuale Fehler für den Absolutwert von χ von 36—76 Proz., je nach Größe der Probe. Der Hauptanteil, die Unsicherheit der Suszeptibilität des Platins beträgt nach den Angaben bei Landolt-Börnstein (1) 33 Proz. und fällt ganz heraus, wenn man die Proben nur unter sich vergleicht. Bei der Entscheidung über Para- oder Ferromagnetismus ist selbst der maximale Gesamtfehler von 76 Proz. belanglos, da die ferromagnetische Modifikation eine Steigerung von χ auf den 200fachen Wert zeigen müßte.

Über die Reinheit der untersuchten Materialien kann nur gesagt werden, daß, wie schon erwähnt, als Ausgangsmaterial das reinste von Kahlbaum erhältliche $MnCl_2$ benutzt und daß bei der Verarbeitung jede Verunreinigungsmöglichkeit ängstlich ausgeschlossen wurde.

VI. Zusammenfassung.

Weiss und Kuh hatten Mangan nach Umschmelzen in Wasserstoff mindestens teilweise ferromagnetisch gefunden; meine Versuche bestätigten diesen Befund. Weder diesen Autoren noch mir gelang die Schaffung eindeutiger Voraussetzungen zur Entstehung dieser Modifikation, und von andrer Seite scheinen keine Versuche in dieser Richtung vorzuliegen.

Da sehr wahrscheinlich beim Zustandekommen des Ferromagnetismus des Mangans eine Wasserstoffbeladung mitwirkt, so wurde versucht, diese auf zwei andern Wegen zu erhalten: Erstens durch Kathodenzerstäubung in Wasserstoff, zweitens durch Elektrolyse unter gleichzeitiger Wasserstoffabscheidung.

Die Erwartung, an den zerstäubten oder elektrolytischen Schichten ähnliche hohe Suszeptibilitäten zu finden, wie sie Weiss und Kuh berichten, ist nicht eingetroffen, vielmehr bewegen sich die gemessenen χ-Werte in der normalen paramagnetischen Größenordnung von 10^{-5}.

Für Anregung und fördernde Unterstützung bei der Arbeit bin ich Herrn Geheimrat Zenneck zu besonderem Dank verpflichtet.

Im experimentellen Teil wurden Apparate benutzt, die teilweise von dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik und von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft vor längerer Zeit zur Verfügung gestellt wurden. Beiden Gesellschaften sei auch an dieser Stelle dafür gedankt.

VII. Literaturverzeichnis.

1) Landolt-Börnstein, Physik.-chemische Tab., 5. Aufl., 1923.
2) H. Freese, Jahrb. d. drahtl. Tel., **27**, 96, 1926.
3) E. Seckelson, Wied. Ann. **67**, 37, 1899.
4) W. Gebhardt, Diss. Marburg 1909.
5) K. Ihde, Diss. Marburg 1912.
6) W. Lepke, Diss. Marburg 1913.
7) P. Weiß u. Onnes, Comptes Rendus **150**a, 687, 1910; Trans. Far. Soc. **8**, 64, 1912.
8) E. Kuh, Diss. Zürich 1911.
9) St. Loria, Ann. d. Phys. **38**, 920, 1912.
10) R. Hadfield, Géneau u. Chénevau, Proc. Roy. Soc. (A) **94**, 65, 1917.
11) A. Westgren u. G. Phragman, Zeitschr. f. Phys. **33**, 777, 1925.
12) Olshausen, Zeitschr. f. Krist. **61**, 463, 1925.
13) A. J. Bradley, Phil. Mag. (6) **50**, 1018, 1925.
14) A. E. Oxley, Proc. Roy. Soc. (A) **101**, 264, 1922.
15) Hall, Phil. Mag. (5) **12**, 171, 1881; H. Behrens, Diss. Münster 1908; C. A. Skinner u. A. Q. Tool, Phil. Mag. (6) **16**, 833, 1908; A. J. Sorensen, Phys. Rev. (2) **24**, 658, 1924; L. R. Ingersoll, Phys. Rev. (2) **25**, 114, 1925; S. S. de Vinney, Phys. Rev. (2) **26**, 86, 1925; C. W. Oseen, Zeitschr. f. Phys. **32**, 940, 1925; R. L. Edwards, Phys. Rev. (2) **27**, 252, 1926; **29**, 321, 1927; J. D. Hanawalt u. L. R. Ingersoll, Nature **119**, 234, 1927.
16) Gäde, Ann. d. Phys. **41**, 302, 1913; J. Niese, Physik. Zeitschr. **24**, 12, 1923.
17) K. Dietz, Diss. München (T. H.) 1922.
18) H. Behrens, Diss. Münster 1908; A. Güntherschulze, Zeitschr. f. Phys. **36**, 563, 1926; Zeitschr. f. Techn. Phys. **8**, 169, 1927; E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. **81**, 999, 1926; E. O. Hulburt, Phys. Rev. (2) **27**, 805, 1926.
19) P. Curie, Journ. de Phys. (3) **4**, 197, 263, 1895; Ann. de Chim. et de Phys. (7) **5**, 289, 1895; Oeuvres, 232,; P. Curie u. Chéneveau, Journ. de Phys. (4) **2**, 796, 1903; G. Meslin, Ann. d. Chim. et de Phys. (8) **7**, 145, 1906; F. Foex, Journ. de Phys. et le R. (6) **6**, 123, 1925; R. Forrer, Journ. de Phys. et le R. (6) **7**, 180, 1926.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 30. Januar 1928.)

Die Radioaktivität der Isotope des Kaliums.

Von Martin Biltz und Hans Ziegert.

Das Hoffmannsche Vakuumelektrometer zeichnet sich durch außerordentliche Empfindlichkeit und hohes Isolierungsvermögen aus. Dank dieser Eigenschaften konnte es zur Messung ganz geringer Ionisationen, wie etwa der der Hessschen Strahlung im Meeresniveau, mit Erfolg herangezogen werden. In dem folgenden berichten wir über die Verwendung des Hoffmannschen Vakuumelektrometers zum Vergleich der Aktivitäten zweier Kaliumsalzsorten. Es handelt sich um die Bestimmung der Aktivität gewöhnlichen reinsten Kaliumchlorids und derjenigen eines Kaliumchloridpräparates, das G. v. Hevesy und M. Lögstrup[1]) durch ideale Destillation von flüssigem Kalium an Kalium vom Atomgewicht 41, dem schweren Isotop, angereichert hatten. — Nach den Untersuchungen Astons ist nämlich das Kalium ein Mischelement, das zu rund 95 Proz. aus K_{39} und zu 5 Proz. aus K_{41} besteht. — Daß die Verschiebung der Zusammensetzung des Mischelements gelungen war, ergab eine Atomgewichtsbestimmung der erhaltenen Probe, die Hönigschmid und Goubeau ausgeführt haben und die als Atomgewicht statt 39,104 für das gewöhnliche Kalium, den Wert 39,109 ergab. Das angereicherte Kalium ist demnach um $0{,}005 \pm 0{,}001$ Proz. schwerer als das gewöhnliche und enthält $4{,}8 \pm 1$ Proz. mehr vom schweren Isotop, vom K_{41}, als das gewöhnliche.

Durch den Vergleich der Aktivität der beiden Kaliumchloridproben konnte man hoffen zu entscheiden, welches Isotop die β-Strahlen emittiert. Wenn nur K_{41} β-Strahlen aussendet,

1) G. v. Hevesy, Nature **120**, 838, 1927; G. v. Hevesy u. M. Lögstrup, erscheint gleichzeitig in der Zeitschr. f. anorg. Chem.



müßte die Aktivität des Präparates von G. v. Hevesy 4,8 Proz. größer sein als die des gewöhnlichen Kaliumchlorids. Wenn nur K_{39} β-Strahlen aussendet, müßte die Aktivität 0,26 Proz. kleiner sein als die des gewöhnlichen Kaliumchlorids.

Infolge der geringen Aktivität des Kaliums stieß es auf Schwierigkeiten, die Aktivitäten in einem gut isolierenden β-Elektroskop mit genügender Genauigkeit zu vergleichen. Es sollte deshalb das Hoffmannsche Vakuumelektrometer herangezogen werden, das sich dann zur Ausführung unserer Messungen als außerordentlich geeignet erwies. Dank dem großen Entgegenkommen des Herrn Prof. Hoffmann konnten die Versuche in seinem Laboratorium in Königsberg i. Pr. ausgeführt werden.

I. Die Meßanordnung.

Eine Beschreibung des Instrumentes hat G. Hoffmann[1]) gegeben. Erwähnt sei, daß in dem evakuierten Elektrometerraum ein an einem 3 μ dicken Wollastonfaden aufgehängter, in einer zweigeteilten Dose drehbarer Flügel sich befindet. Oberhalb desselben ist am Aufhängefaden ein 4 qmm großes Spiegelchen angebracht, das von einer kleinen Spaltlampe einfallendes Licht auf eine mit Bromsilberpapier bespannte Trommel reflektiert. Die Trommel (Radius 8 cm) wird durch ein Uhrwerk mit gleichmäßiger Geschwindigkeit (in etwa 2 Stunden einmal) gedreht. Der Elektrometerfaden steht in kurzer Verbindung mit der in den Ionisationsraum ragenden, durch Bernstein isolierten Auffangelektrode.

Der Ionisationsraum befindet sich auf einer über dem Elektrometer angebrachten Messingplatte[2]). Er wird von einem kugelförmigen Drahtgeflecht von 8 cm Durchmesser gebildet. Dieses ist von einer auf die Platte aufschraubbaren, luftdicht schließenden Kupferkappe umgeben. Der durch sie begrenzte Raum kann evakuiert und dann mit trockener Kohlensäure gefüllt werden. Diese Art der Füllung bewirkt eine größere Instrumentempfindlichkeit als Luftfüllung, da die Ionisation in einem Gase bei gleicher Radioaktivität dessen Dichte proportional ist. Das Kaliumpräparat, dessen Aktivität zu bestimmen ist, wird oberhalb der Drahtkugel, doch innerhalb der Kupferkappe auf einen isolierten Ständer gebracht. Das Gehäuse des Ionisationsraumes ist geerdet, während die Drahtkugel von einer Akkumulatorenbatterie aufgeladen wird.

1) G. Hoffmann, Ann. d. Phys. **42**, 1196, 1913; Ann. d. Phys. **52**, 665, 1917.

2) Zwischen Elektrometer und Ionisationsraum liegt noch ein weiterer evakuierter, Eichzwecken dienender Raum, der jedoch für die vorliegende Untersuchung nicht von besonderer Bedeutung ist.

Macht man das zunächst geerdete Elektrometer frei, so ruft äußere Strahlung, α-Strahlung der Drahtkugel und des Ständers[1]), sowie schließlich die aus dem zu messenden Präparate stammende β-Strahlung einen von der Drahtkugel zur Auffangelektrode fließenden Ionisationsstrom hervor, der zu einer langsamen Aufladung des Elektrometers, also einer Drehung des Spiegels führt.

Die äußere Strahlung ist Umgebungs- und Höhenstrahlung[2]) und wird durch einen 12 cm starken Kupferpanzer auf einen geringen, von der Höhenstrahlung herrührenden, annähernd konstanten Rest reduziert. Dieser kann durch Messungen ohne das β-strahlende Präparat bestimmt werden. Die α-Strahlung ist exakt kontrollierbar, da bei der hohen Empfindlichkeit des Elektrometers jedes einzelne α-Teilchen als ruckartige Elektrometerbewegung von ca. 2 cm auf dem photographischen Papier markiert wird. Man mißt somit bei Hinzubringen des Kaliumpräparates (bis auf die Höhenstrahlung, die wahrscheinlich eine Ultra-γ-Strahlung ist) reine Präparatstrahlung.

Lädt man die Drahtkugel auf ein konstantes Potential, so macht die dauernd wachsende Aufladung des Elektrometers eine sich über längere Zeit erstreckende photographische Registrierung unmöglich, weil wegen der großen Empfindlichkeit des Instruments selbst bei schwacher Ionisation der Lichtzeiger in wenigen Minuten über das Papier läuft. Außerdem soll die Aufladung des Elektrometers ganz niedrig gehalten werden, um seine Isolation schwankungsfrei zu behalten. Aus diesen Gründen wird die den Ionisationsraum umgrenzende Drahtkugel nicht auf ein konstantes, sondern auf ein gleichförmig abfallendes Potential geladen. Hierdurch wird ein Strom influenziert, der bei richtiger Wahl der Geschwindigkeitsgröße der Potentialänderung den Ionisationsstrom gerade kompensiert. Das gleichförmig abfallende Potential wird dadurch hervorgerufen, daß man gegen die an der Drahtkugel liegende Akkumulatorenspannung eine allmäh-

1) Die α-Strahlung rührt von winzigen Spuren radioaktiver Beimengungen zum Metall des Drahtes her. (Näheres über die Ionisation bei verschiedenen Metallen findet man bei H. Ziegert, Zeitschr. f. Phys. **46**, 705, 1928). Durch geeignete Wahl der Form des Ionisationsraumes, des Materials und der Reinigungsmethoden ist eine starke Herabsetzung der α-Strahlung erreichbar. In günstigen Fällen erhält man bei Drahtkugeln erwähnter Dimensionen nur 3—4 α-Teilchen pro Stunde. Bei den vorliegenden Messungen, wo die Drahtkugel mit warmer verdünnter Schwefelsäure abgeätzt, gereinigt und mit Putzpomade auf Hochglanz poliert worden war, traten etwa 11 α-Teilchen pro Stunde auf.

2) Näheres bei G. Hoffmann, Ann. d. Phys. **82**, 430, 1927.

lich steigende andere Spannung schaltet. Diese Spannung wird von einer sich gleichförmig drehenden Walze abgegriffen, die von einer zweiten Akkumulatorenbatterie mit Strom versorgt wird[1]).

Die Geschwindigkeit des Potentialabfalles der Drahtkugel — veränderlich mit der Größe des die Walze durchfließenden Stromes — bemißt man am besten so, daß der von äußerer Strahlung sowie β-Strahlung des Präparates hervorgerufene Ionisationsstrom gerade kompensiert wird. Das Elektrometer bleibt dann bis auf die durch α-Teilchen hervorgerufene Ladung völlig ohne Ladung. Der Lichtzeiger zeichnet in diesem Falle zum Trommelrande parallele Kurven, die gelegentlich durch ruckartige, von den α-Teilchen herrührende Ausschläge unterbrochen werden. Ist ein solches Laufen des Lichtzeigers erreicht, so ist die Stärke des durch die Walze fließenden Stromes ein Maß für die Stärke der äußeren (durchdringenden) und der Präparatstrahlung. Ist durch einen Vorversuch die Stärke der Außenstrahlung festgestellt, so erhält man durch Abzug dieses Wertes von der im Hauptversuch gemessenen Aktivität die β-Aktivität des zu messenden Kaliumpräparates.

Eine ganz genaue Kompensation des Ionisationsstromes ist praktisch nicht möglich: Die vom Lichtzeiger gezeichneten Kurven sind meist etwas gegen den Rand der Trommel geneigt. Es ist also an dem Zahlenwert des durch die Walze fließenden Stromes eine Korrektur anzubringen, die aus der Neigung der Kurven gegen den Rand errechnet werden kann. Ferner ist noch die übliche Gaskorrektur für Barometerstand und Temperatur zu berücksichtigen.

Es sind im wesentlichen drei Punkte, die das Hoffmannsche Instrument speziell für die hier vorzunehmenden Messungen dem gewöhnlichen Elektroskop überlegen machen.

1. Das Elektrometer wird nur auf wenige Millivolt aufgeladen. Infolgedessen macht die Isolierung des Elektrometersystems gegen die Umgebung (durch Bernstein) keinerlei Schwierigkeit und die Isolation ist völlig konstant. Die Isolation des auf einige hundert Volt aufgeladenen Elektroskopblättchens ist weit weniger konstant.

2. Die durch die natürliche γ-Ionisation der Luft hervorgerufene allmähliche Aufladung des Elektrometers entsprechend dem durch die gleiche Strahlung hervorgerufenen natürlichen Abfall des Elektroskops wird durch Panzerabschirmung des Elektrometers und des Ionisationsraumes gänzlich beseitigt. Ein geringer Elektrometergang ist durch die durchdringende Höhenstrahlung bedingt.

[1]) Näheres hierüber bei G. Hoffmann, Ann. d. Phys. **80**, 779, 1926 oder bei H. Ziegert, Zeitschr. f. Phys. **46**, 675, 1928.

3. Die durch die α-Strahlung aus dem Material der Drähte des Ionisationsraumes hervorgerufene Aufladung des Elektrometers entsprechend dem durch die gleiche Strahlung aus den Wänden des Elektroskops hervorgerufenen Abfall des Elektroskopblättchens wird nicht wie beim Elektroskop in die durch äußere Strahlung hervorgerufene Ionisation miteinbezogen, sondern besonders gemessen. Die durch einen jeden α-Strahl hervorgerufene Ionisation, die jedesmal ruckartig eine geringe Aufladung des Elektrometersystems verursacht, wird ja auf der Registrierkurve, einem plötzlichen Ausschlag des Lichtzeigers entsprechend, als ca. 2 cm langer Strich aufgezeichnet. Die Summe dieser Ausschläge ist ein Maß für die während der Registrierung durch α-Ionisation erfolgte Aufladung des Elektrometers, und diese Aufladung kann als Korrektur von der durch die Radioaktivität des Präparates hervorgerufenen exakt in Abzug gebracht werden. Sie wird also während jeder Messung registriert und nicht wie beim Elektroskop vor oder nach der Messung zusammen mit der durch γ-Ionisation hervorgerufenen Auf- bzw. Entladung bestimmt. Dieser Umstand erhöht die Genauigkeit der Messungen besonders deshalb, weil die α-Ionisation wesentlich stärker schwankt als die γ-Ionisation.

II. Die Messungen.

Die Aktivitäten sind im folgenden angegeben in Milliampere Kompensationsstrom. Es ist dies der Strom, der durch die unter I beschriebene Walze fließen muß, um Kompensation des Ionisationsstromes zu erreichen. Er ist ein Maß für die Aktivität. Eine Umrechnung dieses Stromes in Ionenmaß ist möglich, aber für unsere Zwecke unnötig. Es wurde zunächst die äußere Aktivität gemessen, die von der Aktivität der Hauptmessungen abzuziehen ist. Sodann geschah die Inangriffnahme der Hauptmessungen. Hierfür wurden je 3 g der beiden sorgfältig getrockneten Kaliumchloridpräparate angewandt. Sie wurden in Schälchen mit Papierboden von 4 cm Durchmesser in 1,6 mm hoher Schicht gebracht. Der Inhalt der Schälchen wurde mit einem Stempel zusammengepreßt, um eine gleichmäßige Schichtdicke und eine glatte Oberfläche zu erzielen. Die Schalen fanden dicht oberhalb des Ionisationsraumes auf dem bereits erwähnten isolierten Ständer Aufstellung. Nach dem Aufsetzen und Verschrauben der Kupferkappe und dem Herumbauen des Kupferpanzers wurde der Ionisationsraum mehrmals abwechselnd durch eine rotierende Quecksilberpumpe evakuiert bzw. mit trockener Kohlensäure unter Normaldruck gefüllt. Die letzte Kohlensäurefüllung blieb dann einige Stunden im Gefäß, ohne daß noch

registriert wurde. Man vermied hierdurch, daß radioaktive Beimengungen im Volumen des Ionisationsraumes störenden Gang des Elektrometers verursachten. Die nach einiger Zeit vorgenommenen Registrierungen dauerten im allgemeinen 4—5 Stunden. Es wurde, wie bereits erwähnt, der Kompensationsstrom so eingestellt, daß die Aufladung des Elektrometers, abgesehen von der durch α-Stöße verursachten, möglichst gering war. Die auf dem photographischen Papier aufgezeichneten und ausgewerteten Registrierkurven ergaben die am Kompensationsstrom anzubringende Korrektur wegen nicht völliger Gleichheit von Aufladung und Kompensation. Von dem so erhaltenen, noch auf Temperatur und Druck korrigierten Werte wurde der durch den Vorversuch bestimmte, zur Kompensation der äußeren, von der Höhenstrahlung herrührenden Ionisation notwendige Strom abgezogen; er betrug ungefähr ein Fünftel des Kaliumkompensationsstromes.

III. Die Messungsergebnisse.

1. Gewöhnliches Kaliumchlorid.

Es wurden fünf Meßreihen vorgenommen, die folgende Einzelwerte lieferten.

Registrierdauer in Min.	Kompensationsstrom in Milliampere
259	245,6
192	245,0
258	245,0
223	245,7
449	241,4

Mittelwert (unter Berücksichtigung der Registrierdauer) 244,0 Milliampere mit einem mittleren Fehler von $\pm$ 0,84 Milliampere.

2. An K_{41} angereichertes Kaliumchlorid.

Es wurden sechs Meßreihen vorgenommen, die folgende Einzelwerte lieferten.

Registrierdauer in Min.	Kompensationsstrom in Milliampere
207	252,6
240	251,1
260	253,5
280	251,8
230	249,9
296	252,3

Mittelwert (unter Berücksichtigung der Registrierdauer) 252,0 Milliampere mit einem mittleren Fehler von $\pm$ 0,52 Milliampere.

Es ergibt sich also für das an K_{41} angereicherte Präparat eine um 4,2 Proz. stärkere Aktivität. Der Maximalwert der Aktivitätsanreicherung (berechnet mit 244,0—0,84 Milliampere für gewöhnliches KCl und 252,0 + 0,52 Milliampere für angereichertes KCl) beträgt 5,0 Proz., der Minimalwert der Anreicherung der Aktivität (berechnet mit 244,0 + 0,84 Milliampere für gewöhnliches KCl und 252,0—0,52 Milliampere für angereichertes KCl) beträgt 3,5 Proz. Die Aktivitätsanreicherung von 4,2 $\pm$ 0,8 Proz. fällt also innerhalb der Fehlergrenzen mit der durch die Atomgewichtsbestimmung gefundenen Anreicherung an K_{41} zusammen. Es ist daher wahrscheinlich, daß lediglich das Kalium vom Atomgewicht 41 radioaktiv ist.

Zusammenfassung.

Es wurde mit dem Hoffmannschen Vakuumelektrometer die β-Aktivität des von v. Hevesy und Lögstrup dargestellten Kaliumchloridpräparates um 4,2 $\pm$ 0,8 Proz. größer gefunden als die des gewöhnlichen Kaliumchlorids. Da auf Grund der von Hönigschmid und Goubeau ausgeführten Atomgewichtsbestimmung das erstgenannte Präparat einen um 4,8 Proz. höheren Gehalt an K_{41} aufweist, als das gewöhnliche, kann geschlossen werden, daß der radioaktive Bestandteil des Kaliums das Isotop vom Atomgewicht 41 ist.

Herrn Prof. v. Hevesy, der uns die Ausführung der vorliegenden Untersuchung vorschlug, sind wir zu vielem Danke verpflichtet. Wir danken ferner Herrn Prof. Hoffmann, der uns bei den Messungen mit seinem Instrument in liebenswürdiger Weise mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft danken wir für die Gewährung eines Reisestipendiums an den einen von uns.

Freiburg i. Br., Institut für physikalische Chemie der Universität,

Königsberg i. Pr., I. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 27. Januar 1928.)

Die Elektronentheorie der Oberflächenenergie an der Grenze zweier amorphen Medien.

Von B. M. Eidelson.

Wie J. Frenkel gezeigt hat[1]), kommen wir, falls die Elektronentheorie als Ausgangspunkt der Materienstruktur genommen wird, mit Notwendigkeit zum Schlusse, daß alle Körper

1) Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges., Phys Teil, XLIX, 100, 1917.



auf der ganzen Oberfläche[1]) an ihrer äußeren Seite eine Schicht von negativer Elektrierung haben. Diese negativ geladene elektrische Schicht hat ihre Entstehung den Elektronen zu verdanken, welche jenen Atomen oder Molekülen angehören, deren Zentren von der Oberfläche nicht weiter, als der Radius der Bahn des äußeren Elektrons mißt, abstehen.

Der Einfachheit wegen wollen wir wasserstoffähnlichen monoatomigen Stoff betrachten, dessen Atome aus einem Proton und einem in der Bahn vom Radius r sich bewegenden Elektron bestehen.

Nehmen wir an, daß die Bahnen in der Oberflächenschicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit in allen möglichen Stellungen orientiert werden können und vernachlässigen die Bewegung der Protonen, dann urteilen wir, daß die Schicht der negativen Elektrierung die Dicke r haben muß, da bei den Atomen, deren Kerne an der Stoffoberfläche selbst liegen und deren Bahnen im gegebenen Moment vertikal sind, die Elektronen nicht weiter von der Oberfläche, als um die Länge r abstehen können. Es ist leicht einzusehen, daß im Innern des Körpers unter seiner Oberfläche eine analoge Schicht von positiver Elektrierung bestehen muß, welche ebenfalls die Dicke r hat und welche im Sinne der Verteilung der Ladungsdichte ein Spiegelbild der äußeren Schicht darstellt (des Ladungszeichens ungeachtet). Somit erscheint die äußere Körperschicht als eine elektrische Doppelschicht.

Indem wir die obigen Annahmen über die gleiche Wahrscheinlichkeit der Lagerung der Bahnen und der Unbeweglichkeit der Atomkerne benutzen, können wir die durchschnittliche Volumendichte der Ladung im beliebigen Punkte der Doppelschicht

$$\bar{\varrho} = \pm \frac{1}{2}\frac{e n}{r}(r - x) \tag{1}$$

ausrechnen, wo e die Größe der Elektronenladung ist, n die Anzahl der Atome in 1 cm³, x der absolute Abstand des Punktes von der Oberfläche. Bei Benutzung der Gleichung

$$\operatorname{div} \overline{\mathfrak{E}} = 4\pi \bar{\varrho}$$

wo $\overline{\mathfrak{E}}$ die elektrische Feldstärke im beliebigen Punkte der Doppelschicht ist, und bei der Annahme, daß

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0\text{[2])}$$

ist, bekommen wir

$$\overline{\mathfrak{E}} = -\frac{\pi e n}{r}(r - x)^2. \tag{2}$$

Das negative Zeichen bedeutet, daß das Feld nach außen gerichtet ist (auf der Fig. 1 nach oben).

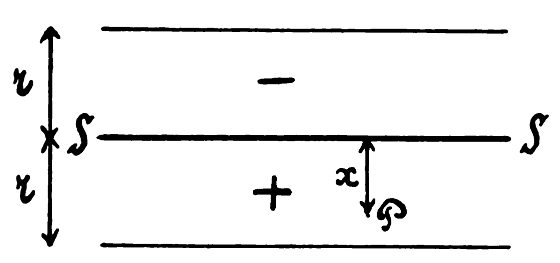


Fig. 1.

In den auf der Oberfläche liegenden Punkten hat $\mathfrak{E}$ den größten Wert; sie nimmt mit der Entfernung von der Oberfläche nach beiden Seiten hin und wird gleich Null in den Punkten, welche die Koordinate $x = r$ haben, d. h. in den Punkten, welche auf der oberen und unteren Grenze der Doppelschicht sich befinden. Weiter kann man nach der Formel

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_{-r}^{+r} \mathfrak{E}^2\, dx$$

die Energie des Feldes der Doppelschicht, welche auf 1 cm² der Körperoberfläche entfällt ausrechnen

$$W = \frac{\pi}{20} e^2 n^2 r^3.$$

Im Falle eines komplizierten Stoffes (Elements), dessen Atom k-Elektronen hat, ist

$$W = \frac{\pi}{20} k^2 e^2 n^2 r^3.\text{[1])} \tag{3}$$

Man kann zeigen, daß für einen beliebigen Stoff, sogar für eine chemische Verbindung, die Energie des Doppelschichtfeldes in Form von

$$W = \frac{\pi}{20} k^2 e^2 n^2 r^3$$

dargestellt werden kann, wo k eine Konstante ist, welche freilich nicht den nämlichen Sinn wie im Falle des einfachen Stoffes hat, und $2r$ den größten Durchmesser der Moleküle bedeutet. In der Tat gehen wir bei der Ausführung der Formel (3) von (1) aus. Welches die mathematische Form der Gleichung auch immer sei, stets muß ϱ den Größen e und n proportional sein. Wenn aber ϱ den e und n proportional ist,

1) Unter der Körperoberfläche wollen wir die Oberfläche verstehen, welche durch die Zentren der äußersten Atome des Stoffes (im Falle des zusammengesetzten Stoffes — Moleküle) geht.

2) Diese Annahme scheint desto näher der Wahrheit zu liegen, je dichter die Atome gelagert sind, d. h. je größer die Zahl n ist; bei $n = \infty$ ist sie ganz richtig.

1) Die Formeln (1), (2), (3) sind von J. J. Frenkel ermittelt (s. Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges., Phys. Teil, XLIX, 100, 1917).

so muß auch $\overline{\mathfrak{E}}$ den e und n proportional sein. und W muß e^2 und n^2 proportional sein, d. h.

$$W = A e^2 n^2.$$

Aus der Betrachtung der Dimensionen der Größen, welche in der letzten Formel figurieren, geht hervor, daß

$$|A| = L^3,$$

da aber

$$|r| = L$$

ist, so kann man schreiben

$$A = B r^3,$$

wo B eine etwaige Konstante ist, welche in der Form

$$B = \frac{\pi}{20} k^2$$

dargestellt werden kann. Daraus geht hervor, daß

$$W = \frac{\pi}{20} k^2 e^2 n^2 r^3$$

ist.

Nun sehen wir, daß die Oberflächenschicht jedes Stoffes eine der Oberflächengröße proportionale Energie besitzt. Diese Energie kann man, wie J. J. Frenkel gezeigt hat, mit der Oberflächenspannung identifizieren. Auf diese Weise kann man, wenn die Größen k, n, r für irgendeinen Stoff bekannt sind, seine Oberflächenspannung an der Grenze gegen das Vakuum ausrechnen.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist die Gleichung abzuleiten, ausgehend von den oben besprochenen Ansichten über die Struktur der Oberflächenschicht, welche die Oberflächenspannungsgröße W_{12} an der Grenze zweier amorphen Stoffe mit den Größen W_1 und W_2 der Oberflächenspannung jedes Stoffes an der Grenze gegen den leeren Raum verbinden soll[1]).

Nehmen wir an, es seien uns zwei monoatomige gegenseitig absolut unlösliche Flüssigkeiten gegeben, welche voneinander durch Zahlen W, k, n, r sich unterscheiden. Wir stellen uns vor, die Atome dieser Flüssigkeiten bestünden aus dem Kerne mit der Ladung $+ke$, um welche herum k Elektronen in der Bahn mit etwaigem mittlerem Radius r sich bewegen[2]). Die eine Flüssigkeit sei durch die Zahlen W_1, k_1, n_1, r_1, und die andere durch W_2, k_2, n_2, r_2 charakterisiert. Die Indizes 1, 2 sollen so gewählt sein, daß r_1 größer als r_2 sei. Betrachten wir das Bild der Oberflächenschicht an der Berührungsstelle dieser Flüssigkeiten. Dazu nehmen wir an, daß beide Flüssigkeiten in ein Gefäß hineingegossen worden sind, wobei die eine von diesen, z. B. die zweite, unten sich befindet. Es ist leicht einzusehen, daß bei dem Aufgießen der ersten Flüssigkeit auf die zweite, wenn ihre negativ-geladenen Schicht in Berührung kommen werden, zwischen ihnen eine solche Art von Wechselwirkung sich einstellen wird, daß sie ineinander einzudringen bestrebt sein werden. Dieser Umstand wird dadurch bedingt, daß die elektrischen Feldstärken in den Doppelschichten gegeneinander gerichtet sind, und infolgedessen die Elektronen, welche der einen Flüssigkeit angehören und ihre negative Schicht bilden, in das Innere der anderen Flüssigkeit einzudringen trachten. Auf der Zeichnung 2 ist der Schnitt durch die Grenze beider Flüssigkeiten in dem Moment dargestellt, wo die negativen Schichten schon ein wenig ineinander eingedrungen sind.

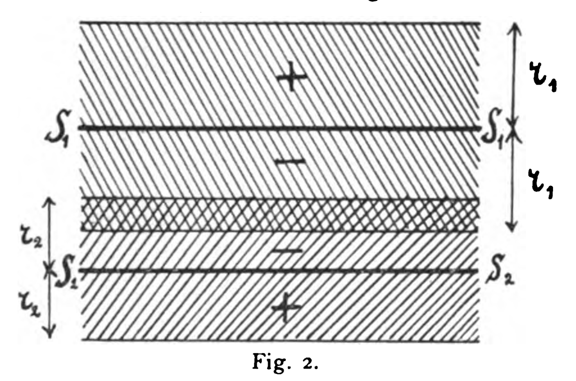


Fig. 2.

Die oberen und die unteren Teile der Zeichnung sind verschieden gestrichelt, sie stellen entsprechend die erste und die zweite Flüssigkeit dar. Die Ebene S_1S_1 ist die Oberfläche der ersten Flüssigkeit, S_2S_2 die Oberfläche der zweiten Flüssigkeit. Feine Linien, welche im Abstande r_1 und r_2 von den entsprechenden Oberflächen gezeichnet worden, stellen die Grenzen der elektrischen Schichten dar. Wenn man annimmt, daß in der Überzahl der Fälle die Elektronen mit ihren Kernen eng verbunden sind, müssen wir urteilen, daß das Streben der negativen Schichten zum gegenseitigen Durchdringen eine Annäherung der Oberflächen bewirken muß. Wie weit solche gegenseitige Annäherung vor sich geht? Es ist nicht schwer einzusehen, daß, wenn diese Oberflächen zusammenfallen werden, ein stabiles Gleichgewicht sich einstellen wird. In der Tat werden bei dem Zusammenfallen der Oberflächen S_1S_1 und S_2S_2 die beiden Doppelschichten symmetrisch gegen ihre gemeinsame Oberfläche SS liegen (s. Fig. 3). Infolgedessen wird die Kraft, mit welcher die

1) Im Falle der Kristalle ist infolge der Anisotropie derselben die Annahme über gleiche Wahrscheinlichkeit der räumlichen Lagerung der Bahnen nicht anwendbar.

2) In seiner Arbeit hat J. J. Frenkel gezeigt, daß die Wirkung der Elektronen, welche auf den inneren, dem Kerne nahen, Bahnen sich bewegen, in der Erzeugung der Doppelschicht sehr klein ist und außer acht gelassen werden kann.

negative Schicht der zweiten Flüssigkeit in das Innere der ersten Flüssigkeit eingezogen wird, durch die Kraft, mit welcher die positive Schicht der zweiten Flüssigkeit aus der ersten Flüssigkeit ausgestoßen werden wird, aufgehoben werden. Es ist leicht einzusehen, daß das Gleichgewicht nur bei Zusammenfallen der $S_1 S_1$ mit $S_2 S_2$ möglich ist. In Wirklichkeit aber kann völliges Zusammenfallen auch fehlen und ein gewisser Abstand zwischen ihnen bestehen bleiben. Dieser

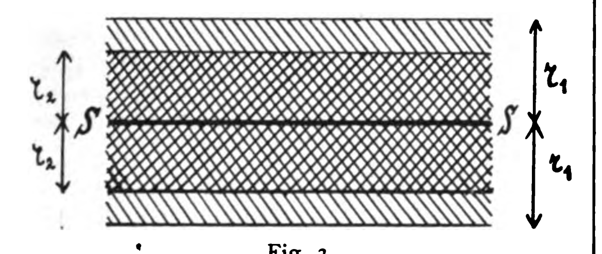


Fig. 3.

Abstand wird wahrscheinlich desto kleiner sein, je dichter die Atome liegen, d. h. je größer die Zahlen n_1 und n_2 sind. Bei genügend großem n können wir ihn sehr klein schätzen und vernachlässigen. Somit wird das aus zwei Flüssigkeiten gebildete System, welches sich selbst überlassen wird, in eine Lage kommen, welche auf der Fig. 3, wo die Ebene SS eine gemeinsame Grenzfläche bildet, dargestellt ist.

Da im Zustand des stabilen Gleichgewichtes dieses System minimale Energie besitzen muß, so ist

$$W_{12} < W_1 + W_2$$

und

$$W_{12} = 2 w_1 + w_R, \tag{4}$$

wo w_1 die Energie ist, welche auf 1 cm² jenes Teiles der negativen oder positiven Schicht der ersten Flüssigkeit entfällt, der nach dem Zusammenfallen der Schichte außerhalb des Bereiches der Doppelschicht der zweiten Flüssigkeit bleibt; w_R die Energie, welche auf 1 cm² der Fläche im Bereiche der Doppelschicht der zweiten Flüssigkeit kommt. Für w_1 und w_R haben wir

$$w_1 = \frac{1}{8\pi}\int_{r_2}^{r_1} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx \tag{5}$$

und

$$w_R = \frac{1}{8\pi}\int_{-r_2}^{+r_2} [\overline{\mathfrak{E}}_1 + \overline{\mathfrak{E}}_2]^2\, dx, \tag{6}$$

wo $\overline{\mathfrak{E}}_1$ und $\overline{\mathfrak{E}}_2$ die elektrischen Feldstärken sind, welche im beliebigen Punkte durch die Doppelschicht, entsprechend der ersten und der zweiten Flüssigkeit erzeugt werden.

Indem wir die Ausdrücke (5) und (6) in (4) einsetzen, bekommen wir

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int_{r_2}^{r_1} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx + \frac{1}{8\pi}\int_{-r_2}^{+r_2} [\overline{\mathfrak{E}}_1 + \overline{\mathfrak{E}}_2]^2\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_{r_2}^{r_1} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx + \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} [\overline{\mathfrak{E}}_1 + \overline{\mathfrak{E}}_2]^2\, dx \tag{7}$$

Aber

$$\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} [\overline{\mathfrak{E}}_1 + \overline{\mathfrak{E}}_2]^2\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx + \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_2^2\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_1 \cdot \overline{\mathfrak{E}}_2\, dx.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (7) ein.

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx + \frac{1}{4\pi}\int_{r_2}^{r_1} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx + \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_2^2\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_1 \cdot \overline{\mathfrak{E}}_2\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_1} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx + \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_2^2\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_1 \cdot \overline{\mathfrak{E}}_2\, dx.$$

Indem wir bemerken, daß

$$\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_1} \overline{\mathfrak{E}}_1^2\, dx = W_1, \quad \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r_2} \overline{\mathfrak{E}}_2^2\, dx = W_2, \quad \overline{\mathfrak{E}}_1 = \frac{\pi k_1 e n_1}{r_1}(r_1 - x)^2, \quad \overline{\mathfrak{E}}_2 = -\frac{\pi k_2 e n_2}{r_2}(r_2 - x)^2,$$

finden wir nach der Umformung:

$$W_{12} = W_1 + W_2 - \frac{\pi}{60} e^2 k_1 k_2 n_1 n_2 \left(10\, r_1 r_2^2 - 5\, r_2^3 + \frac{r_2^4}{r_1}\right). \tag{8}$$

Diese letzte Gleichung gibt Antwort auf die Frage, wie W_{12} von den W_1 und W_2 bei allen von uns gemachten Annahmen abhängt.

Dieselbe ist bezüglich r_1 und r_2 asymmetrisch, da bei ihrer Ausführung wir $r_1 > r_2$ angenommen haben. Die in der Gleichung befindlichen Größen r_1 und r_2 sind jedoch wenig geeignet, wir wollen dieselben deshalb auf folgende Weise umbilden: aus der Gleichung (3) folgt, daß

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{20\, W_1}{\pi e^2 k_1^2 n_1^2}} \quad \text{und} \quad r_2 = \sqrt[3]{\frac{20\, W_2}{\pi e^2 k_2^2 n_2^2}}.$$

Außerdem ist

$$n_1 = \frac{d_1}{m M_1} \text{ und } n_2 = \frac{d_2}{m M_2},$$

wo d_1 und d_2 Flüssigkeitsdichten sind, M_1 und M_2 ihre Atomgewichte, m die Masse des Wasserstoffatoms. Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (8) ein, so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} W_{12} = W_1 + W_2 - \frac{1}{3}\Bigg[10\sqrt{W_1 W_2^2 \frac{k_1 d_1 M_2}{k_2 d_2 M_1}} - \\ - 5\sqrt{W_2^3\left(\frac{k_1 d_1 M_2}{k_2 d_2 M_1}\right)^3} + \sqrt{\frac{W_2^4}{W_1}\left(\frac{k_1 d_1 M_2}{k_2 d_2 M_1}\right)^5}\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Dafür, daß diese Gleichung eine größere praktische Geltung erlange, wäre es wünschenswert, die Frage nach ihrer Anwendung in Fällen beliebiger chemischen Verbindungen, nicht nur monoatomiger Flüssigkeiten, aufzuklären.

Der Autor hofft im weiteren diese Frage zu lösen und die hier angedeuteten Sätze eingehender auszuarbeiten.

Bis auf weiteres aber nehmen wir an, daß die Formel (9) auch für mehratomige Stoffe gilt. Um dann aus derselben W_{12} bestimmen zu können, müssen wir k_1 und k_2 kennen; indessen sind die Größen dieser Konstanten für die zusammengesetzten Stoffe unbekannt. Dies Hindernis kann in folgender Weise beseitigt werden. Wenn für irgendein Paar W_{12}, W_1, W_2, d_1, d_2, M_1, M_2 (im Falle der zusammengesetzten Stoffe sind M_1 und M_2 die Molekulargewichte) und eins von den k bekannt sind, dann können wir nach Lösung der Gleichung (9) in bezug auf das unbekannte k dasselbe bestinmen. Als Flüssigkeit mit bekanntem k kann man Quecksilber nehmen, für welches $k = 2$ ist[1]). Nachdem wir auf solche Weise k für zwei beliebige Flüssigkeiten gefunden haben, können wir für dieses Paar auch W_{12} finden.

Die auf solche Weise bis jetzt ausgeführten Berechnungen der Größe W_{12} für mehrere Paare zeigen uns, daß die Gleichung (9) Werte gibt, welche mit den experimentellen Ergebnissen in den Grenzen ± 35 Proz. übereinstimmen. Diese Nichtübereinstimmung kann dadurch erklärt werden, daß der Ableitung der Gleichung eine Reihe von Annahmen zugrunde gelegt wird, welche in den einzelnen konkreten Fällen sich nicht bewähren.

Ich will an dieser Stelle meinen innigsten Dank dem Professor J. J. Tichanowsky aussprechen, welcher mir diese Frage vorlegte und eine Reihe Anregungen gab.

1) S. Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges., Phys. Teil. XLIX, 112, 1917.

Simferopol, Pädagogisches Institut, 7. Januar 1928.

(Eingegangen 20. Januar 1928.)

Das elektrische Moment des Wassermoleküls.

Von John Warren Williams[1]).

Das elektrische Moment von H_2O ist zur Zeit noch nicht so genau bekannt, als es wünschenswert wäre für eine Substanz, die so allgemein als Lösungsmittel gebräuchlich ist. Überdies ist das Moment dieses Moleküls von Interesse im Zusammenhange mit denjenigen theoretischen Überlegungen, aus denen wesentlich auf Grund der Polarisationsfähigkeit des O-Atoms auf eine dreieckige Anordnung der Atome geschlossen wurde[2]). Jona[3]) hat in 1919 u. a. den Temperaturkoeffizienten der dielektrischen Konstante von Wasserdampf gemessen und daraus den Wert

$$\mu = 1{,}87 \cdot 10^{-18}$$

für das elektrische Moment abgeleitet. Er gibt selbst an, daß die Genauigkeit seiner Absolutwerte zu wünschen übrig läßt. Smyth[4]) hat in 1924 gewisse Rechnungen ausgeführt auf Grund von Formeln, die von Gans entwickelt wurden und über deren Anwendbarkeit man Zweifel haben darf. Er findet

$$\mu = 1{,}04 \cdot 10^{-18} \text{ bei } 30^0 \text{ C}$$

und

$$\mu = 1{,}98 \cdot 10^{-18} \text{ über } 100^0 \text{ C.}$$

Ich habe nun versucht, die auf Veranlassung von Debye zuerst von Lange[5]) benutzte Methode der verdünnten Lösungen, mit deren Hilfe ich schon eine Reihe von Momenten bestimmt hatte[6]), auch auf den Fall des Wassers anzuwenden. Untersucht wurde eine Lösung von Wasser in Benzol. Da die Löslichkeit sehr klein ist, mußte die Dielektrizitätskonstante besonders genau gemessen werden. Außerdem hängt die zu erreichende Präzision wesentlich von der Genauigkeit ab, mit welcher die Löslichkeit von Wasser in Benzol bestimmt werden kann. Zur Verfügung stehen die Messungen von Groschuff[7]) aus dem Jahre 1911, die in 1919 bestätigt wurden, von Richards, Carver und Schumb[8]). Überdies sind auch die neuesten Messungen von Hill[9]) aus 1923 mit den An-

1) National Research Council Fellow.

2) Born und Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **23**, 388, 1924; Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **26**, 196, 1924; Hund, Zeitschr. f. Phys. **31**, 81, 1924.

3) Jona, Physik. Zeitschr. **20**, 14, 1919.

4) Smyth, Journ. Amer. Chem. Soc. **44**, 2151, 1924.

5) Lange, Zeitschr. f. Phys. **33**, 169, 1925.

6) Eine Zusammenstellung ist gegeben in der Notiz Williams, Physik. Zeitschr. **29**, 174, 1928.

7) Groschuff, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 348, 1911.

8) Richards, Carver and Schumb, Journ. Amer. Chem. Soc. **41**, 2019, 1919.

9) Hill, Journ. Amer. Chem. Soc. **45**, 1143, 1923.

gaben der früheren Autoren in Übereinstimmung. Hill findet, daß 99,927 g Benzol 0,073 g Wasser lösen bei 25⁰ C. In Molenbrüchen bedeutet das, daß bei dieser Temperatur der Molenbruch von Benzol 0,9970 und der von Wasser 0,0030 ist.

Für die Versuche wurde Benzol besonders gereinigt und getrocknet und dann mit reinem Wasser öfters im Verlaufe mehrerer Stunden geschüttelt bei einer Temperatur zwischen 25^0 und 30^0 C. Von Benzol allein, sowie von der Lösung wurde die Dielektrizitätskonstante gemessen in einem Thermostaten, der auf 25^0 C eingestellt war. Es wurde gefunden:

Dielektrizitätskonstante

von Benzol[1]) $= 2,282 \pm 0,001$
der Lösung $= 2,294 \pm 0,001$.

Zur Bestimmung der Molpolarisation P_2 des Wassers wurde die früher loc. cit. verwendete Formel benutzt[2]).

$$P_{1,2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{f_1 M_1 + f_2 M_2}{d} = f_1 P_1 + f_2 P_2$$

($P_{1,2}$ = Molpolarisation der Lösung
P_1 = „ von Benzol
P_2 = „ des Wassers
f_1 = Molenbruch von Benzol
f_2 = „ des Wassers
M_1 = Molekulargewicht von Benzol
M_2 = „ des Wassers
d = Dichte der Lösung
ε = gemessene Dielektrizitätskonstante).

Diese enthält noch die Dichte der Lösung, die nach der Mischungsregel berechnet wurde. So ergibt sich aus dem gemessenen Werte $d = 0,8731$ für reines Benzol der Wert $d = 0,8732$ für die Lösung. Ein kleiner Fehler in der Dichte wäre, wie sofort ersichtlich, belanglos. Aus den angegebenen Daten folgt für die Molpolarisation des Wassers

$$P_2 = 64 \pm 4 \text{ cm}^3.$$

Aus dem Brechungsindex von Wasser folgt für die optische Polarisation $P_2'' = 4$ cm³. Die große Differenz $P_2 - P_2''$ zeigt ohne weiteres, daß H_2O ein typisches Dipolmolekül ist. Für die Orientierungspolarisation bleiben $P_2' = 60$ cm³ übrig. Nehmen wir an, daß der Fehler ± 5 cm³ ist, so folgt für das elektrische Moment[1])

$$\mu = (1,70 \pm 0,06) \cdot 10^{-18}.$$

Es möge noch bemerkt werden, daß der angegebene Wert beinahe zusammenfällt mit den Werten für die Dipolmomente der niederen Alkohole und des Phenols, alles Substanzen, deren Dissymmetrie durch eine *OH*-Gruppe verursacht wird. Dieses wird belegt durch die folgende Tabelle:

Substanz	Elektrisches Moment
HOH	$1,70 \cdot 10^{-18}$
CH_3OH[2]) . .	$1,64 \cdot 10^{-18}$
C_2H_5OH[3]) . .	$1,63 \cdot 10^{-18}$
C_3H_7OH[2]) . .	$1,66 \cdot 10^{-18}$
C_6H_5OH[3]) . .	$1,66 \cdot 10^{-18}$

1) Ich betrachte nicht den Absolutwert selbst, sondern die Differenz gegen die Lösung als innerhalb der angegebenen Fehlergrenze gesichert.
2) Debye, Handbuch der Radiologie VI, 597, 1925.

1) Der Methode ist es eigentümlich, daß die angegebene Zahl noch eine Unsicherheit enthält, wegen der nicht ausführbaren Extrapolation der optischen Polarisation bis zu unendlich langen Wellen.
2) Debye, loc. cit.
3) Williams, loc. cit.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 22. Februar 1928.)

BESPRECHUNGEN.

Handbuch der Experimentalphysik, Band XIV. Herausgegeben von W. Wien und F. Harms. Gr. 8⁰. I. P. Lenard u. A. Becker: Kathodenstrahlen. 432 S. 131 Abb. II. W. Wien: Kanalstrahlen. 337 S. Mit 352 Abb. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft. 1927. M. 70.—, geb. M. 72.—.

Das Ziel dieses Handbuches ist „die ausführliche Darstellung der gegenwärtigen Physik auf experimenteller Grundlage"; völlig hiermit im Einklang ist es, daß beide Gebiete des vorliegenden Bandes von denjenigen Forschern behandelt wurden, die sie in den letzten 3 Jahrzehnten am besten gefördert, fast kann man sagen, begründet haben.

I. Der Abschnitt „Kathodenstrahlen" gliedert sich in folgende Kapitel: I. Grundlagen 50 S. — II. Allgemeines; Strahlerzeugungsmittel; Meßkunde 50 S. — III. Geschwindigkeitsverlust 25 S. — IV. Grenzdicke 10 S. — V. Absorption 75 S. — VI. Intensitätsabfall 10 S. — VII. Sekundärstrahlung 70 S. — VIII. Energieverhältnisse 30 S. — IX. Diffusion 80 S. — X. Verhältnis der Ladung zur Masse der Elektronen 35 S.

Das behandelte Gebiet ist eines der schwierigsten der modernen Physik, hauptsächlich weil eine große Anzahl von Fehlerquellen es sehr erschwert, aus den

Versuchsergebnissen eindeutige Schlüsse zu ziehen. Bei dieser Zusammenfassung galt es daher in erster Linie, die zahlreichen experimentellen Arbeiten kritisch zu sichten, galt es, Experimente mit „reinen" Versuchsbedingungen scharf von denen zu scheiden, die mit erheblichen, oft das Meßergebnis verschleiernden Fehlern behaftet sind. Sicherlich ist eine bis ins einzelne gehende objektive Darstellung bei den noch herrschenden Streitfragen kaum möglich; deshalb trägt auch das Werk deutlich in allen Kapiteln den Stempel der Verff.

Zur Behandlung des Stoffes ist zu bemerken, daß ein breiter Raum von den klar und übersichtlich dargestellten älteren, „gesicherten" Ergebnissen ausgefüllt wird, während einige neuere Versuche, die sicherlich vom gegenwärtigen Stande der Physik aus eine eingehendere Diskussion rechtfertigen, sehr kurz behandelt worden sind, weil sie nach der Ansicht der Verfasser noch nicht „genügend gesichert" erscheinen. Z. B. Analyse der durch Elektronenzusammenstoß mit Atomen erzeugten Produkte S. 221 H. A. Smyth (vgl. hierzu S. 585 desselben Handbuchbandes), Richtungsverteilung der reflektierten Elektronen S. 345 C. Davisson und C. H. Kunsman.

Da im XIII. Bande desselben Handbuches die Kapitel „Physik der Glühelektronen, Herstellung der Glühelektroden und technische Elektronenröhren" vorgesehen sind, beschränken sich die Verfasser auf die rein physikalischen Teile des Gebietes „Kathodenstrahlen".

Alles in allem wird das Werk, das durch ein ausführliches Kapitelverzeichnis, Namen- und Sachregister vervollständigt wird, sicherlich demjenigen, der den Rat und das Urteil der als erfahrene Forscher bekannten Verfasser sucht, willkommen sein.

II. In dem zweiten Teile des Bandes behandelt W. Wien das Kapitel „Kanalstrahlen". Es braucht wohl nur auf den Zusammenklang der Worte Kanalstrahlen — W. Wien hingewiesen zu werden, um zu betonen, daß hier das Werk des Fachmannes auf diesem Gebiete vorliegt. Nach den einleitenden Kapiteln folgen in klarer Gliederung: Lichterregung der Kanalstrahlen — Chemische Wirkungen — Zerstäubung — Wärmewirkung der Kanalstrahlen. Das nächste größere Kapitel (70 S.) bringt „die elektrischen Wirkungen der Kanalstrahlen; Ionisation und Absorption" in 27 Unterabschnitten, aus denen nur einzelne Beispiele wie Sekundärstrahlen oder Umladung der Kanalstrahlen herausgegriffen seien. Daran schließt sich „Magnetische und elektrische Ablenkung der Kanalstrahlen" 100 S. Hier baut der Verf. die Versuche von seinen ersten, das Gebiet erschließenden Experimenten an Schritt für Schritt weiter auf bis zum Höhepunkt dieses Kapitels, der Isotopenforschung. Die Kapitel 9—11 (130 S.) bilden den dritten Hauptteil, der das große und wichtige Gebiet „Lichtaussendung der Kanalstrahlen (Dopplerverschiebung, Abklingen des Leuchtens) — Allgemeine Theorie des Leuchtens der Kanalstrahlen — Experimentelle Prüfung der Theorien" zusammenfaßt. Den Schluß bilden 3 kleinere Kapitel mit nur kurz behandelten Spezialfragen, z. B. Polarisation des von Kanalstrahlen ausgehenden Lichtes.

Trotz der Fülle des Stoffes, trotz der vielen Einzelergebnisse, über die zu berichten nötig war, ist die Gliederung so übersichtlich, die Darstellung so klar und flüssig, daß das Werk nicht nur dem Fachmann, der Exaktheit, Einzelheiten oder den Rat des erfahrenen Meisters sucht, sehr willkommen sein wird. Auch ein Laie auf diesem Spezialgebiet wird sich gern von dem Verf. in einzelne Teilgebiete der Physik der Kanalstrahlen einführen lassen.

Die Ausstattung des gesamten Bandes, insbesondere der klare Druck der zahlreichen Figuren ist vorbildlich. Zu bedauern ist, daß beide Teile, Kathodenstrahlen und Kanalstrahlen, in einem Bande zusammengefaßt sind; mancher nur für eines der beiden Forschungsgebiete speziell interessierte Physiker würde sicherlich gerne nur den einen oder den anderen Teil erstehen. M. Rusch.

C. Runge u. H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen. (Die Grundlehren d. math. Wiss. Bd. 11.) 8⁰. 371 S. Mit 13 Fig. Berlin, J. Springer. 1924. Brosch. M. 16.50, geb. M. 17.50.

Das Buch stellt die Methoden dar, nach welchen ein mathematisches Problem bis zu seinem quantitativen Resultat durchgeführt wird. Es werden die häufigsten Aufgaben aus der rechnerischen Praxis behandelt, nämlich: Auflösung von Gleichungen mit einer und mit mehreren Unbekannten, Ausgleichsrechnung, Rechnen mit ganzen rationalen Funktionen, Kettenbrüche, Rechnen mit unendlichen Reihen, Annäherung willkürlicher Funktionen durch Reihen, numerische Integration und Differentiation, numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Darstellung erfolgt, wie es in der Natur der Sache liegt, unter den beiden Gesichtspunkten der Genauigkeit der Approximation und der auf die Rechnung zu verwendenden Zeit.

Das Buch ist der Niederschlag großer praktischer Erfahrung verbunden mit mathematischem und physikalischem Feingefühl. Es enthält eine Fülle eleganter Methoden, welche zum Teil auf Originalarbeiten Runges zurückgehen.

Für den Studierenden sowohl als für den praktischen Rechner wird das Buch von größtem Wert sein und kann bestens empfohlen werden.

Druck und Ausstattung sind sehr gut.

Schachenmeier.

C. Eberhardt, Einführung in die theoretische Aerodynamik. Gr. 8⁰. 138 S. Mit 118 Figuren. München u. Berlin, R. Oldenbourg, 1927. M. 8.—, geb. M. 9.50.

Das Buch enthält eine im ganzen sehr ansprechende Erläuterung der hydrodynamischen Grundbegriffe und Methoden, wie sie für ein Studium der neueren Tragflügeltheorie erforderlich sind. Eulersche Gleichungen, Vektorsätze, Helmholtzsche Wirbeltheorie, konforme Abbildung werden ausführlich behandelt unter vernünftiger Beschränkung auf das Wesentliche. Alle Abschnitte sind mit sehr sauberen Abbildungen versehen. Das Buch wird seinen Zweck als einführendes kurzes Lehrbuch, insbesondere für junge Ingenieure und Physiker, gut erfüllen.

Freilich möchte man wünschen, daß die so wichtigen Reibungswirkungen mehr berücksichtigt würden. So fehlen die Bewegungsgleichungen reibender Flüssigkeiten, die Reynoldssche Zahl wird nicht erwähnt, von Turbulenz, vom Prandtl-Kármánschen Siebtel-Gesetz steht nichts in diesem Buch. Der Studierende wird, wenn er nicht anderweitig Aufklärung findet, die reibungsfreie Hydrodynamik naturgemäß überschätzen.

Störend wirken einige Mängel; z. B. ist stets stationäre Strömung vorausgesetzt; Anfahrtprobleme werden deswegen nicht behandelt, aus diesem Grunde

kommt auch der Begriff der scheinbaren Masse (durch Trägheit des umgebenden Mediums) der für die Luftschiffdynamik und auch für die Tragflügeltheorie von Bedeutung ist, im Buche nicht vor. Die Betrachtungen auf S. 35 sind Mißverständnissen ausgesetzt. In Nr. 8 wird gesagt, daß die Eulerschen Gleichungen im allgemeinen nicht integrierbar wären. Wenn Anfangs- und Randbedingungen richtig vorgegeben sind, ist natürlich stets eine Lösung da. In Nr. 30 kommt der Verfasser zum Schluß, daß die Energie zweier entgegengesetzt gleicher Stabwirbel endlich ist. Das ist aber nur richtig, wenn die Wirbel im Gegensatz zu den Annahmen doch eine endliche Kerndicke haben. J. Ackeret.

C. Störmer, Aus den Tiefen des Weltenraumes bis ins Innere der Atome. Deutsche Ausgabe von Dr. J. Weber. 8⁰. 195 S. Mit 65 Abb. Leipzig, F. A. Brockhaus 1925. M. 5.—, geb. M. 6.—.

In einzelnen, getrennten Kapiteln sind meist neuere Ergebnisse der Astronomie, Geophysik und Physik zusammengestellt, wobei das ausgewählte Stoffgebiet vor allem die verschiedenen Arten von Strahlungserscheinungen umfaßt. Besonders ausführlich und anziehend ist in Theorie und Beobachtung das eigentliche Forschungsgebiet des Verf., das Nordlicht, behandelt. Freilich ist das Büchlein schon einige Jahre alt (der Übersetzung liegt die zweite norwegische Auflage zugrunde), und so ist es in manchen Einzelheiten, wie z. B. in der Deutung des Nordlichtspektrums, bereits wieder überholt. A. Kopff.

C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. Vorlesungen. Zwei Bände. Gr. 8⁰. VIII u. 488, VIII u. 478 S. Mit zahlreichen Figuren. 2. durchgesehene Auflage. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1927. Zusammen M. 54.—, geb. M. 60.—.

Es ist eine auffallende Erscheinung nicht nur der deutschen wissenschaftlichen Literatur, daß zur Zeit die Lehrbücher der Mechanik mit besonderer Berücksichtigung der Störungstheorie nicht von Astronomen, sondern von Physikern geschrieben werden; sie zeigt aber doch, wie sehr die Interessen der Astronomie sich gegenwärtig verschoben haben. Und wenn nun hier wieder — fast gleichzeitig mit der deutschen Übersetzung der 1914 herausgekommenen Einführung von Moulton — das Lehrbuch eines Astronomen erscheint, so ist es doch kein neues Werk, sondern der im ganzen unveränderte Neudruck der ersten Auflage der beiden Bände aus den Jahren 1902 und 1907.

Diese Neuherausgabe ist allerdings durchaus gerechtfertigt. Das Werk von Charlier steht nach Auswahl des Stoffes und nach Art der Darstellung auch heute noch an der Spitze der modernen Lehrbücher der Himmelsmechanik. Der erste Band behandelt vorwiegend die klassischen Probleme der Himmelsmechanik (unter Benutzung verschiedener Arten von Koordinaten), gibt die allgemeinen Prinzipien der Störungstheorie und die Theorie der säkularen Störungen. Der zweite Band beginnt mit einem Kapitel über mechanische Quadratur, geht dann sehr ausführlich auf die periodischen Lösungen ein und schließt mit Untersuchungen über die Konvergenz der Reihen der Himmelsmechanik und einigen spezielleren Problemen, vor allem mit der Darstellung der Integrale des Dreikörperproblems in trigonometrischer Form.

So führt das Lehrbuch von Charlier schon tief in die Probleme der Himmelsmechanik ein. Allerdings wäre es erfreulich gewesen, wenn die zweite Auflage die Untersuchungen der letzten zwanzig Jahre hätte berücksichtigen können, und heute würde man einem Lehrbuch der Himmelsmechanik wohl auch, soweit möglich, eine noch geschlossenere, auf die Transformationstheorie gegründete Form geben. Daß Charlier eine von der sonst gebräuchlichen stark abweichende Bezeichnungsweise wählt, erschwert zuerst das Studium des Buches etwas; aber alles dies sind unerhebliche Mängel gegenüber den Vorzügen des klassischen Werkes. A. Kopff.

K. T. Compton und F. L. Mohler, Ionisierungs- und Anregungsspannungen. Übersetzt von R. Suhrmann. (Fortschritte der Chemie, Physik und physikalischen Chemie, Bd. **18**, Heft 6.) Gr. 8⁰. 148 S. Mit 16 Fig. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1925. Geh. M. 13.50.

Es ist heute wohl kaum noch erforderlich, die Vorzüge dieses Buches zweier Autoritäten des Spezialgebietes besonders hervorzuheben. Es war zur Zeit seines Erscheinens einzigartig und gelangte deshalb sehr rasch auf den Arbeitstisch aller, die mit kritischen Potentialen zu tun haben, erst recht natürlich nach Erscheinen der vorliegenden vortrefflichen Suhrmannschen Übersetzung, die übrigens in dankenswerter Weise Unklarheiten des Originals in Anmerkungen beseitigt. Heute besitzen wir in Franck und Jordans „Anregung von Quantensprüngen durch Stöße" ein neueres Werk gleichen Themas, so daß ein Vergleich nötig wird. Die theoretische Fundierung ist zweifellos in der deutschen Abhandlung gründlicher, was nur z. T. auf dem entwickelteren Stande der Forschung zur Zeit des Erscheinens beruht, auch ist mehr neueres Material berücksichtigt und die Darstellung der vielen Fehlerquellen ausführlicher. Jedoch wird man jeden, der in das Gebiet sich einzuarbeiten wünscht, zunächst auf die vorliegende Arbeit mit ihrer äußerst klaren und einfachen Darstellung der Methoden und der Deutung der Ergebnisse hinweisen. Vielleicht ist bei dem Charakter des Buches der Wunsch nach einer zweiten Auflage nicht unberechtigt. G.-M. Schwab.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik. II. Bd. Lehre von der strahlenden Energie (Optik). Erste Hälfte. Unter Mitwirkung von H. Erggelet, Jena; F. Jüttner, Breslau; A. König, Jena; M. v. Rohr, Jena; E. Schrödinger, Zürich, bearbeitet von O. Lummer. Gr. 8⁰. XVIII u. 928 S. Mit 624 Figuren. 11. Auflage. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. A.-G. 1926. M. 50.—, geb. M. 54.—.

Die „Optik" ist als erster der Müller-Pouilletbände in den neunziger Jahren von Lummer aus einem behaglichen Inventarstück unserer Schülerbibliotheken zu einem modernen Lehrbuch umgeschaffen worden, ein Entwicklungsgang, auf dem die übrigen Bände nur nach und nach gefolgt sind oder zu folgen im Begriffe stehen. Die in ihrem ersten Halbbande vorliegende neue Auflage, erst nach Lummers Hingang erschienen, ist die dritte aus seiner Feder; mit Recht schmückt sein geistreicher, charakteristischer Kopf das Titelblatt.

Von den sechzehn Kapiteln des Bandes stammen nicht weniger als zwölf ganz oder zum allergrößten Teile von ihm. Im einzelnen sind in diesen Kapiteln zahlreiche Änderungen, meist Erweiterungen, zu verzeichnen; im großen Ganzen aber ist Inhalt und Form der zehnten Auflage gewahrt geblieben. Kap. 1, Wesen des Lichts, Wandel des Begriffs Äther im Laufe der Zeiten, trägt stark den Stempel seiner auf wissenschaftlich-künstlerische Gesamtschau gerichteten Persönlichkeit: die griechische Lichtlehre wird im Anschluß an W. Königs bekannte Rektoratsrede vermehrt herangezogen, „die Sonne blendet, weil ihre Abbilder aus feurigen Atomen bestehen", Erebos und Nyx vermählen sich, um den lichten Äther zu erzeugen, und dessen Lebensschicksal läuft wie eine spannende Erzählung ab „von seiner Geburt bis zu seinem Grabe" mit der Grabrede: „Erst war er ein gasförmiges Gebilde, dann ein quasielastischer fester Körper, dann der Halt und gleichsam das Gewand von elektromagnetischen Begriffen, um schließlich in ein Nichts zu zerfließen" ... um freilich auch im Schlußparagraphen des Kapitels, drei überaus klaren Seiten aus der Hand F. Jüttners, seine Wiedererstehung auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie zu feiern.

Jüttner hat auch zu Kap. 2, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der strahlenden Energie, einen vortrefflichen Beitrag über die Optik bewegter Körper geliefert, einen auch für Jüngere geeigneten Überblick über Aberration, Mitführungskoeffizienten, Michelsonschen Versuch u. ä., auch über die etwas schwierig zugänglichen Theorien von Fresnel, Stokes-Planck, Lorentz, Poincaré, Einstein, de Sitter in ihren historischen und gedanklichen Zusammenhängen.

Die Kapitel 3 bis 10, entsprechend den Kapiteln 2 bis 7 der vorigen Auflage, enthalten wesentlich die Abbildungslehre selbstleuchtender Objekte, nämlich Reflexion und Brechung an ebenen und Kugel-Flächen, prismatische Farbenzerstreuung, Brechungsquotient und Achromasie, Abhängigkeit des Brechungsquotienten vom Zustand der Materie (dieses kurze Kapitel nach Lummers Entwurf von H. Klinkhardt, Assistenten am Euckenschen Institut in Breslau, bearbeitet), Abbildung im Sinne der Wellenlehre, aberrationsfreie spiegelnde und brechende Flächen, kaustische Kurven und Astigmatismus (mit einem Beitrag von M. v. Rohr, Jena), Erweiterung des Abbildungsgebietes bei zentrierten optischen Systemen, dies alles ein Lieblingsgebiet Lummers, das zwischen 9. und 10. Auflage bereits einen Schrumpfungsprozeß durchgemacht hat und ihn trotz der eigenen Note, die es dem Ganzen gibt, vielleicht bei der nächsten Gelegenheit fortsetzen sollte. Kapitel 12, Über die Strahlenbegrenzung und die von ihr abhängige Lichtwirkung optischer Systeme, ist im wesentlichen durchgearbeitetes Altes. Mehr Veränderung haben die Kapitel 14, Interferenz, 15, Beugung, und 16, Abbildungsgesetze nicht selbstleuchtender Objekte, erfahren, wo beispielsweise die Waetzmann-Lummerschen Neigungskurven, die Lichtwelle als Längeneinheit, Gehrckes Interferenzpunkte, P. P. Kochs Methode zur Messung der Intensitätsverteilung in Spektrallinien, die strengere Theorie der Gitterbeugung, ausführlichere Berücksichtigung der Ultramikroskopie und einige aus Lummer-Reiches „Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop" übernommene Abschnitte, die man an dieser Stelle missen könnte, neu erscheinen.

Bleiben die Kapitel 11 und 13, zu denen Lummer Mitarbeiter herangezogen hat. In Kap. 13 behandelt A. König, Jena, die optischen Instrumente, zweckmäßig ausgenützte knappe hundert Seiten. Die „photographischen Objektive" sind ebenso wie die „Projektionsapparate und Scheinwerfer", die „Lupe", das „zusammengesetzte Mikroskop und das Fernrohr", die „Prüfung der Instrumente und die Messung der Grundgrößen" gegen früher meist erfreulich gekürzt; einiges wie die Periskope, die Fernrohre mit Vergrößerungswechsel, das Waetzmannsche Interferenzverfahren zur Prüfung auf Bildfehler sind hinzugekommen. Neu ist der Absatz über die Entfernungsmesser. Alles ist auf den neuesten Stand gebracht.

Das 11. Kapitel schließlich, Das Auge und die Gesichtsempfindungen, schon durch seinen Umfang von rund 170 Seiten unter den übrigen hervorragend, vereinigt drei bemerkenswerte Beiträge: des Jenenser Professors für Augenheilkunde Erggelet kurze und übersichtliche Darstellung des anatomisch-histologischen Baues des Sehorgans mit einigen schönen Bildern aus der medizinischen Literatur, M. v. Rohrs „Physikalisches vom Auge", wo erst das ruhende, dann das bewegte Einzelauge, weiterhin die Brillen und das beidäugige Sehen unter neuesten Gesichtspunkten (Gullstrand!) abgehandelt werden, und E. Schrödingers „Gesichtsempfindungen", die eine besondere Zierde des Bandes bilden, bewundernswert gleichermaßen in der kritischen Sichtung dieses schwierigen Gebiets wie in der glänzenden Darstellung. Die großen Einzelabschnitte behandeln die Gesetze der Lichtmischung im Tagessehen, das Dämmerungs- und indirekte Sehen, das zeitliche und örtliche Übergreifen der direkten Lichtwirkung (also die Nachbilder und Kontrastphänomene), die Schwellenwerte und spezifischen Vergleichungen (Reizschwellen, Intensitäts-, Farben- und Sättigungsunterschiedsschwellen, heterochrome Photometrie u. a.).

Referent hat vielleicht als ehemaliger Angehöriger des Breslauer Kreises unwillkürlich, um mit Goethe zu sprechen, „mit Neigung das Gute, mit Schonung das Bedenkliche dargestellt". Er glaubt aber ganz objektiv aussagen zu können, daß auch die neue „Optik" des Müller-Pouillet wie die alte den ersten Platz unter den Lehrbüchern ähnlichen Umfangs behauptet.

Buchwald.

E. Friederich, Über die Härte anorganischer Verbindungen und die der Elemente. (Fortschritte der Chemie, Physik und physikalischen Chemie Bd. 18, Heft 12.) Gr. 8⁰. 44 S. Mit 4 Fig. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1926. M. 3.60.

Vor einigen Jahren wurde von Reis und Zimmermann (Zeitschr. f. phys. Chem. **102**, 298) ein erster Versuch gemacht, nach Zusammenhängen zwischen Härte, Kristallbau und chemischen Eigenschaften der Kristallbausteine zu forschen. In der vorliegenden Schrift wird versucht, bei einigen Gittertypen, den Ionen-, Atom- und Metall-Gittern, die Härte als möglichst allgemeingültige Funktion der Wertigkeits- und Volumverhältnisse auszudrücken. Verglichen werden hauptsächlich die nach Maß bestimmten Härten, obschon diese nur die Reihenfolge der Härten angeben und kein absolutes Maß bilden. Bestimmungen der absoluten Härte sind jedoch bekanntlich sehr mühsam auszuführen; es liegen wenige Angaben

vor, und auch Friederich hat seine zahlreichen Neubestimmungen nach der einfachen Mohsschen Methode ausgeführt.

Es wird nun gezeigt, daß für eine große Zahl von Stoffen mit Ionen- und Atomgittern der Gang der Härten sich durch die Funktion $\frac{\text{Valenz}}{\text{Molekularvolumen}}$ darstellen läßt, besser noch durch die Ausdrücke $\frac{\text{Valenz}^2}{\text{Molekularvolumen}^{2/3}}$ oder $\frac{\text{Valenz}}{\text{Molekularvolumen}^{2/3}}$, die in engem Zusammenhang zum Coulombschen Gesetz stehen. Zwischen Stoffen mit Atom- und solchen mit Ionengittern scheint bemerkenswerterweise kein wesentlicher Unterschied in bezug auf die Härte zu bestehen (vgl. auch V. M. Goldschmidt, Untersuchungen über Bau und Eigenschaften von Kristallen, Det Norske Vid. Akad. Skrifter, Oslo, Mat.-Nat. Kl. 1926, Nr. 8, S. 102 ff.). Körper mit Molekülgittern, Radikalionengittern, sowie Hydrate haben viel niedrigere Härten, als sich nach obigen Funktionen berechnen würde, was sich aus ihrem Aufbau leicht erklären läßt.

Wenn der Verf. nun weiter auch die Metalle in die Betrachtung einbezieht, und aus ihren Härten mit Hilfe der Funktion $\frac{\text{Valenz}^2}{\text{Atomvolumen}^{2/3}}$ die Anzahl Bindungselektronen und freier Elektronen berechnen will, so ist nach Ansicht des Ref. hier der Sprung doch etwas zu kühn. Verschiedentlich wird zur Durchführung dieser Betrachtungen wohl auch den Tatsachen etwas Zwang angetan. So wird für *Cu*, *Ag*, *Au* mit zwei Valenzelektronen gerechnet (S. 37), warum? Rechnet man 1 Valenzelektron, wie es doch, wenigstens für *Ag* und *Au*, unbedingt erforderlich ist, so würde man bei diesen Metallen keine freien Elektronen erhalten! Daß für C_0 freie Elektronen sich berechnen (S. 39), ist nicht verwunderlich, da dies als Voraussetzung in die Rechnung hineingesteckt wurde. Immerhin sind auch die bei den Metallen gefundenen Beziehungen, insbesondere die Zusammenhänge zu elektrischer Leitfähigkeit und Schmelzpunkten, interessant und regen zu weiteren Forschungen an.

H. Wolff.

H. F. Biggs, Wave mechanics, an introductory sketch. 8⁰. 77 S. Mit 3 Figuren. London, Humphrey Milford, Oxford University Press. 1927. Geb. sh. 4./6.

Dies Buch ist speziell für englische Physiker geschrieben, die sich mit den Grundgedanken der Wellenmechanik von Schrödinger vertraut machen wollen und denen die Lektüre der Originalabhandlungen der Sprache wegen zu mühsam werden würde. Die Darstellung stützt sich im wesentlichen auf de Broglies Arbeit in den Ann. de Phys. **10**, 3, 22, 1925 und auf die vier Schrödingerschen Abhandlungen über „Quantisierung als Eigenwertproblem" in den Ann. der Phys. 1926, **79**, 361; **79**, 489; **80**, 437; **81**, 109. Heisenbergs Matrizenmechanik wird nur gelegentlich erwähnt; die Heliumarbeiten von Heisenberg sind nicht mehr einbezogen worden.

Kapitel I bringt de Broglies Wellenauffassung der Materie, Schrödingers Wellengleichung und ihre Anwendung auf einfache Probleme der Atomphysik. Die Einleitung erwähnt kurz die Schwierigkeiten, welche der alten Quantentheorie im Wege gestanden hatten, besonders das Problem der Intensitätsberechnung von Spektrallinien, zu dessen Lösung erst die Heisenbergsche Theorie einen klaren Vorschlag brachte. Verfasser bekennt, daß ihm die Matrizenmechanik zu wenig anschaulich erscheine — ohne das Verdienst derselben um die moderne Atomlehre auch nur im geringsten schmälern zu wollen — und glaubt, „daß die wichtigsten Fortschritte in Zukunft wie in der Vergangenheit mit Hilfe von Arbeitshypothesen werden gemacht werden können, die auf unseren wohlausgefahrenen Geleisen des Denkens in Raum und Zeit hinlaufen." Es folgt eine Einführung in die Theorie von de Broglie: Das Massenteilchen als Schwingungszentrum, Wellen- und Gruppengeschwindigkeit, Frequenz der Wellen: Bohrs Quantenbedingung für Kreisbahnen läßt sich aus den fortschreitenden Wellen ableiten, wenn man die Eindeutigkeit der Wellenfunktion verlangt. Die Analogie zwischen geometrischer Optik und klassischer Mechanik führt zur Schrödingerschen Wellengleichung als dem Gegenstück der Schwingungsgleichung der Wellenoptik. Dann wird das Wasserstoffproblem kurz behandelt, Schrödingers Deutung der ψ-Funktion gegeben und gezeigt, daß für Kreisbahnen das Gebiet merklicher Ladungsdichte wesentlich mit dem der alten Bahn zusammenfällt. Breiteren Raum nimmt die Darstellung der Intensitätsberechnung und der Beweis der Auswahlregel für das Azimutalquantum ein, letzterer ist noch ein besonderer mathematischer Anhang gewidmet.

Kapitel II soll den beschreibenden Ausführungen des ersten Kapitels eine solidere mechanische Basis geben. Es möge genügen, ein paar Stichworte zu geben: Hamiltons charakteristische Funktion, Fermatsches Prinzip, Wirkungsfunktion. Der Übergang zu den Schrödingerschen Wellen gibt sich dann in bekannter Weise. Einige kurze Bemerkungen über Wentzels Photoeffektarbeit bilden den Schluß.

Bechert.

P. Gruner u. H. Kleinert, Die Dämmerungserscheinungen. (Probleme der kosmischen Physik Bd. 10.) 8⁰. VII u. 124 S. Mit 30 Fig. im Text, 6 farbigen Tafeln, einem mehrfarbigen Übersichtsblatt und 11 Tab. Hamburg, Henri Grand. 1927. M. 11.—, geb. M. 12.—.

Es fehlte bisher an einer gemeinverständlichen Darstellung des Gesamtgebietes der Dämmerungsforschung. Den Verfassern muß man dankbar sein, daß sie den gelungenen Versuch gemacht haben, diese Lücke auszufüllen. Eine Unsumme von verstreutem Beobachtungsmaterial, unter Voranstellung des schweizerischen, ist da in gedrängter Form systematisch dargestellt, auch im Ausdruck der Schönheit des Gegenstandes angepaßt. Gute Farbentafeln zeigen die wesentlichen Züge der Erscheinungen. Die Tabellen enthalten eine Fülle von Zahlenmaterial zur quantitativen Beschreibung der Vorgänge.

Nach einer Beschreibung des Normalverlaufs der Dämmerung, die dem Leser Anreiz und vorzügliche Anleitung zur eigenen Beobachtung gibt, wird auf die Haupterscheinungen der Dämmerung und ihre Abweichungen und Schwankungen näher eingegangen. Die Besprechung der hierbei wirkenden Einflüsse, besonders der Zusammenhänge in den atmosphärisch-optischen Störungsperioden, und eine elementare Darstellung der Theorie der Dämmerungsfarben schließen sich an. Der breiteste Raum ist dem Purpurlicht gewidmet, seiner räumlichen und zeitlichen Entwickelung, seiner Erklärung. Für die Höhenlage der Störungsschicht, die das Purpurlicht erzeugt, haben Beobachtungen und Theorie leider

noch keine überzeugende Angabe geliefert. Überhaupt fehlt noch sehr der Anschluß der atmosphärischen Optik an die zur Zeit so brennenden Probleme der oberen Atmosphäre. Die Überzeugung, daß diese optischen Erscheinungen uns für Aufbau und Zustand der Atmosphäre wesentliche Aufschlüsse geben werden, kann nicht mehr schwinden, seit Alfred Wegener seinen eindrucksvollen Vorstoß in dieser Richtung machte. Es ist zu erwarten, daß die von dem Gruner-Kleinertschen Buche ausgehenden Anregungen nicht nur zur Förderung der atmosphärischen Optik dienen, sondern auch den anderen aerophysikalischen Arbeitsrichtungen zugute kommen werden. Wigand.

L. Hartmann, Sind Naturgesetze veränderlich? Eine phänomenologische Untersuchung als Beitrag zur Grundlegung der Naturwissenschaften. Gr. 8°. 89 S. Halle, Max Niemeyer. 1926. M. 3.50.

Der Grundgedanke dieser Schrift ist schnell mitgeteilt. Naturgesetz ist der Ausdruck eines empirisch-notwendigen Zusammenhanges in den Dingen selbst. In der Notwendigkeit des Zusammenhanges liegt sinngemäß seine Unveränderlichkeit begründet. Was notwendig ist, ist auch unveränderlich. Eine ganz andere Frage ist, ob die Naturgesetze, die wir kennen, unveränderlich sind. Sie würden es sein, wenn sie endgültige Naturgesetze wären. Aber vermutlich sind sie nur daraus abgeleitete Zusammenhänge und als solche veränderlich. Um diesen Grundgedanken herum gruppiert sich dann noch zur Begründung und Vertiefung eine Reihe von Untersuchungen über Wirklichkeit, Notwendigkeit, Möglichkeit, Erfahrung, Induktion, Kausalität u. a. Über den Grundgedanken selbst kann man streiten. Mir scheint die schwache Stelle darin zu liegen, daß der Verf. die Unterscheidung zwischen empirischer und echter Notwendigkeit nur den Weg oder die Sicherheit der Erkenntnis betreffen läßt, nicht die Art der Notwendigkeit selber (S. 43), daß also, anders ausgedrückt, alle echte Notwendigkeit von demselben Typus ist. Ich glaube, daß sich aus der wesentlich verschiedenen Struktur von Gegenstandsgebieten auch der wesentlich verschiedene Typ der in ihnen bestehenden Notwendigkeit folgern läßt. Dann könnte man nicht ohne weiteres mehr von einem notwendigen Zusammenhang zwischen Notwendigkeit und Unveränderlichkeit sprechen. Indes soll dieses Bedenken nicht abhalten, die Schrift jedem Physiker zu empfehlen. Es steckt echte Philosophie darin, nicht solche Scheinphilosophie, wie sie leider dem Physiker in dem letzten Jahrzehnt so oft geradezu aufgedrängt wird. Er kann daraus ersehen, daß an Dinge, die er mit Recht in seinen Bereich zieht, auch noch eine ganz andere Art von Fragen gestellt werden müssen, als er sie stellt. Aloys Müller.

E. T. Whittaker, Einführung in die Theorie der optischen Instrumente. Nach der 2. Aufl. übersetzt von A. Hay. 8°. VI u. 104 S. Mit 43 Fig. Leipzig, J. A. Barth. 1926. M. 6.—.

In gedrängter Kürze behandelt das Buch die Grundlagen der geometrischen Optik und ihre Anwendung beim Bau der optischen Instrumente. Das erste Kapitel, „Bildlage und Bildgröße" benannt, führt zunächst in die Gesetze der idealen geometrisch-optischen Abbildung ein, gibt dann eine Erklärung des Astigmatismus schiefer Büschel auf Grund der für die trigonometrische Durchrechnung dienenden Formeln und erläutert endlich die Wirkungen der Apertur- und Gesichtsfeldblenden und den Begriff der Vergrößerung bei den verschiedenartigen Instrumenten. Im zweiten Kapitel werden die Bildfehler Astigmatismus, sphärische Aberration, Koma, Sinusbedingung, Bildfeldwölbung, Verzeichnung und Farbenfehler in analytischer Form nach den Arbeiten von Abbe, Clausius, Helmholtz, Herschel, Petzval und Seidel dargestellt, woran sich die Behandlung des Auflösungsvermögens des Fernrohrobjektivs und des Spektroskops anschließt. Den Schluß des Buches bildet im 3. Kapitel ein „Kurzer Abriß über die wichtigsten optischen Instrumente", der aber im Hinblick auf die vorhergehenden Abschnitte und auf den Titel des Buches etwas zu knapp gehalten ist. Infolgedessen stellt das vorliegende Buch mehr einen Abriß der Theorie der geometrisch-optischen Abbildung dar als eine Einführung in die Instrumentenkunde; zur Orientierung über die theoretischen Belange der optischen Abbildungslehre ist das Buch sehr geeignet, da es trotz starker Zusammenfassung doch weitgehend über alle wesentlichen Gesetze berichtet. Die Anwendung der Theorie auf den Bau und die Wirkungsweise der optischen Instrumente findet sich eingehender in den einschlägigen Werken deutscher Autoren. Klughardt.

W. Schwinning u. K. Matthaes, Die Bedeutung der Kerbschlagprobe. 4°. 13 Seiten mit 45 Abb. Deutscher Verband für die Materialprüfung der Technik, Nr. 78.

Da bei Gewaltbrüchen die Formänderungsfähigkeit des Werkstoffs maßgebend ist, muß sich das Prüfverfahren diesen Bedingungen anpassen. Dafür ist nun der gewöhnliche Zerreißversuch nicht geeignet, sondern nur die Kerbschlagprobe, da sie zeigt, ob ein Werkstoff unter bestimmten Versuchsbedingungen zum vorzeitigen Trennungsbruch neigt. Zur Erfassung der Vorgänge, die den Übergang vom Verfestigungs- zum Trennungsbruch bestimmen, wurden Versuche an verschiedenen Stählen bei verschiedenen Temperaturen und Kerbformen zwecks Aufstellung des Diagramms: Biegekraft — Durchbiegung unter Aufnahme des Weg-Zeit-Schaubildes der Hammerbewegungen angestellt. Sie zeigten, daß die Neigung zum vorzeitigen Trennungsbruch durch höhere Formänderungsgeschwindigkeit, stärkere Kerbwirkung und Erniedrigung der Temperatur begünstigt wird. Gerade aus diesen Gründen empfiehlt sich auch der versuchstechnisch leicht durchzuführende Kerbbiegeschlagsversuch. Die Neigung zum Trennungsbruch läßt sich entweder durch Bestimmung des Grades der Kerbwirkung oder der kritischen Temperatur, die ihn unter sonst gleich bleibenden Bedingungen herbeiführt, bestimmen. Damit die erhaltenen Zahlenwerte vergleichbar sind, müssen die Proben gleiche Kerbenform und gleichen Querschnitt erhalten, weshalb die Normung der Proben notwendig wäre. Empfohlen wird hierfür der vom Verband für die Materialprüfungen der Technik vorgeschlagene Dreieckskerb mit schwacher Abrundung im Grunde, der sich auch leicht genau herstellen läßt. Bei diesem trat der typische Einfluß der Kerbwirkung am besten hervor. Berndt.

R. Briske, Die Erdbebensicherheit von Bauwerken. Gr. 4°. 32 S. Mit 80 Fig. Berlin, W. Ernst & Sohn. 1927. M. 5.—.

Die vorliegende Schrift, die einen erweiterten Sonderabdruck aus der Zeitschrift „Die Bautechnik"

bildet, ist zwar zunächst für den Baufachmann bestimmt; sie bietet aber auch dem Physiker und dem Geophysiker viel Bemerkenswertes. Die Arbeit ist in Japan entstanden und fußt auf den Erfahrungen am großen Erdbeben vom 1. September 1923, der weitaus verheerendsten Katastrophe aus geschichtlicher Zeit. An Hand der seismologischen Tatsachen räumt der Verfasser mit dem noch vielverbreiteten Vorurteil auf, als ob Erdbeben eine höhere Gewalt sei, welcher der Baumeister ziemlich hilflos gegenüberstehe, und zeigt an sorgfältigen und vorsichtigen Berechnungen, daß gerade die genaue Kenntnis der seismologischen Erscheinungen uns schon heute instand setzt, ohne übermäßigen Aufwand erdbebensicher zu bauen. Die beigegebenen Abbildungen aus dem japanischen Erdbebengebiet werden auch auf den Nichtfachmann Eindruck machen.

R. Grammel.

P. Luckey, Nomographie, praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln. 2. Aufl. (Mathematisch-physikalische Bibliothek Bd. 59/60.) Klein 8⁰. 108 S. Mit 57 Fig. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. Kartoniert M. 2.40.

Die Nomographie teilt mit der Vektorrechnung das Schicksal, daß sie von denen, die sie nicht kennen, zumeist nicht ganz ernstgenommen wird. Dieses Büchlein, das einen vollständigen Lehrgang der Nomographie bringt, wird mit seiner anspruchslosen und darum sehr ansprechenden Form viel dazu beitragen, jenes Vorurteil allmählich zu beseitigen. Die geschickt gewählten Beispiele aus Physik und Technik müssen auch den verstocktesten Leser, wenn er nur erst einmal das Büchlein in die Hand nimmt, von der großen Fruchtbarkeit der nomographischen Methoden überzeugen und ihm klar zeigen, wie schwerfällig er arbeitet, wenn er sich bei seinen graphischen Darstellungen immer nur auf das alte Abc beschränkt und ahnungslos an den eleganten Möglichkeiten vorübergeht, die ihm die Nomographie bereithält. Die übersichtliche Zusammenstellung aller Schlüsselgleichungen am Schlusse des Büchleins setzt jeden Leser, auch wenn er noch keinen Überblick über die Gesamtheit der nomographischen Methoden hat, instand, für jeden ihm begegnenden Einzelfall rasch und sicher die rationellste Nomogrammform zu finden.

R. Grammel.

A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. 2. Auflage. 8⁰. IX und 251 S. Mit 38 Textabbildungen. Berlin, J. Springer. 1927. M. 15.—, geb. M. 16.50.

Die Tatsache, daß das vorliegende Buch jetzt schon in zweiter Auflage erscheint, ist ein Beweis für das Interesse, welche dieses bei den Mathematikern gefunden hat. Es erübrigt sich hier auf die Bedeutung des Buches für die reine Mathematik einzugehen. Für den Physiker ist von Interesse, daß in der neuen Auflage das für ihn wichtige Kapitel über Kristallklassen jetzt besonders leicht zugänglich gemacht ist durch eine ausführliche Diskussion der ebenen Gitter bzw. der Ebenensymmetrien. Der Verfasser fand die überraschende Tatsache, daß die hier einschlägigen Probleme schon von den Ägyptern in ihrer Ornamentik gelöst worden sind, was in der Einleitung zum Buche näher ausgeführt wird. So wird denn auch der Physiker in dem Buch nicht nur Anregendes, sondern auch für ihn Wichtiges finden.

Hilb.

H. Guthmann, Physikalische Grundlagen der Lichttherapie. Gr. 8⁰. VIII u. 216 S. Mit 178 Figuren und 1 farbigen Tafel. Berlin, Urban & Schwarzenberg. 1927. M. 12.—, geb. M. 14.—.

In diesem zehnten Sonderbande der Strahlentherapie liegen die Ergebnisse langjähriger Arbeit des Verfassers vor und sind wohl dazu geeignet, einem Desideratum der medizinischen Physik gerecht zu werden. Zur Darstellung gelangen die benutzten Meßmethoden, die Ausbreitung des Lichtes bei den praktisch gebräuchlichen Lichtquellen (Metallfaden- und Quarzquecksilberdampflampe), die Beeinflussung der Oberflächendosis durch die Form der Belichtungsobjekte, die Reflexion des Lichtes an der Hautoberfläche, das Verhalten des Lichtes in optisch trüben Medien, die spektralen Absorptionsverhältnisse in Körperbaustoffen, die Tiefenwirkung des Lichtes am lebenden Organismus und einiges über die Abhängigkeit des Hauterythems von der Wellenlänge des auffallenden Lichtes.

Für den Physiker ist diese in sich zusammenhängende Arbeit insofern wertvoll, als sie Gelegenheit bietet, sich außerordentlich eingehend und gut über die Probleme der Lichttherapie in physikalischer Hinsicht zu informieren. Mancherlei Anregung ist in dem mit guten Abbildungen und Kurven reichlich versehenen Buche zu finden. Angaben über die berücksichtigte Literatur fehlen leider vollständig.

E. Albrecht.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1928.

Universität Basel. Hagenbach: Experimentalphysik I, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerückte, tägl., für Anfänger (mit Veillon), 8, für Mediziner und Ärzte, 2; Das physikalische Weltbild, 1; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2*g*. — **Matthies:** Strahlungs- und Quantentheorie, 5, Übungen, 1; Mathematisch-physikalisches Seminar, 1; Kinetische Gastheorie, 2. — **Veillon:** Handfertigkeitspraktikum (mit Zickendraht), 2; Radioaktivität und Atombau, 1. — **Zickendraht:** Magnetismus und technische Anwendungen, 2; Elektrische Meßinstrumente, 1. — **Zehnder:** Geschichte der Physik, neuere Zeit, 1; Elektrotechnik, Schwachstrom ohne Radio, 1. — **Bürki:** Photographische Chemie, 1; Photographisch-chemisches Praktikum, für Anfänger und Vorgerückte, 3. — **Erlenmeyer:** Gasanalyse, 1, Übungen, 1. —

Technische Hochschule Berlin. Hertz: Experimentalphysik, 4; Physikalische Übungen, 4; Ausgewählte physikalische Übungen für Vorgeschrittene, 8. — **Kock:** Physikalische Übungen, 8; Oszillographen und Kurvenzeichner, 2; Drahtlose Telegraphie und Telephonie I und II, 4; Radiotelegraphisches Kolloquium: Besprechung neuer Arbeiten, Stationsbetrieb usw., 14tägig, nach Verabredung *g*; Radiotelegraphisches Laboratorium, 12; Meßmethoden der drahtlosen Telegraphie und Hochfrequenztechnik, 2. — **Krigar-Menzel:** Allgemeine Mechanik II: Elastizität und Hydrodynamik, 4; Kinetische Gastheorie, 2. — **Becker:** Neuere Probleme der Quantentheorie, 2; Methoden der theoretischen Physik, 5; — **Schachenmeier:** Ausgewählte Probleme aus der theoretischen Physik, 1. — **Cranz:** Ausgewählte Kapitel aus der technischen Physik, 1¾; Übungen zur technischen Physik, 4. — **Angenheister:** Ein-

führung in die Geophysik II, 2; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung. — **Kassner:** Verteilung der Niederschläge auf der Erde nach Ursache, Menge und Häufigkeit, 1. — **Korn:** Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität, 1; Potentialtheorie, 2. — **Leithäuser:** Messungen an Elektronenröhren und -sendern, 1. — **Luyken:** Erdmagnetismus, 1. — **Engl:** Dynamik der Flüssigkeiten und Gase, 2; Technik der Röntgenstrahlen, 1. — **Pirani:** Einführung in die theoretische Behandlung chemischer und physikalischer Probleme mit besonderer Berücksichtigung graphischer Methoden I, 2, Übungen, 1. — **Gehlhoff:** Photometrie, 1. — **Weidert:** Geometrische Optik, 2; Seminar für Optisches Rechnen, 2; Optische Instrumentenkunde, 2; Übungen im Gebrauch optischer Instrumente, 2 oder 4. — **H. R. Schulz:** Polarisationsapparate und Refraktometer, 1. — **Seegert:** Handfernrohre und bildaufrichtende Prismensysteme, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Spektroskopie, 2. — **Richter:** Entwerfen von Linsen- und Prismenanordnungen, 1. — **Breisig:** Theorie der Anlaufvorgänge nach Heaviside, 2. — **Wagner:** Die theoretischen Probleme der elektrischen Nachrichtentechnik II, 2. —

Universität Bern. Greinacher: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Optik, 5, Ergänzungen, 1; Physikalische Optik, 1; Repetitorium der Physik, 1; Physikalisches Kolloquium (mit Gruner), nach Verabredung, *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 4, für Vorgerücktere, 3 halbe Tage; Physikalisches Vollpraktikum, tägl. — **Gruner:** Thermodynamik, 4; Relativitätstheorie, 2; Seminar für theoretische Physik, 2. — **Koestler:** Anwendung der Mathematik auf Physik und Chemie, Statistische Methoden (Fortsetzung), 1—2; Anwendung der Mathematik auf Biologie, 1—2; Das elektrische Feld und seine Anwendungen, 1—2; Die Methode der virtuellen Verrückungen zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme, 1. —

Universität Bonn. Konen: Experimentelle Elektrizitätslehre, 3; Experimentelle Optik, 2; Physikalische Übungen für Anfänger, 9, für Fortgeschrittene, . tägl.; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Pflüger, Eversheim, Grebe und Mecke), 2. — **Pflüger:** Theorie der Wärme, 4, Übungen, 1. — **Eversheim:** Die Entwicklung der Kraftmaschine von der Dampfmaschine bis zum Flugzeugmotor, 2; Physikalische Technologie, 2; Physikalische Übungen für Anfänger (mit Mecke), 3. — **Grebe:** Physik der Röntgenstrahlen, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Mecke:** Hydrodynamik und Elektrizitätstheorie, 3; Einführung in das physikalische Praktikum für Anfänger, 1. —

Technische Hochschule Braunschweig. Diesselhorst: Experimentalphysik II: Experimentelle Dynamik und Hydrodynamik, 2, III: Wärme, Mol.-Phys., Optik, 2; Ausgewählte Abschnitte aus der theoretischen Physik, 1; Vektorrechnung, mit Anwendungen, insbesondere aus der Mechanik, 2; Physikalisches Praktikum I und II; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Bergwitz:** Radioaktivität mit Anwendungen, mit Versuchen, 2; Physik der Röntgenstrahlen, 1; Elektronisch-radiologisches Praktikum, 1 Nachmittag. —

Universität Breslau. Schaefer: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum (mit Senftleben, Bartels und Bergmann), 3 oder 6, für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3, für Fortgeschrittene (mit Steubing, Senftleben, Bartels, Bergmann), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Reiche, Steubing und Waetzmann), 2. — **Reiche:** Theoretische Optik, 5, Seminar, 1 *g*. — **Steubing:** Photographie für Fortgeschrittene, 1; Vakuumtechnik, 1; Seminaristisch-didaktische Übungen, 2; Photographische Übungen, 3. — **Jüttner:** Spezielle Relativitätstheorie, 2. — **Bartels:** Mechanik der Kontinua: Elastizitätstheorie, 3. — **Bergmann:** Hochfrequenzmeßtechnik, 1; Hochfrequenzpraktikum, 2 *g*. — **Senftleben:** Kinetische Theorie der Gase, 2. —

Technische Hochschule Breslau. Waetzmann: Experimentalphysik II, 2; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3; Physikalisches Zwischenpraktikum, 6; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Schaefer), 2; Physikalisches Seminar, nach Verabredung; Kolloquium über technisch-physikalische Fragen (mit Noether), nach Verabredung. — **Schaefer:** Experimentalphysik II, nach Verabredung. — **N. N.:** Aerostatik, nach Verabredung; Die Entwicklung der Luftfahrt, nach Verabredung. —

Technische Hochschule Brünn. Lohr: Allgemeine und technische Physik: Geometrische Optik, Wärmelehre, Akustik, $3^1/_2$; Physikalisches Praktikum, 3 und 2. — **Schoklitsch:** Meteorologie und Klimatologie, 3. —

Bergakademie Clausthal. Valentiner: Experimentalphysik II: Wärme und Optik, 5; Physikalisches Praktikum, 3; Physik im Bergbau, 1; Kolloquium (mit Birckenbach), 2 *g*. — **Rössiger:** Geophysikalische Meßmethoden, 1; Geophysikalisches Praktikum, 2. —

Technische Hochschule Danzig. Ramsauer: Experimentalphysik II, 5, Ergänzungen, 1; Kleines physikalisches Praktikum, $7^1/_2$; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene I (mit Buchwald), halbtägig, II, tägl.; Demonstrationspraktikum (mit Wolf), 8; Physikalisches Kolloquium (mit Buchwald), 1 *g*. — **Buchwald:** Theorie des Lichts, 4; Übungen, 2 *g*. — **Kalähne:** Einführung in die Radio- und Elektrophysik, 1; Photographie und Reproduktionsverfahren, 1; Ausgewählte Kapitel der Spektroskopie, 2; Übungen in Photographie und Reproduktionsverfahren I, für Anfänger, 3, II, für Fortgeschrittene, tägl.; Großes radio- und photophysikalisches Praktikum, tägl.; Radio-Praktikum I und II, 4. — **Koschmieder:** Dynamische Meteorologie, 3; Luftelektrizität, 2; Meteorologisches Kolloquium, 1 *g*. — **Wolf:** Einführung in das kleine physikalische Praktikum, 1, Ergänzungen über praktisches Rechnen, nach Verabredung, *g*. — **Brüche:** Ausgewählte Kapitel aus der Radiologie, 1. —

Technische Hochschule Darmstadt. Rau: Experimentalphysik unter besonderer Berücksichtigung der technischen Anwendungen: Elektrostatik, Elektromagnetismus, Strahlungserscheinungen, Atomphysik, 5; Physikalische Übungen, 3 Nachmittage, für Fortgeschrittene, 4 halbe Tage; Ausgewählte Kapitel aus der Physik, 1; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik, nach Verabredung; Physikalisches Kolloquium, 1 *g*. — **Zeissig:** Experimentalphysik: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Akustik, 3; Physikalische Meßkunde und Apparatebau, 2; Kolloquium in technischer Physik (mit Reutlinger), 1; Arbeiten aus

der technischen Physik, nach Verabredung. — **Baerwald:** Elektromagnetische Lichttheorie und Optik, 4. — **Knipping:** Physikalisches Seminar für Fortgeschrittene, 2. — **Georgii:** Allgemeine Flugmeteorologie, 2; Allgemeine Meteorologie, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Physik der freien Atmosphäre, 1; Meteorologisch-aerologisches Praktikum, Meßflüge, 3. — **Limmer:** Photographische Übungen A, für Anfänger, 3, für Fortgeschrittene, 6, B, 3; Photographische Chemie und Chemikalienkunde, 1; Ausgewählte Kapitel aus dem Gesamtgebiete des Lichtbildwesens, 2; Photographische Ausflüge, 3; Farbenphotographie, verbunden mit praktischen Übungen, 1. —

Universität Erlangen. Gudden: Experimentalphysik I, 5; Besprechung physikalischer Tagesfragen (mit Reiger), 1 *g*; Anfängerübungen, 4, Übungen für Fortgeschrittene, 20; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Reiger:** Theoretische Physik: Wärme, 4; Elektrotechnische Übungen, 3; Wissenschaftliche Arbeiten, 40. — **Rump:** Physik der Röntgenstrahlen, 1. — **N. N.:** Experimentalphysik III, 2. —

Universität Frankfurt a. M. Wachsmuth: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Elektrizitätsleitung in Gasen, 1; Repetitorium der Experimentalphysik II, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 6, für Fortgeschrittene: Physikalisches Seminar, tägl., für Mediziner, 2; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten (mit Meißner), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Meißner und Madelung), 14tägig, 2. — **Madelung:** Mechanik der Kontinua, 4, Übungen, 1; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Meißner:** Höhere Experimentalphysik III: Optik, 3, Übungen, 1; Der photoelektrische Effekt, mit Experimenten, 1. — **Seddig:** Photographisches Praktikum, 8; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie, tägl.; Projektionsübungen und Übungen im Anstellen von Vorlesungsversuchen, 3; Wissenschaftliche Photographie, 3. — **Déguisne:** Elektrische Wechselströme, 3; Drahtlose Telegraphie und Telephonie, 1; Seminar für Fortgeschrittene, 1; Kleines elektrotechnisches Praktikum, 3 oder 6; Großes elektrotechnisches Praktikum, 6 halbe Tage; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Kolloquium über angewandte Physik (mit Dessauer), 2. — **Dessauer:** Bau und Betrieb von Röntgenapparaten, $1^1/_2$; Physikalische Dosimetrie der Röntgenstrahlen, 1; Medizinische Optik: Mikroskope, endoskopische Instrumente, Thermo- und Lumineszenzstrahlung und ihre therapeutische Anwendung, 1; Kolloquium für medizinische Physik: Lektüre und Besprechung neuerer Arbeiten und Probleme des Gebietes, 2; Wissenschaftliche Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. — **Linke:** Sonnen- und Himmelsstrahlung, 2; Probleme der Bioklimatologie, 1; Meteorologische Übungen für Anfänger (mit Stüve), 1 Nachmittag; Seminar für theoretische Meteorologie (mit Stüve), nach Verabredung. — **Gutenberg:** Ozeanographie, 1; Geophysikalische Übungen für Fortgeschrittene, 2. — **Stüve:** Synoptische Meteorologie, 2; Meteorologische Instrumente und Beobachtungen, 1. —

Bergakademie Freiberg. Brion: Elektrotechnik, 3; Elektrotechnisches Praktikum, 2; Experimentalphysik, 4; Physikalisches Praktikum, 2; Elektrisches Kolloquium, nach Verabredung. — **Witte:** Radioaktives Praktikum, 3. —

Universität Freiburg i. Br. Mie: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5, Mathematische Ergänzungen, 2; Physikalische Übungen, 6, für Fortgeschrittene (mit Kast), 12; Kleines physikalisches Praktikum, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches und physikalisch-chemisches Kolloquium (mit v. Hevesy), 2 *g*. — **Koenigsberger:** Mathematische Physik: Elektromagnetismus, mit Übungen, 4; Elemente der Quantentheorie, 1 *g*; Übungen aus der angewandten Geophysik, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Cohn:** Mechanik der deformierbaren Körper, 3. — **Hammer:** Praktische Röntgenkunde für Mediziner, 1; Elektrizität in Gasen: Elektrische Entladungen, Kathodenstrahlen usw., 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus dem Gebiet der Radiologie, tägl. — **Lyon:** Photographische Meßmethoden, 1. — **Kast:** Die experimentellen Grundlagen der Quantentheorie, 3. —

Universität Freiburg (Schweiz). Joye: Experimentalphysik, 5; Mathematische Physik: Elektrizität, 2; Physikalische Ergänzungen, 2; Repetitorium, 1; Physikalisches Laboratorium für Anfänger, 12; Praktische physikalische Übungen, 2; Physikalisches Laboratorium für Fortgeschrittene, jeden Nachmittag, außer Montag; Untersuchungsarbeiten, tägl. —

Universität Gießen. König: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Großpraktikum: Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten (mit Cermak), tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Anfänger-Praktikum (mit Cermak), 6; Physikalisches Praktikum (mit Cermak), 3; Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14tägig, 2 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Jaffé und Cermak), 14tägig, 2. — **Jaffé:** Maxwellsche Theorie, 4; Neuere Arbeiten über theoretische Physik, 1; Übungen zur theoretischen Physik, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Fromme:** Synoptische Meteorologie: Das Wetter, 4. — **Cermak:** Höhere Experimentalphysik: Röntgenstrahlen und γ-Strahlen, 1; Handfertigkeitspraktikum, 3; Elektrotechnische Übungen (mit Uller), 2. — **Uller:** Anleitung zu selbständigen theoretisch-physikalischen Arbeiten, tägl. —

Universität Göttingen. Franck: Quantensprünge und chemische Bindung, 1; Physikalisches Praktikum, 4 und 7; Physikalisches Seminar (mit Born), 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten (mit Born), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Born, Pohl und Reich), 2. — **Born:** Kinetische Theorie der Materie, 4, Übungen, 1; Seminar über Struktur der Materie (mit Hilbert), nach Verabredung. — **Pohl:** Experimentalphysik I: Mechanik, Schwingungslehre, Wärme, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Hertz:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4, Übungen, 1. — **Oldenberg:** Röntgenspektroskopie, 1. — **Rupp:** Physik der Molekularkräfte, mit Experimenten, 1. — **Frl. Sponer:** Das periodische System im Lichte moderner Forschung, 1. — **Sommer:** Spektroskopie und Atombau, 1. — **Jordan:** Ergebnisse und Aufgaben der Quanten-Elektrodynamik, 2. — **Reich:** Ausgewählte Kapitel aus der angewandten Elektrizität, mit Experimenten, 2; Elektrophysikalisches Praktikum, 3; Seminar über angewandte Elektrizität, 2 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Prandtl:** Einführung in die Thermodynamik, besonders technische Thermodynamik, 4; Festigkeitspraktikum (mit Lode), 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Mechanik, tägl.; Kolloquium über Fragen der angewandten Mechanik (mit Betz und Schuler), 14tägig, 2 *g*. — **Betz:**

Hydraulik, 1; Denk- und Rechenübungen zur Mechanik, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, tägl. — **Schuler:** Anwendung der Kreiselgesetze in Astronomie, Physik und Technik, 2; Übungen zur Anwendung der Mechanikgesetze, 2. —

Technische Hochschule Graz. Kohlrausch: Physik III: Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum, 6. —

Universität Halle. N. N.: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Elektrische Schwingungen und Wellen, 1; Physikalisches Praktikum, 6, 3 und 2; Anleitung zu selbständigen physikalischen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **N. N.:** Theoretische Physik I, 4; Übungspraktikum für angewandte Physik, 6; Technisch-wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Hanle:** Die Bohrsche Atomtheorie, 1; Grenzgebiete zwischen Physik und Chemie, 1; Physikalisches Proseminar, 2 *g*. — **Bernstein:** Industrie und Technik in der Gegenwart, 2 *g*. —

Universität Hamburg. Koch: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 4; Physikalisches Praktikum (mit Goos, Müller und Minkowski), 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, ganztägig; Physikalisches Kolloquium (mit Lenz, Möller und Stern), 2. — **Lenz:** Elektrodynamik, 4, Übungen, 2; Ergänzungen zur Mechanik: Kreisel, Flug u. a., 1; Theoretisch-physikalisches Vortragsseminar (mit Stern), 2. — **Minkowski:** Das Atom, 2. — **Goos:** Spektroskopie II, 1. — **Jensen:** Die verschiedenen atmosphärisch-elektrischen Entladungsformen, 1; Die anomale Schallausbreitung in der Atmosphäre, 1. — **Schott:** Geophysikalisches Kolloquium (mit Tams und Kuhlbrodt), 14tägig, $1^1/_2$ *g*. — **Tams:** Die geophysikalischen Grundlagen der Entwicklung des Erdantlitzes, 2; Seismische Übungen, 2. — **Kuhlbrodt:** Wetter und Wettervorhersage: Synoptische Meteorologie, 2. — **Gordon:** Vektor- und Tensorrechnung mit Anwendungen, 2. — **Estermann:** Physikalisches Proseminar (mit Minkowski), 2; Radioaktivität II, 2. — **Müller:** Anleitung zur Ausführung von physikalischen Schulversuchen, 2. — **Salzmann:** Übungen im Glasblasen, 2. — **Levi-Civita:** Kanonische Gleichungen der Mechanik, 3 Vorträge. — **Möller:** Drahtlose Telegraphie mit Demonstrationen, 2, Übungen, 1; Maschinenlehre II: Elektrische Maschinen, 1; Seminar über technische Mechanik, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Elektrotechnisches Praktikum, 5. —

Technische Hochschule Hannover. Precht: Experimentalphysik, 4, Physikalisches Praktikum, 4; Arbeiten im physikalischen Laboratorium für Fortgeschrittene, ganz- und halbtägig; Physikalisches Kolloquium (mit Herweg), 2. — **Herweg:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II, 2, Übungen 1; Drahtlose Telegraphie und Telephonie II, 2; Hochfrequenzpraktikum für Fortgeschrittene, 2. —

Universität Heidelberg. Lenard: Experimentalphysik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker und Schmidt), 6; Physikalisches Seminar und theoretisch-physikalische Übungen (mit Becker), 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten im Physikalischen und Radiologischen Institut (mit Becker und Schmidt), tägl. außer Sonnabend. — **Becker:** Theoretische Optik, 4; Schwingungsprobleme, 1. — **Schmidt:** Radiologie: Phosphoreszenz und Fluoreszenz, 2. —

Landwirtschaftliche Hochschule Hohenheim. Wigand: Experimentalphysik einschließlich Meteorologie und Klimatologie II, 4; Physikalische Übungen, 2; Physikalische und meteorologische Arbeiten für Vorgeschrittene, *g*. —

Universität Innsbruck. Lerch: Experimentalphysik II, 5; Physikalisches Praktikum, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, 10 *g*. — **Hammerl:** Elektrische Energieverteilung, 2. — **March:** Mechanik deformierbarer Körper, 5; Seminarübungen, 2 *g*. — **Wagner:** Meteorologische Optik und Sonnenstrahlung, 3; Erdmagnetismus, 2; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, 10 *g*. — **Oberguggenberger:** Behandlung moderner Fragen der Astrophysik, 1. —

Universität Jena. Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum (mit v. Angerer), 4 und 3, für Fortgeschrittene, mit Seminar (mit Joos und v. Angerer), 10; Leitung physikalischer Spezialaufgaben (mit Auerbach, Straubel, Joos, v. Angerer und Busch), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Esau und Joos), 2 *g*. — **v. Angerer:** Experimentalphysik für Fortgeschrittene: Mechanik, 2. — **Auerbach:** Geometrische Optik und Theorie der optischen Instrumente, 3; Die graphische Darstellung, 1. — **Joos:** Theorie des Lichts, 3; Theoretisch-physikalisches Seminar: Übungen, 1; Relativitätstheorie, 2; Vortragsseminar für höhere Semester, 1 *g*. — **Bauersfeld:** Beleuchtungstechnik, 1. — **Esau:** Theorie und Anwendung der Elektronenröhre, 2; Technische Thermodynamik, 2; Kraftmaschinen für Landwirte, 1; Technisch-physikalisches Praktikum, 3; Großes technisch-physikalisches Praktikum, tägl.; Technisch-physikalisches Seminar, nach Verabredung *g*. — **N. N.:** Einführung in die Theorie des Mikroskops, mit Übungen, 2; Benutzung des Polarisationsmikroskops bei histologischen Untersuchungen, $1^1/_4$. — **Siedentopf:** Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroskopie, mit Übungen, 1. — **Köhler:** Mikrophotographie, 1. — **Hecker:** Praktische geophysikalische Übungen, nach Verabredung. — **Sieberg:** Kräfte des Erdkörpers II, 1. —

Universität Kiel. Geiger: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Besprechung neuerer physikalischer Fragen, für Doktoranden, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Zahn), für Vorgeschrittene, 8; Forschungsarbeiten (mit Kossel), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Kossel und Zahn), $1^1/_2$ *g*. — **Kossel:** Mechanik, 4, Übungen, 1; Ausgewählte Fragen der theoretischen Physik, für Vorgeschrittene, 1 *g*. — **Zahn:** Ergänzungen zur Experimentalphysik: Vorführung und Besprechung ausgewählter Versuche, 2. — **Martienssen:** Mechanische und elektrische Schwingungen und ihre technischen Anwendungen, 2. — **Hans Schmidt:** Anleitung zu physikalischen Schülerübungen, 1. —

Universität Köln. Rinkel: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 8; Großes physikalisches Praktikum, 28. — **Försterling:** Optik, 4; Wissenschaftliche Arbeiten für theoretische Physik, tägl.; Kolloquium über neuere physikalische Arbeiten (mit Rukop), 2 *g*. — **Rukop:** Vakuumtechnik, Gasentladungen und deren praktische Anwendungen, 3; Drahtlose Telephonie, Bildtelegraphie, Fernsehen, 1 *g*; Experimentelle Untersuchungen für Fortgeschrittene (Praktikum), tägl. — **Malsch:** Optische Meßmethoden und Meßinstrumente, mit Übungen, 2. — **Wever:**

Einführung in die Physik der Metalle und ihrer Legierungen, 2. —

Universität Königsberg. Kaufmann: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, 2; Physikalisches Praktikum (mit Gans), 3; Physikalisches Kolloquium (mit Gans), 14tägig, 2 g; Physikalisches Proseminar (mit Gans, Hoffmann und Kretschmann), 14tägig, 2*g*. — **Gans:** Mechanik, 4; Übungen zur theoretischen Physik, 1 *g*; Selbständige Arbeiten in experimenteller und theoretischer Physik für Fortgeschrittene, ganztägig. — **Hoffmann:** Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, 2, III: Optik, 3; Physikalische Übungen, 1. — **Kretschmann:** Quantentheorie der Serienspektra, 4. —

Universität Leipzig. Debye: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Höhere Physik, experimentelle und mathematische Ergänzungen zur allgemeinen Experimentalphysik, 1; Physikalisches Praktikum (mit Möbius und Kämpf), 3 halbe Tage, für Fortgeschrittene (mit Marx, Schiller, Karolus, Möbius und Kämpf), 3 halbe Tage, für Mediziner, Veterinärmediziner, Zahnärzte und Pharmazeuten (mit Möbius und Kämpf), 3; Selbständige physikalische Arbeiten (mit Marx, Schiller, Karolus, Möbius und Kämpf), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Heisenberg), $1^1/_2$*g*. — **Heisenberg:** Mechanik, 3, Übungen, 1 *g*; Moderne Probleme der Atomphysik, 1; Selbständige theoretisch-physikalische Arbeiten (mit Wentzel und H. Schmidt), tägl.; Seminar über die Struktur der Materie (mit Wentzel), 2 *g*. — **Marx:** Neuere Ergebnisse der radioaktiven Forschung, 2; Radiologisches Praktikum, 2. — **Schiller:** Flugtechnik, 2. — **Karolus:** Fernmeldetechnik: Telegraphie und Telephonie, 2, Übungen, 3. — **Wentzel:** Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften: Differential- und Integralrechnung, 3, Übungen, 1 *g*; Relativitätstheorie, 1. — **Möbius:** Röntgenstrahlen, 1 oder 2. — **Kämpf:** Repetitorium der Physik, 2. — **H. Schmidt:** Analytische Hydrodynamik, 3. — **Weickmann:** Die Erforschung der höheren Luftschichten: Aerologie, 2 *g*; Theorie der Wellen in elastischen Medien (mit Anwendung auf seismische, hydrographische und meteorologische Fragen), 2; Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl. *g*; Geophysikalisches Praktikum, 3; Geophysikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. —

Universität Marburg. Grüneisen: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Tomaschek), 6, für Mediziner, 3, für Fortgeschrittene: Leitung wissenschaftlicher Arbeiten (mit Schulze und Tomaschek), tägl. — **Schulze:** Theorie der Wärme, 5; Einführung in die theoretische Physik: Mechanik starrer, deformierbarer, flüssiger Körper, Wärme, 2; Theoretisch-Physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Berek:** Photographische Optik, 1; Kristalloptik und Polarisationsmikroskopie, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten: Abbildungstheorie und angewandte Optik, nach Verabredung, *g*. — **Tomaschek:** Atomphysik II: Atombau und Spektraleigenschaften, 2. —

Universität München. Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Schall, Wärme, 5; Physikalische Übungen, 4 oder 8; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Übungen für Fortgeschrittene, ganztägig. — **Sommerfeld:** Optik, 4, Übungen, 2 *g*; Ausgewählte Fragen der Wellenmechanik, für Vorgeschrittene, 2; Seminar, 2 *g*. — **Schmauss:** Meteorologie II: Wettervorhersage, 2; Wetter, Klima und Mensch, 2; Meteorologisches Kolloquium, 1 *g*. — **Graetz:** Einleitung in die theoretische Physik II, 4, Übungen, 1. — **Rüchardt:** Höhere Experimentalphysik: Ausgewählte Kapitel des Atomismus und der Elektronik, mit Experimenten, 3; Seminar über neuere Fragen der Experimentalphysik (mit Kirchner), $1^1/_2$*g*. — **Kirchner:** Lichtquanten und Elektronen, 1. — **Ott:** Zerstreuung von Licht und Röntgenstrahlen, 2. — **N. N.:** Funktionen der mathematischen Physik, 3.

Technische Hochschule München. Zenneck: Experimentalphysik II: Elektromagnetisches Feld, elektromagnetische Schwingungen, Ionen und Elektronen, Elektrooptik, 4; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8, für Fortgeschrittene (mit Kulenkampff), halbtägig; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, ganztägig. — **K. T. Fischer:** Grundzüge der Physik II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 3; Schwingungs- und Wellenlehre aus dem Gesamtgebiet der Physik, 3; Feinmessungen und Feinmeßwerkzeuge der Technik, 2; Praktisch-physikalische Übungen, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Methoden der Physik: Anleitung zu selbständigen Arbeiten, 8. — **Emden:** Ausgewählte Kapitel der Optik (theoretisch und experimentell), 2. — **Kulenkampff:** Die magnetischen Eigenschaften der Materie: Dia-, Para- und Ferromagnetismus, 1. — **Kühl:** Die Dioptrik des Auges und die Theorie des Sehens, 2. — **Dieckmann:** Hochfrequenzmeßtechnik, 2, Praktikum, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der angewandten Physik, halb- oder ganztägig. — **Huber:** Die Erforschung der höheren Luftschichten, 1; Die praktische Bedeutung der Meteorologie, 1. — **Knoblauch:** Technische Meßmethoden, 2, Praktikum, 2; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiet der technischen Physik, halb- oder ganztägig. — **Reiher:** Spezielle thermodynamische Probleme, 2; Neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der Schalltechnik, 1. — **Nusselt:** Mechanische Wärmetheorie, 3, Übungen, 2. —

Universität Münster. Schmidt: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Szivessy), 3 und 6, für Mediziner, 3, für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Szivessy), 14tägig, 2 *g*. — **Kratzer:** Thermodynamik, 3, Übungen, 2 *g*; Ausgewählte Kapitel der Hydrodynamik, 3; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Szivessy:** Röntgenstrahlen, mit Demonstrationen, 1. — **Siemens:** Elektrotechnik, insbesondere elektromagnetische Schwingungen mit Vorführungen und Lichtbildern, 2 *g*. —

Universität Prag. Rausch-Traubenberg: Experimentalphysik II, 5; Physikalisches Praktikum II, 3 bzw. 6 *g*, für Mediziner, 3 *g*; Physikalische Übungen, 2 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig, *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Frank und Fürth), 2 *g*. — **Frank:** Thermodynamik, 3; Ausgewählte Kapitel der Quantenmechanik, 2; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Fürth:** Einführung in die theoretische Physik II: Elektronentheorie, Newtonsche Mechanik, Quantentheorie, 4; Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistische Mechanik, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, ganztägig, *g*. —

Universität Rostock. Füchtbauer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Optik, 4; Physikalische Übungen, 8; Physikalisches Seminar: Kol-

loquium (mit Hund), 14tägig, $1^1/_2$ g; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Hund:** Mechanik: Allgemeine Mechanik und Mechanik der starren Körper, mit Übungen, 5; Bau der Molekeln und Kristallgitter, 2. — **Falckenberg:** Meteorologisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl., für Anfänger, 4. —

Universität Tübingen. Gerlach: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Magnetismus, 1; Physikalische Übungen für Anfänger, 4, für Mediziner, 3; Physikalische Übungen für Fortgeschrittene, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Seminar für Fortgeschrittene, 1 *g*; Wissenschaftliche physikalische Untersuchungen (mit Back und Schütz), ganztägig; Physikalisches Kolloquium (mit Back und Schütz), 2*g*. — **Landé:** Theoretische Optik, 4; Quantentheorie, 1. — **Back:** Ausgewählte Fragen der Spektroskopie, 1. — **Schütz:** Das absolute Maßsystem, 1. —

Hochschule f. Landwirtschaft und Brauerei. Weihenstephan. Frank: Experimentalphysik II: Elektrizität II, Optik, 3; Angewandte Physik, mit Übungen, 2; Physikalische Übungen für Landwirte, 2, für Fortgeschrittene, 4; Feldmessen und Nivellieren, mit Übungen, 2. —

Universität Würzburg. Harms: Theoretische Physik: Wärmelehre, 4, Übungen, 1 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Wagner:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum, 6 und 3; Praktikum für Fortgeschrittene, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig; Physikalisches Kolloquium, 2*g*. — **Glaser:** Höhere Experimentalphysik I: Optik, mit Versuchen, 2; Spektroskopie, einschließlich Spektroskopie der Röntgenstrahlen, 1 *g*, Übungen, 3 *g*; Anleitung zur Ausführung selbständiger Arbeiten, ganztägig; Besprechung aus physikalischen Sondergebieten, sowie Exkursionen, *g*. —

Universität Zürich. Meyer: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 5, Ergänzungen, 1, Seminar (mit Bär), 2*g*; Physikalisches Kolloquium, 2*g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, $3^1/_2$, für Vorgerücktere, halbtägig: Physikalisches Praktikum: Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **N. N.:** Theorie der Elektrizität, 5, Proseminar, 1, Seminar für theoretische Physik, 1—2. — **Ratnowsky:** Molekulartheorie der Materie, 2; Aktuelle Probleme der Physik, 1. — **Bär:** Ionen und Elektronen, 1; Radiologisches Praktikum, 4. —

Technische Hochschule Zürich. Pauli: Elektrodynamik, 3, Übungen, 1; Quantentheorie, 2; Physikalisches Kolloquium (mit Scherrer und Tank), 2. — **Scherrer:** Physik: Thermodynamik, Optik, 4, Repetitorium, 1; Atombau, 2; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12 und 24; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Tank), 4, 6 und 8. — **Tank:** Experimentalphysik II, 3, Repetitorium, 2; Optik, 2; Der elektrische Lichtbogen und seine Anwendungen, 1; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12 und 24. — **Weyl:** Funktionentheorie II, 4; Relativitätstheorie, 2; Mathematisches Seminar (mit Plancherel und Polya), 2. — **Dällenbach:** Gleichrichteranlagen, 1 *g*. — **Hückel:** Physik der Kolloide, 2. — **Rüst:** Photographie II, 1; Photographisches Praktikum, 2. — **Wyss:** Die Kraftfelder in festen, elastischen Körpern, 1. —

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Leipzig Dr. Arnold Weissberger für Chemie, an der Universität Basel der frühere Chefchemiker der Chemischen Fabrik H. Schering Dr. H. Emde für pharmazeutische Chemie.

Ernannt: Der ord. Professor für Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Carl Ramsauer zum Direktor des Forschungsinstitutes der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft (AEG) in Berlin, der Konservator am Chemischen Laboratorium des Staates in München und Privatdozent für anorganische und analytische Chemie an der Universität daselbst Dr. Eduard Zintl zum a. o. Professor an der Universität Freiburg i. Br., der a. o. Professor an der Universität Bonn Dr. Walter Dilthey zum ord. Professor der Chemie und Abteilungsvorsteher ebenda.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig Geheimrat Hofrat Dr. Otto Hölder, der Direktor der Chemischen Abteilung an der Mc Gill Universität in Montreal Professor R. F. Ruttan.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig. Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 8. — Ausgegeben am 15. April 1928. Nr. 786. Printed in Germany. — 29. Jahrgang.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 8 — 15. April 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 10 am 10. Mai 1928

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Ionenstrahlen.

Von E. Weitkamp.

1. Einleitung.
2. Die Apparatur.
3. Die Substanzen.
4. Der Parallelismus zwischen Schmelzpunkt und der Temperatur des Beginns der Emission.
5. Das Verhalten der Salze in der Nähe und oberhalb des Schmelzpunktes.
6. Der Einfluß von Graphitzusätzen.
7. Der Einfluß von Jodzusätzen.
8. Über den Einfluß von atmosphärischer Luft und besonders von Feuchtigkeit auf CdJ_2.
9. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Wie G. C. Schmidt[1]) nachgewiesen hat, sendet eine große Reihe von Salzen schon bei verhältnismäßig niedriger Temperatur positive Ionen aus. Die hierbei auftretenden Erscheinungen zeigten einen deutlichen Parallelismus mit denen, die man bei der Elektrolyse des festen Salzes beobachtet. Im Gegensatz zu den Vorgängen bei der Elektrolyse, wo die Ströme zeitlich konstant sind, ergab sich aber bei den Ionenstrahlen anfangs ein rapider Abfall mit der Zeit. Schließlich erreichten die Stromstärken einen konstanten kleinen Endwert. G. C. Schmidt[2]) glaubte zuerst, diese Erscheinung auf eine Polarisation des Salzes zurückführen zu können. Danach sollte sich das Salz infolge der Emission der positiven Ionen negativ aufladen; da aber die negativen Ionen nicht wandern und somit ihre Ladung nicht an die Elektrode abgeben, so bliebe das Salz negativ geladen zurück, und zwar in um so stärkerem Maße, je größer die Emission ist. Da diese negative Ladung des Salzes die entweichenden positiven Ionen anziehe, so nehme der positive Ionenstrom infolgedessen mit der Zeit ab. In einer vor kurzem veröffentlichten Arbeit setzt sich G. C. Schmidt[1]) nochmals mit dieser Hypothese auseinander und zeigt durch eine Reihe von Versuchen, daß die Polarisation nicht die Ursache der Stromänderungen sein könne. Am Schluß seiner Arbeit spricht er die Vermutung aus, daß okkludierte Gase eine vermehrte Emission verursachen, und daß mit dem Grade des Entweichens der Gase beim Erhitzen der Salze die Emission abnehme.

Die folgende Untersuchung, welche den wesentlichen Inhalt meiner bei der Philos.-Naturwissenschaftl. Fakultät der Universität Münster i. W. eingereichten Dissertation enthält, wurde unternommen, um festzustellen:

1. Ob der Parallelismus zwischen den Vorgängen bei der Elektrolyse und der Emission von Ionenstrahlen noch zu erweitern ist. Zu dem Zweck sollte festgestellt werden, ob bei Elektrolyten, die dasselbe Ion emittieren, derjenige, welcher den tieferen Schmelzpunkt besitzt und daher auch bei verhältnismäßig niederer Temperatur in festem Zustand leitet, auch bei niederer Temperatur besagtes Ion emittiert.

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **80**, 588, 1926.
2) l. c.

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **82**, 664, 1927.

2. Ob der Ionenstrom oberhalb des Schmelzpunktes zeitlich veränderlich oder konstant ist.

3. Welchen Einfluß Zusätze auf die Emission haben, vor allem, ob sie den zeitlichen Abfall der Emission verändern.

4. Ob die Schmidtsche Hypothese, daß okkludierte Gase die Emission beeinflussen, zu Recht besteht.

2. Die Apparatur.

Da es, wie eben gesagt, darauf ankam, die Salze oberhalb des Schmelzpunktes zu untersuchen, mußte der von G. C. Schmidt[1]) benutzte Apparat umgebaut werden. Ein horizontal liegendes Glimmerplättchen diente dazu, das Salz aufzunehmen. Durch die große Adhäsion wurde auch das an der Unterseite des Glimmerplättchens sich befindende Salz festgehalten. Das Wegfließen der Substanz war somit verhindert. Der Heizdraht wurde in der Form einer Spirale um das Plättchen gewickelt. Die Fig. 1 stellt die Vorrichtung dar.

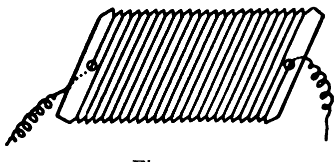


Fig. 1.

Die Einbuchtungen an dem Glimmerplättchen (s. Fig. 1) verhinderten, daß die einzelnen Windungen des Heizdrahtes miteinander Kontakt erhielten.

Fig. 2 stellt die Zelle dar; diese bestand aus einem Messingzylinder von 85 mm Durchmesser und 120 mm Höhe, vorn und hinten mit je einem Fenster versehen (punktiert gezeichnet). *A* ist der Auffangeschirm, der über einem Erdungsschlüssel zum Dolezalekschen Elektrometer führt, das eine Empfindlichkeit von 400 Skalenteilen pro Volt/Meter besaß. Der Ebonitpfropfen *B* war mit etwas Siegellack eingekittet und konnte leicht herausgenommen werden. *C* ist die Heizvorrichtung von Fig. 1. Das Rohr *P* führt über ein Mc Leod und eine Trockenzelle, die mit P_2O_5 beschickt wurde, zur Kolbenpumpe, mit der Vakua bis zu 0,001 mm *Hg* erzeugt werden konnten.

Die Temperatur des Heizdrahtes wurde aus seinem Widerstand ermittelt. Zu dem Zweck war der Heizdraht in bekannter Weise in der Wheatstoneschen Brücke eingeschaltet. Die Salze, die den Draht bedeckten, hatten nicht genau die Temperatur des Drahtes. Es wurde daher der Draht so geeicht, daß Salze von bekannten Schmelzpunkten auf den Draht gebracht wurden, und aus den diesen Schmelzpunkten entsprechenden Widerstandsänderungen wurde die Eichkurve entworfen. Es wurde auf konstante Temperaturen und konstante Drucke allergrößtes Gewicht gelegt, da es sich herausstellte, daß Druckänderungen von enormem Einfluß auf die Emission waren.

Daß die Akkumulatorenbatterien, Galvanometer usw. isoliert aufgestellt worden waren, braucht wohl nicht erwähnt zu werden. Wegen weiterer Einzelheiten der Apparatur und der Ausführung der Versuche verweise ich auf die Arbeit von G. C. Schmidt[1]).

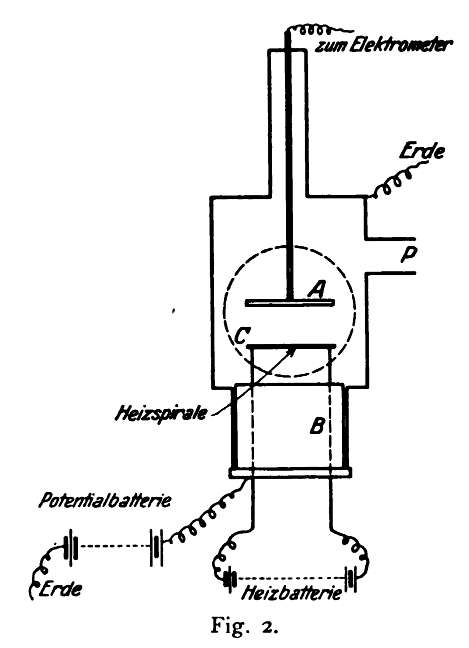


Fig. 2.

Bevor ein zu untersuchendes Salz auf die Heizanode gebracht wurde, war die Anode in folgender Weise vorbehandelt worden. Der blanke Platindraht wurde zunächst in Salpetersäure abgekocht, an die Stromzuführungen gelötet, in destilliertem Wasser abgespült, dann mit Wasserdampf von 100° C bestrahlt und schließlich nochmals mit reinstem destillierten Wasser nachgespült. Die Heizspirale wurde darauf in der Anodenzelle bei etwa 700—900° C eine Stunde unter Vakuum ausgeglüht. Es wurde so erreicht, daß der Platindraht bis 420° C keine Eigenemission hatte. Bei höheren Temperaturen setzte auch bei dem sorgfältigst behandelten Platindraht eine schwache positive Emission ein, die nach Kunsmann[2]) aus positiven Kalium-

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **80**, 588, 1926.

1) l. c.

2) C. H. Kunsmann, H. A. Barton and G. P. Harnwell, Physical Review **27**, 739, 1926.

und Natriumionen besteht. Diese Eigenemission ist für die wiedergegebenen Versuchsreihen ohne Bedeutung, da ihre Größenordnung, wenn überhaupt die Temperatur von 420° C bei den Versuchen überschritten wurde, im Verhältnis zu den Emissionen der Salze sehr gering ist, und zum anderen die Eigenemission durch die aufgelagerten Salzschichten verschluckt wird.

Das Aufbringen der Salze geschah in den allermeisten Fällen durch Eintauchen der Heizanode in die Salzschmelze, in einigen Fällen durch Sublimation oder Eintauchen in eine wässerige konzentrierte Salzlösung.

3. Die Substanzen.

G. C. Schmidt hatte gefunden, daß Verunreinigungen der Salze von maßgeblichem Einfluß auf die Emission sind und unter Umständen ein ganz falsches Bild von dem zeitlichen Verhalten des Emissionsstromes geben können. Es wurde daher größtes Gewicht auf Reinheit der Substanzen gelegt. Die von Kahlbaum bezogenen Substanzen wurden noch zwei- bis dreimal umkristallisiert. Das lichtempfindliche *AgJ* wurde nach dem Verfahren von Tubandt[1]) im Dunkelraum hergestellt und aufbewahrt. Das Aufbringen dieses Salzes auf die Heizspirale geschah selbstverständlich auch im Dunkeln.

4. Der Parallelismus zwischen Schmelzpunkt und der Temperatur des Einsetzens der Emission.

Wie in der Einleitung gesagt wurde, sollte geprüft werden, ob bei den Salzen mit gleichem positiven Ion die Temperatur des Beginns der Emission proportional der Schmelztemperatur ist.

Damit das Ion entweicht, muß das Kristallgitter zerstört werden. Dies geschieht sicher beim Schmelzen. Es ist somit zu erwarten, daß Salze mit niedrigem Schmelzpunkt bei niedriger Temperatur Ionen emittieren. Dieser Parallelismus zwischen Schmelzpunkt und Emission ist durch Versuche bestätigt worden, s. Tabelle. In derselben bedeuten *Sm* den Schmelzpunkt und *t* die Temperatur, bei der ein bestimmter dauernder Strom erhalten wurde. Diese Temperaturen sind wegen des zeitlichen Abfalls der

Salz	*Sm*	*t*
$NaCl$	800	580
NaJ	670	520
$Na_2Cr_2O_7$.	320	260
KCl	740	500
KJ	650	450
$K_2Cr_2O_7$ . .	396	345

1) C. Tubandt, Zeitschr. f. anorg. Chemie **115**, 105, 1921.

Emission nicht genau; sie würden sich bei einer andern Versuchsanordnung (anderer Kapazität, anderem Druck usw.) etwas ändern. Natürlich konnten nur Salze untersucht werden, die das gleiche Ion emittieren. Da wir wegen der Abnahme der Emissionsströme kein genaues Maß für die Emission besitzen, die Emission auch noch von anderen Umständen, z. B. geringen Verunreinigungen des Salzes abhängt, so läßt sich oben gezeigter Parallelismus quantitativ nicht verfolgen. Aus denselben Gründen verbot es sich auch, Salze miteinander zu vergleichen, deren Schmelzpunkte nahe beieinander liegen, z. B. CdJ_2, $CdBr_2$, $CdCl_2$ und $AgCl$, $AgBr$ und AgJ.

Trotzdem die Anzahl der untersuchten Salze gering ist, läßt sich doch mit einiger Sicherheit der Schluß ziehen: Bei Salzen, die das gleiche Ion emittieren, besteht Parallelismus zwischen Schmelzpunkt und der Temperatur, bei der die Emission beginnt.

Diese Versuche ergänzen die von G. C. Schmidt[1]), der nachgewiesen hat, daß die Ionen bei einer um so niedrigeren Temperatur emittiert werden, je größer der Auflockerungsgrad des Kristallgitters ist. Er benutzte als Auflockerungsgrad den Leitfähigkeitssprung beim Erstarren[2]). Man kann den Schmelzpunkt auch als „Auflockerungstemperatur" bezeichnen. Da offenbar die Auflockerung um so leichter vor sich geht, je tiefer der Schmelzpunkt liegt, so zeigen meine Versuche auch den Parallelismus zwischen Emission von Ionen und Auflockerungsgrad. Im Anschluß hieran will ich erwähnen, daß $K_2Cr_2O_7$ und $Na_2Cr_2O_7$ auch auf negative Ionen untersucht wurden. Die Versuche zeigten eindeutig, daß negative Ionen erst oberhalb des Schmelzpunktes, der bei 396° C bzw. bei 320° C liegt, emittiert wurden. Die Emission positiver Ionen dagegen begann weit unterhalb des Schmelzpunktes. Bemerkenswert war, daß bei der Reihe für positive Ionen der Strom kleineren Werten zustrebte, während in der Reihe für negative Ionen ohne Zweifel eine steigende Tendenz zu erkennen war. Es hängt dieses mit der Zersetzung des Salzes zusammen, die bei hoher Temperatur sehr groß ist.

5. Das Verhalten der Salze in der Nähe und oberhalb des Schmelzpunktes.

Wie G. C. Schmidt[3]) bereits nachgewiesen hat, ändert sich die Emission bei niedrigen Temperaturen mit der Zeit. Es liegen von G. C.

1) l. c.
2) Vgl. G. Hevesy, Zeitschr. f. phys. Chemie **101**, 337, 1922.
3) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **82**, 664, 1927.

Schmidt[1]) auch schon einige Messungen bei höheren Temperaturen vor; er fand, daß bei höheren Temperaturen in der Nähe des Schmelzpunktes die Ströme zeitlich konstant wurden. Es galt jetzt, diese Beobachtungen auf viele Salze auszudehnen, und das Verhalten derselben oberhalb des Schmelzpunktes zu untersuchen. Von den vielen diesbezüglichen Messungen gebe ich einige graphische Darstellungen. (Siehe Fig. 3 und 4.)

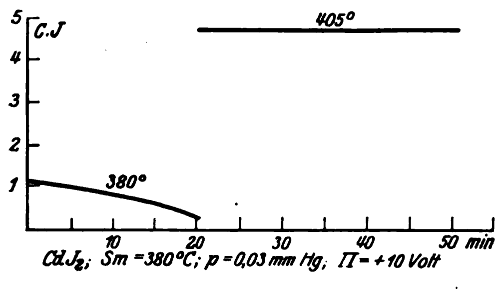


Fig. 3.

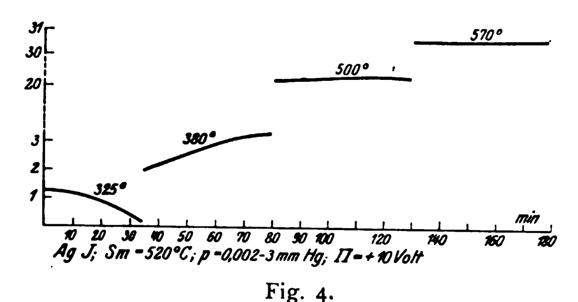


Fig. 4.

Die Abszissen sind Zeiten in Minuten, die Ordinaten Stromstärken in willkürlichen Einheiten, p bedeutet den Druck, π das angelegte Potential. Aus den Versuchen ergibt sich: Bei niederen Temperaturen ändert sich die Emission mit der Zeit, bei höheren Temperaturen in der Nähe und oberhalb des Schmelzpunktes ist die Stromstärke konstant.

6. Der Einfluß von Graphitzusätzen.

E. Gehrcke und O. Reichenheim[2]) haben nachgewiesen, daß die Anodenstrahlen viel intensiver werden, wenn man dem Salz etwas Graphit zusetzt. Da die Anodenstrahlen im wesentlichen identisch sind mit den hier untersuchten Ionenstrahlen, — im ersteren Falle sind nur die angelegten Potentiale viel größer — so erschien es möglich, daß die Emission bei meinen Salzen durch Graphitzusätze zunehmen würde. Falls dies der Fall war, hätten die Graphitzusätze das Kristallgitter gelockert, und wir hätten hier ein Verfahren, um die Stromstärken beinahe beliebig zu steigern.

Das verwendete Graphit wurde durch Schaben gewonnen und vor Gebrauch bei 600—700° C ausgeglüht. Dieses von organischen Substanzen freie Pulver wurde mit einer Salzschmelze verrührt und dann auf die Heizanode gebracht. Die Graphitzusätze machten etwa 20 Proz. von der Substanz aus. Es zeigte sich, daß die so erhaltenen Schmelzen eine bedeutend geringere Emission aufwiesen als die reinen Schmelzen. Es wird genügen, wenn ich einige graphische Darstellungen der Meßreihen gebe. Siehe Fig. 5 und 6.

Aus den Versuchen ergibt sich: 1. Graphitzusätze setzen die Emission stets stark herab; 2. Während bei hohen Temperaturen die Emission bei reinen Salzen zeitlich konstant ist, fällt die Stromkurve nach Zusatz von Graphit.

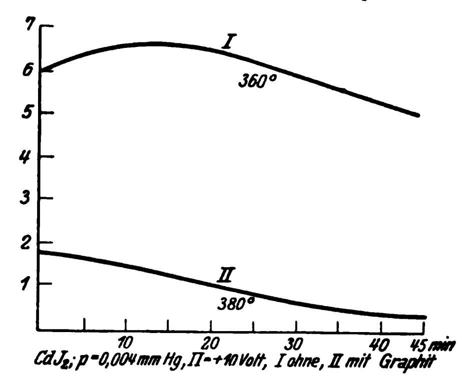


Fig. 5.

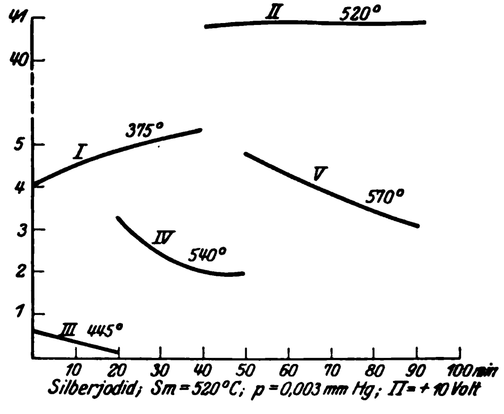


Fig. 6.
Kurve I u. II ohne Graphit.
Kurve III, IV u. V mit Graphit.

Die Kurve zeigt nach dem Hinzufügen von Graphit sogar über den Schmelzpunkt hinaus noch eine fallende Tendenz. Die Versuche machen es unwahrscheinlich, daß irgendein fester Körper,

1) l. c.
2) E. Gehrcke und O. Reichenheim, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **8**, 559, 1906; **9**, 76, 200, 1907.

der mit dem Salz nicht reagiert, die Ursache des zeitlichen Abfalls der Emission ist.

Es erhebt sich nun die Frage, wie ist der Befund von E. Gehrcke und O. Reichenheim[1]), daß Graphitzusätze die Intensität der Anodenstrahlen steigern, zu erklären. Bei ihrer Anordnung wird im allgemeinen das Salz nur durch die Stromwärme erhitzt. Es ist aber klar, daß durch Hinzufügen des gut leitenden Graphits die Ströme größer werden, und damit auch die Stromwärme zunimmt. Mit der Zunahme der Temperatur steigert sich die Emission. Beide Einflüsse müssen somit die Intensität der Anodenstrahlen vergrößern.

Bei meinen Versuchen wurde dagegen das Salz von außen erhitzt. Bei der innigen Berührung des Salzes mit dem Graphit können die positiven und negativen Ionen leicht ihre Ladung an das gut leitende Graphit abgeben; sie neutralisieren sich daher, und die Emission der Ionen nimmt ab.

7. Über den Einfluß von Jodzusätzen.

Von H. Bruns[2]) und E. Thönnessen[3]) ist gefunden worden, daß Jodzusätze die Leitfähigkeit von CdJ_2-Lösungen erhöhen. Es war daher von Interesse festzustellen, ob auch bei einem Salz im festen Zustand die Leitfähigkeit durch Jodzusatz gesteigert wurde. Zu diesem Zweck wurde von einem ganz reinen *AgJ*-Präparat die Emission sorgfältig festgestellt und zwar bei einer Temperatur, wo von vornherein eine ziemliche Konstanz zu erwarten war. Dieses Präparat wurde dann von einer dünnen *AgJ*-Schicht überzogen, der vorher einige Jodkriställchen zugesetzt worden waren. Es zeigte sich tatsächlich eine Erhöhung der Emission um mehr als 50 Proz. Doch ist die Erhöhung gering im Verhältnis zu den sonstigen beträchtlichen Intensitätsschwankungen des Ionenstroms. Um den Effekt zu steigern, wurden der Schmelze bedeutend größere Mengen an Jod zugesetzt. Da das zugegebene Jod sofort lebhaft verdampfte und nur zum Teil in die Schmelze einging, ist eine Gewichtsangabe nicht möglich. Das Ergebnis war, daß die Emission eines solchen Präparates ganz bedeutend herabgesetzt wurde, es konnte erst bei der verhältnismäßig hohen Temperatur von 505^0 C eine meßbare Emission festgestellt werden. Der Strom zeigte hier eine abnehmende Tendenz. Oberhalb des Schmelzpunktes von *AgJ* wurde der Strom konstant.

Die Versuche zeigen somit: Kleine Jodzusätze zu *AgJ* steigern die Emission, größere setzen die Emission ganz beträchtlich herab. Die Erscheinung ist somit recht verwickelt. Dazu kommt, daß wegen der dauernd vor sich gehenden Verdampfung des Jods die Versuchsbedingungen unübersehbar sind. Die Versuche können daher als nicht recht beweisend angesehen werden. Sollten sie zu Recht bestehen, so erklärt sich das Ergebnis folgendermaßen: Kleinere Jodzusätze sprengen die größeren Salzaggregate, wie das H. Bruns[1]) und E. Thönessen[2]) ausgeführt haben. Bei größeren Jodmengen lagert sich das Ion an das Jod an. Hierdurch wird die Beweglichkeit der Ionen und damit auch die Stromstärke herabgesetzt.

1) l. c.
2) H. Bruns, Zeitschr. f. Phys. **34**, 751, 1925.
3) E. Thönnessen, Zeitschr. f. Phys. **41**, 810, 1927.

8. Über den Einfluß von atmosphärischer Luft und besonders von Feuchtigkeit auf CdJ_2.

Bei Versuchen mit *AgJ*, CdJ_2, *ThCl*, *ThBr* und *ThJ* hatte sich gezeigt, daß die Emission sich nicht wesentlich änderte, wenn man die Präparate längere Zeit im Vakuum bei gewöhnlicher Temperatur aufbewahrte, waren sie aber mit Luft in Berührung gekommen, so zeigte sich wiederholt eine starke Zunahme der Emission. Um die Verhältnisse aufzuklären, wurden zahlreiche Versuche unternommen. Als Salz kam ausschließlich CdJ_2 zur Verwendung, das in Lösung auf den Draht gebracht wurde. Die Kurve in der Fig. 7 zeigt zunächst an, daß kurze Abkühlungen unter Vakuum nicht von Einfluß auf die Emission sind. Es wurde jedesmal das Salz zwischen den einzelnen Zweigen der Kurve auf Zimmertemperatur zehn Minuten lang abgekühlt und anschließend auf die vorher gewählte Temperatur erhitzt. Die Emission erwies sich dann als ebenso groß wie am Schluß der vorhergehenden Reihe, oder es zeigte sich eine kleine Abnahme. Auch nachdem man das Salz längere Zeit im Vakuum gehalten hatte, zeigten sich die gleichen Verhältnisse. Für den letzteren Fall gebe ich ein Beispiel in der Fig. 8. Zwischen den Zweigen I, II und III wurde das Salz 6 Stunden im Vakuum von 0,005 mm aufbewahrt.

Bei diesen Versuchen mußte besonders scharf auf Konstanz des Druckes geachtet werden; wenn der Druck bei einer folgenden Meßreihe nur ein wenig verschieden war von dem Druck bei der vorhergehenden, so war auch die Emission eine andere, wie das die Fig. 9 deutlich zeigt. Zwischen jeder Reihe war das Salz wiederum zehn Minuten auf Zimmertemperatur abgekühlt gewesen. Da diese geringen Druckänderungen von so enormem Einfluß auf die Emission sind,

1) l. c.
2) l. c.



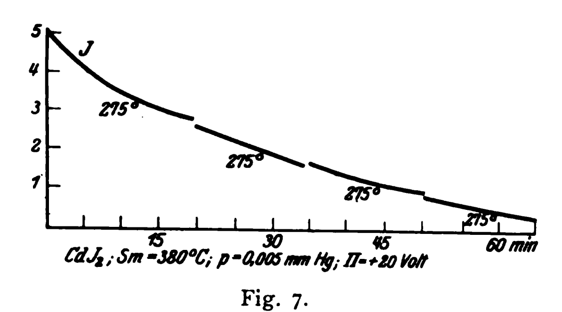


Fig. 7.

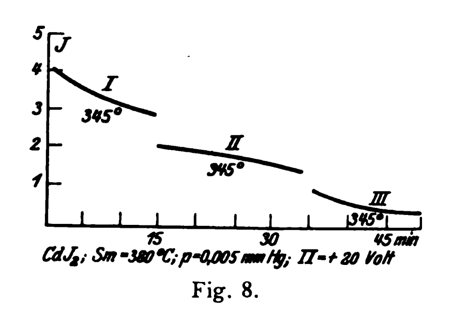


Fig. 8.

so ist es außerordentlich wichtig, denselben Druck wieder herzustellen, wenn man etwa einen Teil einer Kurve mit einem zweiten vergleichen will, wie z. B. in den Fig. 7, 8 und 9; dazu kommt,

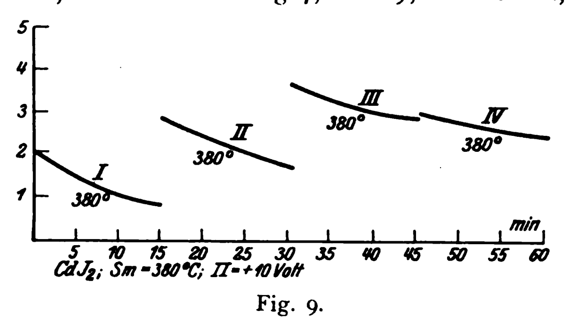


Fig. 9.

I bei 0,15 mm Druck, II bei 0,125 mm Druck
III „ 0,10 „ „ IV „ 0,10 „ „

daß durch das häufige Erhitzen die Oberfläche des Salzes sich ändert; möglicherweise sind daher die in Fig. 8 beobachteten kleinen Erniedrigungen hierauf zurückzuführen.

Ganz andere Erscheinungen traten aber manchmal auf, wenn man das Salz nach der Abkühlung mit Luft in Berührung brachte. Es zeigte sich nämlich eine beträchtliche Erhöhung, aber diese trat nicht ausnahmslos ein. Fig. 8 gibt ein Beispiel.

Fig. 10 zeigt dagegen eine typische Erhöhung. Eingehende Versuche zeigten, daß Anwesenheit von Wasserdampf in dem Raum, in dem das Salz während der Abkühlung aufbewahrt wurde, von ausschlaggebender Bedeutung war. Trockene Luft brachte keine Erhöhung, feuchte Luft steigerte aber die Emission eines bis zur Konstanz erhitzten Salzes stets.

Aus persönlichen Gründen mußte ich die Arbeit hier unterbrechen. Neuere Versuche im hiesigen Institut, die mit den verschiedensten Salzen vorgenommen wurden, bereits abgeschlossen sind und demnächst veröffentlicht werden sollen, haben den Einfluß der Feuchtigkeit bestätigt. Sie haben aber zugleich gezeigt, daß die Verhältnisse recht verwickelt sind, und daß man scharf zu unterscheiden hat, ob das Salz im gelösten, geschmolzenen oder sublimierten Zustand auf dem Draht sich befindet. Alle beobachteten

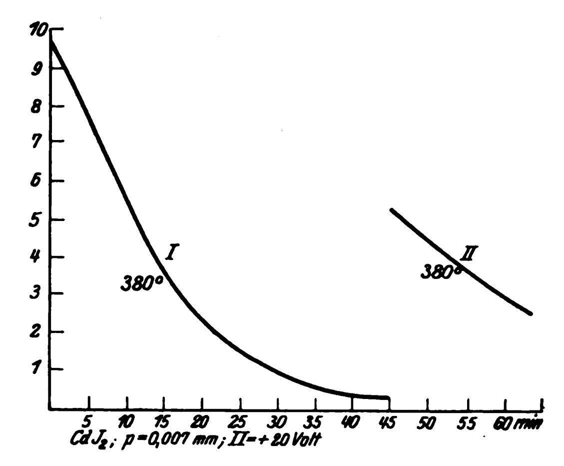


Fig. 10.
Zwischen den Zweigen I u. II 15 St. unter 760 mm Luft.

Erscheinungen ließen sich aber leicht erklären durch die in der Einleitung erwähnte Hypothese von G. C. Schmidt, daß okkludierte Gasmoleküle das Kristallgitter lockern und so die Emission steigern.

9. Zusammenfassung.

1. Es wird ein Parallelismus zwischen der Höhe des Schmelzpunktes eines Salzes und der Höhe der Emissionstemperatur nachgewiesen.

2. Es werden die Ergebnisse von G. C. Schmidt bestätigt gefunden, daß bei niederer Temperatur ein Stromabfall in der Emission eintritt, während in der Nähe und über dem Schmelzpunkt die Ströme sich konstant erweisen.

3. Zusätze von Graphit zu den Salzanoden setzen die Emission erheblich (um das 10—20-fache) herab.

4. Jod in geringen Mengen zugesetzt, erhöht ein wenig die Emission; es wird dadurch eine Analogie hergestellt mit den Resultaten von H. Bruns und E. Thönnessen, die nachweisen konnten, daß Jodzusätze die Leitfähigkeit von Jodsalzlösungen erhöhen. Starke Jodzusätze dagegen verringerten in großem Maße die Emission.



5. Kurze Abkühlungen auf Zimmertemperatur sind bei CdJ_2, das in gelöstem Zustand auf den Platindraht gebracht ist, von keinem Einfluß auf die Emission.

6. Auch bei längerem Verweilen von derartigem CdJ_2 beobachtet man meistens keine Änderung der Emission, wenn man wieder zu der ursprünglichen Temperatur und dem ursprünglichen Druck zurückkehrt. Die manchmal beobachteten kleinen Abnahmen rühren wahrscheinlich von Versuchsfehlern (Kleinerwerden der Oberfläche usw.) her.

7. Absolut trockene Luft ändert die Emission nicht; die Anwesenheit von Feuchtigkeit steigert dagegen die Emission stark.

Ein Teil der benutzten Apparate ist mir von der Helmholtz-Gesellschaft zur Verfügung gestellt worden. Hierfür spreche ich derselben meinen herzlichsten Dank aus.

Noch mehr Dank schulde ich meinem Lehrer, Herrn Geheimrat Prof. Dr. G. C. Schmidt, der mir bei der Ausführung der Arbeit zur Seite stand.

(Eingegangen 9. März 1928.)

Mitteilung zum Kristalldetektorproblem.

Von Georg Günther Reißaus.

Die Frage, ob der gleichgerichtete Strom einer bestimmten Kristalldetektorkombination stets den gleichen — für die betreffende Detektorkombination charakteristischen — Richtungssinn hat, erscheint keineswegs geklärt, wenngleich in jüngster Zeit Schleede und Buggisch (Physik. Zeitschr. **28**, 174, 1927 und in einem zusammenfassenden Bericht derselben Autoren in Zeitschr. f. Hochfrequenztechnik **30**, 190, 1927) diese Anschauung in bejahendem Sinne zu begründen suchen. Daß sie davon ausgingen, das Problem von der chemischen Seite aus anzufassen, ist für die Weiterentwicklung besonders wertvoll, wenngleich die volle Lösung des Problems von dieser Seite nach meinen Versuchen nicht zu erwarten steht. Diese Versuche, über die in einer späteren ausführlichen Arbeit berichtet werden wird, gingen von folgender Beobachtung aus.

Ein gleichmäßig schön gewachsener Bleiglanzkristall von etwa 1 ccm Würfelgröße mit spiegelnden fehlerfreien Bruchflächen erzeugte kombiniert mit einem spiralförmig gewundenen dünnen Kupferdraht als „Spitze" — wobei zu bemerken ist, daß das als „Spitze" gebrauchte Ende des Drahtes mit einer Schere schief abgeschnitten war, ohne jede weitere Bearbeitung — auf fast allen Punkten einer seiner Flächen eine bestimmte Stromrichtung (Draht negativ, Kristall positiv), im Gegensatz zu Kristallen anderweitiger Herkunft kombiniert mit dem gleichen Kupferdraht. Unter „Kristall" sei stets ein einheitliches natürliches Kristallstück und nicht eines der im Handel erhältlichen Kristallkonglomerate verstanden. Den meisten anderen Kristallen fehlte auch der Spiegelglanz. Auf ihrer Oberfläche zeigte sich unter der Lupe eine Unzahl von groben und feinsten Rissen und Sprüngen. Als ich nach langem Probieren auch auf dem ersterwähnten Kristall eine Stromumkehr feststellen konnte, untersuchte ich die Aufsetzstelle mit der Lupe. Überraschenderweise zeigte sich, daß durch den Aufsetzpunkt ein haarfeiner Riß ging. Als mit Hilfe der Lupe der Draht auf andere Stellen des Risses gesetzt wurde, stellte sich prompt Stromumkehr ein. Auch auf anderen nunmehr entdeckten Haarrissen wiederholte sich das Phänomen. Schließlich wurde der gleiche Effekt der Stromumkehr erhalten, als auf einem Teil der Kristallfläche, der unter der Lupe sich völlig rißfrei erwies und auch trotz systematischen Abtastens nirgends Stromumkehr erzeugte, mit einem Messer ein „künstlicher Riß" erzeugt wurde.

Eine kurze Überlegung zeigt — zunächst nur für das Beispiel des Bleiglanzes, das aber wie in einer späteren Arbeit ausführlich gezeigt werden wird, ganz allgemein für Kristall/Metall-, Kristall/Kristall- und Metall/Metall-Systeme gilt —, daß offenbar die eingangs aufgeworfene Fragestellung sinnlos ist, wenn die Richtung des Detektorstromes in Beziehung zu „Spitze" und „Kristall" gebracht werden soll, da die eben mitgeteilte Beobachtung den Beweis liefert, daß „Spitze" und „Kristall" ihre Rollen vertauschen können, mit anderen Worten: daß auch der Kristall zur Spitze werden kann. Immer wenn sich Stromumkehr einstellte, stand der Draht auf einem Riß. Ein solcher Riß ist aber von einer Unzahl von Kristalleckchen begrenzt, deren jedes als Spitze dem Draht gegenüber wirken

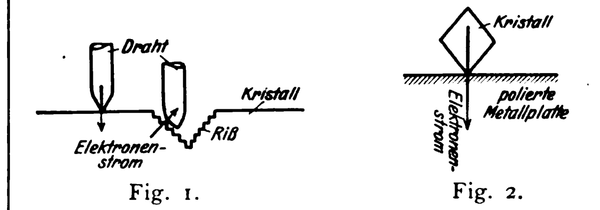


Fig. 1. Fig. 2.

kann. Fig. 1. Zur Kontrolle setze man die Ecke eines Bleiglanzwürfels auf eine hochglanzpolierte (!) Metallplatte (z. B. Silber), Fig. 2; der so erzeugte Detektorstrom hat den gleichen Richtungssinn wie der im Riß erzeugte Strom. Schließlich schalte man zwei Bleiglanzkristalle

aus dem gleichen Stück nach Fig. 3 gegeneinander. Wird die Fläche des unteren Kristalles *a* gegen die Ecke des oberen geschaltet, so fließt der Elektronenstrom von oben nach unten. Schaltet man dagegen die Ecke des unteren *a''* gegen die Fläche des oberen, so dreht der Strom um. Alle beschriebenen Versuche lehren: Der Elektronenstrom fließt stets von der „Spitze" zur „Fläche" eines Detektorsystems.

Die Richtung des Stromes ist also lediglich eine Funktion der Oberflächenunsymmetrie der beiden als „Spitze" und „Fläche" bezeichneten

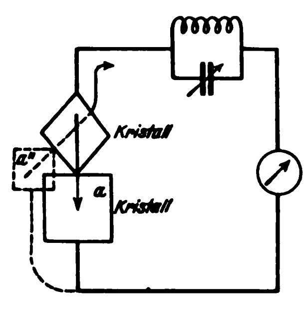


Fig. 3.

Elektroden eines beliebigen Detektorsystems. Die Stärke des Stromes ist dagegen neben dem Grad der Elektrodenunsymmetrie vom Elektrodenabstand, vom Stoff der dielektrischen Zwischenschicht zwischen den Elektroden und dem Stoff der Elektroden selbst (die auch beide aus gleichem Stoff bestehen können) abhängig abgesehen von den übrigen Faktoren. Hierauf wird später ausführlich eingegangen werden. Daß in der Literatur eine derartige Unklarheit in bezug auf das Stromrichtungsproblem Platz greifen konnte, ist allein mit der merkwürdigen Tatsache zu erklären, daß seit Kenntnis der Detektorwirkung niemand ernstlich den Gedanken erwog, daß der Kristall selbst die Funktion einer „Spitze" übernehmen könnte, obgleich die vielfach bekannten Beispiele von Zweikristallsystemen diesen Gedanken nahelegten.

Das gefundene Gesetz gilt streng bis in das Gebiet der Feinstruktur (wo es besondere Bedeutung besitzt für den Bau von sogenannten Großflächengleichrichtern) und erklärt so noch bestehende Widersprüche, z. B. die Beobachtung der verschiedenen Stromrichtung beim Pyrit und Bleiglanz (trotz sorgfältiger Spitzenvorbereitung) durch Schleede und Buggisch (l. c.). Analoge Beobachtungen machte ich am Zink. Eine Stahlnadel gegen eine polierte Zinkplatte erzeugte hauptsächlich einen Strom von umgekehrter Richtung, wie er bei Annahme der Stahlnadel als „Spitze" zu erwarten war. Überzeugender offenbarte der folgende Versuch den Einfluß der Feinstruktur der Oberfläche. Zwei polierte Zinkkugeln einer ganz neuen, noch nicht gebrauchten Mikrometerfunkenstrecke zeigten wundervolle Detektoreffekte trotz der scheinbaren Symmetrie der beiden polierten Kugelelektroden. Selbstverständlich waren die beiden Kugeln sorgfältig gereinigt. Nur über die zu erwartende jeweilige Stromrichtung ließen sich absolut keine Voraussagen treffen; diese erfolgte scheinbar wahllos bei jeder Neueinstellung, änderte sich aber nach erfolgter Einstellung nicht, es sei denn durch unbeabsichtigtes Verstellen infolge einer Erschütterung. An diesem Beispiel der Zinkfunkenstrecke ließ sich die Unsymmetrie in der Oberflächenfeinstruktur besonders schön demonstrieren. Doch kehren wir zu weiteren grobsinnlichen Beweisen zurück.

In der Tat erhält man in dem eingangs beschriebenen Versuch niemals eine Stromumkehr, wenn eine äußerst feine Spitze (feinste Nähnadel des Handels) unter Beobachtung stets senkrechten Aufsetzens und Vermeidung seitlicher Berührung durch den Kristall verwendet wird. Mit einer dickeren Nadel (gewöhnliche Stecknadel) läßt sich die seitliche Berührung in einem feinen Riß kaum mit Sicherheit vermeiden, so daß dann auch prompt Umkehr des Stromes erfolgt.

Schließlich sei auf eine wohl kaum bekannte Beobachtung hingewiesen, die in anderem Zusammenhang Bedeutung gewinnt. Bei der Aufnahme der gewöhnlichen Gleichstromcharakteristik einer großen Reihe von Kristalldetektoren (z. B. Silizium, Bleiglanz) stellte sich wohl der in Richtung des kleinen Widerstandes durchgelassene Strom J sofort konstant ein, der in Richtung des großen Widerstandes durchgelassene Strom i kriecht dagegen über einen Zeitraum von mehreren Sekunden (mitunter Minuten) auf seinen endgültigen Wert heran. Die Gleichstromcharakteristik weicht daher vielfach von der Wechselstromcharakteristik (aufgenommen mit der Braunschen Röhre) ab, und zwar liefert sie ein ungünstigeres Bild der Gleichrichtfähigkeit. Zu der von Schleede und Buggisch (l. c.) aufgeworfenen Frage, bis zu welchen Spannungen Bleiglanz seine Gleichrichtfähigkeit behält, sei aus einer späteren Arbeit vorweg genommen, daß quantitative Untersuchungen der Wechselstromcharakteristiken (bei Hoch- und Niederfrequenz) mit der Braunschen Röhre beweisen, daß Bleiglanze verschiedener Herkunft ihre Gleichrichtfähigkeit bei recht unterschiedlichen Spannungen verlieren; die meisten bei wenigen Volt Scheitelspannung bereits; ein ausgezeichneter Kristall behielt sie dagegen bis über 50 Volt Scheitelspannung bei.

Die vorliegende Mitteilung beschränkt sich auf die Bekanntgabe eines wesentlichen Versuchsergebnisses, ohne zur Frage des Gleichricht-

mechanismus Stellung zu nehmen. Diese wird in einer späteren ausführlichen Arbeit erfolgen, welche die Untersuchung des Einflusses der dielektrischen Zwischenschicht, die Spitze und Fläche des „Kontakt"detektors trennt, sowie des Einflusses der stofflichen Beschaffenheit der beiden anderen Detektorkomponenten zur Aufgabe hat.

Berlin, Physikalisches Institut der Landwirtschaftlichen Hochschule.

(Eingegangen 5. Februar 1928.)

Darstellung der hydrodynamischen Kräfte.

Von Hermann Heuer †.

I.

Will man bei der Strömung einer inkompressibelen Flüssigkeit die Reibung berücksichtigen, so nehmen bekanntlich die Eulerschen Bewegungsgleichungen die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + (\mathfrak{B}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{B} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p \\ + \mathfrak{K} + \frac{\mu}{\varrho}\,\Delta\,\mathfrak{B} + \frac{\lambda}{\varrho}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathfrak{B}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wenn $\frac{\mu}{\varrho} = \nu$ den Koeffizienten inneren Flüssigkeitsreibung und Δ den Laplaceschen Operator darstellen. Dem Auftreten von Wirbeln genügt man durch den Ansatz

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U} + \mathfrak{W} = \mathrm{grad}\,P + \mathrm{rot}\,\mathfrak{d} \quad (2)$$

für das Geschwindigkeitsfeld. Der Vektor $\mathfrak{d}$ bezieht sich auf den Drehimpuls der wirbelnden Flüssigkeit, wie man durch Bildung der Rotation rot $\mathfrak{d}$ von

$$\mathfrak{d} = \int D\,[\mathfrak{W}\,d\mathfrak{r}] \quad (3)$$

wegen div rot $\mathfrak{d} = 0$ leicht nachweisen kann. Es stellen nun die Komponentengleichungen von $\mathfrak{d} =$ Const in den Projektionsebenen $\mathfrak{r} =$ const die Stromlinien der Wirbelbewegung $\mathfrak{W}$ dar. Wird aus ihnen die Zeit mit Hilfe der entsprechenden Gleichungen für das verschwindende Drehmoment $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} = 0$ eliminiert, so ergeben sich die Bahnlinien der $\mathfrak{W}$-Bewegung als Einhüllende der Stromlinien.

Will man für die Kraft den Ansatz

$$\mathfrak{K} = \mathrm{grad}\,K + \mathrm{rot}\,\mathfrak{M} + \mathfrak{k} \quad (4)$$

wählen, so läßt sich die Bewegungsgleichung (1) in der Form

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{grad}\left\{\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\lambda}{\varrho}\Delta P + P - K + \frac{\mathfrak{B}^2}{2}\right\} \\ + (\mathfrak{B}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{B} - \mathrm{grad}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{2} - \mathfrak{k} \\ = -\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{d}}{\partial t} + \nu\,\mathrm{rot}\,\Delta\,\mathfrak{d} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{M} \\ = -\mathrm{rot}\left\{\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} - \nu\Delta\,\mathfrak{d} - \mathfrak{M}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

darstellen.

Hierin bezeichnet man

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\lambda}{\varrho}\Delta P + P - K + \frac{V^2}{2} = \mathrm{const} \quad (6)$$

als Bernouillische Gleichung, die nach Fuchs-Hopf auch für Stromlinien im Raume gültig bleibt. In der Praxis sieht man

$$\mathfrak{k} = (\mathfrak{B}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{B} - \mathrm{grad}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{2} = -[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] \quad (7)$$

als den Ursprung der Widerstands- und Auftriebskräfte an. Schon der Charakter von $\mathfrak{k}$ in der Gestalt eines axialen Vektors gegenüber den anderen Ausdrücken berechtigt zu einer Zerlegung der Gl. (5) in die Bernouillische Gleichung (6), die hydrodynamische Kraft (7) und in die für den ganzen Raum gültige Gleichung

$$\mathrm{rot}\left\{\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} - \nu\Delta\,\mathfrak{d} - M\right\} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} - \nu\Delta\,\mathfrak{d} = \mathfrak{M}. \quad (8)$$

Die Berechtigung zu einer solchen Darstellung der Verhältnisse wird ganz besonders erwiesen durch die Anwendung der Gl. (5) auf einen flächenhaften Raum, der die Grenzfläche umschließt. Multipliziert man nämlich die Gl. (5) mit dem Raumelement $d\omega = (d\mathfrak{f}\,d\mathfrak{F})$, und integriert längs des Weges $\mathfrak{f}$ nach $d\mathfrak{f}$, so gilt bei Benutzung von $\mathfrak{n}$ als Bezeichnung für den normalen Einheitsvektor auf dem infinitesimalen Flächenelement $d\mathfrak{F}$:

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\lambda}{\varrho}\Delta P - P - K + \frac{\mathfrak{B}^2}{2}\right\}\mathfrak{n} \\ + \left\{\mathfrak{B}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{n}) - \frac{\mathfrak{B}^2}{2}\mathfrak{n}^2\right\} - \mathfrak{T} \\ + \left[\mathfrak{n}\left\{\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} - \nu\Delta\,\mathfrak{d} - \mathfrak{M}\right\}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Der erste Ausdruck stellt eine Wirkung rein normal zur Grenzfläche, der letzte eine solche rein tangential zur Fläche dar; während der mittlere Ausdruck als Integral der Gl. (7) in der Gestalt eines Maxwellschen Spannungstensors

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{n}) - \frac{\mathfrak{B}^2}{2}\,\mathfrak{n} \quad (10)$$

erscheint, der den Widerstand und den Auftrieb für die Flächeneinheit der Grenze angibt. Die Normalgeschwindigkeit $\mathfrak{B}_\mathfrak{n} = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{n})$ wird an be-

wegten Flächen z. B. am Propeller, am Vogelflügel nicht verschwinden. Man wird wohl nur durch das Vorhandensein des Gliedes $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}\mathfrak{n}$) als Zugkraft im Maxwellschen Sinne den Vogelflug erklären können.

Sieht man, was den Vektor $\mathfrak{M}$ in der Gl. (8) anbetrifft, von der räumlichen Wirkung eines magnetischen Momentes auf die Flüssigkeit ab, so wird man im Raume $\mathfrak{M}$ durchweg gleich Null setzen können. Nur wegen der Bedingung des Haftens der Flüssigkeit an der Grenze wird gemäß Gl. (9) durch die Grenzflächen ein Moment $\mathfrak{M}$ auf die unmittelbar benachbarten Flüssigkeitsteilchen ausgeübt werden können.

II.

Sieht man also von einem räumlich verteilten Felde $\mathfrak{M}$ in der Gestalt des magnetischen Momentes ab, so könnte nur von der Begrenzung der Flüssigkeit ein Moment auf sie wirken. Wäre ebenso die Geschwindigkeit $\mathfrak{u} = [\mathfrak{n}\{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0\}]$ der als starr angenommenen Grenzfläche mit den Tourenzahlen $\mathfrak{n}_x \mathfrak{n}_y \mathfrak{n}_z$ um die xyz Achse von der Zeit unabhängig, so würde die Diffgl. (8) in die homogene

$$\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} = \nu \Delta \mathfrak{d} \tag{8a}$$

übergehen, und die Gleichheit des auf ein Flüssigkeitsteilchen wirkenden Drehmomentes $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}$ und des Reibungsmomentes: $\nu \Delta \mathfrak{d}$ ausdrücken. Gl. (8a) ist also als Definitionsgleichung für die Wirbelbewegung $\mathfrak{W} = \operatorname{rot} \mathfrak{d}$ anzusehen.

Man wird nun zunächst nach einer Grundlösung der Gl. (8a) suchen müssen, die man zur Gewinnung der allgemeinsten, die Grenzbedingungen berücksichtigenden Lösung nach Art der Greenschen Integralsdarstellung in die Integranden einzusetzen hat. In der Lösung für den Raum

$$\mathfrak{d}' = \nu \int_0^{\mathfrak{t}'}\!\!\iint \left\{ \bar{\mathfrak{d}} \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\overline{\partial \mathfrak{d}}}{\partial n} \right\} df\,dt - \iiint \left| g \mathfrak{d} \right|_{\mathfrak{t}=0} d\omega \tag{11}$$

stellen $\bar{\mathfrak{d}}$ und $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial n}$ Randwerte und $\mathfrak{d}$ eine Grundlösung von Gl. (8a) zur Zeit $\mathfrak{t} = 0$ dar. Die Greensche Funktion $g\{x - x';\ y - y';\ z - z';\ \mathfrak{t} - \mathfrak{t}'\}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial g}{\partial \mathfrak{t}} = -\nu \Delta g. \tag{12}$$

Für die zweidimensionale Strömung in der $x'y'$ Ebene gilt

$$\mathfrak{d}_z' = -\int_0^{\mathfrak{t}'}\!\!\int \left\{ \bar{\mathfrak{d}}_z \frac{\partial g_2}{\partial n} - g_2 \frac{\overline{\partial \mathfrak{d}_z}}{\partial n} \right\} ds\,d\mathfrak{t}$$
$$-\iint \left| g_2 \mathfrak{d}_z \right|_{\mathfrak{t}=0} dx\,dy, \tag{13}$$

worin g_2 als Greensche Funktion eine Lösung von $\frac{\partial g_2}{\partial \mathfrak{t}} = -\nu \left\{ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} \right\}$ ist. In den Gl. (11) und (13) sind die Normalen in den Randintegralen jedesmal nach innen positiv zu rechnen.

Als Greensche Lösung g_3 für das räumliche Problem Gl. (12) bieten sich

$$g_3 = \frac{1}{12\sqrt{\pi \nu (\mathfrak{t}' - \mathfrak{t})^3}}\, e^{-\frac{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')^2}{4\nu(\mathfrak{t}' - \mathfrak{t})}} \quad \text{und}$$

$$g_3 = \frac{A e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')^2}}}{\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')^2}}\, e^{\pm i\left\{m^2 \nu (\mathfrak{t} - \mathfrak{t}') + \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')^2}\right\}} \tag{14a, b}$$

dar. Auf den Charakter der zweiten Funktion wird man durch eine Lösung der Gl. (8a) $\frac{1}{\nu}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial \mathfrak{t}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial r}$ für eine räumliche Drehimpulskomponente $\mathfrak{d} = \frac{A e^{-M^2 \nu \mathfrak{t} + iMr}}{r}$ geführt. Um eine der Beobachtung entsprechende periodische Wirbelbildung zu erhalten, hat man $M = \frac{m}{\sqrt{2}}(\pm 1 + i)$ einzuführen $\left(\frac{1}{m}\right.$ ist reell und Maß einer Länge$\left.\right)$. Die vollständige Lösung

$$\mathfrak{d} = \frac{e^{-\frac{mr}{\sqrt{2}}}}{r} \left\{ A \sin\left(m^2 \nu \mathfrak{t} - \frac{mr}{\sqrt{2}}\right) \right.$$
$$\left. + B \cos\left(m^2 \nu \mathfrak{t} - \frac{mr}{\sqrt{2}}\right) \right\} \tag{15}$$

kann man hinsichtlich der Abhängigkeit von den Polarkoordinaten α, ϑ noch mit $h(\alpha\vartheta)$ multiplizieren, wenn nur h gemäß

$$-\frac{1}{\nu}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial \mathfrak{t}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial r}$$
$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial \alpha^2} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial \vartheta} \right) \right\} = 0$$

als Lösung von $\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial h}{\partial \vartheta} \right) = 0$, oder nach Einführung von $\eta = ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ als analytische Funktion der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = 0$ auftritt. Da

$$\mathfrak{d} = \frac{e^{-\frac{mr}{\sqrt{2}}}}{r}\left\{A \sin\left(m^2 \nu t - \frac{mr}{\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left. + B \cos\left(m^2 \nu t - \frac{mr}{\sqrt{2}}\right)\right\} h(\alpha, \eta) \qquad (16)$$

auf einer Kugelfläche $r = a$ wegen der analytischen Funktion h das Feld der Stromlinien veranschaulicht, so kann man nach Gl. (3) erwarten, daß die Gl. (16) die r Komponente des Drehimpulses darstellt. Es ist besonders zu betonen, daß $\mathfrak{d}_r$ in Gl. (16) eine Grundlösung der homogenen Diffgl. (8a) für eine momentan freie Bewegung der Grenzfläche ist. Andernfalls treten zu $\mathfrak{d}$ in Gl. (16) noch irgendwelche partikuläre Lösungen $\mathfrak{d}'_p$ der Gl. (8).

Einer vektoriellen Darstellung des $\mathfrak{d}$- und $\mathfrak{W}$-Feldes soll das orthogonale Flächensystem φ, χ, ψ zugrunde gelegt werden. Mit Hilfe der Grundvektoren $\mathfrak{e}^1 = \operatorname{grad}\varphi$; $\mathfrak{e}^2 = \operatorname{grad}\chi$, $\mathfrak{e}^3 = \operatorname{grad}\psi$,

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{[\operatorname{grad}\chi \operatorname{grad}\psi]}{D}, \quad \mathfrak{e}_2 = \frac{[\operatorname{grad}\psi \operatorname{grad}\varphi]}{D},$$
$$\mathfrak{e}_3 = \frac{[\operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\chi]}{D}$$

und $D = (\operatorname{grad}\varphi\,[\operatorname{grad}\chi \operatorname{grad}\psi])$ sind die kovarianten Ansätze

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{u} = \frac{\partial P}{\partial \varphi}\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial P}{\partial \chi}\operatorname{grad}\chi \\ + \frac{\partial P}{\partial \psi}\operatorname{grad}\psi = \sum_i p_i \mathfrak{e}^i\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

als Potentialgeschwindigkeit,

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_\varphi \operatorname{grad}\varphi + \mathfrak{a}_\chi \operatorname{grad}\chi + \mathfrak{a}_\psi \operatorname{grad}\psi = \sum_i a_i \mathfrak{n}^i$$

als polarer Drehimpuls, und der kontravariante Ansatz

$$\mathfrak{W} = \operatorname{rot}\mathfrak{d} = D\sum_i \operatorname{Rot}_i \mathfrak{a}\, \mathfrak{e}_i = D\left\{\left|\frac{\partial \mathfrak{a}_\psi}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathfrak{a}_\chi}{\partial \psi}\right| \mathfrak{e}_1 + \left|\frac{\partial \mathfrak{a}_\varphi}{\partial \psi} - \frac{\partial \mathfrak{a}_\psi}{\partial \varphi}\right| \mathfrak{e}_2 + \left|\frac{\partial \mathfrak{a}_\chi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{a}_\varphi}{\partial \chi}\right| \mathfrak{e}_3\right\}$$

bestimmt.

Ist die Begrenzung der Flüssigkeit durch $\varphi = \text{const}$ gegeben, so müssen in Gl. (17): $\overline{\frac{\partial P}{\partial \varphi}} = 0$, in Gl. (19): $\overline{\frac{\partial \mathfrak{a}_\psi}{\partial \chi}} - \overline{\frac{\partial \mathfrak{a}_\chi}{\partial \psi}} = 0$ an der Grenze verschwinden. Damit $\frac{\partial \mathfrak{a}_\psi}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathfrak{a}_\chi}{\partial \psi}$ nicht identisch hinsichtlich $\chi\psi$ im ganzen Raume Null wird, müssen $\overline{\mathfrak{a}_\psi}$, $\overline{\mathfrak{a}_\chi}$ d. h. $\mathfrak{d}_\chi$ und $\mathfrak{d}_\psi$ der Grenzfläche zu nach Null streben. Die der Diffgl. (8a) entsprechenden Ansätze für die Grundlösungen des Raumes

$$\mathfrak{d}_i = \frac{1}{\sqrt{r}}\left\{A_i \cos M a\, Z_{n+\frac{1}{2}}(Mr) - B_i Z_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(Mr) \sin M a\right\} Y_n(\vartheta, \alpha)\, e^{-M^2 \nu t}$$

verschwinden auf $r = a$ nur für diskrete, reelle Werte von M; im übrigen verschwinden sie sehr bald wegen der Dämpfung, und mit ihnen die entsprechenden Geschwindigkeitsanteile. Man hat also für $\mathfrak{d}_\chi$ und $\mathfrak{d}_\psi$ gemäß der Gl. (11) keine Raumintegrale, sondern nur Randintegrale zu erwarten.

Wirbelfeld um eine gleichmäßig rotierende Kugelschale $\vartheta = \vartheta_0$. Mit Hilfe der konstanten Tourenzahl $\mathfrak{n}_z$ der Schale um die z-Richtung als Achse läßt sich die Umlaufsgeschwindigkeit $\mathfrak{u} = [\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}]$ aus einem Drehimpulsvektor $\mathfrak{d}_0$ herleiten.

$$\operatorname{rot}\mathfrak{d}_0 = \operatorname{rot}\frac{1}{3}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] = \frac{1}{3}\{(\mathfrak{r}\operatorname{grad})\,\mathfrak{u} - \mathfrak{u} + 3\mathfrak{u} - \mathfrak{r}\operatorname{div}\mathfrak{u}\} = \mathfrak{u}$$

$$\mathfrak{d}_0 = \frac{1}{3}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] = \frac{1}{3}\big[[\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}]\,\mathfrak{r}\big] = \frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{n} r^2}{3} \qquad (20)$$

besitzt in den Polarkoordinaten r, α, ϑ des Raumes ausgedrückt die Komponenten

$$\mathfrak{d}_{0r} = 0; \quad \mathfrak{d}_{0\alpha} = \frac{r^2}{3}\{\mathfrak{n}_x \sin\alpha - \mathfrak{n}_y \cos\alpha\};$$
$$\mathfrak{d}_{0\vartheta} = -\frac{r^2}{3}\{\mathfrak{n}_x \cos\vartheta\cos\alpha + \mathfrak{n}_y \cos\vartheta\sin\alpha - \mathfrak{n}_z \sin\vartheta\}.$$

Für die Berechnung des Drehimpulsfeldes nach Gl. (11) benötigt man

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_{0\alpha}}{\partial r} = \frac{2}{3} r\{\mathfrak{n}_x \sin\alpha - \mathfrak{n}_y \cos\alpha\};$$
$$\frac{\partial \mathfrak{d}_{0\vartheta}}{\partial r} = -\frac{2r}{3}\{\mathfrak{n}_x \cos\vartheta\cos\alpha + \mathfrak{n}_y \cos\vartheta\sin\alpha - \mathfrak{n}_z \sin\vartheta\}$$

als Beträge der Grenzgeschwindigkeit, so daß man

$$\mathfrak{d}_r = -\iiint \left| g\,\mathfrak{d}_r\right|_{t=0} d\omega$$

$$\mathfrak{d}_\alpha = -\frac{2\nu a}{3}\int_0^{t'}\iint g\{\mathfrak{n}_x \sin\alpha - \mathfrak{n}_y \cos\alpha\}\, df\, dt$$

$$\mathfrak{d}_\vartheta = \frac{2\nu a}{3}\int_0^{t'}\iint g\{\mathfrak{n}_x \cos\vartheta\cos\alpha + \mathfrak{n}_y \cos\vartheta\sin\alpha - \mathfrak{n}_z \sin\vartheta\}\, df\, dt,$$

findet. Setzt man jetzt $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}_y = 0$, und in Gl. (16) zur Erfüllung der Haftbedingung

$A = C\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}$, $B = C\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}$, so ergeben sich die Drehimpulskomponenten nach Gl. (14b) zu

$$\mathfrak{d}_r = \iiint |g|_{t=0} \frac{Ce^{-\frac{m(r-a)}{\sqrt{2}}}}{r} \sin\frac{m(r-a)}{\sqrt{2}}\, h(a\eta)\, d\omega$$

$$\mathfrak{d}_\vartheta = -\frac{2\nu a \mathfrak{n}_z}{3} \iiint_0^{t'} g \sin\vartheta\, df\, dt. \qquad (21)$$

Aus diesen Komponenten berechnet sich das Wirbelfeld $\mathfrak{W} = \operatorname{rot}\mathfrak{d}$. Ist nun der Wirbelraum $\mathfrak{W}$ durch eine zeitlich sich ändernde Fläche $\mathfrak{F}$ gegen den Potentialraum abgegrenzt, so muß hierin $\mathfrak{W}_n = 0$ sein, d. h. $G = \iint D(\mathfrak{W}\, d\mathfrak{F}) = \text{const}$ ist auf der Fläche konstant, oder bezieht sich direkt auf die Fläche. Dieses läßt sich auf folgende Weise nachweisen.

Wegen $d\mathfrak{F} = [d\mathfrak{r}_1\, d\mathfrak{r}_2]$ läßt sich $(\mathfrak{W}\, d\mathfrak{F}) = (d\mathfrak{r}_2[\mathfrak{W}\, d\mathfrak{r}_1])$ schreiben. Nach Gl. 3 erhält man also

$$G = \iint D(\mathfrak{W}\, d\mathfrak{F}) = \int (d\mathfrak{r}_2 \mathfrak{d}) \qquad (22)$$

als „Fluß" durch die Grenzfläche (= 0), oder aber durch den Querschnitt der mehrfach zusammenhängenden Grenzfläche ($\neq 0$).

Bilden statt φ, χ, ψ jetzt L, M, N das orthogonale Flächensystem des Wirbelraumes mit L als Grenzfläche, so sind nach Gl. (18, 19)

$$\mathfrak{W} = -\frac{\partial M}{\partial t}\mathfrak{n}_2 - \frac{\partial N}{\partial t}\mathfrak{n}_3, \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{a}_L(LMN)\operatorname{grad} L \qquad (23)$$

eine hier nicht näher zu untersuchende Darstellung des Geschwindigkeits- und Drehimpulsfeldes. Man ersieht aus Gl. (23b), wenn bereits der Multiplikator $\frac{1}{\mathfrak{a}_L}$ für die Differentialgleichung $(\mathfrak{d}\, d\mathfrak{r}_2) = 0$ gefunden ist, daß ihre Lösung die Grenzfläche L zwischen Wirbel- und Potentialraum darstellt. Diese kann ihrerseits der Potentialströmung zugrunde gelegt werden.

Obige Darstellungen ermöglichen die theoretische Verfolgung von Erscheinungen, die man an Kugelschalen beobachten kann. Beispielsweise wird man eine etwa 1 kg wiegende Kugelschale aus Zink mit dem Wölbungsverhältnis $^1/_9$—$^1/_{10}$ und einem Durchmesser von etwa 30 cm für die Versuche benutzen. Ein hohes Gewicht ist wegen der Stabilität der unsymmetrisch wirkenden Auftriebskräfte, welche bei schneller Rotation der Scheibe um die Symmetrieachse während des Fluges auftreten, erforderlich. Auch muß die Umdrehungsgeschwindigkeit durch mehrere Versuche ausprobiert werden. Überraschen muß die Tatsache, daß die Schale unter einer Neigung von 15^0 gegen den Erdboden unter gleichzeitiger Erteilung der Rotation zu schleudern ist. Für jede Geschwindigkeit wird ein Optimum der Rotation vorhanden sein, um die größte Steigung der Bahn zu ergeben. Bei Versuchen wurde eine Flughöhe von 14—15 m in einer Entfernung von 40 m von der Abwurfstelle gemessen. Von dem Orte größter Flughöhe führt die Labilität zu den sonderbarsten Flugbahnen.

Eine technische Verwertung für Flugzeuge scheint nicht in Frage zu kommen. Die Lagerreibung, die durch die in den schalenförmigen Tragflächen eingebauten Elektromotoren erzeugte Kreiselwirkung, und die ungleich veränderten Auftriebskräfte mehrerer rotierender Schalen haben schon nicht zu beherrschende Störungen der Flugzeugstabilität zur Folge.

(Eingegangen 26. Oktober 1927.)

Einige Anwendungen des technischen Wechselstromes als Kurzzeitmesser.

Von Olaf Devik.

1. Der technische Wechselstrom von 50 Perioden ermöglicht eine Registrierung von Zeitpunkten in Intervallen von 1/100 Sekunde, welches besonders bei Vorlesungsversuchen und im Praktikum bequem ist. Durch gleichzeitige Anwendung eines Frequenzmessers kann die Fehlergrenze der Zeitmessung ohne Schwierigkeit unterhalb $^1/_4$ Proz. herabgedrückt werden, was für viele Zwecke, auch im Laboratorium, ausreichend sein dürfte.

Eine einfache Registrierung erreicht man durch Anwendung der Elektrolyse von Jodkalium-Stärke, wo das Jod am positiven Pol ausgeschieden wird und die bekannte Blaufärbung gibt. Ein Papier wird zu diesem Zwecke mit einer Lösung von Jodkalium-Stärke getränkt und mit einem Löschblatt oberflächlich getrocknet. Werden dann zwei Wechselstromkontakte nebeneinander über das Papier geführt, wird das Jod an den wechselnden positiven Polen ausgeschieden; also werden auf das Papier zwei Reihen von Linienstücken gezeichnet, wo die Stücke der einen Reihe gerade gegenüber den Intervallen der zweiten fallen. In vielen Fällen genügt diese einfache Vorrichtung, um einen Zeitraum mit einer Genauigkeit von $^1/_{100}$ Sekunde auszumessen; man läßt dann den Wechselstrom durch irgendeine Vorrichtung zu Beginn des betreffenden Prozesses einschalten und am Schluß ausschalten; die Anzahl der gezeichneten Linienstücke gibt

dann direkt die Zeit in hundertstel Sekunden gemessen an[1]).

Als Anwendung dieses Meßprinzips werden unten zwei Vorlesungsapparate und ein Apparat für das Praktikum kurz angegeben.

2. Bei der Behandlung der Kinematik wäre es aus didaktischen Gründen zu wünschen, daß z. B. eine Beschleunigung direkt aus den primär beobachteten Verschiebungen des bewegten Körpers berechnet würde. Dies setzt voraus, daß die Positionen des Körpers zu Zeitpunkten bestimmt werden, deren Intervalle so klein sind, daß die Wegstücke als Differentiale behandelt werden können. Wenn der bewegte Körper selbst seine Positionen automatisch z. B. jede $^1/_{100}$ Sekunde auf die ruhende Unterlage markieren könnte, wäre diese Bedingung in den meisten Fällen erfüllt. Dies läßt sich erreichen durch die Wechselstrommethode. In einigen Fällen ist es vorteilhaft, das Registrierpapier an dem bewegten Körper zu befestigen, während die Wechselstromkontakte an der ruhenden Unterlage befestigt sind, in anderen Fällen dürfte die umgekehrte Anordnung günstiger sein.

Ein Demonstrationsapparat zur Messung der Schwerebeschleunigung hat sich in folgender Ausführung gut bewährt.

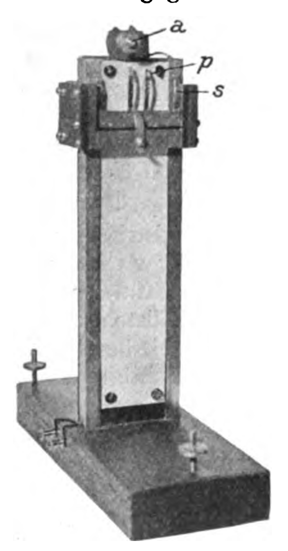


Fig. 1.

(Fig. 1.) Ein schweres Gewicht (etwa 2 kg) gleitet als Schlitten an einer hölzernen Säule während des freien Falles. An dem Schlitten sind zwei federnde Platinkontakte (*p*) angebracht, welche während des Hebens des Gewichts heruntergeklappt werden können. Diese Kontakte gleiten während des Falles auf der Vorderfläche der Säule, wo das Jodkalium-Papier befestigt wird[1]). Die Stromzuführung geschieht durch zwei an dem Schlitten befestigte Schleppkontakte (*s*), welche auf zwei stromführenden, festen Messingschienen gleiten. Oben an der Säule ist eine Auslösevorrichtung (*a*), welche in demselben Moment sowohl das Gewicht auslöst als den Wechselstrom

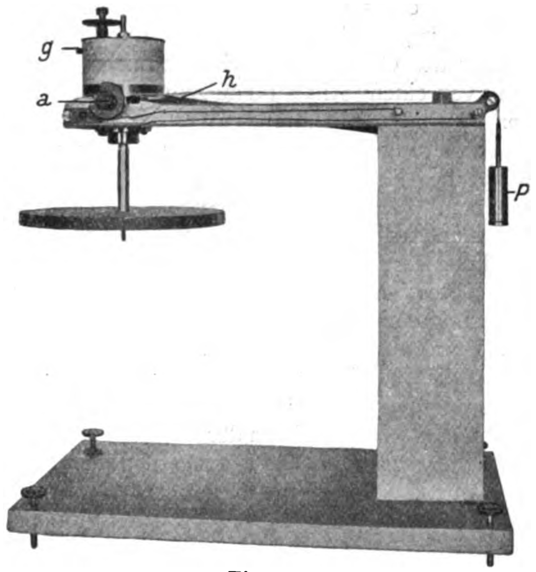


Fig. 2.

einschaltet. Nahe am unteren Ende des Fallweges wird der Wechselstrom wieder ausgeschaltet, und zwar dadurch, daß die Stromschienen dort auf einer kurzen Strecke unterbrochen sind. Es genügt bei diesem Apparate eine Fallhöhe von 20—30 cm, um eine für diesen Zweck befriedigende Bestimmung von *g* auszuführen. Der. Einfluß der Reibung kann durch die Anwendung eines genügend schweren Gewichtes innerhalb der übrigen Versuchsfehler gehalten werden. (Über die Ausmessung des Registrierstreifens siehe Abschnitt 5.)

3. Ein Demonstrationsapparat zur Bestimmung der Winkelbeschleunigung und dadurch zur Messung von Trägheitsmomenten ist in Fig. 2 angegeben.

1) Der norwegische Gymnasiallehrer, Lektor Sverre Bruun hat nach der oben beschriebenen Methode einen einfachen Demonstrationsapparat zur Messung der Schwerebeschleunigung konstruiert. Durch seine Mitteilung in „Den högere Skole", Nr. 5, 1927, wurde ich zuerst auf diese Methode aufmerksam gemacht.

1) Es empfiehlt sich, das Jodkalium-Papier auf leitender Unterlage anzubringen. Auf der Vorderseite der Säule ist daher ein Messingstreifen eingelegt. Glattes, aber wenig geleimtes Papier (z. B. Vervielfältigungspapier) wird mit einer frisch bereiteten Mischung von 5 proz. Stärkelösung und 10 proz. Jodkaliumlösung gestrichen und oberflächlich getrocknet, so daß es feucht, aber nicht naß ist. Nach beendeter Registrierung kann das Papier in Wasser gewaschen werden; die Registriermarken bleiben stehen.



An einem Zylinder, dessen vertikale Achse in Kugellagern läuft, ist das Registrierpapier befestigt. Das Drehmoment wird durch ein Gewicht (*p*) ausgeübt, welches an einem dünnen Draht hängt, der auf dem Zylinder aufgerollt ist. Oben am Stativ ist eine Auslösevorrichtung (*a*), welche gleichzeitig das Gewicht frei läßt und den Wechselstrom zu einem Gleitkontakte (*g*) führt, welcher federnd auf das präparierte Papier drückt. Die zweite Leitung ist mit dem Lager des Zylinders verbunden.

Nach einer Umdrehung wird die treibende Kraft ausgeschaltet, indem sich die Aufhängeschnur des Gewichtes in einer bestimmten Stellung von einem Stift an dem Zylinder ablöst. Um den Einfluß der Reibung zu bestimmen, wird die Registrierung fortgesetzt, und zu diesem Zwecke wird die Kontaktfeder langsam seitlich verschoben. (Hierzu dient ein Hebelarm (*h*), der mit der Kontaktfeder verbunden ist; der Hebelarm wird von der Hand bewegt.) Man erhält in dieser Weise eine Schraubenlinie, von Linienstücken zusammengesetzt, deren Zeitabstand $^1/_{100}$ Sekunde ist. Durch Ausmessung (siehe Abschnitt 5) erhält man die Winkelbeschleunigung in der Beschleunigungsperiode; die Korrektion wegen der Reibung ist einfach gleich der Verzögerung, nachdem die treibende Kraft ausgeschaltet ist.

Auf die verlängerte Achse des Zylinders können zur Bestimmung von Trägheitsmomenten verschiedene Körper angebracht werden. Es läßt sich natürlich mit diesem Apparate keine genaue Bestimmung machen; zur Demonstration der grundlegenden Beobachtungen wird er sich jedoch eignen.

4. Zu direkter Bestimmung von Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung verschiedener Teile eines Wechselstromkreises läßt sich die Methode auch benutzen. Dies dürfte besonders für das elementare Praktikum von Interesse sein, gewöhnlich wird ja dort die Phasenverschiebung indirekt ermittelt. Wenn im folgenden ein derartiger Apparat beschrieben wird, so sei gleich betont, daß man in erster Linie ein pädagogisches Ziel im Auge hat.

Der Registrierzylinder (Fig. 3) ist in drei Teile geteilt, die voneinander isoliert, aber auf derselben Welle befestigt sind. An jedem dieser drei Zylinder wird ein präparierter Papierstreifen befestigt. Der Zylinder wird durch einen Motor in gleichmäßige Rotation gesetzt, etwa zwei Umdrehungen pro Sekunde. An einer seitlich befestigten Achse (*a*) sind drei paar Kontaktfedern drehbar angeordnet in der Weise, daß die Kontaktfedern während eines einzigen Umlaufes des Zylinders an die Papierstreifen gedrückt werden können. Dies bewirkt eine spezielle Vorrichtung am Ende der Zylinderachse; diese Achse hat einige große Gewinde, in welche eine seitlich verschiebbare Mutter (*m*) eingreifen kann. Die Mutter wird durch eine Spiralfeder (*f*) nach innen gedrückt. Wenn man die Mutter mit der Hand auszieht bis zum Eingriff der Gewinde, bewegt sich die Mutter zwangläufig weiter, bis sie wieder außer Eingriff gekommen ist. Während des Eingriffs wird ein kleiner Stift (*s*), welcher

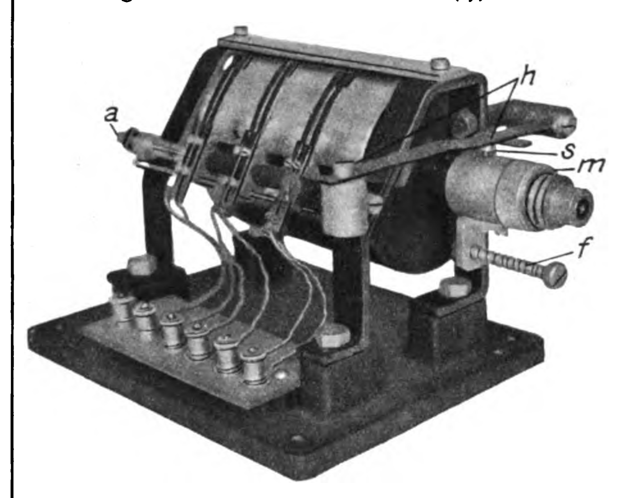


Fig. 3.

durch die Wandung der Mutter geht, in ein vertieftes Gewinde der Zylinderachse hinabgleiten; diese Vertiefung geht nur einmal um die Achse herum, und nach einer Umdrehung wird der Stift wieder gehoben. Die Bewegung des Stiftes wird auf einen Hebelarm (*h*) übertragen, welcher die Kontaktfedern an die Zylinderfläche drückt.

Nach erfolgter Registrierung wird der Hebelarm gehoben und der Zylinder zurückgedreht. Dadurch kommt die Mutter wieder in Eingriff und man kann bei stillstehendem Zylinder den Hebelarm mit der Hand herabdrücken, wodurch die stromführenden Kontaktfedern Nullmarken auf die Registrierpapiere markieren. (Bequem ist es, wenn diese Punkte genau auf einer geraden Linie liegen; dann kann man das oberhalb des Zylinders angebrachte Lineal benutzen und mit Bleistift Zeitlinien aufzeichnen.) Wenn die Mutter in die innere Lage gekommen ist, kann eine neue Messung stattfinden; da die Kontaktfedern etwas seitlich verschiebbar sind, können mehrere Registrierungen auf dasselbe Papier aufgenommen werden[1]).

1) Für Demonstrationszwecke kann man eine vereinfachte Anordnung benutzen: Die drei Kontaktpaare werden horizontal angeordnet, und die drei Registrierstreifen werden auf einer horizontalen Platte befestigt, welche auf dem Tisch unterhalb der Kontakte schnell vorübergezogen werden kann, z. B. durch ein Gewicht das in Wasser herabsinkt.

In Fig. 4a wird als Beispiel für die Anwendung eine Schaltung angegeben, nach welcher die Verschiebung der Spannungsphase an einer Selbstinduktion und an einer Kapazität gegenüber der Stromphase bestimmt wird. Die Stromphase wird von dem ersten Kontaktpaar gegeben, wel-

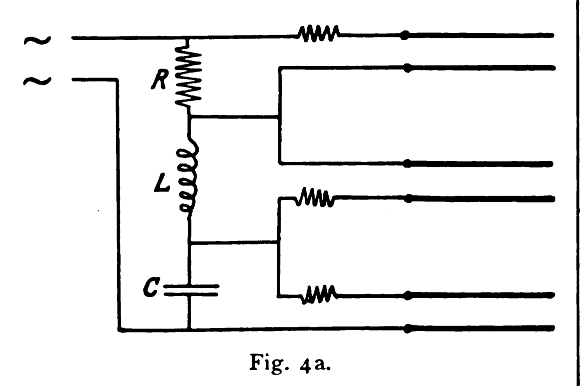


Fig. 4a.

ches durch einen Vorschaltwiderstand parallel zu einem Ohmschen Widerstand geschaltet ist. Das zweite bzw. dritte Kontaktpaar ist durch einen Vorschaltwiderstand parallel zur Selbstinduktion bzw. zur Kapazität geschaltet. Die Registriermarken auf dem Papier werden z. B. wie in Fig. 4b gezeichnet. Die Verschiebung der Reihen II und III der Reihe I gegenüber gibt dann direkt die Phasenverschiebung an.

Die Ausmessung der Registrierkurven wird erleichtert durch die Anwendung einer Hilfsskala,

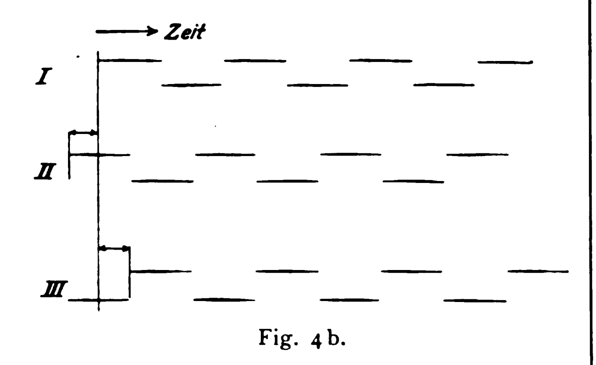


Fig. 4b.

welche auf Zelluloid aufgetragen ist und bei der Ablesung auf die betreffende Registrierkurve gelegt wird, wie es in Fig. 4c angegeben ist. Die Bestimmung des Anfangspunktes eines Linienstückes (bei A) wird durch das Einpassen mehrerer Linienstücke in der Hilfsskala entsprechend genauer.

5. Wenn man, wie in Abschnitt 2 und 3, eine Registrierung einer beschleunigten Bewegung erhalten hat, ist die Länge eines einzelnen Linienstückes der Geschwindigkeit zu dem betreffenden Zeitpunkt proportional, und prinzipiell hätte man durch sukzessive Ausmessung der Linienstücke und Differenzbildung die Beschleunigung bestimmen können. Dieses Verfahren würde jedoch sehr ungenaue Resultate geben. Etwas besser ist es, wenn man eine längere Wegstrecke vom Anfangspunkte mißt und eine konstante Be-

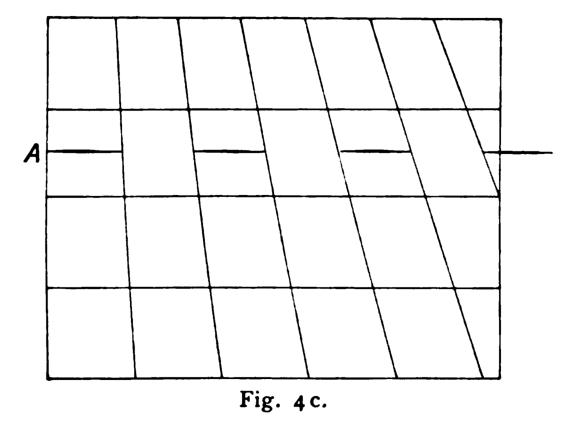


Fig. 4c.

schleunigung voraussetzt. Die Bestimmung des Zeitpunktes, wo die Bewegung gerade anfängt, wird jedoch immer eine Unsicherheit von einer halben Periode des Wechselstroms haben. Ist z. B. der ganze Zeitraum, wie bei der oben beschriebenen Fallmaschine, etwa 0,2 Sekunden, würde der Fehler der Zeitbestimmung 5 Proz. betragen können.

Diesen Fehler kann man folgendermaßen vermeiden. Vorausgesetzt wird nur, daß die Bewegung auf der betreffenden Wegstrecke eine konstante Beschleunigung (b) hat. Die Frequenz des Wechselstromes sei ν, der Zeitintervall entsprechend eines Linienstückes also $\frac{1}{2\nu}$. Nach dem Verlauf von m Zeitintervallen steigt die Geschwindigkeit von v_1 bis $v_1 + b\frac{m}{2\nu}$.

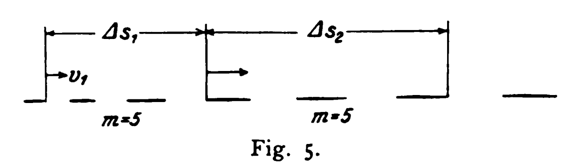


Fig. 5.

Die entsprechenden Wegstrecken sind (siehe Fig. 5).

$$\Delta s_1 = v_1 \frac{m}{2\nu} + \frac{1}{2} b \frac{m^2}{4\nu^2},$$

$$\Delta s_2 = \left(v_1 + b\frac{m}{2\nu}\right)\frac{m}{2\nu} + \frac{1}{2} b \frac{m^2}{4\nu^2},$$

also ist

$$\Delta s_2 - \Delta s_1 = b \frac{m^2}{4\nu^2}$$

und die Beschleunigung wird

$$b = \frac{(\Delta s_2 - \Delta s_1)\, 4\nu^2}{m^2}.$$

Diese Formel erlaubt die Bestimmung der Beschleunigung irgendwo auf einer Strecke ohne Rücksicht auf den Anfang der Bewegung. Praktisch verfährt man so, daß man für *m* eine passende Zahl wählt, und eine ganze Reihe aufeinanderfolgende Strecken mißt, indem man bei jeder neuen Messung ein Linienstück auf der Kurve weiter geht. Aus dieser Reihe werden diejenigen Zahlenwerte paarweise gruppiert, welche um *m* Nummern voneinander entfernt sind, und die Differenzen gebildet, aus deren Mittelwert die Beschleunigung berechnet wird[1]).

1) Als Beispiel sei eine Ausmessung einer Fallregistrierung angegeben: $m = 5$, $\nu = 50$ (nicht gemessen). Korrektion wegen Verkürzung des Papiers beim Trocknen = 1,1 Proz.

Δs_1	2,92	3,43	3,87	4,40	4,90	5,32	5,75	6,30	6,68	7,20
Δs_2	5,32	5,75	6,30	6,68	7,20	7,77	8,20	8,80	9,15	9,50
$\Delta s_2 - \Delta s_1$	2,40	2,32	2,43	2,28	2,30	2,45	2,45	2,50	2,47	2,30

Mittel 2,39, Korrektion 0,02, $g = \frac{2{,}41 \cdot 4 \cdot 2500}{25} = 965$ cm/sec².

Trondhjem, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 21. Februar 1928.)

Über die Hypothese von H. Petersen, daß die höchsten Atmosphärenschichten durch β-Strahlen erwärmt werden.

Von Wilhelm Anderson.

Vor kurzem hat H. Petersen die Hypothese aufgestellt, daß die höchsten Schichten der irdischen Atmosphäre durch β-Strahlen erwärmt werden, die von der Sonne ausgehen sollen[1]). Den auf die irdische Atmosphäre fallenden Elektronenstrom schätzt Petersen auf 10^6 Amp. Dieser Elektronenstrom ist nach Petersen mit demjenigen identisch, welcher die magnetischen Stürme hervorruft. Es sei auch ein naheliegender Gedanke, daß die schnellsten von der Sonne ausgehenden Elektronen dieselbe Geschwindigkeit haben, wie die schnellsten bekannten β-Strahlen.

Dagegen bemerke ich folgendes:

Die größte bis jetzt beobachtete Geschwindigkeit der β-Strahlen beträgt 11 Millionen Volt; eine solche Geschwindigkeit wollen D. Yovanovitch und J. d'Espigne bei *RaC* gemessen haben[2]). Sollte die Sonne nur solche β-Strahlen aussenden (und nicht gleichzeitig auch positive Atomionen), so müßte ihre positive Ladung bis 11 Millionen Volt steigen; einen weiteren Verlust der Sonne an negativer Elektrizität würde das entstandene elektrostatische Feld verhindern.

Die Kapazität der Sonne beträgt etwa 0,077 Farad. Sollten die von der Sonne ausgehenden β-Strahlen einen Strom von 10^6 Amp. bilden, so würde die Sonne schon in etwa 0,8 Sekunden bis 11 Millionen Volt geladen sein, wodurch die β-Strahlung gestoppt wäre. In Wirklichkeit müßte die positive Sonnenladung noch viel schneller steigen. Nach Petersen ist 10^6 Amp. der Strom, welchen die Erde erhält; das kann aber nur ein kleiner Teil des Gesamtstroms sein, welcher von der Sonne ausgeht.

H. Benndorf nimmt nun an, daß die von der Sonne ausgehende β-Strahlung von einer gleich schnellen und gleich intensiven Strahlung positiver Atomionen begleitet sei[1]). Dadurch wäre die oben erwähnte Schwierigkeit behoben. Nun ist aber bei gleicher Geschwindigkeit die kinetische Energie proportional der Masse. Also müssen die von der Sonne ausgehenden positiven Atomionen eine sehr viel größere kinetische Energie besitzen als die gleich schnellen Elektronen (da ja die Masse der letzteren sehr viel kleiner ist als die Masse der positiven Atomionen). Darum müssen auch die Hauptrolle bei der Erwärmung der höchsten Atmosphärenschichten die positiven Atomionen spielen, und nicht die Elektronen, wie es Petersen annimmt.

Die Hypothese von Petersen läßt sich nur dann aufrechterhalten, wenn man eine einseitige Protonenvernichtung im Sonnenkörper annimmt: die positiven Protonen unterliegen einer langsamen spontanen Verwandlung in strahlende Energie; die negativen Elektronen dagegen bleiben unverändert. Eine solche Annahme ist auch in der Tat gemacht worden von H. Rudolph[2]), von W. F. G. Swann[3]) und von mir[4]).

1) Physik. Zeitschr. **28**, 510—513, 1927.
2) C. R. **180**, 202f., 1925.

1) Physik. Zeitschr. **26**, 89, 1925. Wenn die positive und negative Strahlung verschiedene Geschwindigkeiten haben sollte, so müßten sich beide Elektrizitäten mit der Entfernung von der Sonne mehr und mehr trennen. Das würde eine elektrostatische Kraft hervorrufen, welche die Geschwindigkeiten beider Elektrizitäten auszugleichen bestrebt wäre. Bei dem so großen von der Sonne ausgehenden Strom, wie ihn die Hypothese von H. Petersen fordert, müßte die oben erwähnte elektrostatische Kraft außerordentlich groß sein.
2) Astronomische Nachrichten **227**, 9f., 1926.
3) Journal of the Franklin Inst. **201**, 169f., 1926; Phil. Mag. (7), **3**, 1093, 1927.
4) Zeitschr. f. Phys. **41**, 75, 1927; **42**, 475ff., 1927.

Aber damit sind noch nicht alle Schwierigkeiten behoben.

Die in die irdische Atmosphäre eindringenden Elektronen müssen wieder in den Weltenraum entweichen (sonst würde ein unzulässig rasches Steigen der negativen Ladung der irdischen Atmosphäre stattfinden). Wenn nach Petersen die Erde 10^6 Coulomb negativer Elektrizität in der Sekunde erhält, so muß sie ebensoviel in den Weltenraum verlieren. Mag dieser Prozeß zum Beispiel 3 Sekunden gedauert haben. Die in dieser Zeit von der Erde (wohl gleichmäßig nach allen Seiten) zerstreute Elektrizitätsmenge beträgt 3.10^6 Coulomb, und befindet sich innerhalb einer Kugel, deren Radius kleiner als 1 Million Kilometer sein muß (denn selbst die mit Lichtgeschwindigkeit sich bewegenden Elektronen würden in 3 Sekunden nur 9.10^5 km durchmessen haben). Es ist leicht zu berechnen, daß dann in 1 Million Kilometer Entfernung vom Zentrum der Erde das negative Potential 27 Millionen Volt betragen muß. Dies ist mehr als genug, um selbst die schnellsten von der Sonne ausgehenden β-Strahlen zu stoppen und so zu verhindern, sich der Erde weiter zu nähern.

Will man trotzdem die Hypothese von Petersen aufrechterhalten, so muß man annehmen, daß in manchen Fällen die gewöhnlichen elektrostatischen Gesetze ihre Gültigkeit verlieren. Eine solche Annahme sah auch ich mich gezwungen bei meiner Koronauntersuchung zu machen[1]).

1) Zeitschr. f. Phys. **41**, 58ff., 1927.

Dorpat (Estland), 14. Februar 1928.

(Eingegangen 17. Februar 1928.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES IV. DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN KISSINGEN VOM 18.—24. SEPTEMBER 1927.

A. P. Weber (Charlottenburg), Eine neue Methode höchster Genauigkeit zur interferometrischen Wellenlängenmessung und ihre erstmalige Anwendung zur Vorbestimmung der für den deutschen Anschluß des Meters an Lichtwellen vorgesehenen Kryptonlinien. (Nach gemeinsamen Versuchen von Kösters, Lampe und Weber.)

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt).

Die in den letzten Jahren mehr und mehr zur Anwendung gelangende interferometrische Methode der Längenmessung setzt voraus, daß die Wellenlänge des benutzten Lichtes im metrischen Maß genau bekannt ist. Inwieweit dieser Forderung die Messungen der Wellenlänge der roten Cadmiumlinie durch Michelson, Benoit, Fabry und Perot noch genügen, wird durch eine in der PTR in Ausführung begriffene Wiederholung des Meteranschlusses an Lichtwellen geprüft werden. Der praktische Gebrauch der neuen Meßtechnik, insbesondere bei Anwendung der von Dr. Kösters angegebenen Absolut-Interferenzkomparatoren und der zugehörigen Meßvorschrift[1]), ergab die Notwendigkeit für diese feinen Messungen schärfere Spektrallinien heranzuziehen. Die Genauigkeit der bisher mit Fabry-Perot-Etalon gemessenen Wellenlängen dieser Linien genügte jedoch nicht den gestellten Anforderungen. Es wurden daher nach der bereits früher beschriebenen Kösterschen Methode der interferometrischen Längenmessung durch Herrn Dr. P. Lampe und den Verfasser unter Verwendung von technischen Endmaßen weitaus genauere Messungen von Lichtwellenlängen ausgeführt, über die im folgenden berichtet wird.

I. Um die Vorzüge der neuen Methode zur Wellenlängenmessung besser zu kennzeichnen, ist es zweckmäßig, auf die Nachteile der Etalonmethode hinzuweisen. Bei dieser werden die vom Etalon erzeugten Interferenzringe mittels eines gut korrigierten Objektives auf den Spalt eines stigmatisch abbildenden Spektrographen entworfen. Die relativen Wellenlängen werden durch Ausmessung der Interferenzerscheinung auf der photographischen Platte erhalten. Derartige Wellenlängenmessungen können infolge der nachstehend angeführten Nachteile des Etalons keinen Anspruch auf höchste Genauigkeit machen.

1. Die Etalons sind während der photographischen Aufnahme der Interferenzen unkontrollierbaren mechanischen Veränderungen des Plattenabstandes unterworfen.

2. Die Herstellung einer guten Versilberung der Etalonplatten ist noch schwieriger als die Justierung der Platten auf absolute Planparallelität zueinander. Von der Erfüllung dieser beiden

1) Siehe den Abschnitt im Handbuch der physikalischen Optik, Band 1, 1. Hälfte: Kösters, Die Anwendung der Interferenzen zu Meßzwecken.

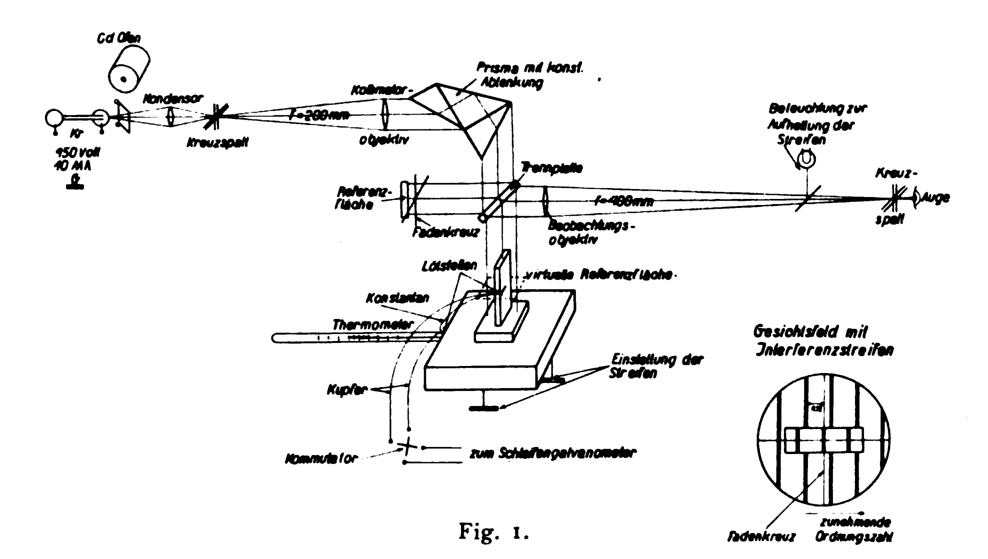


Fig. 1.

Bedingungen hängt die Schärfe, Feinheit und Lage der Interferenzringe ab.

3. Für jede einzelne Wellenlänge muß der Phasensprung des Lichtes an der durchlässigen Silberschicht empirisch ermittelt werden. Die Bestimmungsfehler des Phasensprunges gehen mit dem doppelten Betrage im Verhältnis zum einfachen Plattenabstand des Etalon in die Wellenlängenmessung ein.

4. Durch die Unsymmetrie der Intensitätsverteilung der Interferenzringe läßt sich der wahre Ringdurchmesser nicht ohne weiteres messen.

5. Infolge der bei zunehmendem Plattenabstand ständig enger werdenden Ringsysteme lassen sich die an und für sich vorteilhafteren großen Plattenabstände nicht anwenden.

6. Mangels eines geeigneten Spiegelmetalls ist der Wirkungsgrad des Etalons im ultravioletten Gebiet bedeutend verschlechtert. Ultraviolette Normalen können daher nur mit geringerer Genauigkeit gemessen werden.

Wenn auch bei Feinstrukturuntersuchungen der gut versilberte Etalon mit veränderlichem Plattenabstand von keiner anderen Interferenzeinrichtung hinsichtlich Qualität und Deutung der Interferenzerscheinung übertroffen wird, so ist die mit ihm erzielte Genauigkeit bei Wellenmessungen doch nur etwa $\pm$ 0,004 bis $\pm$ 0,001 ÅE. Für die Zwecke der interferometrischen Längenmessung ist diese Genauigkeit zu gering.

Durch die neue Methode lassen sich diese Nachteile des Etalons ausschalten. Bereits seit mehreren Jahren werden nicht nur in der Reichsanstalt, sondern auch in den übrigen nationalen Instituten, wie z. B. in Washington, Teddington und Paris, technische Parallelendmaße aus gehärtetem Stahl interferometrisch ausgemessen, d. h. ihre Länge direkt in Lichtwellenlängen ermittelt. Insbesondere läßt sich mit den von Dr. Kösters entwickelten Absolut-Interferenzkomparatoren bei einfachster Handhabung die Länge von Endmaßen bis zu einer Gesamtlänge von vorläufig 25 cm mit einer Genauigkeit von wenigen 0,001 μ bestimmen. Die Zuverlässigkeit derartiger Maßbestimmungen ist durch viele Hunderte von Messungen bestätigt. Es lag nun nahe, mit diesen Interferenzkomparatoren unter Benutzung von der Länge nach bekannten und konstanten Endmaßen umgekehrt relative Wellenlängenmessungen auszuführen, deren Genauigkeit naturgemäß der bei Längenmessungen erzielten hohen Genauigkeit relativ gleichkommen muß.

Das Prinzip des Absolut-Interferenzkomparators und der Gang der interferometrischen Längenmessung ist von Dr. Kösters an anderer Stelle[1]) eingehend beschrieben worden. Die obenstehende Fig. 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Apparates. Im wesentlichen besteht er aus einem zweckmäßig abgeänderten Michelson-Interferometer, mit dem visuell Fizeaustreifen, keine Ringe wie beim Etalon beobachtet werden. Das Prinzip der Beobachtung von Fizeaustreifen zur Messung von Endmaßen größter Länge ist von Dr. Kösters in die neuzeitliche Meßtechnik eingeführt worden. Der benutzte Interferenzkomparator ist einer der von der Firma Zeiss in den Handel gebrachten Apparate (Fig. 2), der jedoch mit verschiedenen Verbesserungen versehen wurde, die im folgenden näher angegeben sind. Die bekannte Michelsonsche Kompensationsplatte ist fortgelassen. Die Trennungsplatte selbst wurde durch eine einfache Platte mit 6′ Keilwinkel ersetzt, wodurch neben der Vermeidung einer zweiten störenden Interferenzerscheinung, die durch die Reflexion

1) Siehe a. a. O.



an der zweiten Glasfläche hervorgerufen wird, eine gewisse Achromatisierung der Breite der Fizeaustreifen erzielt wird in der Art, daß die Streifenbreite bei verschiedener Wellenlänge konstant gehalten werden kann. Um eine möglichst gute Intensitätsgleichheit der interferierenden Lichtstrahlen herstellen zu können, ist diese Trennungsplatte unversilbert gelassen. Die Keilkante der Platte liegt unter 45^0 zum Strahlengang im Apparat. Die Beobachtung der Fizeaustreifen erfolgt durch eine am Beobachtungsrohr angebrachte Spaltblende, deren Winkelgröße vom

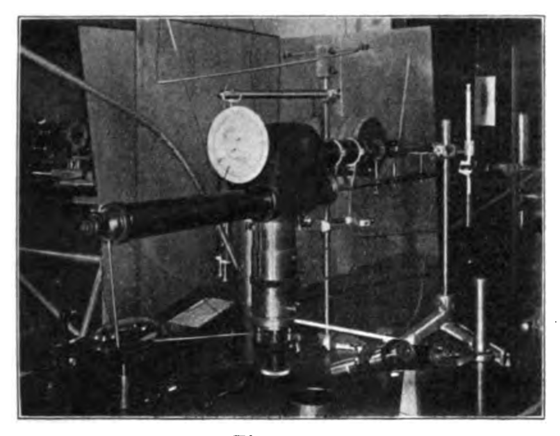


Fig. 2.

Objektiv aus gesehen einerseits von der Länge des Endmaßes, d. h. dem zu überbrückenden Gangunterschied abhängt — da bei zu großer Blende die Fizeaustreifen unsichtbar sind —, anderseits von der Dispersion des spektral zerlegenden Prismas. Die bei kleinen Gangunterschieden überaus schwarzen Interferenzstreifen können zwecks Sichtbarmachen des Fadenkreuzes, das auf der platinierten Referenzfläche eingraviert ist, mittels einer einfachen Vorrichtung aufgehellt werden. Die Temperaturmessung des Endmaßes und damit die Festlegung seiner Länge im Augenblick der Messung erfolgt durch Quecksilber- oder Platinthermometer und durch ein mit einem Zeiss-Schleifengalvanometer abgelesenen Kupfer-Konstantanthermoelement, dessen Lötstellen am Endmaß und am Thermometer liegen. Hierdurch läßt sich eine Temperaturmessung auf $\pm 0{,}003^0$ relativ zum Thermometer ermöglichen. Der Interferenzkomparator ist von der interferometrischen Längenmessung her so justiert, daß mit zur Referenzfläche senkrechtem Strahlengang beobachtet wird. Bei der Wellenlängenmessung muß vor allem die Beobachtungsspaltblende entweder vollkommen und gleichmäßig oder mindestens aber symmetrisch durch das Bild der einzelnen Lichtquellen ausgefüllt sein. Dies ist wohl die einzigste Fehlerquelle, die sich allerdings leicht ausschalten und kontrollieren läßt, da zur Erreichung einer Meßgenauigkeit von 1 : 30 Millionen eine Justierung bzw. Ausleuchtungssymmetrie der Spaltblende auf nur $\pm {}^1/_{10}$ mm bei 400 mm Objektivbrennweite des Beobachtungsrohres erforderlich ist.

Als feste „Etalons“ werden aus der gleichen Stahlsorte angefertigte Parallelendmaße und Stahlplatten mit vollkommen identischer Bearbeitung der optisch polierten Oberflächen verwandt. Die Endmaße, die nebst den Stahlplatten von der Firma Fritz Werner, Berlin, ganz erstklassig hergestellt waren, werden nach einem besonderen Verfahren auf die Stahlplatten aufgesprengt. Die Längen- und Gestaltsfehler dieser Endmaße sind sehr klein. Es sei bemerkt, daß von mehreren Firmen Endmaße in den Handel gebracht werden, deren Längen nicht mehr als $\pm 0{,}03\ \mu$ vom Sollwert abweichen und deren Gestaltsfehler, insbesondere die Abweichungen von der Planparallelität kleiner als $\pm 0{,}03\ \mu$ sind.

Der Gang der eigentlichen Wellenlängenmessung ist folgender. Ein Endmaß, dessen Länge sich allein nach der Zuverlässigkeit des Ausgangswertes der zu messenden Wellenlänge richtet, wird in den Interferenzkomparator eingesetzt und zum Fadenkreuz pointiert. Es kommt nun darauf an, für die einzelnen Lichtarten die Verschiebung der beiden im Gesichtsfelde sichtbaren Streifensysteme (Fig. 1), wovon das eine von der oberen Endmaßfläche, das andere von der an das Endmaß angesprengten Stahlplatte herrührt, in Bruchteilen der Streifenbreite abzulesen. Zu diesem Zwecke wird ein dunkler Interferenzstreifen der oberen Endmaßfläche auf den Schnittpunkt des Fadenkreuzes eingestellt und die Stellung des einen Fadens zum zweiten Interferenzstreifensystem abgeschätzt, wobei mit einiger Übung eine Genauigkeit von etwa $\pm 0{,}02$ Streifenbreiten erreicht wird. Damit beide Streifensysteme gleichgut sichtbar sind, wird vorher durch Bewegen des ganzen Apparatkopfes die Lage der virtuellen Referenzfläche auf die halbe Höhe des Endmaßes eingestellt. Temperatur, Luftfeuchtigkeit und Luftdruck werden im Augenblick der Streifenablesung gemessen. Die Länge des Endmaßes ist entweder vorher gemessen worden oder sie wird, was richtiger ist gleichzeitig bei der Wellenlängenmessung mittels Wellenlängennormalen nach der von Kösters angegebenen Methode bestimmt. Bei der jetzt folgenden Berechnung der zu messenden Wellenlänge aus Endmaßlänge und Streifenverschiebung, also relativ zur Wellenlängennormale, ist der jeweilige Brechungsexponent der Luft zu berücksichtigen. Hierzu wird die Formel von Meggers und Peters benutzt. Für die interferometrische Längenmessung hat Dr. Kösters

Tabelle I.

Mittlere Genauigkeit der relativen Wellenlängenmessung bei einem λ von 6000 ÅE.

Endmaßlänge	2	5	12,5	30 + 1,25	75 + 0,625	150 + 0,3125 mm
Meßgenauigkeit	± 0,01	± 0,005	± 0,002	± 0,0007	± 0,0003	± 0,00015 ÅE.
Erforderliche Genauigkeit des Ausgangswertes der Wellenlänge	± 0,25	± 0,5	± 1	± 2	± 3,5	± 7 ÅE.

Anfangswert der Wellenlänge:		*Kr* (rot) 6456,3 ÅE.	*Kr* (gelbgr.) 5649,63 ÅE.
Messung mit einem Endmaß von[1]	2 mm	6456,354	5649,576
„ „ „ „ „ [1]	5 (4,5) mm	6456,325	5649,614
„ „ „ „ „ [1]	12,5 (12) „	6456,331	5649,602
„ „ „ „ „ [1]	30 (25) „	6456,3260	5649,592
„ „ „ „ „ [1]	75 „	—	5649,5912
„ „ „ „ „ [1]	150 „	—	5649,5919
Fein-Messung direkt an *Cd* rot	150 „	6456,3241	5649,5924

1) Einfache Messungen lediglich zur Bestimmung der Ordnungszahl, relativ zu *Kr* 5870.

einen Rechenschieber anfertigen lassen, der die Brechungsexponentkorrektion der Endmaßlänge bzw. der Wellenlänge für eine mittlere Wellenlänge von 5000 ÅE anzeigt. Der Brechungsexponent der Luft läßt sich durch Einsetzen des Endmaßes in ein Vakuumgefäß ebenfalls nach der neuen Methode der Wellenlängenmessung bestimmen. Derartige Messungen, die von den sonst auftretenden Fehlerquellen der früher angewandten Methoden frei sind, werden demnächst veröffentlicht werden.

Die Vorzüge der neuen Meßmethode gegenüber der Etalonmessung sind folgende:

1. Es werden praktisch längenkonstante „Etalons", nämlich handelsübliche Endmaße aus gut gealtertem Stahl benutzt. Bei besonderen Anforderungen können auch Endmaße aus Quarz oder Invar gebraucht werden.

2. An Stelle der engen Ringsysteme der Etalons bei größeren Plattenabständen lassen sich beliebig breite Fizeaustreifen einstellen.

3. Der Phasensprung ist weitgehend, praktisch vollkommen eliminiert, da die beiden Interferenzstreifensysteme ganz gleichartig durch die optisch identischen und gleichgerichteten Stahlspiegel erzeugt werden.

4. Die schwierige Justierung des Etalons fällt fort. Das Endmaß ist als solches dauernd richtig justiert. Die Verschiebung der beiden Streifensysteme ist allein von der Endmaßlänge und der Wellenlänge abhängig.

5. Es ist keine Unsymmetrie der Intensitätsverteilung der Interferenzstreifen vorhanden. Lichtschwache Nebenlinien der zu messenden Spektrallinien, die durch die Dispersion des Interferenzkomparators nicht genügend getrennt sind, haben auf die Lage der Interferenzstreifen und damit auf die Wellenlänge kaum Einfluß. Berechnungen hierüber hat bereits Michelson angestellt, jedoch nur für Feinstrukturkomponenten.

6. Es können die höchsten Gangunterschiede bis zur Grenze der Interferenzfähigkeit des Lichtes angewandt werden. Hierdurch wird die relative Genauigkeit der Wellenlängenmessung außerordentlich gesteigert.

7. Die neue Methode ist auch für photographische Messungen brauchbar. Es ist somit die Möglichkeit gegeben, ultraviolette Normalen mit gleichguter Genauigkeit wie im sichtbaren Gebiet zu bestimmen. Eine derartige Messung ist an der PTR in der Ausführung begriffen. Die photographische Anordnung besteht darin, daß die Interferenzstreifen durch die kleine Austrittsblende photographiert werden. Sollte es erwünscht sein, das ganze Spektrum auf einmal zu erhalten, so läßt sich die Anordnung so treffen, daß die spektrale Zerlegung des Lichtes erst nach dem Austritt durch die Spaltblende des Beobachtungsrohres erfolgt. Allerdings muß hierbei, um genügende Trennung der einzelnen Interferenzstreifensysteme zu erhalten, das Gesichtsfeld mit den Interferenzstreifen durch einen Hilfsspalt eingeengt werden. Am Prinzip der Methode wird hierdurch nichts geändert.

Über die Genauigkeit, die sich mit der neuen Methode erzielen läßt, gibt Tabelle I am besten Auskunft. Aus zahlreichen Endmaßmessungen ergibt sich, daß bei wiederholter Längenmessung eines Endmaßes mit derselben Wellenlänge die einzelnen Messungen nicht mehr wie durchschnittlich 0,004 μ voneinander abweichen. Vorausgesetzt hierbei ist, daß das Endmaß auf der Grundplatte aufgesprengt bleibt. Bei einem Endmaß von 150 mm Länge und genügend interferenzfähigem Lichte ergibt sich also eine relative Genauigkeit der Wellenlängenmessung von 1 : 40 Millionen oder von 0,00015 ÅE. bei einem λ von 6000 ÅE. Die relative Genauigkeit ist unabhängig von der Wellenlänge des Lichtes, da mit abnehmender Wellenlänge, also mit Ab-

nahme des maximal möglichen Gangunterschiedes, im gleichen Verhältnis die Ablesegenauigkeit wächst. Die aus der Tabelle I ersichtliche Auswahl der Endmaßstufen 2, 5, 12,5 usw. mm (s. Fig. 3), also immer das Zweieinhalbfache der Vorstufe, erfolgt in der Absicht, nicht nur bei der nächst größeren Stufe die Wellenlänge genauer zu erhalten, sondern auch gleichzeitg den Ausgangswert der Wellenlänge zu kontrollieren. Es wird also gleichzeitig die Maßlänge auf- und abgebaut. Durch das Maß von 150 mm + 0,3125 mm wird z. B. die für die sichere Bestimmung der Ordnungszahl noch zulässige Fehlergrenze der Ausgangswellenlänge auf $\pm$ 7 ÅE. hinaufgesetzt. Die ganze Anordnung ist also eine Art Auswahlprinzip für die richtige Ordnungszahl.

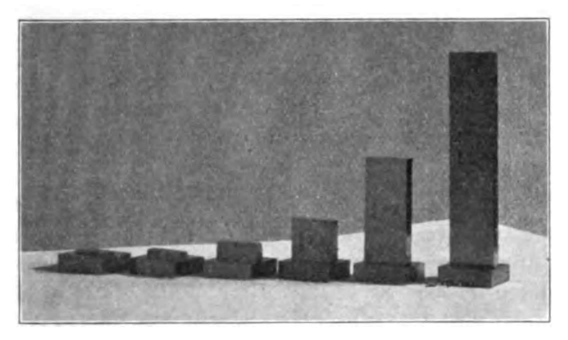


Fig. 3.

II. Ihre erste Anwendung hat die neue Methode bei der Wellenlängenmessung von einigen ausgewählten Kryptonlinien gefunden. Diese Messungen sind nicht nur zum Zwecke ausgeführt worden, genauere Werte der Wellenlängen für die interferometrischen Längenmessungen zu erhalten, sondern sie sind auch ein wesentlicher Bestandteil des Anschlusses des deutschen Meterprototyps Nr. 18 an Lichtwellenlängen. Bereits im Jahre 1923 hat das Internationale Komitee für Maß und Gewicht beschlossen, zwecks internationaler Einführung einer Wellenlängendefinition des Meters die Messungen von Michelson aus dem Jahre 1893 und die endgültigen Messungen von Benoit, Fabry und Perot aus dem Jahre 1907 mit der roten Cadmiumlinie oder mit anderen, besseren und schärferen Linien nach den alten oder neuen Methoden zu wiederholen. Die nationalen Institute von Deutschland, England, den Vereinigten Staaten von Amerika und Japan sind mit der Ausführung der Meteranschlüsse beschäftigt. Japan führt den Anschluß nach der alten Methode von Benoit, Fabry und Perot aus. Der deutsche Meteranschluß erfolgt nach einer von Dr. Kösters erdachten Methode unter Verwendung unveränderlicher, handelsüblicher Endmaße, so daß eine Wiederholung des Anschlusses jederzeit möglich ist und hierdurch gleichzeitig dem Bedürfnis der Industrie nach Längenmessungen höherer Genauigkeit entsprochen wird. Bei dieser Methode muß als erste Aufgabe ein möglichst langes Endmaß, und zwar von mindestens 200 mm Länge direkt in Lichtwellenlängen ausgemessen werden. Mit der roten Cadmiumlinie konnte diese Messung nicht ausgeführt werden, da die Unbeständigkeit der Erzeugung der Linie, ihre geringe interferometrische Schärfe und die Störungen durch die hohe Ofentemperatur die nötige relative Meßgenauigkeit nicht erzielen lassen. Die Lösung dieser Aufgabe war den Kryptonlinien vorbehalten, nachdem es im rechten Augenblick gelungen war, dauerhafte Kryptonröhren herzustellen, die sehr reines Krypton bei hohem Druck enthalten und daher eine Lebensdauer von vielen Hundert Stunden besitzen. Es zeigte sich zunächst, daß die hellgrüne Linie 5570 für interferometrische Längenmessungen nicht brauchbar ist. Eine nähere Untersuchung der übrigen helleren Kryptonlinien zeigte, daß vor allem die Linien 6456, 5870, 5649 und 4502 am besten dem praktischen Bedürfnis der interferometrischen Längenmessungen entsprechen. Besonders die gelbgrüne Linie 5649 ist von so hervorragender Interferenzfähigkeit, daß es mit dieser Linie möglich war das 200 mm Endmaß absolut in Wellenlängen auszumessen. Aber auch mit der vielleicht ebenso scharfen roten Linie 6456 und noch einigen anderen, aber nicht genügend isoliert im Spektrum liegenden Linien kann diese Messung ausgeführt werden. Die Wellenlängen der ausgewählten Linien waren vorher nach der neuen Methode mit den größten, zulässigen Endmaßen (bis zu 150 mm Länge) relativ zur roten Cadmiumlinie gemessen worden. Die Meßresultate sind in Tabelle II mit früheren Messungen zusammengestellt. Aus den einzelnen Meßreihen der vorzugsweise gemessenen Linien 6456, 5870 und 5649 ergibt sich eine Zuverlässigkeit der angegebenen Wellenlängenwerte von rund $\pm$ 0,00001 ÅE.

Die rote Cadmiumlinie ist damit als Normale erster Ordnung ausgeschaltet, mindestens für die Zwecke der interferometrischen Längenmessung. Es ist nicht angängig, daß sie die Normale für die besseren Kryptonlinien ist. Sie genügt nicht den hohen Anforderungen der interferometrischen Längenmessung. Mit der Einführung der unbedingt notwendigen Wellenlängendefinition des Meters wird nämlich die Wellenlängennormale erster Ordnung nicht nur spektroskopisches Interesse besitzen, sondern sie ist das „Urmaß" geworden.

Die Praxis der interferometrischen Längenmessung bedingt neben der „Urmaßlinie" eine möglichst langwellige und eine möglichst kurzwellige Linie zur sicheren Entscheidung der

Tabelle II.
Wellenlängen in Luft von 20° C, 760 mm *Hg* und 10 mm Feuchtigkeit, relativ zur roten Cadmiumlinie 6438,5033 ÅE.

Linie	PTR. Absolut-Inko mit 150 mm Endmaß	Perard 1923 Michelson-Interferometer	Bureau of Standards 1921/22 mit Etalon	Buisson u. Fabry 1913 mit Etalon
grüne Cadmium	5085,8490	,8488	,8498	,8504
rote Krypton	6456,3241		,324	
gelbe „	5870,9463	,9462	,9445	,9480
gelbgrüne „	**5649,5924**			
violette „	4502,3790[1])			
grüne Neon	5400,5919[2])		,593	

1) Relativ zu *Kr* 6456, 5870 u. 5649. — 2) 100 mm Endmaß.

Ordnungszahl der Interferenzstreifen. Im Cadmiumspektrum steht nur die rote Linie für die interferometrischen Messungen zur Verfügung, da alle anderen gut sichtbaren Linien eine störende Feinstruktur haben. Dagegen sind im Kryptonspektrum viele sehr günstig gelegene Linien vorhanden, vor allem die vier vorhin angeführten Linien, die auch mit geringer Dispersion getrennt werden können. Weiterhin hat Krypton im Gegensatz zum Cadmium den großen Vorzug, daß die Interferenzfähigkeit der Linien durch Abkühlen der Röhre mit laboratoriumsmäßigen Mitteln auf mehr als doppelt so großen Gangunterschied gebracht werden kann.

Die bisherige Untersuchung des Kryptonspektrums läßt bereits jetzt die zukünftige Normale erster Ordnung erkennen, nämlich die vortreffliche gelbgrüne Linie 5649, und zwar deren Vakuumwellenlänge, obwohl die Festsetzung der Wellenlänge bei einem Luftzustand von 20° C, 760 mm *Hg* und 10 mm Feuchtigkeit dem praktischen Bedürfnis der interferometrischen Längenmessungen besser entsprechen würde. Ihre Wellenlänge in Beziehung zum Meter ist zweckmäßig so festzulegen, daß der jetzt gültige Wert der Wellenlänge der roten Cadmiumlinie im Interesse der Spektroskopie erhalten bleibt. Inzwischen ist ein Antrag der Vereinigten Staaten von Nordamerika für die Generalkonferenz für Gewichte und Maße, die in Paris im September 1927 zusammentritt, auch Deutschland in Abschrift zugegangen: Das Meter in Wellenlängen der roten *Cd*-Linie mit dem Werte festzulegen, wie er von Fabry und Perot im Jahre 1907 durch Meteranschluß bestimmt worden ist. Vor der Tagung der Generalkonferenz konnten den Herren Meggers und Peters bei ihrem Besuche in Berlin die deutschen Fortschritte, insbesondere die Überlegenheit der Kryptonlinien, persönlich vorgeführt werden und es ist anzunehmen, daß der Antrag in dieser Form nicht Beschluß werden wird. Der deutsche Standpunkt, den Herr Dr. Kösters in Paris vertreten wird, ist der, einer vorläufigen Regelung einer Wellenlängendefinition des Meters durch die rote *Cd*-Linie zuzustimmen, bis den übrigen Staaten ebenfalls Gelegenheit gegeben ist, die gelbgrüne *Kr*-Linie eingehend zu studieren[1]).

Über die Eigenschaften dieser Linie ist weiterhin zu sagen, daß die visuellen interferometrischen Längenmessungen keine Andeutung einer Feinstruktur oder Selbstumkehr ergaben. Auch bereitwilligst von Herrn Dr. Lau gemachte photographische Aufnahmen mit einer verbesserten 10 mm dicken Lummer-Gehrcke-Platte zeigen bei der vorläufig untersuchten gelbgrünen und roten Linie weder Feinstruktur noch Unsymmetrie und Selbstumkehr. Derartige Untersuchungen müssen aber möglichst vielseitig und mit den verschiedensten Hilfsmitteln der Interferenzspektroskopie unternommen werden. Eine Anregung hierfür zu geben, soll nicht der einzige Zweck dieser Ausführungen sein.

Diskussion.

Herr K. W. Meißner: Nach den Ausführungen des Herrn Vortragenden könnte es scheinen, daß die alte Methode von Perot und Fabry, die bisher zur Bestimmung von Normalen zweiter Ordnung von verschiedenen Seiten ausgiebig gebraucht wurde, künftighin der Kösterschen weichen müsse. Demgegenüber scheint mir aber zunächst kein Grund vorzuliegen, sich von der Verwendung der versilberten Luftplatte abzuwenden, die so große Vorteile der Einfachheit beim Aufbau und der Anwendung mit sich bringt; die großen Abweichungen der interferometrischen Messungen verschiedener Beobachter, wie man

1) In der Generalkonferenz in Paris (Sept./Okt. 1927) ist dementsprechend einstimmig beschlossen worden, das Meter vorläufig durch die rote *Cd*-Linie nach Fabry und Perot festzusetzen; um diese durch die bessere gelbgrüne *Kr*-Linie zu ersetzen, die nationalen Institute zu ersuchen, diese Linie eingehend zu studieren.

sie etwa bei Eisenlinien findet, können nicht ohne weiteres durch eine Unzulänglichkeit der Methode erklärt werden, sondern viel eher durch schlecht definierte Linien. Die glänzende Übereinstimmung der verschiedenen Messungen des Neonspektrums beweist dies deutlich. — Als Nachteil der alten Methode wurde ferner angeführt, daß der Phasensprung bei der Reflexion besonders bestimmt werden müsse. Es ist richtig, daß bei der Ermittlung der Dispersion des Phasensprungs, — nur sie geht bei der Bestimmung von Normalen zweiter Ordnung in die Rechnung ein —, am leichtesten Fehler gemacht werden können, aber bei Verwendung vernünftiger Methoden sind solche Fehler leicht zu vermeiden.

Herr Weber: Daß die bisherigen Wellenlängenmessungen mit Etalon nicht so genau übereinstimmen und den hohen Anforderungen der Interferenzlängenmessungen nicht genügen, geht wohl am besten aus den sehr sorgfältigen Messungen der scharfen gelben und grünen Kryptonlinien durch das Bureau of Standard und durch Buisson und Fabry hervor. Diese Messungen zeigen nicht nur eine gegenseitige Differenz von 0,0035 ÅE, sondern weichen auch bei der gelben Linie um rund 0,002 ÅE-Einheiten von den Messungen nach der neuen Methode ab.

Herr R. Mecke: Ich möchte den Herrn Vortragenden fragen, ob nach seiner Meinung die Lichtstärke und Haltbarkeit der benutzten Kryptonlampen ausreichend ist. So geeignet die grüne Linie auch für visuelle Beobachtungen sein mag, so ungeeignet ist gerade diese Spektralgegend für photographische Aufnahmen. Nach den obigen Ausführungen handelt es sich fast ausschließlich um visuelle Messungen, für Normalmessungen an Wellenlängen sind aber photographische Aufnahmen der Interferenzen nicht zu umgehen. Aus diesem Grunde dürfte es sich empfehlen, die Suche nach einer lichtstarken Linie in einem photographisch geeigneteren Spektralbezirk fortzusetzen. Für Gitteraufnahmen reicht die Intensität der jetzigen Röhre auf jeden Fall nicht aus.

Herr Weber: Die Lebensdauer der benutzten Kryptonröhren beträgt etwa 400 Brennstunden, jedoch nur bei Betrieb mit Gleichstrom und keiner höheren Belastung als 10—15 MA. Was die Lichtstärke der gelbgrünen Linie betrifft, so ist diese bei end-on-Stellung der Röhre für photographische Aufnahmen sicherlich ausreichend. Für besondere spektroskopische Zwecke dürften im Krypton-Spektrum andere geeignete Linien vorhanden sein, deren Wellenlängen jetzt schon so genau bekannt sind oder sich messen lassen, daß sie der Normalen I. Ord. (Urmaß) praktisch gleichwertig sind.

Herr R. Mecke: Ich möchte betonen, daß auch die einzelnen Interferometermessungen unter sich, wie bereits Herr Meißner ausführte, recht gut übereinstimmen und die gleiche Genauigkeit haben dürften wie bei der obigen Interferenzanordnung. Die bisher an Wellenlängenmessungen festgestellten Abweichungen sind auf die schwere Reproduzierbarkeit der Versuchsbedingungen (Lichtquelle) zurückzuführen.

Herr Weber: Ich kann hierzu nur nochmals bemerken, daß die Meßgenauigkeit der neuen Methode auf Grund von zahlreichen Einzelmessungen mindestens eine Größenordnung höher ist als bei den besten bisherigen Etalon-Messungen.

Herr W. Kaufmann: Ich bitte den Herrn Vortragenden um Auskunft, wie genau sich bei mehrmaligem Ansprengen desselben Endmaßes die Resultate, die doch von dem unbekannten (wohl einige Molekulardicken betragenden) Abstand der Flächen abhängen, reproduzieren lassen.

Herr Weber: Die für die Messungen benutzten hochglanzpolierten Fr. Werner-Endmaße zeigen bei wiederholtem Ansprengen eine Längenkonstanz innerhalb weniger 0,001 μ. Gewisse Versuche ergeben, daß Zwischenschichten infolge der auftretenden, gegenseitigen Molekularkräfte des Stahls nicht mehr in nachweisbarem Betrage vorhanden sind.

Herr G. Joos: Der Herr Vortragende bemerkte u. a., daß der mit den Fizeaustreifen bis zu Gangunterschieden gehen könne, welche nur durch die Interferenzfähigkeit der Lichtquelle bedingt sind. Wie ist dann folgendes Dilemma gelöst? Eine exakt punktförmige Lichtquelle liefert streng paralleles Licht, damit aber eine verschwindende Öffnung der die Fizeaustreifen abbildenden Bündel. Eine endliche Bündelöffnung bei ausgedehnterer Lichtquelle setzt notwendigerweise dem Gangunterschied eine Grenze, da dann auch der durch die verschiedene Strahlenneigung bedingte Wegunterschied hereinkommt.

Herr Weber: Die Interferenzerscheinung im Gesichtsfelde des Interferenzkomparators setzt sich tatsächlich infolge der endlichen Bündelöffnung aus einzelnen, jedem Punkte der leuchtenden Öffnung zugeordneter und daher verschobener Fizeaustreifensystemen zusammen. Herr Kösters hat damals bei der Konstruktion seines Interferenzkomparators gezeigt, daß auch bei größten Gangunterschieden bis zur Grenze der Interferenzfähigkeit des Lichtes die Bündelöffnung (die mit Licht ausgefüllte Öffnung der Beobachtungsblende) ja nicht so klein zu sein braucht, um Fizeaustreifen beobachten zu können. Beim praktischen Gebrauch des Interferenzkomparators muß die Blendenöffnung so groß genommen werden, daß die größte gegenseitige Verschiebung der Streifensysteme für die einzelnen Punkte der Öffnung genügend klein ist und meistens nicht mehr als $^1/_{10}$ Streifenbreite beträgt.

Berichtigung

zu der Arbeit F. Vierheller, Die Qualität und Quantität der Röntgen-Streustrahlung des Wassers (Physik. Zeitschr. **28**, 745, 1927).

In der Arbeit, die ohne Korrektur des Verfassers abgedruckt werden mußte, ist eine Reihe von Druckfehlern stehen geblieben; es muß heißen:

S. 749, 1. Spalte, 2. Absatz, Zeile 2 u. 3 „die Ausmessung des Zentralstrahls des gesamt durchstrahlten Kegels".
S. 750, Tabelle IV letzte Zeile unter „Ionisationsströme" statt 1,44 1,64.
S. 751, 1. Spalte, Zeile 11 v. u. „Neigung der Kurven in Fig. 8".
S. 750, 2. Spalte, Textzeile 8 v. u.
S. 752, 1. „ „ 10 v. u.
S. 754, 2. „ „ 18 v. o.
statt „Abszisse" „Ordinatenachse".
S. 753 u. 754, Tabellen X bis XV in Kolonne 4 überall statt 0,... 1,...
S. 754, 1. Spalte, Zeile 3 v. u. statt „ausgezogenen Kurven" „ausgezogenen größeren Kurven".
S. 754, 2. Spalte, Zeile 25 v. o. statt „Strahlung" „Tiefe".
S. 754, 2. Spalte, Zeile 22 v. u. statt „unterhalb" „innerhalb".

Tagesereignisse.

Haus der Technik in Essen. Das Haus der Technik veranstaltet während des Sommers folgende Vorlesungen:

1. Neuzeitliche Aufgaben der bergmännischen Wetterführung. Dozent Dr.-Ing. P. Francke-Clausthal, Bergakademie. 19. und 20. April von 7—9 Uhr abends in der Essener Bergschule.
2. Die deutsche Kleineisenindustrie. Ingenieur und Fabrikant Hugo Kaessberg-Hagen (Westf.) 23. und 24. April von 7—9 Uhr abends in der Essener Börse.
3. Quantenlehre in Physik und Technik. Prof. Dr. Ludwig Hopf-Aachen, Technische Hochschule. Allgemeine Vorlesung. 27. April 1928 von 7—9 Uhr abends in der Essener Börse.
4. Fortschritte in der Hochspannungstechnik. Prof. Dr.-Ing. Petersen, Direktor und Vorstandsmitglied der AEG, Darmstadt, Technische Hochschule. 3. und 4. Mai 1928 von 7—9 Uhr abends in der Essener Börse.
5. Leerlauf in der industriellen Wirtschaftsführung. Prof. Dr. Otto Goebel-Hannover, Technische Hochschule. 8. Mai von 7—9 Uhr abends in der Essener Börse.
6. Technische Fortschritte im Eisenbetonbau und ihre wirtschaftliche Bedeutung. Dr.-Ing. Wilhelm Petry, Geschäftsführendes Vorstandsmitglied des Deutschen Betonvereins. Oberkassel (Siegkreis). 15. Mai von 7—9 Uhr abends in der Essener Börse.
7. Elektrische Reinigung der Abgase. Prof. der Physik an der Universität Berlin, Rudolf Ladenburg-Berlin. Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physikalische Chemie und Elektrochemie. 18. Mai von 7—9 Uhr abends in der Essener Börse.
8. Stoßwirkungen und Stoßbeanspruchungen durch Kraftfahrzeuge. Prof. Paul Langer-Aachen, Technische Hochschule. 22. und 23. Mai 1928 von 7—9 Uhr abends in der Essener Börse.
9. Über Grundwasser und die Folgen einer Entziehung. Prof. der Geologie Dr. Th. Wegner-Münster (Westf.), Universität. 5. und 12. Juni von 7—9 Uhr abends in der Essener Bergschule.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Neuer Lehrauftrag: Dem wissenschaftlichen Mitarbeiter der Leitz-Werke in Wetzlar Dr. Lihotzki für angewandte Optik an der Universität Gießen.

Gesuche.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. P. Debye, Prof. Dr. F. Harms und Prof. Dr. R. Seeliger

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 9. — Ausgegeben am 1. Mai 1928. Nr. 787. Printed in Germany. — 29. Jahrgang.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 9 — 1. Mai 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 11 am 5. Juni 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Beugung der Röntgenstrahlen durch Liniengitter. Spektrographie des Zwischengebietes.

Von Jean Thibaud.

Bei einer Reihe von Arbeiten, deren Beginn auf das Jahr 1925 zurückgeht, habe ich mich darauf verlegt, ausschließlich Liniengitter zur Beugung der Wellen des Röntgenstrahlengebietes zu benutzen.

Diese optische Methode bietet gegenüber der Verwendung von Kristallgittern, die seit der denkwürdigen Entdeckung Laues, Friedrichs und Knippings einzig und allein herangezogen wurden, den Vorzug, daß mit ihrer Hilfe absolute Messungen durchführbar sind.

Außerdem ist das Liniengitter von großem Wert, wenn es sich um das spektrographische Studium der Spektralgebiete handelt, bei welchen die Verwendung des Kristalls mit Schwierigkeiten verknüpft ist: So hat das Gitter es uns ermöglicht, das Gebiet der Röntgenstrahlen bis zum Ultraviolett auszudehnen.

Bei unserer Darlegung gehen wir den verschiedenen Etappen entsprechend vor, wie wir sie bei der Durchführung des „Tangentengitter"-Verfahrens durchlaufen haben:

I. Beugung der Röntgenstrahlen (Arbeiten des Jahres 1925), Gitter zu 200 Linien pro Millimeter in Luft.

II. Äußerstes Ultraviolett, bis zu 140 Å (Arbeiten zu Beginn des Jahres 1926), Gitter zu 200 Linien pro Millimeter im Vakuum.

III. Ausdehnung des kurzwelligen Gebietes nach dem Ultraviolett hin und Verbindung der beiden Gebiete (1926 bis 1927), Gitter zu 200, dann zu 1180 Linien pro Millimeter im Vakuum.

Plangitter bei Tangentialeinfall.

Nach der Elementartheorie erzeugt ein Plangitter von der Konstante d (Entfernung zweier aneinanderstoßender Beugungselemente), das durch einen monochromatischen Strahlenkegel von der Wellenlänge λ beleuchtet wird, der mit der Gitterebene einen Winkel Θ bildet, Beugungsstrahlenbündel, wobei die n-te Ordnung von λ unter einem Winkel $\alpha + \Theta$ (Fig. 1) erscheint, sodaß folgende Gleichung gilt:

$$n\lambda = d\,[\cos\Theta - \cos(\alpha + \Theta)] \qquad (1)$$

Ist nun der Einfallswinkel Θ sehr gering, so erhalten wir:

$$n\lambda = \frac{d}{2}(\alpha^2 + 2\alpha\Theta) \quad \text{oder} \quad n\lambda = \frac{d}{2}\Delta\alpha. \qquad (2)$$

Dies sind die Gleichungen, welche der Dispersion eines bei „Tangentialeinfall" verwenten Gitters zugrunde liegen[1]).

Vergleicht man diese Anwendungsmethode des Gitters mit der bei Spektrographen gewöhnlich benutzten, normalen Beleuchtung des Git-

1) Als erster hat Prof. Puccianti diese Gebrauchsart der Gitter und ihre Anwendung auf die Messung der Wellenlängen der X-Strahlen angegeben.

ters, so macht man die Feststellung, daß die Tangentialbeleuchtung den Nachteil zeigt, daß sie kein „normales" Spektrum liefert, da sich dasselbe um so mehr verkürzt, je größer die Wellenlängen werden. Andrerseits jedoch weist sie bemerkenswerte Vorteile hinsichtlich des Dispersionsvermögens auf. Nehmen wir einmal folgenden Fall an: von zwei genau gleichen Gittern wird das eine an seiner Oberfläche durch ein normales, das andere durch ein gerade noch berührendes Strahlenbündel beleuchtet. Bei der Beugung tritt beide Male eine Wellenlänge λ unter den Winkeln α_1 bzw. α_2 auf, sodaß, wenn man diese als klein annimmt und sich auf die ersten Ordnungen beschränkt, folgendes gilt:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{d} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{d}},$$

so daß sich für das Dispersionsvermögen bei gleicher Wellenlänge λ für die beiden Beleuchtungsarten ergibt[1]):

$$p_1 = \frac{d\alpha_1}{d\lambda} = \frac{1}{d}; \quad p_2 = \frac{d\alpha_2}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda d}}, \tag{3}$$

wobei letztere Größe je nach der Wellenlänge variiert. Das Dispersionsvermögen des Gitters „bei Tangentialeinfall" übertrifft beträchtlich dasjenige des normalen Gitters, wenn es sich um geringe Wellenlängen handelt.

Ein anderer Gesichtspunkt, der bei der Untersuchung der neuen Methode nicht außer acht gelassen werden darf, ist die Frage nach der Schärfe der Spektralbilder: sollte das Plangitter für sich allein in der Lage sein, feine Linien zu liefern? Bei den gewöhnlichen Apparaten ist es tatsächlich notwendig, entweder eine Linse in Verbindung mit dem Plangitter oder ein konkaves Gitter zu verwenden, um ein scharfes Linienbild zu erzielen. In dieser Hinsicht ist das Verfahren bei Tangentialeinfall sehr vorteilhaft. Ist i der Winkel des gebeugten Strahlenbündels von der Wellenlänge λ mit der Gitterebene (Fig. 1), so ist:

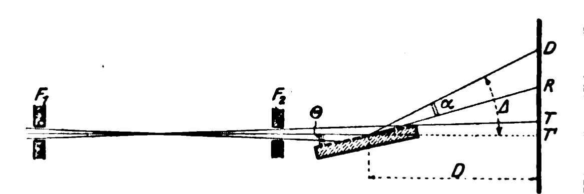


Fig. 1.

$$i = \Theta + \alpha = \sqrt{\frac{2n\lambda}{d} + \Theta^2}.$$

1) Jean Thibaud, Revue d'Optique théorique et instrumentale 5, 105, 1926.

Die Differenzierung in bezug auf Θ ergibt:

$$\frac{di}{d\Theta} = \frac{\Theta}{\sqrt{\frac{2n\lambda}{d} + \Theta^2}}, \tag{4}$$

welcher Ausdruck praktisch gleich Null ist, denn Θ^2 ist klein gegenüber $2n\lambda/d$. Der Beugungswinkel i bleibt konstant, wenn der Winkel Θ nur geringe Schwankungen zeigt, und dasselbe gilt auch für den Fall, wo das Gitter durch ein leicht divergierendes Bündel beleuchtet wird (Fig. 1). Demnach hat der Satz Gültigkeit: Bei Verwendung eines Gitters unter Tangentialeinfall ist jedes gebeugte monochromatische Bündel parallel, selbst dann, wenn das Einfallsbündel eine leichte Öffnung aufweist. Wenn man nur solche Strahlungen benutzt, bei welchen die Beugungswinkel α klein bleiben, so sind die Bündel sehr schmal, und man darf in diesem Fall darauf rechnen, daß auf den Platten feine Spektrallinien auftreten, unabhängig von der Entfernung, in der die Platte sich befindet[1]).

I. Teil.

Beugung der Röntgenstrahlen durch gewöhnliche Gitter.

(Absolute Bestimmung der Wellenlängen bei Röntgenstrahlen und der Kristallgitterdistanzen.)

Die Beugung der Röntgenstrahlen durch gewöhnliche, mit tangentiellem Einfall verwendete Gitter kann in der Praxis nur dann durchgeführt werden, wenn die gebeugten Strahlenbündel eine genügend hohe Intensität aufweisen. Nun haben jedoch Röntgenstrahlen einen Brechungsquotienten μ, der nach neueren Schätzungen[2]) etwas kleiner als die Einheit ist:

$$\mu = 1 - \delta \ (\delta \text{ von der Ordnung } 10^{-6}).$$

Folglich muß, wenn eine Röntgenstrahlung tangentiell auf einen ebenen Spiegel (oder ein Gitter) trifft, eine totale Reflexion des Einfallbündels eintreten, sobald der Winkel Θ kleiner wird als ein bestimmter Grenzwinkel Θ_m, wobei:

$$\Theta_m = \sqrt{2\delta}. \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich folgende sehr wichtige Tatsache. Vorausgesetzt, daß man bei Benutzung eines Gitters unter Tangentialeinfall Sorge trifft, den Winkel Θ kleiner als den Grenzwinkel Θ_m zu wählen, so tritt Totalreflexion ein, und man erzielt infolgedessen das Intensitätsmaximum der gebeugten Strahlenbündel. Diese Be-

1) J. Thibaud, Revue d'Optique, a. a. O.

2) A. H. Compton, Phil. Mag. 45, 1121, 1923. — Siehe auch M. de Broglie und J. Thibaud, Compt. Rend. 181, 1034, 1925.

dingung erfordert allerdings peinlich genaues Einstellen und ein sehr fein abgegrenztes Strahlenbündel, da nach (5) der Grenzwinkel Θ_m kaum mehr beträgt als etwa 10 Minuten.

Bei meinen Untersuchungen habe ich mich darauf verlegt, ein vollständiges Spektrum der aus der Röhre austretenden heterogenen Strahlen direkt[1]) zu erzielen — und zwar mit Hilfe eines Gitters auf Glas zu 200 Linien pro Millimeter — bei dem die einzelnen Linien fein und deutlich getrennt auftreten. Die Röhre von verhältnismäßig großer Stärke, deren Elektroden auswechselbar sind und durch Wasserzirkulation gekühlt werden, funktionierte unter konstanter Einwirkung von 14 MA bei 12 cm Funkenlänge.

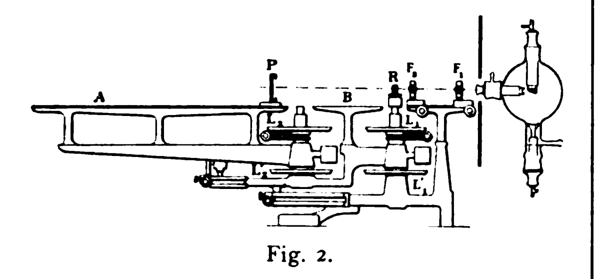


Fig. 2.

Bei den notwendigen, ungemein feinen Einstellungen hat mir ein von der Firma Schmidt & Haensch in Berlin konstruierter Apparat sehr gute Dienste geleistet. Es ist dies eine lange, durchbrochene optische Bank mit Gelenken an zwei Stellen, sodaß sich mit ihr drei gerade Richtungen erzeugen lassen, deren Winkel meßbar sind (Fig. 2). An den Gelenkpunkten können zwei Winkelmeßscheiben angebracht werden, deren eine als Träger des Gitters R diente. Zwei Visierspalten $F_1 F_2$ mit vielfachen Einstellmöglichkeiten lassen sich auf der Bank verschieben: gewöhnlich waren sie 18 cm voneinander entfernt bei einer Öffnung von 0,06 bis 0,1 mm je nach Einstellung. Zwei Gitter sind mit Erfolg zur Verwendung gelangt: das eine zu 50, das andere zu 200 Linien pro Millimeter. Als Strahlungen wurden benutzt die Strahlen K des Kupfers und Eisens ($K\alpha Cu = 1,538$ Å — $K\alpha Fe = 1,934$ Å). Die Entfernung D Gitter-Platte schwankte zwischen 40 und 130 cm. Die Expositionsdauer betrug gewöhnlich nur zehn Minuten und überstieg eine Stunde selbst nicht bei den längsten Versuchen.

1) N. Carrara — Nuovo Cimento I, 107, 1924 — versuchte nach den Angaben von Prof. Puccianti, die Röntgenstrahlen einer Platinröhre mit einem Gitter zu beugen, aber ohne Erfolg. Compton und Doan (Americ. Phys. Soc., November 1925) erzielten unter Benutzung einer Molybdän-Antikathodenröhre und eines Metallgitters zu 50 Linien pro Millimeter durch direkte Beleuchtung des Gitters einen Beugungsfleck, jedoch ohne klare Spektralscheidung der verschiedenen Strahlungen. Um Messungen der Wellenlängen vornehmen zu können, mußten sie das Strahlenbündel monochromatisch machen, und zwar durch Reflexion auf einen Kalkspatkristall vor dem Auffall auf das Gitter (Einwirkungsdauer: 9 Stunden).

Taf. I zeigt einige der Ergebnisse[1]). Der Zentralfleck T ist die Spur jenes Teiles des Primärbündels, der dem Gitter gerade entlang geglitten ist (Fig. 1), R ist der Totalreflexionsfleck, wobei die Entfernung RT das Doppelte des Einfallwinkels Θ mißt. Über den Reflexionsfleck R hinaus beobachtet man ein Beugungsspektrum, dessen sämtliche Linien (α und β der K-Reihe des Kupfers) reinlich voneinander geschieden sind und eine bemerkenswerte Feinheit auf den Originalplatten aufweisen. Die aufeinander folgenden Ordnungen des Spektrums sind bis zur vierten sichtbar, selbst bei zehn Minuten währender Exposition. Es besteht also durchaus jetzt die Möglichkeit, mit Hilfe eines Gitters auf Glas unter Tangentialeinfall und bei kurzer Expositionsdauer ein X-Strahlen-Beugungsspektrum von großer Reinheit zu erzielen. Übrigens sind die auf diese Weise erhaltenen Spektren im Hinblick auf die Schärfe der Linien durchaus den mit Hilfe eines Drehkristalls erhaltenen gleichzustellen, wie aus den Vergrößerungen unserer Gitterspektren (Taf. I) ersichtlich ist.

Die Beugung der X-Strahlen durch gewöhnliche Gitter erweist sich von großem Wert für die absolute Bestimmung der Wellenlängen dieser Strahlen und infolgedessen auch der Gitterdistanzen der Kristalle. Bekanntlich beruhte bis heute die Spektrographie der Röntgenstrahlen auf der Verwendung kristallinischer Gefüge zu Gittern, deren Gitterkonstante man berechnete unter Zuhilfenahme der Avogadroschen Zahl, des Atomgewichtes und der Dichte des Kristalls. Diese Berechnung erwies sich jedoch deshalb in gewisser Hinsicht als unsicher, da bei den verschiedenen benutzten Proben Schwankungen in der Dichte auftraten. Es war daher wünschenswert, eine absolute Messung der Wellenlängen zu erreichen, um so den Beweis für die Gültigkeit der als richtig unterstellten Werte zu erbringen, an der übrigens kaum gezweifelt werden konnte. Die zweite Figur auf Taf. I stellt ein Spektrum einer Kupferantikathode dar, welches unter großer Dispersion ($D = 1300$ mm) aufgenommen wurde und mir zu einer absoluten Messung von der K_α-Linie von Cu gedient hat. Nach (2) sind die Winkel α und $\Delta = \alpha + 2\Theta$ zu messen. Diese letzte Messung enthält ein Unsicherheitsmoment, das darauf zurückzuführen ist, daß der Schlagschatten T nicht die Achse des Einfallbündels T' (Fig. 1) darstellt. Besser berechnet man daher Θ,

1) Wegen weiterer Abbildungen, vor allem hinsichtlich des Eisens, wird auf die Tafel der „Revue d'Optique" (a. a. O.) verwiesen.

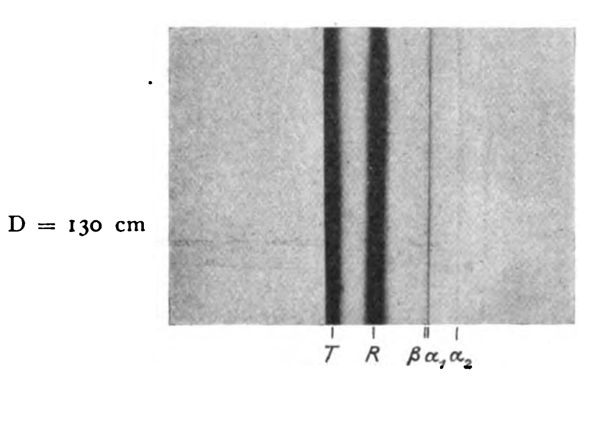


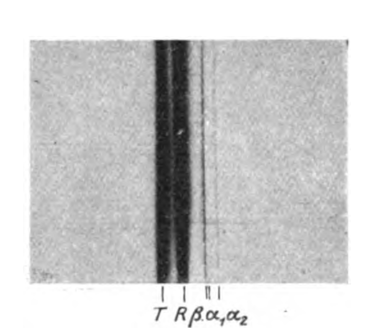
Tafel I.

Röntgenstrahlenspektra bei totaler Reflexion an einem Gitter von 200 Linien pro mm

K-Serie von Kupfer
($K\alpha = 1{,}538$ Å)

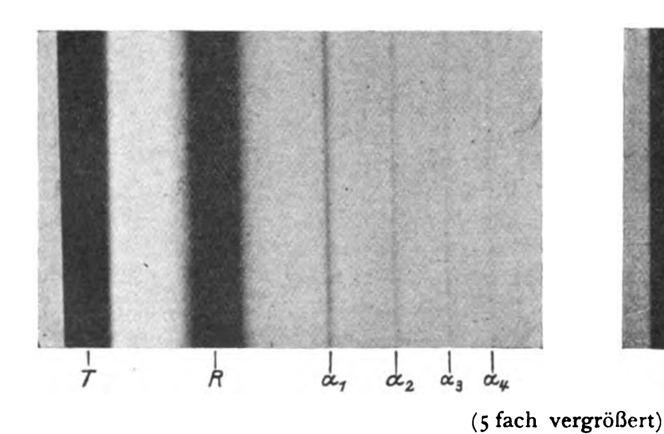
D = 130 cm



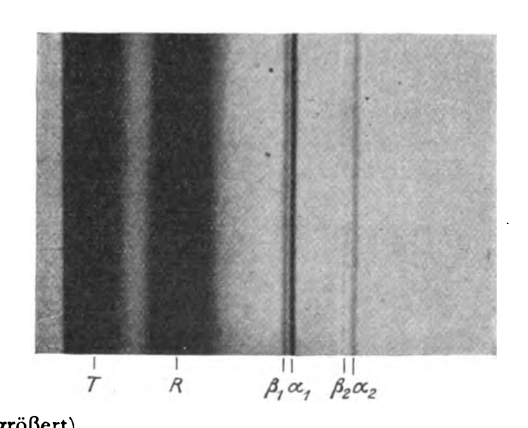


D = 44,5 cm

K-Serie von Eisen
($K\alpha = 1{,}934$ Å)

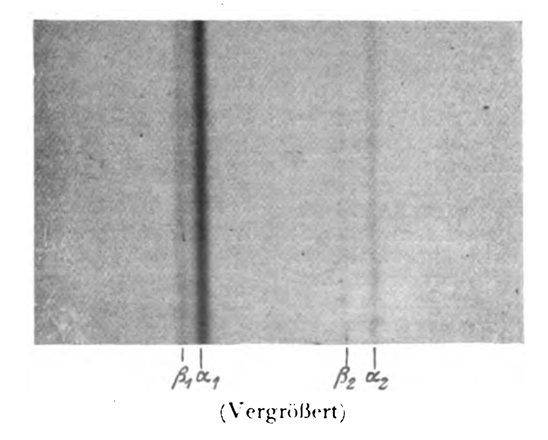


K-Serie von Kupfer
($K\alpha = 1{,}538$ Å)



(5 fach vergrößert)

K-Serie von Kupfer



(Vergrößert)

indem man von den Messungen der Beugungswinkel α für die aufeinanderfolgenden Ordnungen derselben $K\alpha$-Linie ausgeht. Auf diese Weise erhält man den Mittelwert:

$$\Delta\alpha = 61,6 \times 10^{-6}$$

mit einer Unsicherheit von weniger als ein Prozent. Die Gitterkonstante ist

$$d = 5 \times 10^{-4},$$

demnach ergibt sich für die Wellenlänge der $K\alpha$-Linie des Kupfers:

$$\lambda = 1,540 \text{ Å}.$$

Die Fehlergrenze beträgt 1 Proz.

Die kristallinische Beugung ergab für dieselbe Linie unter Zuhilfenahme der oben erwähnten Berechnungshypothese den Wert:

$$\lambda = 1,538 \text{ Å}.$$

Diese gute Übereinstimmung der beiden voneinander völlig unabhängigen Bestimmungen einer und derselben Wellenlänge bildet eine entscheidende Bestätigung der Hypothesen Braggs über die Struktur der Kristalle, sowie des für die Avogadrosche Zahl benutzten Wertes.

II. Teil.

Neuer Vakuumspektrograph für das äußerste Ultraviolett. Funkenspektrum des Kupfers[1]).

Die Schwierigkeiten, denen man bei der Ausdehnung des ultravioletten Spektrums nach kürzeren Wellenlängen hin begegnet, sind bekannt: V. Schumann ist es gelungen, dieses Spektrum bis auf 1300 Å auszudehnen, indem er im Vakuum operierte, wodurch die intensive Absorption der kürzesten Strahlen durch den Sauerstoff vermieden wurde und indem er sich zugleich gelatineloser Platten bediente. Unterhalb dieser Wellenlänge, der Durchlässigkeitsgrenze bei Flußspatprismen, konnten Resultate nur unter Zuhilfenahme von Gittern erzielt werden, wie sie Lyman, McLennan, Millikan und seine Mitarbeiter herstellten. Die Forschungen des Letztgenannten rückten die Grenze des Ultravioletts bis zu ungefähr 150 Å. Als Strahlenquelle benutzte Millikan einen Hochspannungsfunken, der durch die Entladung einer Kondensatorenbatterie im Vakuum des Spektrographen selbst erzeugt wurde. Die verwendeten Konkavgitter, die mit der berühmten Michelsonschen Gittermaschine hergestellt worden waren, hatten von 300 bis 1100 Linien pro Millimeter. Die besten Ergebnisse erzielte Millikan mit einem Gitter zu 500 Linien und einer Fokaldistanz von 835 mm. Die so erhaltenen, ziemlich normalen Spektren werden durch Interpolation unter Zuhilfenahme der Aluminiumlinien als Referenzlinien bis zu 1854,7 und 1862,7 Å geeicht. Mit dieser Vorrichtung studierten Millikan, Bowen, Sawyer, Shallenberger[1]) das Ultraviolett bis 144 Å beim Aluminium; 200 und 271 Å bei Nickel und Eisen; 316 und 360 Å bei Zink und Kohlenstoff.

Wir kamen nun auf den Gedanken, das fruchtbare Prinzip des Tangentengitters auf die Konstruktion eines Spektrographen anzuwenden, der im folgenden beschrieben wird und welcher bei den Untersuchungen des äußersten ultravioletten Gebietes gute Dienste leistet, da mit seiner Hilfe eine bedeutende Steigerung des Dispersionsvermögens erreicht werden kann.

1. Der Spektrograph.

Will man die Verwendung des Tangentengitters auf das Gebiet des äußersten Ultravioletts ausdehnen, und zwar mit der Absicht, unter Zuhilfenahme eines gewöhnlichen Laboratoriumgitters einen Spektrographen von gleicher Leistungsfähigkeit wie der Millikansche Apparat herzustellen, so besteht die Notwendigkeit, daß jegliche Absorption auf dem Wege der Strahlen, vor allem in der Luft, vermieden wird. Es muß daher ein dichtes, evakuierbares Gefäß geschaffen werden, welches die bereits beschriebenen wesentlichen Organe einschließt, nämlich: die Strahlenquelle; die zwei Spalten in zweckmäßiger

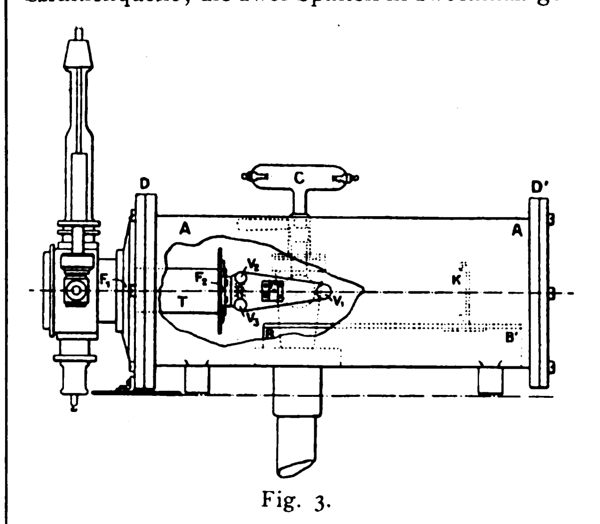


Fig. 3.

Entfernung voneinander, durch welche ein Strahlenbündel isoliert wird; eine Einstellvorrichtung, um einen Teil des Plangitters tangentiell in den Weg dieses Bündels zu bringen; endlich das

1) J. Thibaud, Compt. Rend. **182**, 1141, 1926 und Journal de Physique et le Radium **8**, 13, 1927.

1) Proc. Nat. Acad. Sc. **7**, 289, 1921 und Phys. Rev. **23**, 1, 1924.

Haltergestell für die photographische Platte. Diese Vorrichtung bildet den wesentlichen Teil des Tangentengitter-Spektrographen im Vakuum, das von der Firma Ch. Beaudouin unter der geschickten Leitung ihres Ingenieurs, Herrn Gondet, ausgeführt wurde.

Der ganz aus Metall hergestellte Apparat (abgebildet auf Fig. 3) umfaßt eine zylindrische Messingröhre AA von 40 cm Länge und 15 cm Durchmesser, an jedem ihrer Enden durch eine dicke Bronzescheibe abgeschlossen, deren sorgfältig eingeschliffenen Ränder mit Hilfe von Klemmschrauben und eines Vakuumfettüberzugs in die Halsenden der Röhre eingefügt werden. Von diesen beiden Scheiben trägt die eine D, die in der Mitte durchbohrt ist, die ganze spektrographische Vorrichtung, und zwar auf der einen Seite die Funkenkammer, auf der anderen die zwei Visierspalten und den Gitterhalter (Fig. 5). Das Auseinandernehmen und das Einstellen wird dadurch erleichtert. Zwischen der Strahlenquelle und der Platte befindet sich weder ein Schirm noch irgendeine absorbierende Substanz.

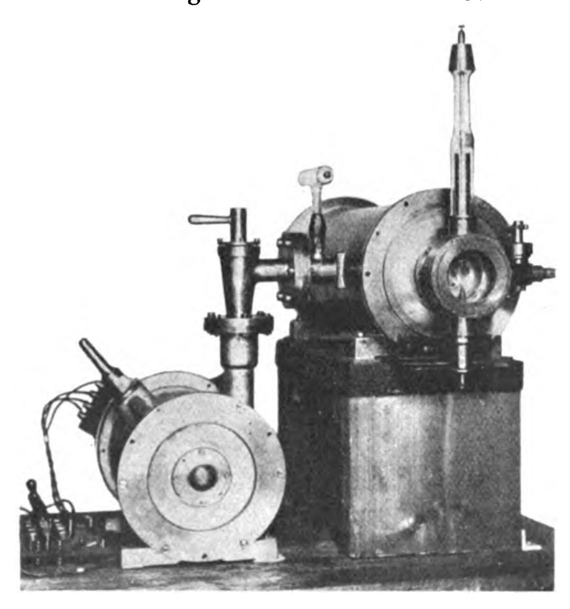


Fig. 4.

a) Die Funkenkammer besitzt zwei Elektroden: die eine davon war während meiner Versuche stets geerdet; die andere war durch eine Glassäule isoliert. Ein Planspiegel schließt die Kammer ab und erleichtert die Überwachung des Funkens während der Spektralaufnahme. Jeder Elektrodenhalter wird einfach durch eine Messingröhre gebildet, in deren Öffnung die zu beobachtende Elektrode angebracht ist. Eine Vorrichtung ermöglicht es, von außen her während des Funktionierens die Entfernung der Elektroden zu regeln und dadurch deren rasche Abnützung wieder auszugleichen; der untere, geerdete Elektrodenhalter ist in einem geschmierten Gelenk drehbar und mit einer Axialschraube so verbunden, daß diese durch ihre Rotation eine Verschiebung der Elektroden hervorruft. Da die Elektroden gekröpft sind, befindet sich der Funken nicht im Mittelpunkt und kann daher durch einfaches Drehen der Elektrodenhalterteile in ihren Gelenken vor die Spalte gebracht werden.

b) Der erste der beiden Spalten F_1 aus Nickel ist im Mittelpunkt der Bronzescheibe D angebracht und wird ein für allemal eingestellt, wenn die Funkenkammer abgenommen ist. Auf der entgegengesetzten Seite der Scheibe ist mit Hilfe von Schrauben eine Röhre T angebracht, die an ihrer Endfläche den zweiten Spalt F_2 und den Gitterhalter trägt. Dieser weist zwei Einstellmöglichkeiten auf: die eine regelt die Öffnung des Spaltes, die andere eine Gesamtverschiebung.

c) Der Gitterhalter wird durch eine dreieckige Platte P_1 gebildet, die mit der Stützröhre T gut verbunden ist und drei Einstellschrauben V_1, V_2 und V_3 aufweist, auf welchen — durch eine Feder r zusammengehalten — eine Platte P_2 ruht, die P_1 genau entspricht. An dieser ist das auswechselbare Gitter R angebracht, das auf verschiedene Art und Weise verschoben werden kann: eine Verschiebung mit Hilfe von V_1 V_2 bis in die Ebene des Strahlenbündels F_1 F_2; eine Drehung mit Hilfe von V_3 um die von den Spitzen von V_1 V_2 gebildete Achse zur Regelung des Einfallwinkels Θ des Strahlenbündels auf das Gitter.

Der zylindrische Körper des Spektrographen enthält außerdem noch ein Laufbrett BB', auf dessen Gleitfläche der Plattenhalter K verschoben werden kann, der mit einem Plattengestell 45×107 versehen ist.

Die Strahlenquelle ist ein kondensierter Funke, der im Vakuum des Spektrographen selbst erzeugt und durch die Entladung einer Batterie (0,02 μ F) von 7 Mosciki-Kondensatoren gespeist wird, welche einen Entladungsregulator aufweist und unter Zuhilfenahme des rotierenden Gleichrichters einer Radioanlage mit 35 Kilovolt geladen wird.

Der ganze Apparat wird mittelst einer Holweckschen Molekurarrotationspumpe evakuiert, nachdem bereits mit einer Ölluftpumpe vorgearbeitet worden ist. Ein sehr einfaches Vakuummeter wird durch eine kleine, seitlich angebrachte Röhre C gebildet, durch das eine Entladung hindurchgehen kann. Die Evakuierung ist dann weit genug vorgeschritten, wenn die Entladung nicht mehr durch die Röhre geht, sondern den Weg zwischen zwei parallel geschalteten Spitzen im Abstande von 3 cm bevorzugt. Ein breites Schälchen mit Phosphorpentoxyd, das sich im

Innern von BB' befindet, eliminiert den im Apparat enthaltenen Wasserdampf. Ein brauchbares Vakuum wird praktisch in etwa fünf Minuten erreicht.

Das Einstellen der spektrographischen Vorrichtung wird ein für allemal vorgenommen (denn die Brauchbarkeit des Spektralbildes ist von der Entfernung Gitter—Platte unabhängig), da die spektrographische Vorrichtung gleichzeitig mit der Scheibe D herausgenommen wird. Mit Hilfe eines Spezialfußes J (Fig. 5) wird das Instrument in wagerechte Lage gebracht. Das Einstellen vollzieht sich sehr einfach unter direkter Beobachtung in einem dunkeln Raum, indem man den Funken speist und hinter dem Gitterhalter die verschiedenen Ordnungen des so erhaltenen Leuchtspektrums kontrolliert. Man reguliert die Öffnung der Spalte F_1 und die Einstellung der Schrauben $V_1 V_2 V_3$ solange, bis die hellsten Linien des Spektrums maximale Helligkeit erreicht haben. Hierbei ist es in Übereinstimmung mit den im ersten Abschnitt entwickelten Theorien geboten, dem Einfallswinkel Θ den kleinstmöglichen Wert zu geben; die Entscheidung darüber, ob man den richtigen Wert gefunden hat, läßt sich an Hand des schroffen Intensitätsabfalls im Spektrum unterhalb eines gewissen Winkels (etwa zehn Minuten) treffen.

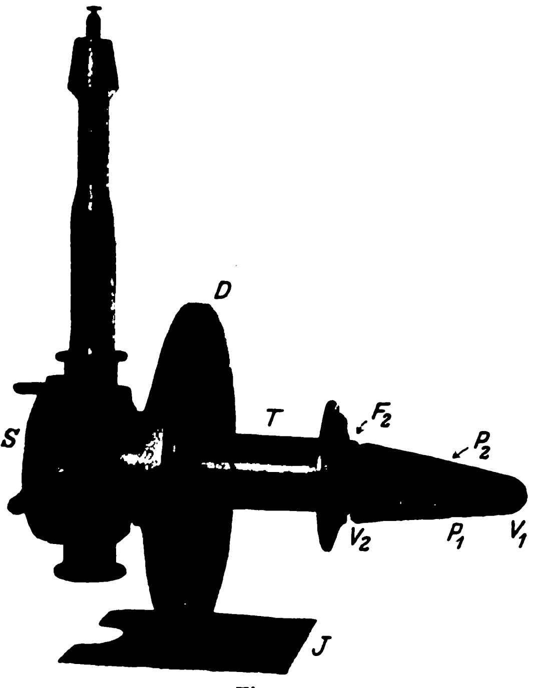


Fig. 5.

Die äußere Handhabung beschränkt sich bei jeder Spektralphotographie auf die Regulierung der Elektroden und auf die Anbringung des Plattengestells in einer Entfernung von dem Gitter, welche für die gewünschte Dispersion geeignet ist; diese Operationen erfordern nur eine einzige Montage, nämlich die Einführung der Scheibe D' in den zylindrischen Körper zu dessen Abschließung, was sich übrigens sogar in der Dunkelheit leicht bewerkstelligen läßt.

Der so beschriebene Spektrograph weist so wenig Gelenke und Hähne auf als nur möglich, denn diese erfordern stets sorgfältige Aufmerksamkeit; seine Organe sind auf ein Mindestmaß herabgesetzt worden, da Einfachheit die Grundvoraussetzung war, die bei der Konstruktion eines Vakuumspektrographen erfüllt werden mußte. Fig. 4 bietet eine Wiedergabe des zusammengestellten Apparates.

2. Resultate im Ultraviolett.

Funkenspektrum des Kupfers.

Das Instrument hat bis jetzt mit zwei verschiedenen Plangittern funktioniert: das eine auf Glas, zu 200 Linien pro Millimeter; das andere, ein in Baltimore mit der Rowlandschen Maschine hergestelltes Metallgitter, zu 568 Linien pro Millimeter, beide sorgfältig mit Kollodium gereinigt. Trotz seiner geringen Ausmaße ist das Dispersionsvermögen des so ausgerüsteten Apparates sehr brauchbar: gleich zu Beginn der Versuche erzielte man die Linien der Zone 200—300 Å mit sehr guter Dispersion, wobei die Platte 9 cm von dem 200-Liniengitter entfernt war. Als Elektroden dienten der Reihe nach folgende Elemente: Kohlenstoff, Magnesium, Aluminium, Eisen, Kupfer und Platin.

Die im Apparat verwendeten Platten waren fast ausschließlich gewöhnliche photographische Platten (Aviator-Crumière), die nach dem Verfahren von Duclaux und Jeantet[1]) und Victor Henri mit einer Schicht fluoreszierenden Öles in Petroleumätherlösung überzogen waren. Solche Platten haben eine hohe Empfindlichkeit gezeigt, nicht nur — wie die genannten Verfasser angeben — im nahen Ultraviolett, sondern auch in dem äußersten Gebiet von 600—100 Å. Den Schumann-Platten gegenüber haben sie den Vorzug leichterer Handhabung und vollkommener Homogenität. Die Aufnahmedauer für jedes einzelne Spektrum betrug bei einer mit Öl bestrichenen Platte durchschnittlich eine Viertelstunde.

Die beiden oben erwähnten Gitter lieferten ähnliche Ergebnisse hinsichtlich der Zahl der Spektrallinien bis zu einer Wellenlänge von 200 Å, wiesen dabei jedoch einen großen Unterschied in der Leuchtkraft auf. Das Rowlandsche

1) Journal de Physique et le Radium **2**, 156, 1921.



Gitter, dessen Dispersionsvermögen viel größer ist als das meines Gitters auf Glas, erfordert im Gegensatz zu diesem die Verwendung von Schumann-Platten. Bereits erwähnt habe ich, daß es mir vollständig unmöglich war, die Röntgenstrahlen mit einem Rowlandschen Metallgitter zu beugen, welche Tatsache in Verbindung mit den eben genannten vielleicht dahingehend ausgelegt werden darf, daß das Reflexionsvermögen des Spiegelmetalls im äußersten Ultraviolett und für Röntgenstrahlen weit geringer ist als das des Glases. R.-W. Wood und Th. Lyman haben kürzlich[1]) beim Vergleich von Metall- und Glasgittern einen deutlichen Vorzug des Glases gegenüber dem Spiegelmetall herausgefunden, wenn es sich um die Intensität der unterhalb 500 Å erzeugten Spektren — im besonderen an der Spektralgrenze (300—200 Å) — handelt. Man kann daher wohl sagen, daß bei der Konstruktion von Vakuumspektrographen Glas — auch abgesehen von seiner Unveränderlichkeit — Metall gegenüber den Vorzug verdient.

Taf. II und III geben Spektra wieder, die mit Kupferelektroden auf „Aviator"-Ölplatten unter Benutzung eines gewöhnlichen Gitters auf Glas zu 200 Linien pro Millimeter erzeugt wurden, wobei die Platte sich nur 134 mm von dem Gitter entfernt befand. Man sieht sofort, daß die Gesamtheit des von dem Atom emittierten Spektrums vom sichtbaren Gebiet bis zum Gebiet langwelliger Röntgenstrahlen sich auf ein und derselben Platte registriert vorfindet: der Spektralbereich geht von 6000 bis 140 Å, den kürzesten auf dem Original dieses Spektrums sichtbaren Linien. Diese Tatsache, die auf die „Kontraktion" des mit Hilfe eines Tangentengitters nach den großen Wellenlängen hin erhaltenen Spektrums zurückzuführen ist, erweist sich als sehr günstig für die Feststellung der Wellenlängen der neuen Linien auf Grund von Vergleichen mit den bekannten Referenzlinien des gewöhnlichen ultravioletten Gebiets. Beim Spektrum des Kupfers waren die benutzten Referenzlinien diejenigen zu 3247 und 3274 Å (1. und 2. Ordnung). Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß das Spektrum nicht normal ist (Formel 2), liefert die Extrapolation die Wellenlängen der Linien des äußersten Ultravioletts mit genügender Genauigkeit.

Auf dem Spektrum (Taf. II—III) unterscheidet man willkürlich mit Buchstaben bezeichnete Liniengruppen, welche folgende Hauptfunkenlinien umfassen (es werden hierbei nur die Linien erwähnt, deren Intensität in der benutzten Nomenklatur von 1—10 die Ziffer 5 übersteigt):

1) Phil. Mag. 1, 310, 1926.

a) Die intensiven Linien (10) 3274—3247 Å, spektroskopische Referenzlinien.

b) 2797 (9), 2714 (8), 2703 (7), 2701 (9), 2698 (9).

c) Langes Gebiet, beginnt bei 2618 (6), endet bei der intensiven Linie 2370 (10), unter Einschließung zahlreicher Linien: 2600 (7), 2545 (10), 2529 (8), 2490 (6), 2403 (7), 2401 (6).

d) Beginnt mit 2247 (8), 2243 (6), daraufhin folgt ein ausgedehntes Gebiet mit zahlreichen, weniger intensiven Linien.

e) Dies ist das von Handke[1]) und später auch von L. und E. Bloch[2]) untersuchte Gebiet, dessen Hauptgruppen bei 1868, 1840, 1826, 1784, 1769, 1741, 1710, 1687, 1642 Å liegen.

f) Diese Gruppe ist bemerkenswert ob der großen Intensität ihrer Linien, die bei 1400 Å beginnt. L. und E. Bloch haben kürzlich[3]) dieses Gebiet bis zu 1359 Å untersucht, wobei sie jedoch den Linien eine schwache Intensität beimessen im Gegensatz zu meinen Ergebnissen (photometrische Kurve auf Fig. 6). Dieser Widerspruch ist auf die intensive Absorption im

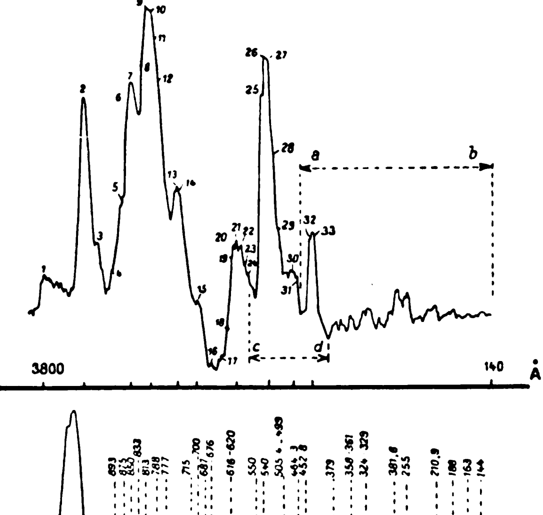


Fig. 6.

Flußspat ihres Apparates zurückzuführen (Linien 25—29 auf Fig. 6: 1410—1432, 1377, 1359, 1318, 1286 Å).

1) Handke, Inaug.-Diss., Berlin 1909.
2) L. und E. Bloch, Journal de Physique 2, 247, 1921.
3) L. und E. Bloch, Journal de Physique 6, 157, 1925.

g) Eine ziemlich schwache Gruppe: 1184, 1157 Å, auf die eine ziemlich intensive mit 1056—1027 Å folgt (Linien 30—33 auf Fig. 6). Dieses Gebiet ist neu und noch nie erforscht worden. Die Wellenlängen ihrer Linien sind mit Vorbehalt angegeben und erfordern eine Überprüfung.

Es folgt dann das ganz kurzwellige Gebiet, das im Spektrum des Kupfers von Millikan im Jahre 1924[1]) erforscht worden ist. Die Schwäche der verwendeten Strahlenquelle und eine leichte Verbreiterung der Linien (Breite der Spalte F_2) haben es mir nicht gestattet, die schwächsten von diesem Verfasser angegebenen Linien zu registrieren. Doch finden sich alle wichtigen Gruppen auf meinen Platten bis zu 140 Å. Die Übereinstimmung meiner Wellenlängenbestimmungen bei diesen noch vorläufigen Messungen mit denen Millikans ist zufriedenstellend.

Ich beobachtete auf diese Art die Linien: 892, 874, 856, 833, 814, 788, 771, 713, 701, 683, 675, 617, 549, 541, 505, 463, 453, 380, 360, 330, 280, 256, 210, 188, 163 und 144 Å. Unterhalb von 140 Å liegt infolge der geringen Intensität der Schwachheit der Emission, verbunden mit der Verbreiterung des Reflexionsfleckes *R*, die Grenze praktisch bei 40 Å.

Die Aufnahme ist mit dem Registriermikrophotometer von Lambert und Chalonge photometriert worden. In Fig. 6 geben wir die erhaltene allgemeine Registrierkurve wieder, und darunter die dem äußeren Teil 892—144 Å des Spektrums entsprechende Strecke *a b*.

Die wichtigste Tatsache jedoch, die sich aus der Untersuchung des erhaltenen Spektrums ergibt, besteht nicht in der Entdeckung neuer Linien — hierzu besitzt der Apparat nicht die nötige Einrichtung — sondern in dem außerordentlichen Dispersionsvermögen des Instruments.

Wir wollen unter diesem Gesichtspunkt einmal das Spektrum mit denen vergleichen, von welchen Millikan und Bowen in einer ihrer Veröffentlichungen (a. a. O., S. 27—30) vergrößerte Wiedergaben bringen. Auf diesen Figuren kann man ohne Mühe die Dispersionen messen (Entfernung einer Linie von dem durch das Gitter erzeugten Reflexionsfleck), die in der nachstehenden Tabelle zu denen in Beziehung gesetzt werden, die bei gleichen Wellenlängen in unserem Instrument erzielt worden sind:

	Linie $\lambda = 500$ Å	Linie $\lambda = 200$ Å
Millikanscher Spektrograph 550-Linien-Gitter Fokaldistanz 835 mm	gegen 17,5 mm	7,2 mm
J. Thibaudscher Spektrograph 200-Linien-Gitter Distanz 134 mm	12,5 mm	7,2 mm

1) Millikan und Bowen, Phys. Rev. **23**, 1, 1924.

Hieraus erhellt die bemerkenswerte Eigenschaft des Tangentengitters, von der im ersten Abschnitt ausführlich die Rede war: der beschriebene Apparat beweist mit einem Gitter von halb so vielen Linien wie das der amerikanischen Verfasser und bei einer sechsmal kleineren Fokaldistanz seine Überlegenheit bei allen Wellenlängen unter 200 Å. (Bei den mit einem Rowlandschen Gitter und mit Schumann-Platten unternommenen Versuchen erhielt ich bei einer Fokaldistanz von 130 mm auf der Platte die Linie 200 Å bei 13 mm).

Man kann danach die beträchtlichen Dispersionen beurteilen, die zu erwarten sind, wenn man Gitter zu 1100 Linien pro Millimeter verwendet analog denen, welche ich bei den Untersuchungen über das Zwischengebiet benutze, wovon jetzt die Rede sein soll.

Wie bereits Prof. Lyman in einer Schrift an die American Physical Society[1]), die unter Bezugnahme auf unsere Arbeiten erschien, betonte, muß sich die Verwendung des Tangentengitters als besonders wertvoll erweisen für das Studium der Funkenspektren im äußersten Ultraviolett. Wir werden noch sehen, daß sie nicht minder wertvoll ist für die Ausdehnung der Röntgenspektren nach dem sichtbaren Gebiet zu.

III. Teil.

Ausdehnung des Röntgenspektrums nach dem Ultraviolett hin. Spektrographische Verbindung der beiden Gebiete.

Bis jetzt haben wir uns mit den Spektren kondensierter Funken beschäftigt, das heißt mit solchen, die von freien Atomen, welche keine Oberflächenelektronen mehr besitzen, emittiert werden und die aus diesem Grund sehr zahlreiche Linien liefern.

Die Spektren, von denen nun die Rede sein wird, werden durch ganz andere Umstände hervorgerufen, nämlich durch Bombardierung einer Antikathode mit verhältnismäßig langsamen Elektronen unter Spannungen, die 1000 Volt kaum übersteigen. In diesem Fall handelt es sich um reine Röntgenspektra, die von einem normalen Atom ausgehen. Es steht daher zu erwarten, daß sie im Gegensatz zu den Funkenspektren eine beschränktere Anzahl Linien aufweisen werden.

1) Chicagoer Zusammenkunft. Proc. Americ. Phys. Soc., Februar 1927.

Die Ausdehnung des Röntgenstrahlengebietes nach dem Ultraviolett hin erfordert vor allen Dingen ein Arbeiten im Hochvakuum. Zu dieser Schwierigkeit gesellt sich noch eine weitere: wenn man zur Beugung Kristalle verwendet, so ist eine Wellenspektrographie bei 50 Å nur möglich unter Benutzung besonders groß dimensionierter Raumgitter. Auf diese Weise kam man dahin, Fettsäurepräparate zu benutzen, welche auf einer flachen Unterlage gleichmäßig ausgebreitet angewandt wurden. Zuerst registrierte Thoraeus[1]) bei Verwendung von Palmitin- und Laurostearinsäuren L-Linien über 20 Å hinaus, dann erhielt Dauvillier[2]) unter Benutzung von Honigsteinsäure verschiedene Linien, vor allem $K\alpha$ des Kohlenstoffs und des Bors. In der Praxis zeigen diese Methoden, deren Prinzip ausgezeichnet ist, einen schweren Übelstand: sie erfordern ein Eindringen der Strahlung ins Innere des Kristalls, wobei sich verschiedene Schwierigkeiten einstellen, die, wie wir noch aufzeigen werden, wahrscheinlich auf die Existenz eines merklichen Brechungsquotienten zurückzuführen sind.

Das tangentiell unter totalem Reflexionswinkel verwendete Liniengitter behebt diese Schwierigkeiten und ist deshalb besonders geeignet die Verbindung des Röntgenstrahlengebietes mit dem ultravioletten Spektralbereich zu vollziehen[3]).

1. Der Vakuum-Spektrograph[4]).

Das bei diesen Forschungen benutzte Instrument beruht auf einem ähnlichen Prinzip wie der für die Untersuchungen im äußersten Ultraviolett erdachte und im zweiten Teil beschriebene Spektrograph. Jedoch sind hierbei eine gewisse Anzahl von Verbesserungen eingeführt worden, so daß jetzt das endgültige Modell eines Tangentengitter-Spektrographen im Vakuum vorliegt.

Die zylindrische Röhre AA, welche die dichte Umhüllung darstellt, ist jetzt 60 cm lang und hat 18 cm Durchmesser. Die Skizze in Fig. 7 zeigt die Anordnung der Strahlenquelle, der beiden Visierspalten, des Gitters R und des Plattenhalters P. Ich hielt es für zweckmäßig, auf Fig. 8 die überaus einfache Einstellvorrichtung des Gitters, und zwar getrennt vom übrigen Apparat, wiederzugeben. Die Strahlen, die bereits durch den ersten fixierten Spalt hindurchgegangen sind, dringen hierauf durch den Spalt F_2 (dessen Breite durch die Trommelschraube V_1 reguliert werden kann; außerdem besteht noch die Möglichkeit einer Verschiebung in der Ebene der Spalte selbst durch die Schraube V) und gleiten dann tangentiell über die Oberfläche des kleinen Gitters R. Dieses ist an einer dreieckigen Platte befestigt, welche — durch Federn zusammengehalten — auf 3 Schrauben v_1, v_2, v_3 ruht; die letzte davon, welche mit einer graduierten Trommel versehen ist, reguliert den Einfallswinkel Θ (Fig. 1) auf das Gitter. Das Einstellen vollzieht sich — wie bereits angegeben — auf sehr einfache Art und Weise unter Beobachtung der Linien eines Quecksilberlichtbogens.

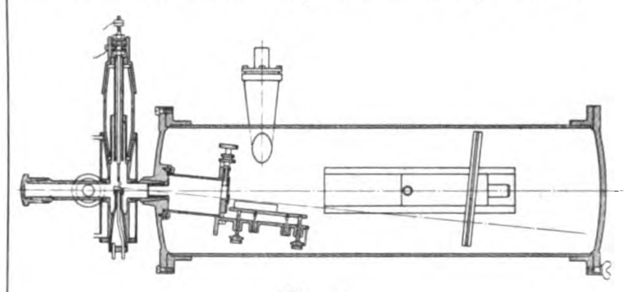


Fig. 7.

Je nach den Untersuchungen, für die der Spektrograph bestimmt ist, kann er entweder mit einer Kammer zur Erzeugung kondensierter Funken (Fig. 3) oder mit einer Röntgenröhre (Fig. 7) ausgestattet werden.

Bei unseren Studien über die weichen Röntgenstrahlen bestand die benutzte Strahlenquelle aus einer Metallröhre (Fig. 9), die besonders kräftig gebaut ist. Sie gehört zur Gattung der Glühkathodenröhren und ist mit einer wassergekühlten, auswechselbaren Anode versehen. Auch um den Röhrenkörper zirkuliert Wasser, wodurch die konischen Verbindungsstücke gekühlt werden. Ein eingeschliffener Glasdoppelkonus (aa) isoliert die Kathode, während die Antikathode geerdet ist. Ein eingeschliffenes, konisches Ansatzstück aus Metall (b) dient zur Einfügung der Pumpröhrenöffnung, ein zweites ebensolches (c) ermöglicht die Verbindung der Röhre mit dem Spektrographen; hier hindurch treten auch die Strahlen aus der Röhre aus. Alle diese Ansatzstücke, die rasch und mühelos abgenommen werden können, werden ausschließlich mit Vakuumfett abgedichtet. Fig. 10 zeigt den zusammengesetzten Spektrographen, an des-

1) Thoraeus, Phil. Mag., Februar 1926.
2) Dauvillier, Journal de Physique **8**, 1, 1927.
3) Bei dieser knappen Darlegung zitiere ich nicht alle die zahlreichen Versuche, die zwar zur Erforschung der langwelligen Röntgenstrahlung angestellt wurden, jedoch nicht eigentlich auf spektrographischen Grundlagen beruhten, indem sie teils den photoelektrischen Effekt, Ionisation benutzten, wie etwa die Versuche der amerikanischen Verfasser (Foote und Mohler, Richardson und Bazzoni, Dadourian, Hughes, Kurth usw.) oder auch die Holwecks.
4) Ch. Beaudouin, Konstrukteur, 31 Rue Lhomond, Paris (V^e).

sen einem Ende die Röntgenstrahlenröhre angebracht ist.

Die Evakuierung des Apparates wird mit Hilfe einer Molekularpumpe durchgeführt, welche unter dem Hahn bei *A* (Fig. 10) an einer plangeschliffenen Scheibe befestigt wird und die einerseits das Vakuum direkt in dem Umhüllungsgefäß des Spektrographen, andrerseits aber auch

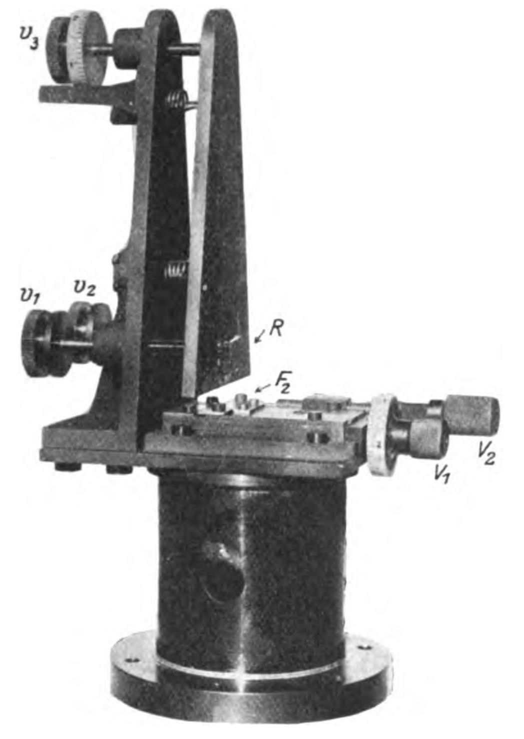


Fig. 8.

in der Röntgenstrahlenröhre aufrecht erhält, und zwar in letzterem Falle unter Zuhilfenahme einer kräftigen, seitlich angebrachten Bleikanalführung. In weniger als zehn Minuten ist — wenn vom Atmosphärendruck ausgegangen wird — das notwendige Vakuum erreicht.

Es ist hier zu bemerken, daß zwischen Antikathode und Gitter die Abgrenzung des Bündels der brauchbaren Strahlen allein durch die beiden verstellbaren Spalten geschieht, so daß sich jenen auf ihrer Bahn bis zur Platte keinerlei materieller Schirm in den Weg stellt. Das Fehlen jeglichen Schirmes, dessen Absorptionsvermögen die Intensität vermindern würde, stellt ein weiteres, sehr wichtiges Charakteristikum meines Spektrographen dar.

Die Röhre wird bei konstanter Spannung durch eine Dynamomaschine mit einer Stromstärke von 50—120 MA gespeist. Alle Spektren werden unter ziemlich niedriger Spannung — etwa zwischen 900 und 1100 Volt — erzielt.

Die auf die Einstellvorrichtung montierten Plangitter sind stets aus Glas, dessen Überlegenheit über das Spiegelmetall in bezug auf das Reflexionsvermögen bei den weichen Röntgenstrahlen wir bereits erkannt haben[1]).

Ich habe zuerst dasselbe 200-Linien-Gitter benutzt, das ich bei meinen vorhergehenden Untersuchungen im Ultraviolett verwendet hatte und welches mir bei einer Expositionsdauer von zehn Minuten vier Ordnungen der $K\alpha$-Linie des Kohlenstoffs ($\lambda = 44{,}9$ Å) lieferte, und zwar bei einer Dispersion von 12,6 mm für die erste und von 19 mm für die zweite Ordnung; der Abstand Platte—Gitter betrug hierbei 40 cm [2]).

Jetzt verwende ich Gitterfragmente von kleinen Ausmaßen, die von Prof. R.-W. Wood hergestellt worden sind. Ihre erstaunlich gut gearbeitete Oberfläche weist 1180 Linien pro Millimeter auf. Bei Verwendung in meinem Apparat unter Tangentialeinfall liefern sie sehr schöne

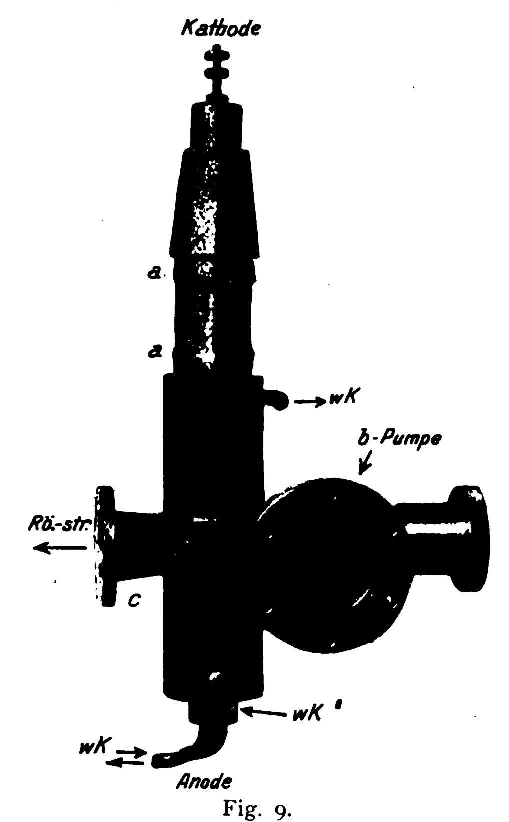


Fig. 9.

Spektra mit beträchtlicher Dispersion[3]). Die Ordnungen 1, 2 und 3 der $K\alpha$-Linie des Kohlen-

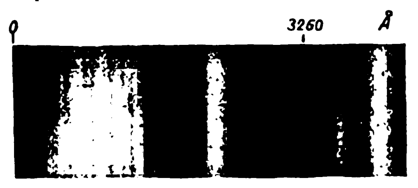
1) Journal de Physique **8**, 21, 1927.

2) Siehe die Wiedergabe dieses Spektrums in: Journal de Physique **8**, 448, 1927.

3) Bei den optischen Einstellungen des Tangentengitters werden die sichtbaren Linien erster Ordnung des Quecksilberlichtbogens fast unter einem rechten Winkel zu dem Einfallsbündel gebeugt.

Tafel II.

Funkenspektrum des Kupfers — Äußerstes Ultraviolett — 200-Linien-Gitter



a) Emissionspektra des Zwischengebietes (1180-Linien-Gitter)

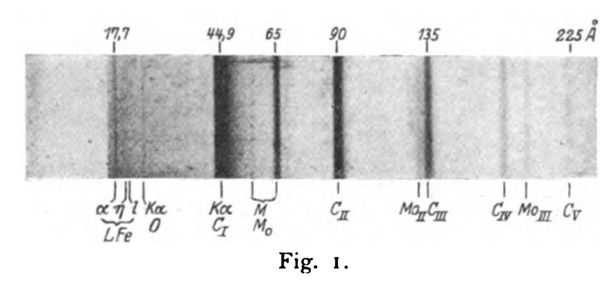


Fig. 1.

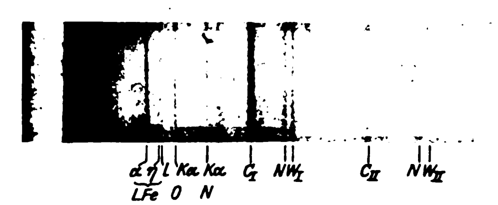


Fig. 2.

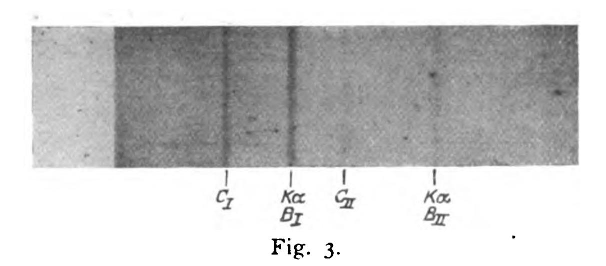


Fig. 3.

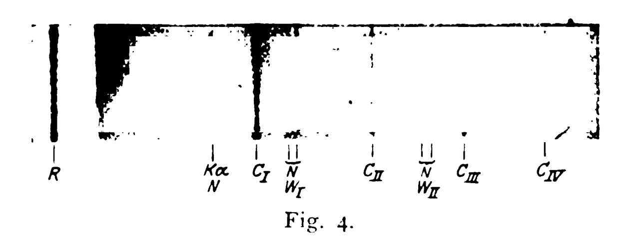
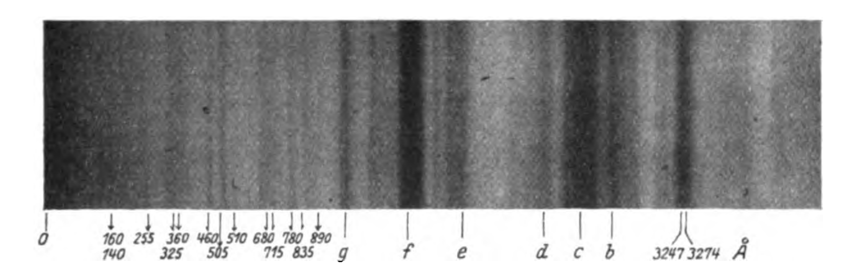


Fig. 4.

Tafel III.

Funkenspektrum von Kupfer (Gitter zu 200 Linien pro Millimeter)



b) Absorptionsspektra des Zwischengebietes

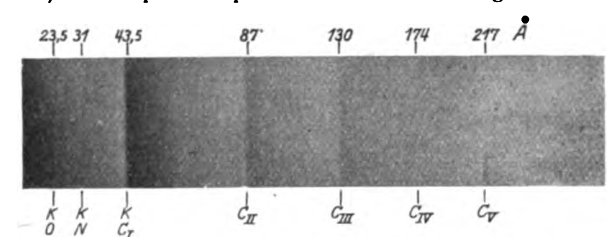


Fig. 1.
(natürliche Größe)

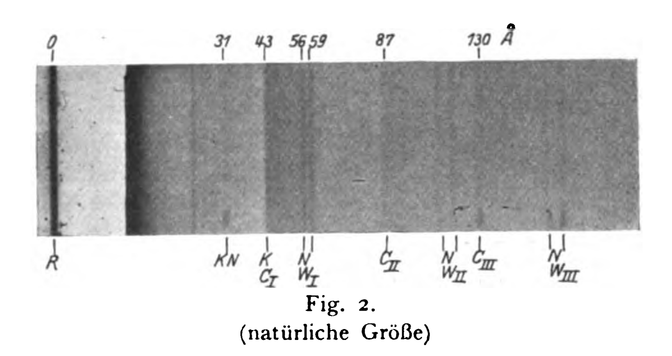


Fig. 2.
(natürliche Größe)

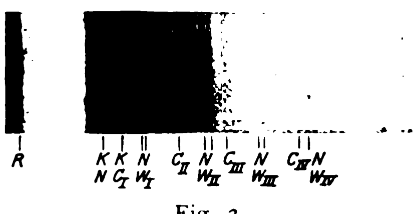


Fig. 3.
(verkleinert)

stoffs befinden sich in diesem Fall auf einer 40 cm vom Gitter entfernten Platte in einem Abstand von 33 mm, 50 mm und 63 mm von der Spur des direkten Strahlenbündels. (Siehe Fig. 1a der Taf. II.)

Trotz der bedeutenden Dispersionssteigerung bleibt die Leuchtkraft des Spektrums so beträchtlich, daß wir zur Registrierung der Spektren einzig und allein gewöhnliche photographische Platten („Aviator-Crumière“) verwenden und keine Schumann-Platten. Unter diesen Bedingungen ist in gewissen Fällen das Kohlenstoffspektrum in fünf Minuten (Abstand Gitter—Platte: 40 cm) photographiert worden, und dies bei Verwendung von nur 10 Watt in der Röhre.

Die Glühkathode ist durch einen Draht oder ein dünnes Blättchen aus Thorium, Platin, Wolfram, Tantal, Molybdän gebildet, oder mit Oxyden (Baryum, Strontium) bedeckt.

Die Antikathode besteht aus Eisen: die Erzeugung der charakteristischen Spektren wird erreicht durch die Bombardierung mit Elektronen — unter 1000 Volt Spannung — eines Niederschlags des zu untersuchenden Elements, der auf dieser Antikathode durch die während der Exposition sich vollziehende langsame Destillation

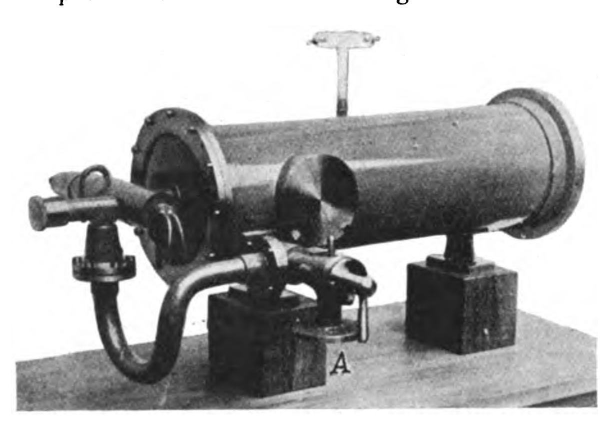


Fig. 10.

des Kathodenfadens gebildet wird. In einigen Fällen wurde ein Metallblättchen (Gold, Platin) direkt an der Eisenkathode angebracht.

Die sehr leicht auftretende $K\alpha$-Linie des Kohlenstoffs (Fig. 1, 2, 3, 4) rührt von der Bildung eines am Brennfleck der Antikathode sich bildenden, sehr dünnen Kohlenstoffniederschlags her, der auf den Zerfall der organischen Fettdämpfe zurückzuführen ist. Es besteht jedoch die Möglichkeit, Spektra zu erzielen, in denen die Kohlenstofflinie fehlt, wenn man nämlich Sorge trägt, während der Exposition genügende Mengen Kathodenmetall zu destillieren, um fortwährend den Kohlenstoffniederschlag zu überdecken, der sich eventuell bilden könnte.

Die ziemlich häufig auftretende, wenngleich schwache $K\alpha$-Linie des Sauerstoffs (Fig. 1 und 2 auf Taf. II) rührt von geringen Oxydmengen her, die sich auf der Antikathode bilden.

Schließlich scheint noch die $K\alpha$-Linie des Stickstoffs (Fig. 2 und 4 auf Taf. II), die mitunter sehr intensiv auftritt, mit einer leichten Druckerhöhung im Apparat als Folge geringer Undichtigkeit verbunden zu sein. (Bildung von WN_2 auf der Antikathode).

2. Vom Atom emittierte langwellige Röntgenspektra.

a) Charakteristische Emissionsspektra.

Taf. II zeigt einige Wiedergaben von Originalplatten[1]): diese wurden auf besondere Art und Weise erhalten, nämlich durch Photographieren der durch einen Spiegel kräftig beleuchteten Originalplatte unter geeignetem Reflexionswinkel. Bei diesem Verfahren gewinnen die Linien an Kontrast, aber leider werden alle Flecken auf der Plattenoberfläche gleichfalls verstärkt.

Wie man feststellen kann, ist das allgemeine Aussehen der Spektren in jeder Hinsicht dem der gewöhnlichen Röntgenspektren ähnlich: wenig zahlreiche Linien, Einfachheit im ganzen — also vollkommen anders als die Funkenspektren mit ihren vielen Linien (siehe den 2. Teil). Zu erwähnen ist noch das fast gänzliche Fehlen einer „kontinuierlichen Strahlung“ bei diesen Spektren.

Alle Spektren sind bei 39,6 cm Abstand zwischen Platte und Gitter aufgenommen worden.

Das Spektrum Nr. 1 (Taf. II) zeigt die Emission L des Eisens der Antikathode und M des Molybdäns (Molybdän-Kathode). Das Spektrum Nr. 3 zeigt die $K\alpha$-Linie des Bors. Die Spektren Nr. 2 und 4 endlich stellen die $K\alpha$-Linie des Stickstoffs und das N-Dublett des Wolframs dar. Dieses letzte ist auch in 3 oder 4 Ordnungen auf unseren Spektren (Taf. III) sichtbar.

Die Bestimmung der zur Berechnung der Wellenlängen notwendigen Konstanten (Abstand D Gitter—Platte, Komplement Θ des Einfallswinkels) wird so vorgenommen, daß man das Spektrum in zwei verschiedenen Stellungen photographiert, deren Zwischenentfernung genau bekannt ist. Die gute Übereinstimmung der für die Wellenlänge einer und derselben Linie erhaltenen Werte, die in ihren aufeinander folgenden Ordnungen gemessen worden ist, ermöglicht die Abschätzung der Genauigkeit dieser Bestimmung von D und Θ.

1) Zahlreiche Wiedergaben von Spektren findet man in: J. Thibaud und Soltan, Journal de Physique 8, 484, 1927.

Tabelle I[1]).

Niederfrequenz-Emissionslinien.

		Wellenlänge in Ångström	Wellenlänge in Elektronen-Volt	ν/R	Ursprung
K-Reihe	$K\alpha$ Sauerstoff . . .	23,8	518	38,2	$K\alpha$
	Stickstoff . . .	31,8	388	28,6	
	Kohlenstoff . .	44,9	275	20,3	
	Bor	68,0	181,4	13,4	
L-Reihe	$L\alpha$ . . . . Eisen	17,7	697	51,4	L
	$L\eta$ Eisen	19,6	630	46,5	
	Ll . . . . Eisen	20,1	614	45,3	
M-Reihe	Molybdän . .	65,0	190	14,0	$M_{V}-N_{II-III}$
		54,9	225	16,6	$M_{IV-V}-N_{IV-V}$
N-Reihe (Dubletts)	Tantal Z = 73 . .	58,3	212	15,6	$N_{IV}-O$
		61,4	201	14,8	$N_{V}-O$
	Wolfram Z = 74	56,0	220	16,3	$N_{IV}-O$
		59,1	209	15,4	$N_{V}-O$
	Platin Z = 78 . .	48,0	257	18,9	$N_{IV}-O$
		51,0	242	17,8	$N_{V}-O$
	Gold Z = 79 . .	46,8	264	19,5	$N_{IV}-O$
		49,4	250	18,4	$N_{V}-O$

Tabelle I enthält die Gesamtheit unserer Wellenlängenmessungen und die Energie der Linien in Elektronen-Volt und in ν/R. Die Gitterkonstante, die bei unseren Messungen als Referenzgröße dient, beträgt $d = 8477$ Å (mit Hilfe der Linie $\lambda = 5461$ Å des Quecksilberlichtbogens gemessen[2]).

Die angegebenen Werte stellen den Durchschnitt der Messungen einer großen Anzahl von Platten dar. Die Fehlerbestimmung erbringt den Nachweis, daß diese Wellenlängen eine Unsicherheit von höchstens 0,5 Proz. enthalten.

Diese Ergebnisse können bearbeitet werden zur Bestimmung der Energieniveaus:

I. K-Reihe — Niveau L_{II-III}. Wenn wir in ein Moseleysches Diagramm die Werte von $\sqrt{\nu/R}$ für die von uns gemessenen $K\alpha$-Linien der Elemente Bor, Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff, sowie für die von Thoraeus und Siegbahn[3]) gemessene $K\alpha$-Linie des Fluors ($\lambda = 18{,}37$ Å oder 671,8 Volt) eintragen, so liegen die entsprechenden Punkte genau auf einer Geraden[4]).

Da wir andrerseits die Energie der K-Absorptionslinie dieser Elemente kennen, sind wir in der Lage, die Energie des Niveaus L_{II-III} zu bestimmen. Hierzu benutzen wir als K-Niveau-Potentiale die von Holweck[1]) angegebenen Werte, die übrigens mit den von mir gefundenen übereinstimmen (siehe nächsten Abschnitt). Unter diesen Bedingungen errechnet man für das Niveau L_{II-III} die in Tabelle II aufgeführten Energien.

Tabelle II.

Niveau L_{II-III}

Element	Energie (Volt)	λ in Å
Bor $Z = 5$	192 — 181,4 = 10,6	116
Kohlenstoff $Z = 6$	282 — 275 = 7	176
Stickstoff $Z = 7$	397 — 388 = 9	137
Sauerstoff $Z = 8$	528 — 518 = 10	123
Fluor $Z = 9$	684 — 671,8 = 12,2	101

Wenn wir vom Bor absehen, so variieren die errechneten Energien regelmäßig mit der Atomzahl Z. Trägt man die Quadratwurzeln der Energien des Niveaus L der Elemente Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff und Fluor in ein Moseleysches Diagramm ein, so liegen sie auf einer Geraden[2]), welche die kurz vorher bestimmte Moseleysche Gerade für dieses Niveau (vgl. Holweck, a. a. O.) bei den Elementen, deren Atomzahl 10 übersteigt, in der Gegend des Neon ($Z = 10$) schneiden würde.

1) Vgl. Thibaud und Soltan, Journal de Physique, Dezember 1927.

2) So nämlich, daß die Messungen der Wellenlängen des Zwischengebietes direkt mit der Wellenlänge der Linie $\lambda = 5461$ Å in Beziehung gesetzt werden.

3) Arkiv f. Mat. Astr. och Fysik **18**, 1, 1925.

4) Thibaud und Soltan, Journal de Physique, a. a. O. S. 487, Fig. 1.

1) Conférences-Rapports (Presses Universitaires) 1927.

2) Siehe Journal de Physique **8**, 488, 1927, Fig. 2.

Die Moseleysche Kurve erleidet demnach eine Richtungsänderung in der Nähe dieses Elementes, wie das Kossel[1]) vorausgesehen hat. Tatsächlich beginnt die M-Schicht erst beim Neon sich zu bilden: unterhalb dieses Elementes befinden sich die L-Niveaus beim normalen Atom (Valenzelektronen) ganz an der Oberfläche, und wir messen infolgedessen nur die Ionisationspotentiale dieser L-Schicht.

Das Bor bildet hier eine Ausnahme: ohne Zweifel rührt das daher, daß der von Holweck für das K-Niveau dieses Elementes (192 Volt) angegebene Wert zu hoch gegriffen ist. Nach unseren Werten hat es den Anschein, als liege dieses K-Niveau eher bei 187,6 Volt.

II. L-Reihe. Beobachtet beim Eisen ($L\alpha$, η, l). Übereinstimmung mit den früher von Thoraeus[2]) vorgenommenen Bestimmungen, der (bei Benutzung eines Kristalls) angab: $L\alpha = 17{,}58$ Å, $L\eta = 19{,}65$ Å; $Ll = 20{,}12$ Å.

III. M-Reihe. Zwei Linien dieser Reihe sind von uns im Molybdänspektrum beobachtet worden: die eine $\lambda = 65$ Å (190 Volt), intensiv, die andere $\lambda = 54{,}9$ Å (225 Volt), schwach. Es ist übrigens vorauszusehen, daß beim Molybdän sich die M-Reihe auf eine geringere Anzahl Linien reduzieren wird. Die intensivsten M-Linien (α, β), die bei den schweren Elementen beobachtet wurden, erscheinen tatsächlich nur bei den seltenen Erden, wobei bereits die Niveaus $N_{\mathrm{VI-VII}}$ besetzt werden.

Die Linie $\lambda = 65$ Å rührt von einem Übergang M_{V}—$N_{\mathrm{II-III}}$ her (nach der Tabelle von Bohr und Coster[3]) erhält man numerisch $M_{\mathrm{V}} - N_{\mathrm{II-III}} = 233{,}4 - 40{,}7 = 192{,}7$ Volt). Sie stellt — für das Element Nr. 42 — eine entfernte Fortsetzung der M_1N_5-Linien dar, wie sie von Hjalmar[4]) bei den schweren Elementen (M_1N_5: Uranium $\lambda = 4{,}929$ Å; Thorium $\lambda = 5{,}245$ Å; Wismut $\lambda = 6{,}498$ Å; Blei $\lambda = 6{,}727$ Å; Iridium $\lambda = 8{,}012$ Å) und von Thoraeus[5]) beim Wolfram (M_1N_5: $\lambda = 8{,}882$ Å) beobachtet wurden. Auf einem Moseleyschen Diagramm liegt unser Wert von $\sqrt{\nu/R}$, der $MMo = 65$ Å entspricht, genau auf der Verlängerung der Geraden, die durch die von Hjalmar und Thoraeus für die schweren Elemente erhaltenen Punkte geht.

Die Linie $\lambda = 54{,}9$ Å wäre M_{V}—$N_{\mathrm{IV-V}}$. Nach dem Auswahlprinzip wäre diese Linie von schwacher Intensität auszuschließen.

IV. N-Reihe. Bei den schweren Elementen tritt ein feines N-Dublett auf: Tantal ($Z = 73$), Wolfram ($Z = 74$), Platin ($Z = 78$), Gold ($Z = 79$) (Thibaud und Soltan, a. a. O.). Es handelt sich hierbei um ein regelmäßiges Dublett ($\Delta\lambda = 3$ Å), dessen intensivste Komponente diejenige von größter Wellenlänge ist. Wenn man nach dem Ursprung dieses Dubletts forscht, so findet man auf Grund der Angaben der Hochfrequenzspektrographie zumindest zahlenmäßig eine gute Übereinstimmung mit den Übergängen N_{IV}—$N_{\mathrm{VI-VII}}$ einerseits und N_{V}—$N_{\mathrm{VI-VII}}$ andrerseits, wie aus Tabelle III hervorgeht, die nach den Angaben von Bohr und Coster (a. a. O.) zusammengestellt worden ist.

Tabelle III.

	Niveaus (in Volt)			Dublett	
	N_{V}	N_{IV}	$N_{\mathrm{VI-VII}}$	berechnet	gemessen
Ta	233,4	244,3	33,9	199,5 210,4	201,0 211,6
W	241,5	253,8	33,9	207,6 219,9	208,8 220,3
Pt	314,8	332,5	70,6	244,2 261,9	241,9 257,0
Au	339,2	358,2	86,8	252,4 271,4	249,8 263,6

Dies überrascht um so mehr, da die Theorie keinen Übergang innerhalb eines und desselben Niveaus vorsieht. Man könnte vielmehr vermuten, das bei der gewöhnlichen Klassifizierung mit $N_{\mathrm{VI-VII}}$ bezeichnete Niveau sei in Wirklichkeit bereits ein O-Niveau. Doch ist diese Annahme ziemlich hypothetisch, und die von verschiedenen Verfassern (Bohr und Coster, Hjalmar, Nishina, Van der Tunk) mit Hilfe der

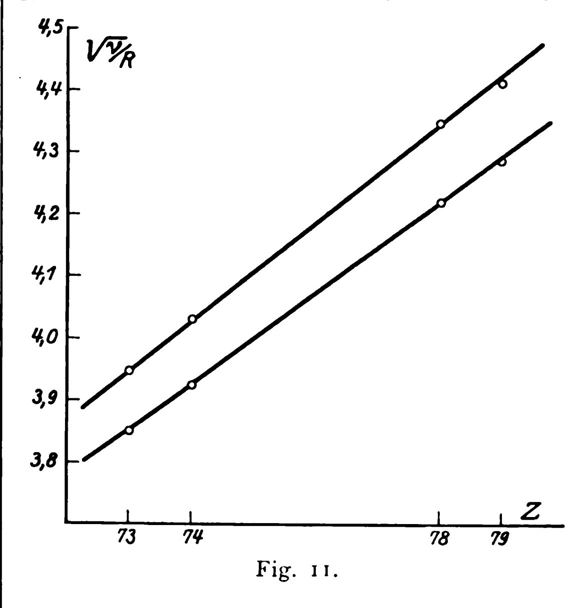


Fig. 11.

1) Zeitschr. f. Phys. **2**, 470, 1920.
2) Phil. Mag. **50**, 312, 1926.
3) Zeitschr. f. Phys. **12**, 342, 1923.
4) Zeitschr. f. Phys. **15**, 65, 1923.
5) Zeitschr. f. Phys. **26**, 396, 1924.

Hochfrequenzspektrographie für die Niederfrequenzniveaus errechneten Energien gehen noch viel zu sehr auseinander, als daß man eindeutig behaupten könnte, der Ursprung unseres Dubletts sei das Niveau N_{VI-VII}, und nicht das Niveau O_{II-III}. Fig. 11 zeigt die Regelmäßigkeit, mit der das Dublett sich mit der Ordnungszahl verändert.

Dieses Dublett ist verhältnismäßig intensiv: und es überrascht nicht, wenn man eine bedeutende Beteiligung der N-Schicht der schweren Atome feststellt, wenn man sich klar macht, daß beim Wolfram beispielsweise 32 von den 74 Elektronen, die das Element aufweist, zu diesem N-Niveau gehören.

b) Kontinuierliches Spektrum. K-Absorptionsgrenzen des Kohlenstoffs, Stickstoffs und Sauerstoffs.

Bei den eben behandelten Forschungen haben wir zahlreiche Linienspektra photographiert, die den K-Reihen der leichten oder den M-, N-, O-Reihen der schwereren Elemente angehören, jedoch ohne je die Emission einer allgemeinen Strahlung (eines „kontinuierlichen Grundes") zu beobachten, deren Intensität den charakteristischen Linien gegenüber irgendwie bemerkenswert gewesen wäre.

Es ist mir jedoch kürzlich gelungen[1]), unter Verwendung von Antikathoden mit hohem Atomgewicht und bei Einwirkung eines starken elektrischen Stromes (100—150 MA bei 1000 Volt Spannung an der Antikathode) die Emission einer allgemeinen Strahlung festzustellen, deren Eigenschaften sich in vieler Hinsicht denen des kontinuierlichen Grundes bei gewöhnlichen Röntgenspektren nähern.

Trotzdem bleiben die genauen Bedingungen, unter denen sich diese Emission bei den Antikathodenatomen abspielt, noch in Dunkel gehüllt: es gibt Fälle, wo man selbst bei Verwendung eines Schwermetallniederschlags (Thorium, Wolfram) auf der Antikathode nur das charakteristische Linienspektrum beobachtet ohne die Spur einer allgemeinen Strahlung. Es hat den Anschein, als entstehe der kontinuierliche Grund nur dann, wenn der auf der Antikathode erzeugte Emissionsniederschlag von genügender Dichte ist.

Der in meinen Spektren zwischen 15 Å und 250 Å photographierte kontinuierliche Grund zeigt keinen einheitlichen Intensitätsverlauf, er ist vielmehr von einer Reihe schöner Linien mit scharfen Kanten nach der Seite der zunehmenden Frequenzen hin durchzögen, wie man auf den Figuren der Taf. III sehen kann. Hieraus geht hervor, daß die Absorption auf diskontinuierliche Weise variiert und jedesmal dann schroff einsetzt, wenn die Frequenz der kontinuierlichen Strahlung die Frequenz einer dieser Atomabsorptionsgrenzen der auf dem Weg des Strahlenbündels vorhandenen Elemente erreicht. Der Absorptionsvorgang bei sehr weichen Röntgenstrahlen ist daher genau identisch mit dem der diskontinuierlichen Absorption bei gewöhnlichen Röntgenstrahlen; infolgedessen sind die Spektren ihrem Aussehen nach gleich, und man sieht, unsere Absorptionsspektren sind den im Hochfrequenzgebiet erhaltenen ganz ähnlich. Ein Unterschied liegt jedoch vor: bei unseren Versuchen stellte sich nämlich die Absorption schon bei viel geringerer Zahl absorbierender Atome ein als im gewöhnlichen Röntgengebiet.

Wir haben die K-Grenzen des Kohlenstoffs (organischer Fettdampf aus den Schliffen), Stickstoffs und Sauerstoffs unterschieden; die Intensitäten der einzelnen Absorptionslinien dieser Elemente stehen im selben Verhältnis zueinander wie die Intensitäten der entsprechenden charakteristischen $K\alpha$-Linien auf den Abbildungen (Abschnitt a, Taf. II): die K-Grenze des Kohlenstoffs ist am intensivsten, dann folgt die des Stickstoffs, schließlich die des Sauerstoffs. Man kann leicht fünf Ordnungen der Kohlenstofflinie feststellen.

Ich habe bei diesen Absorptionsgrenzen keine Feinstruktur beobachtet, was mit der Vermutung übereinstimmt, es bestehe nur ein einziges K-Niveau, aber auf gewissen Platten scheinen die drei K-Linien (von C, N und O) an ihrer Hochfrequenzkante durch eine weiße Linie abgegrenzt zu sein. Hier liegt zweifellos ein Linienabsorptionsphänomen vor ähnlich jenem, welches bei gewissen L-Linien, beispielsweise bei den schwereren Elementen, bereits beobachtet wurde (Nishina, Coster). Messungen mit dem Mikrophotometer bestätigen das Vorhandensein dieser weißen Linien.

Die Registrierung des kontinuierlichen Spektrums ermöglicht es, die Wellenlänge der Absorptionskanten in absoluten Werten zu bestimmen. Tabelle IV enthält die Ergebnisse der Messungen an den Kanten (und nicht der weißen Linie, die um Bruchteile eines Ångströms davon abweicht).

Tabelle IV.

	λ (Å)	Volt	ν/R
Kohlenstoff $Z = 6$	43,5	284	21,0
Stickstoff $Z = 7$	31,1	397	29,3
Sauerstoff $Z = 8$	23,5	524	38,7

1) J. Thibaud, C. r. **186**, 308, 1928. — Nature, 3. März 1928.

Die Ergebnisse stimmen gut mit den von Holweck (a. a. O.) mittels der Ionisationsmethode erzielten überein.

Schließlich zeigen diese Absorptionslinienspektren — die ersten Photographien im Zwischengebiet — noch charakteristische Emissionslinien außer den Absorptionslinien, wie etwa das N-Dublett des Wolframs (in drei Ordnungen sichtbar auf Taf. III).

Brechungsquotient der weichen Röntgenstrahlen.

Vergleichung der Liniengitter- und der Drehkristallmethoden.

Da die Spektrographie der Röntgenstrahlen bis jetzt einzig und allein auf der Verwendung des Kristallgitters beruhte, benutzten bisher alle Verfasser, welche den Versuch einer Ausdehnung des Röntgenspektrums nach dem Ultraviolett hin unternommen haben, Kristallsubstanzen mit großen Gitterdimensionen, wie etwa auf einer flachen Unterlage gleichmäßig ausgebreitete Schichten aus Fettsäurepräparaten. Interessant ist die Gegenüberstellung der mit der neuen Liniengittermethode erzielten Ergebnisse und der mit Hilfe von Kristallen erhaltenen Resultate. In Tabelle V haben wir diejenigen unserer Ergebnisse eingetragen, welche solchen Linien entsprechen, die bereits unter Verwendung von Kristallen teils durch Thoraeus (Laurostearinsäuregitter: $2d = 54{,}54$ Å oder Palmitinsäuregitter: $2d = 70{,}98$ Å), teils durch Dauvillier (Honigsteinsäure-Bleiseifengitter: $2d = 175$ Å) gefunden worden sind.

Tabelle V.

Linie	Wellenlänge		
	Liniengitter	Drehkristall	
$L\alpha$ Eisen	17,7 Å	17,58 Å	Thoraeus
$L\eta$ Eisen	19,6	19,65	
Ll Eisen	20,1	20,12	
$K\alpha$ Sauerstoff	23,8	24,8	Dauvillier
$K\alpha$ Kohlenstoff	44,9	45,5	
$K\alpha$ Bor	68,0	73,5	

Man bemerkt sofort, daß — von Versuchsfehlern abgesehen — bis zu 20 Å Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen beider Methoden besteht, aber über diese Wellenlänge hinaus sind die mit Hilfe des Kristalls erzielten Werte durchweg höher als die mit Benutzung des Gitters gemessenen. Die Divergenz $\Delta\lambda$, bis 20 Å unbedeutend, scheint von 20 bis 50 Å um 1 Å zu schwanken, um bei einer Wellenlänge von $\lambda = 68$ Å 5,5 Å zu erreichen.

I. Wir werden zeigen, daß man diese Divergenz und ihr Anwachsen bei steigender Wellenlänge erklären kann, wenn man den Brechungsquotienten der Strahlen des Zwischengebietes in der Substanz (Fettsäure) heranzieht, welche das Kristallgitter bildet. Der Einfluß des Quotienten wird tatsächlich in diesem Gebiet sehr spürbar, und man tut gut, ihn bei der Braggschen Beziehung zu berücksichtigen, von der die Berechnungen bei der Kristallmethode ausgehen.

Der Brechungsquotient μ der Röntgenstrahlen, der unterhalb der Einheit liegt, kann als Funktion der Strahlungsfrequenz ν mit Hilfe der Drude-Lorentzschen Dispersionsformel bestimmt werden:

$$\delta = 1 - \mu = \frac{e^2}{2\pi m} \sum \frac{Ni}{\nu^2 - \nu_i^2} \qquad (6)$$

$$\frac{e^2}{2\pi m} = 4{,}03 \times 10^7 \text{ V.E.S.}$$

(Ni = Zahl der Elektronen pro Volumeinheit, welche die Eigenfrequenz ν_i aufweisen). Vernachlässigt man jetzt die Eigenfrequenzen ν_i gegenüber ν, so variiert die Größe δ, die den Brechungsquotienten charakterisiert, proportional dem Quadrate der Strahlungswellenlänge.

Wenn wir nun (6) auf den Fall anwenden, daß es sich um weiche Röntgenstrahlen handelt, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die optisch wirksamen Atome der Fettsäure einzig und allein Kohlenstoff und Sauerstoff sind, d. h. wenn wir die Rechnung unter Einsetzung der Durchschnittsatomzahl $Z = 7$ für die Atome durchführen, so erhalten wir (λ in Å ausgedrückt):

$$\delta = \frac{e^2}{2\pi m} \cdot \frac{Ni}{\nu^2} = 3{,}1 \times 10^{-6} \lambda^2. \qquad (7)$$

Für eine Wellenlänge $\lambda = 100$ Å erhält man also $\delta = 3{,}1 \times 10^{-2}$ (während man bei gewöhnlichen Röntgenstrahlen [$\lambda = 1$ Å] nur $\delta = 3{,}1 \times 10^{-6}$ erhält). Für den besonderen Fall der K-Linie des Bors (68 Å) ergibt sich $\delta = 1{,}44 \times 10^{-2}$. Der Einfluß des Brechungsquotienten, der bei den Röntgenstrahlen vernachlässigt werden kann, wird daher sofort bedeutend, wenn die Strahlen sehr weich werden.

Im Innern des Atomsystems (mit dem Quotienten $\mu < 1$), welches das Gitter darstellt, wirkt die Brechung wie ein Zunehmen der Gitterdistanz D. Die Braggsche Formel muß daher durch eine noch verbesserte Formel[1]) ersetzt werden, nämlich

$$n\lambda = 2D \sin\Theta \left(1 - \frac{4\delta D^2}{n\lambda^2}\right). \qquad (8)$$

Das ist die Formel, die bei der Erforschung des

1) Siehe Siegbahn, Journal de Physique 6, 228, 1925.

Zwischengebietes unter Zuhilfenahme von Kristallen anzuwenden wäre, wenn man von vornherein die Dispersionskurve des Kristalls, das heißt die Funktion $\delta = f(\lambda)$ kennen würde.

Einen experimentellen Wert für den Brechungsquotienten des Bleimelissats können wir mit Hilfe der Vergleichstabelle der nach den zwei Methoden gemessenen Wellenlängen erhalten.

Ist λ_D die scheinbare Wellenlänge, die man mit Benutzung der gewöhnlichen Braggschen Beziehung für eine Strahlung von der Wellenlänge λ errechnen würde, die selektiv unter dem Winkel Θ durch einen Kristall mit der Konstante D (tatsächliche mit Hilfe von harten Röntgenstrahlen gemessene Gitterdistanz) reflektiert wird, so gilt nach (3) für die erste Ordnung:

$$1 - \frac{4\delta}{\lambda^2} D = \frac{\lambda}{2D \sin\Theta} = \frac{\lambda}{\lambda_D}. \qquad (9)$$

Wenden wir diese Formel auf die K-Linie des Bors an, für die Dauvillier eine „scheinbare" Wellenlänge $\lambda_D = 73{,}5$ Å bestimmt, während wir die absolute Wellenlänge $\lambda = 68{,}0$ Å beobachten, so erhalten wir (da $D = 87{,}5$ Å ist):

$$\delta = 2{,}44 \times 10^{-6} \lambda^2. \qquad (10)$$

Dies ist das Dispersionsgesetz der Honigsteinsäure für weiche Röntgenstrahlen. Mit der theoretisch bestimmten Drudeschen Beziehung stimmt diese Formel gut überein.

Für die K-Linie des Bors ergibt sich nach (10):

$$\delta_{\text{Bor}} = 1{,}13 \times 10^{-2}\ ^{1)}.$$

II. Wir haben im vorhergehenden den Einfluß der Eigenfrequenzen ν_i der Atomresonatoren vernachlässigt. Man kann unter Anwendung von Dispersionsformeln, die den Tatsachen besser gerecht werden als die Formel (6) — etwa die von Kallmann und Mark[2]) vorgeschlagenen — den Nachweis führen[3]), daß das Auftreten der Eigenperioden der Resonatoren in keiner Weise die Größenordnung des Brechungsquotienten, wie wir ihn eben bestimmt haben, modifiziert.

III. Schließlich, die Aufnahmen von Thoraeus und besonders von Dauvillier zeigen eine Verbreiterung der Linien des Zwischengebietes, wenn ihre Wellenlänge zunimmt, so daß über 20 Å hinaus die flau und diffus gewordenen Linien eine Breite von mehreren Ångström einnehmen.

Eine ähnliche Wirkung haben wir mit dem Liniengitter nicht beobachtet: die Linien bleiben scharf, sie weisen zwar Schwankungen in der Breite auf, die vielleicht auf das Vorhandensein einer Feinstruktur zurückzuführen ist, nie jedoch variieren sie in kontinuierlichem Maße mit der Wellenlänge, wie wir bereits gezeigt haben[1]). Die Breite einer Linie erreicht in keinem Fall 1 Å.

Es handelt sich nun darum, den Ursprung des diffusen Aussehens des Spektrums zu finden, der offenbar auf die Struktur des Kristallgitters selbst zurückgeführt werden muß. Tatsächlich beteiligt sich infolge der außerordentlich großen Leichtigkeit, mit der die Strahlen des Zwischengebietes absorbiert werden, nur eine sehr kleine Anzahl von Gitterebenen an der Beugung, und dies allein würde schon hinreichen, die geringe Schärfe der Linien zu erklären. Aber es kommt noch ein weiterer Grund hinzu, weshalb das Kristallgitter keine feinen Linien erzeugen kann: wie aus den experimentellen Untersuchungen Ehrenbergs und Marks[2]), sowie auch aus einer bereits früher von Ewald[3]) aufgestellten Theorie hervorgeht, sind die verschiedenen Elemente, die im Gitter in Schwingung geraten, voneinander nicht unabhängig, so daß die vom Gitter reflektierten Strahlen, selbst wenn sie monochromatisch sind, eine gewisse Winkelbreite $\Delta\Theta$ aufweisen. Diese hängt mit dem Brechungsquotienten $\mu = 1 - \delta$ der Substanz folgendermaßen zusammen:

$$\Delta\Theta = \frac{4\delta}{\sin 2\Theta} \text{ oder } \Delta\lambda = \lambda \frac{\Delta\Theta}{\operatorname{tg}\Theta}. \qquad (11)$$

Bei dem bereits angeführten Fall eines Honigsteinsäuregitters und bei der Borstrahlung $\lambda = 68$ Å haben wir:

$$\delta = 10^{-2}, \text{ demnach } \Delta\lambda = 7 \text{ Å}.$$

Dies ist die Größenordnung der Linienbreiten, die der Kristall liefert.

Die klassische Drehkristallmethode stößt daher auf zwei Schwierigkeiten bei der Messung von Wellenlängen über 20 Å, nämlich die Undeutlichkeit der Linie einerseits und die Ungenauigkeit der Braggschen Beziehung infolge der in Betracht kommenden Brechung. Diese zweite Schwierigkeit könnte nur durch eine Vorherbestimmung des Brechungsquotienten behoben werden.

1) In Wirklichkeit müßte man, da δ nicht mehr sehr klein ist, eher schreiben

$$n\lambda = 2D\sqrt{\mu^2 - \cos^2\Theta},$$

woraus für die $K\alpha$-Linie des Bors folgt: $\delta = 1{,}27 \times 10^{-2}$, welches Resultat von dem Annäherungswert $1{,}13 \times 10^{-2}$ wenig abweicht. Auf jeden Fall ist die Übereinstimmung bei Berücksichtigung des Drude-Lorentzschen Gesetzes besser ($\delta = 1{,}44 \times 10^{-2}$).

2) Ann. der Physik **82**, 585, 1927.

3) Thibaud und Soltan, Journal de Physique, a. a. O. S. 493.

1) J. Thibaud, C. r. **185**, 62, 1927.

2) Ehrenberg und Mark, Zeitschr. f. Phys. **42**, 807, 1926.

3) Ewald, Physik. Zeitschr. **26**, 29, 1925.

Die Benutzung des Liniengitters (welches die Wellenlängen in absoluten Werten liefert) scheint infolgedessen die gegebene Methode bei der Erforschung des Zwischengebietes.

IV. Teil.

Wir glauben, daß mit Hilfe von Spektrographen von der Art des hier beschriebenen das Studium der Strahlungen des Zwischengebietes große Fortschritte machen kann. Es ist dadurch nicht nur die Möglichkeit geschaffen, durch Ausfüllen einer Spektrallücke die Röntgenstrahlen mit den Lichtwellen zu verbinden, sondern es ist außerdem noch sehr wahrscheinlich, daß uns auf diesem Wege wichtige Eigenschaften der Niederfrequenz-Atomniveaus, vor allem derer, die sich am leichtesten durch physikalische oder chemische Einwirkungen verändern lassen, erschlossen werden können, wie etwa die magnetischen Einwirkungen auf die Elektronenbahnen. Ferner wird eine systematische Untersuchung der Brechung ihres Dispersionsgesetzes, sowie der begleitenden Absorption durchzuführen sein. Wenn man weiterhin auf Grund der Ideen Eddingtons vermuten darf, daß in den tiefern Schichten der Gestirnsmaterie die Temperatur 10 Millionen Grad erreichen kann, so müssen in der Strahlung im Innern eines Gestirns sehr häufig Strahlen von der Gattung der Röntgenstrahlen auftreten, und das Spektralmaximum muß in dem Zwischengebiet liegen, das wir hier untersuchen. Daraus erhellt ohne weiteres die Bedeutung der Erforschung dieser Strahlungen für die Astrophysik.

Jedoch scheint uns die Tangentengitter-Methode ganz allgemein anwendbar und auch in anderen Gebieten von großem Wert zu sein.

1. Gamma-Strahlen.

Die Erforschung der γ-Strahlung radioaktiver Körper, von der wir glauben, daß sie uns die wertvollsten Aufschlüsse über die Struktur der Atomkerne liefern könnte, ist gegenwärtig an einem Grenzpunkt angelangt. Wenn man zur Messung der Wellenlängen einen Drehkristall verwendet, so werden die Braggschen Winkel der selektiven Reflexion praktisch zu klein, da die Kristallgittermasche zu groß ist; tatsächlich lag die Grenzlinie[1]), die ich bei der Beugung noch scharf erhielt, schon bei $\lambda = 0{,}052$ Å (236000 Volt); es handelte sich hierbei um eine Linie des Thoriums B. Benutzt man den photoelektrischen Effekt der γ-Strahlen, so kann man noch weiter gehen, und auf diese Weise gelangte ich bei den Versuchen mit $Ra\,C$ bis zu einer Strahlung von $\lambda = 0{,}005$ Å (2 280 000 Volt[1])). Aber alle Bemühungen, über diese Grenze hinaus zu kommen, scheiterten, da die γ-Strahlung beim Durchqueren der Materie nur noch einen winzigen Teil ihrer Energie in photoelektrischer Form abgab.

1) J. Thibaud, Thèses (Paris 1925), Annales de Physique, band 5, Januar 1926.

In dieser Hinsicht wäre die Verwendung des Tangentengitters zur Erforschung der γ-Strahlen zweifellos fruchtbringend. Jedoch kämen in diesem Fall Liniengitter nicht mehr in Frage: ich habe daher vorgeschlagen[2]), eine Kristallspaltoberfläche unter Tangentialeinfall zu benutzen. Dies ist ein von der selektiven Reflexion im Innern eines Kristalls gänzlich verschiedenes Verfahren; hier geht man von der Annahme aus, daß die einzelnen regelmäßig angeordneten Oberflächenatome der Kristallfläche ebenso wirken wie die reflektierenden Zwischenräume zwischen den Linien eines Liniengitters. Bei Verwendung eines Steinsalzkristalls würde eine γ-Strahlung von der Wellenlänge $\lambda = 1{,}4 \times 10^{-12}$ cm unter einem Winkel von einem halben Grad reflektiert werden.

Ich habe verschiedene ähnliche Versuche mit einem Steinsalzkristall unternommen, und zwar unter Benutzung eines Radiumsalzes als Strahlenquelle, dessen γ-Strahlung 80 Millicurie entsprach. Aber selbst bei einer Expositionsdauer von einer Woche erzielte ich keine Ergebnisse. Die Hauptursache dieses Mißerfolges scheint mir darin begründet zu liegen, daß es außerordentlich schwierig ist, einen Einfallswinkel zu erhalten, der gering genug ist, um Totalreflexion der γ-Strahlen auf dem Kristall hervorzurufen. Tatsächlich liegt der Brechungsquotient der γ-Strahlen sehr nahe bei 1: für eine Linie $\lambda = 10^{-3}$ Å erhält man bei Extrapolation der Formel (6): $\delta = 3 \times 10^{-12}$, das heißt, Totalreflexion tritt nur bei Strahlen ein, die auf die Kristalloberfläche unter einem Winkel auffallen, der kleiner als 0,2 Sekunden ist. Die Schwierigkeit der Einstellung ist offenbar groß, trotzdem erscheint der Versuch nicht unmöglich.

2. Elektronenbündel und De Broglie-Wellen.

Nach L. de Broglie hat man bekanntlich der Bewegung eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Elektrons eine Welle von der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v}$$

zuzuordnen.

Kürzlich durchgeführte Versuche, vor allem die von Davisson und Germer, scheinen den Beweis für die Möglichkeit einer Beugung dieser

1) Annales de Physique, a. a. O.; Journal de Physique 6, 82, 1925.

2) Revue d'Optique 5, 107, 1926.

De Broglie-Wellen auf der Oberfläche eines Kristalls zu erbringen. Gewisse von diesen Verfassern beobachtete Beugungsmaxima sollen auf die Beugung der Elektronen durch eine einzige Atomschicht, die in der Art eines Liniengitters wirkt, zurückgehen. Das Elektronenbündel lassen diese Verfasser normal auf die Kristalloberfläche auffallen.

Wirkungen ähnlicher Art, nur mit viel größerer Dispersion, würden ohne Zweifel erzielt, wenn man das Bündel in fast tangentieller Richtung einfallen ließe. Da die Wellenlängen der langsamen Elektronen zugeordneten Wellen (Elektronen von siebzig Volt entspricht eine Welle von 1,5 Å, das heißt von der Ordnung $K\alpha$ des Kupfers) von derselben Größenordnung wie die Röntgenstrahlen sind, bei denen ich die Beugung mit Hilfe von Liniengittern erreicht habe, so kann man sogar die Möglichkeit ins Auge fassen, bei den langsamen Elektronen den Kristall durch ein Gitter zu ersetzen. Das Experiment einer Beugung von Elektronenbündeln kann demnach mancherlei Perspektiven eröffnen.

Für Versuche dieser Art habe ich einen völlig evakuierten Apparat herangezogen, in welchem ein erhitzter Draht Elektronen erzeugt, die hierauf durch eine Röhre in Form eines Bündels unter geringen Potentialen ausgeschleudert werden. Es gelang mir, fadenförmige Bündel von 30 cm Länge bei bloß 40—60 Volt Spannung zu erhalten. Aber als ich versuchte, dieses Elektronenbündel auf Liniengittern zu reflektieren und zu beugen, wie ich es mit den weichen Röntgenstrahlen in meinem Spektrographen tat, fand sich auf der photographischen Platte nur ein durch die Diffusion der Elektronen gebildeter, kontinuierlicher Streifen, jedoch ohne Maxima. Ich halte es nicht für zwecklos, diese negativen Versuche zu beschreiben, da sie vielleicht den Anstoß zu wertvollen Arbeiten anderer Forscher geben können.

Paris, Laboratorium für Röntgenstrahlen-Forschung, 13. Februar 1928.

(Eingegangen 9. März 1928)[1].

1) Aus dem Französischen übertragen von stud. phil. Walter Hinz.

Die Messung der Verschiebung negativer Träger in Flammen[1]).

Von Erich Marx und Paul Kappler.

Die Messung der Trägergeschwindigkeiten ist seit vielen Jahren Gegenstand weitgehender Diskussionen gewesen. Während für die negativen Träger von Marx[1]) und Moreau[2]) Werte in der Größenordnung von etwa 1500 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}} / \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ in der reinen Flamme gefunden wurden und sich bei beiden Forschern eine Abhängigkeit der effektiven Trägergeschwindigkeit von der Konzentration ergab, wurden von Wilson und seinen Schülern zeitweilig Werte, die zwischen 5—20000 cm/sec lagen, für richtig gehalten; und erst neuerdings ergaben die Messungen über den Halleffekt, die bei Wilson von H. A. Watt[3]) wieder aufgenommen wurden, Werte von der gleichen Größenordnung wie sie Marx erhalten hatte. In keinem Fall aber wurde hier eine direkte Messung der Trägergeschwindigkeiten vorgenommen wie bei Moreau, wobei unter direkter Messung diejenige eines verzögernden oder beschleunigenden Gasstroms gegen ein verzögerndes oder beschleunigendes Feld zu verstehen ist.

Lediglich Wilckens[4]) hatte es unternommen, die Methode Moreaus, die eine direkte Methode in diesem Sinne ist, auf ihre Stichhaltigkeit zu prüfen; und es erregte seinerzeit großes Aufsehen, als Wilckens zu dem Resultat kam, daß der Moreauschen Methode keine Berechtigung zukäme, weil die aufsteigenden Flammengase die Trägerbewegung überhaupt nicht beeinflussen. Der Beweis wurde darin gesehen, daß die Änderung der Höhenstellung der Auffangelektrode relativ zur beschleunigenden Kathode bei gleichem Feld keine Änderung in der Zahl der ankommenden Träger bewirkte, während doch offenbar bei tieferstehender Elektrode sehr viel weniger ankommen als bei gegenüberstehender, wenn überhaupt die Vertikalgeschwindigkeit der Träger im Gasstrom gegen die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit im elektrischen Felde nicht vollkommen zu vernachlässigen ist. Wilckens kam direkt zu dem Resultat, daß man höchstens einen unteren Wert der Geschwindigkeit aus Moreaus und seinen — wie er annahm — verfeinerten Messungen entnehmen könnte. Ein absoluter Wert sei aber überhaupt nicht bestimmbar. Die untere Grenze, die Wilckens angibt, betrug etwa 12000 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}} / \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$. Dieses Ergebnis würde, wenn es richtig wäre, für alle Flammentheorien von größter Bedeutung sein, da ja die gemessene Beweglichkeit eine der Grundzahlen ist, von denen alle übrigen Schlüsse im wesentlichen ausgehen.

Nun hat schon der eine von uns[5]) eine Ansicht

1) Vorgetragen in der Sitzung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutsch. Physik. Gesellsch. am 7. Januar in Halle.

1) E. Marx, Ann. d. Phys. **4**, Bd. 2, S. 798, 1900; Handbuch d. Radiologie IV 3, S. 611, 1927.
2) G. Moreau, Ann. de Chim. et Phys. VII, Bd. 30, Sept. 1903.
3) H. A. Watt, Phys. Rev. II 25, 73, 1925; ferner Marx, Handb. d. Radiologie IV, 3; S. 623.
4) E. Wilckens, Dissertation, Heidelberg 1914; gedruckt 1916 bei Berkenbusch.
5) E. Marx, Ann. d. Phys. **76**, 748, 1925.

geäußert, worauf die Diskrepanz der Ergebnisse zwischen den Herren Wilckens und Moreau beruhe und hat auf Grund der vorliegenden Kurven von Wilckens die Behauptung ausgesprochen, daß die Auswertung bei der Integration des Potentialverlaufs des Feldes bei Wilckens nicht richtig gehandhabt wäre.

Der Zweck einer ausführlichen experimentellen Untersuchung war es, die Beweglichkeitsfrage klar zu stellen. Dies soll im folgenden geschehen; und es sei vornweg bemerkt, daß sie im wesentlichen zu dem Resultat geführt hat, daß die Beweglichkeit der negativen Träger von der Größe ist, wie sie von Marx und Moreau bereits vor etwa 25 Jahren erhalten wurde, und wie sie neuerdings auch in den Halleffekt-Messungen von Wilson und seinen Schülern sich ergeben hat.

Durch direkte Messung wurde die Verschiebung[1] ($\overline{K_2}$) der negativen Teilchen in Flammen festgestellt und zugleich die Abhängigkeit der Verschiebung von der Metallsalzkonzentration (Q) in der Alkalisalzflamme und von der Art des Salzes bestimmt. Hierzu mußte durch graphische Auswertung des Potentialgefälles in der Meßflamme (M) — Fig. 1 — die Größe $\int_0^b \frac{dx}{X_x}$ gefunden werden, wobei zu beachten ist, daß das Potentialgefälle X_x sich zwischen den Elektroden an einer Stelle umkehrt (vgl. Fig. 5). Die vertikal gerichtete Geschwindigkeit (v) der Flammengase wurde ähnlich wie von da Andrade[2]) stroboskopisch aus der im rotierenden Spiegel beobachteten Neigung der Kohlestaubbahnen berechnet. v betrug im Mittel 200 cm/sec. Ist h die Höhe der Empfangselektrode, b ihr Abstand von dem aus der Potentialgefällekurve feststellbaren Orte der Feldumkehr und X_x das Feld an der Stelle x, so ist $\overline{K_2} = \frac{v}{h} \cdot \int_0^b \frac{dx}{X_x}$. Da im Felde Null die Geschwindigkeit des Trägers Null wird, wäre es ein fundamentaler Fehler, das Integral weiter als bis zu der Stelle des Feldes zwischen den Elektroden zu erstrecken, an der die Feldstärke den Wert Null erreicht. Wir werden diese Stelle als Ort der Feldumkehr bezeichnen.

Die Apparatur (Fig. 1).

Zwei Messingbrenner von quadratischem Querschnitt (4 × 4 cm) trugen oben je einen Satz feiner Quarzröhrchen zur Isolierung des Flammenkörpers gegen den Brenner. In den Brenner wurde Leuchtgas und die zerstäubte Alkalisalzlösung bzw. zerstäubtes destilliertes Wasser und Preßluft eingeführt. Drei Platinelektroden gleicher Größe (1,6 cm breit, 2,2 cm hoch) waren isoliert befestigt: Anode, Gitterelektrode und Schutzringkathode. Die Anode konnte durch ein mit Skala und Nonius versehenes Getriebe vertikal verschoben werden. Die durch eine unendliche Schraube horizontal verschiebbare Platindrahtsonde von 0,3 mm Durchmesser war

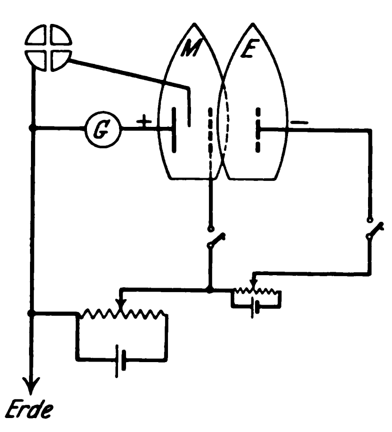


Fig. 1.

mit dem einen Quadrantenpaar eines Quadrantenelektrometers verbunden, die Anode über ein empfindliches Spiegelgalvanometer geerdet. Gitterelektrode und Schutzringkathode hatten eine geringe Potentialdifferenz. Die Schutzringkathode befand sich in der Erzeugerflamme (E), die Meßflamme (M) enthielt die Anode und die Sonde. An der Grenze zwischen beiden Flammen stand die Gitterelektrode.

Die Regelung des zum Zerstäuben nötigen Luftdrucks erfolgte durch zwei mit etwas destilliertem Wasser versehene und durch eine Kapillare von 20 cm Länge verbundene 50-Liter-flaschen. Durch Einschaltung eines Wassermanometers wurde die Konstanz des Druckes genau kontrolliert. Die Druckluft wurde drei Guyschen Zerstäubern zugeführt. Zwei Zerstäuber — einer mit Salzlösung, der andere mit destilliertem Wasser — konnten durch Umschaltung mit dem die Erzeugerflamme liefernden Brenner verbunden werden, während der dritte — mit destilliertem Wasser gefüllte — Zerstäuber dauernd mit dem zweiten Brenner in Verbindung stand. Dieser zweite Brenner lieferte die Meßflamme (M).

Zur Erzielung einer stundenlang völlig konstant brennenden Flamme wurde das Leuchtgas durch eine Turbine aus der Leitung gesaugt und durch eine zur Druckregulierung eingeschaltete

1) Unter „Verschiebung" wird die Größe $\beta K_2 = \overline{K_2}$ bezeichnet, wenn β die „Ladungszahl", K_2 die Beweglichkeit ist. (Vgl. Marx, Handbuch, II. Aufl. IV 3, 557.)

2) da Andrade, Ann. d. Phys. **4**, Bd. 37, S. 380ff., 1911.

große Flasche sowie einen sehr empfindlichen Apparat zur Kontrollierung der Konstanz des Gasdrucks in die Brenner gepreßt. Kurz vor den Brennern ging der Gasstrom durch ein weites Glasgefäß, auf dessem Boden feinster Holzkohlestaub lag. Durch Klopfen entstand im Gefäß eine Kohlestaubwolke, die vom Gas in die Flammen gebracht wurde. Durch diese Einrichtung wurde eine Änderung der Flammengasgeschwindigkeit beim Einbringen des Kohlestaubs vermieden.

Der blaue Konus der Flamme wurde durch Regulierung der Gaszufuhr sehr niedrig und zwar in beiden Flammen gleich hoch gehalten. Die Brenneranordnung und die Verbindung der Sonde mit dem Quadrantenelektrometer waren sorgfältig elektrostatisch geschützt.

Gang der Messung.

A. Messung der Konzentration.

Die Konzentration der Alkalimetallatome in der Erzeugerflamme wurde für jeden einzelnen Versuch nach einer schon früher angewendeten Methode bestimmt. Die in der Zeiteinheit zerstäubte Menge und das spezifische Gewicht der Lösung ergeben das Volumen der verbrauchten Lösung. Da das Gewicht des in 1 l Lösung enthaltenen Alkalimetalls bekannt ist, ergibt sich das Gewicht aller in der Zeiteinheit in die Erzeugerflamme zerstäubten Metallatome. Diese Größe, das Atomgewicht des Metalls, sowie die Messung des Flammenvolumens ermöglichen die Berechnung der Zahl der Alkalimetallatome/cm^3.

Je nach der benutzten Lösung und den von Versuch zu Versuch um einen Mittelwert schwankenden Drucken ergaben sich Konzentrationswerte zwischen $0{,}1 \cdot 10^{13}$ bis $10 \cdot 10^{13}$ Atome/cm^3.

B. Bestimmung des E_0-Wertes.

G. Moreau[1]) — auf dessen 1903 ausgeführten Versuchen die Wilckenssche Methode beruht, legt die E-I-Charakteristik fest und bestimmt durch Extrapolation des mittleren linearen Anstiegs dieser Kurve diejenige Elektrodenspannung E_0, bei welcher der Strom I verschwindet. Dann ergibt sich für konstantes Feld $\overline{K_2} = \frac{bvL}{hE_0}$, wenn L der Abstand zwischen den äußeren Elektroden, h die Höhe der Anode und b die Strecke zwischen Anode und Berührungsfläche beider Flammen ist.

Ist aber das Feld variabel, so muß $\overline{K_2}$ für das variable Feld bei der Spannung E_0 bestimmt werden durch Auswerten des Integrals $\int_0^b \frac{dx}{X_x}$, und es wird $\overline{K_2} = \frac{v}{h}\int_0^b \frac{dx}{X_x}$.[2])

1) G. Moreau, loc. cit.

Zur Eliminierung des Einflusses der reinen Flamme auf den Verlauf der Stromspannungskurve kamen zwei Methoden zur Anwendung.

1. Es wurde die E-I-Kurve erst für die reine Flamme und dann bei Salzzufuhr in die Erzeugerflamme bestimmt. Für jede Elektrodenspannung war $I_{\text{Salzfl.}} > I_{\text{Reine Fl.}}$. Durch Subtraktion ließ sich derjenige I-Wert berechnen, der lediglich durch das Vorhandensein des Salzdampfes in der Erzeugerflamme verursacht wird; es ist also $I = I_{\text{Salzfl.}} - I_{\text{Reine Fl.}}$.

Die neue Methode berücksichtigt die Tatsache, daß der Strom in der reinen Flamme für die anzubringende Korrektion unter dem Gradienten der Salzflamme steht, daß also der Strom eine Funktion des in der Flamme vorhandenen Feldminimums ist. Man muß — genau wie bei der ersten Methode — $I_{\text{Salzfl.}}$ und $I_{\text{Reine Fl.}}$ für jede angelegte Spannung messen, aber zugleich durch Aufnahme der Potentialgefällekurven für jede Spannung bei reiner Flamme und bei Salzzerstäubung die Feldminima bestimmen und dann die gleichen Feldminima entsprechender Stromwerte abziehen.

Es genügt in praxi das zwischen zwei dauernd festgehaltenen Orten der Meßflamme herrschende Potentialgefälle zu messen und dann die gleichem Potentialgefälle entsprechenden I-Werte zu subtrahieren.

Beide Methoden lieferten — wie auch das folgende Beispiel zeigt — denselben E_0-Wert. Gelegentliche Abweichungen überschritten nie $^1/_{10}$ Volt.

Beispiel: $\frac{n}{100} - \left(\frac{1}{2} Rb_2SO_4\right)$.

C. Feststellung des Potentialgefälles und des Wertes $\int_0^b \frac{dx}{X_x}$.

Zur Bestimmung des Potentialgefälles in der Meßflamme wurde die Platinsonde von der Anode aus millimeterweise bis zur Gitterelektrode geführt und unter Berücksichtigung der bei so schwachen Feldern notwendigen Kautelen das Potentialgefälle gemessen. — Erstreckt man, wie allein zulässig[1]), das Integral $\int_0^b \frac{dx}{X_x}$ auf die zwischen

1) Vgl. Marx, Handb. II. Aufl., IV, 3, 477.
2) E. Marx, Ann. d. Phys. 76, 746ff. 1925.

Tabelle I.

Elektrodenspannung E (Volt)	Stromstärke I (in Skt.) a) bei Salzzerstäubung ($I_{Salzfl.}$) in die Erzeugerflamme	b) bei Wasserzerstäubung ($I_{Reine\ Fl.}$)	($I = I_{Salzfl.} - I_{Reine\ Fl.}$) bei Abzug der gleichen Spannungen entsprechenden I-Werte (Fig. 2).
0,1	1	1	0 (Skt.)
0,2	2	2	0
0,3	3	2,5	0,5
0,4	4	2,5	1,5
0,5	5	3,5	1,5
0,6	6	4	2
0,7	8	5	3
0,8	11	6	5
0,9	15	7	8
1,0	20,5	7,5	13
1,1	26	8	18
1,2	30,5	9	21,5
1,3		9,5	
1,4		10	$E_0 = 0{,}75$ Volt.
1,6		10,5	
1,8		11	
2,0		12	
2,2		12,5	

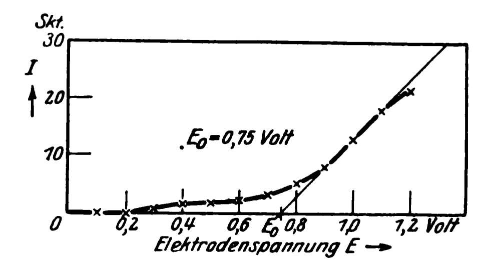


Fig. 2.

Tabelle II.

Elektrodenspannung E (Volt)	Elektrometerausschläge (Skt.) a) bei der Salzfl. (Fig. 3)	b) bei reiner Fl.	Die gleichem Gefälle entsprechenden Elektrod. Spannungen E (Volt) $E_{Salzfl.}$	$E_{Reine\ Fl.}$	Stromstärken I (Skt.) $I_{Salzfl.}$	$I_{Reine\ Fl.}$	$I = I_{Salzfl.} - I_{Reine\ Fl.}$ bei Abzug der gleichem Gefälle entsprechenden I-Werte Fig. 4
0,1	12	12	0,1	0,1	1	1	0 Skt.
0,2	16	16	0,2	0,2	2	2	0
0,3	18,5	18,5	0,3	0,3	3	2,5	0,5
0,4	21	20	0,4	0,45	4	3	1,0
0,5	24	22	0,5	0,6	5	4	1,0
0,6	25,5	24	0,6	0,65	6	4,5	1,5
0,7	28,5	27	0,7	0,75	8	5,5	2,5
0,8	32	30	0,8	0,9	11	7	4,0
0,9	35,5	32	0,9	1,1	15	8	7,0
1,0	38	34	1,0	1,3	20,5	9,5	11,0
1,1	42	35,5	1,1	1,8	26	11	15,0
1,2	46	37	1,2	2,2	30,5	12,5	18,0
1,3		38					
1,4		39,5					$E_0 = 0{,}74$ Volt
1,6		41					
1,8		42					
2,0		44					
2,2		46					

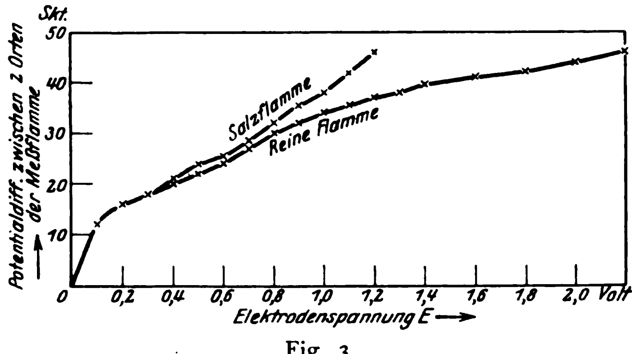


Fig. 3.

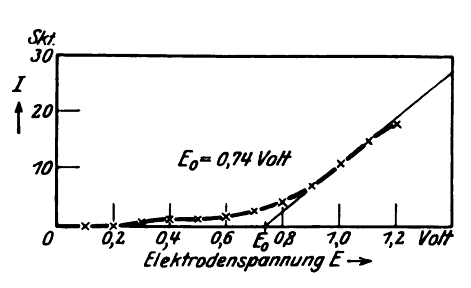


Fig. 4.

Tabelle III.

Abstand der Sonde v. d. Anode (cm)	Elektrometer-Ausschlag (Skt.)	Ausschlag entspr. einem V (in Volt) von	Feldstärke X (Volt/cm)	$\frac{1}{X}$
0,1	30	0,250	2,50	0,400
0,2	32	0,266	0,16	6,25
0,3	33	0,274	0,08	12,5
0,4	34	0,282	0,08	12,5
0,5	34,5	0,286	0,04	25,0
0,6	35	0,290	0,04	25,0

Auffangelektrode und Feldumkehr liegende Strecke, so wertet man den Einfluß des nichtlinearen Feldes auf die Verschiebung K_2 richtig aus. Tabelle III und die Fig. 5 und 6 zeigen eine solche einwandfrei durchgeführte Messung.

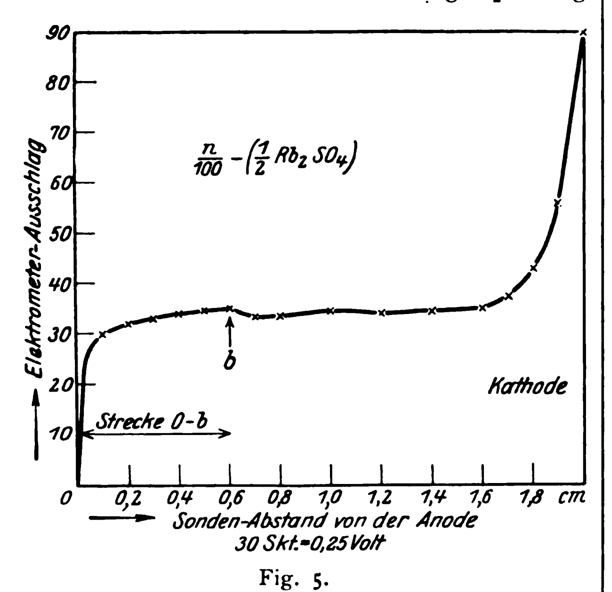


Fig. 5.

Lösung: $\frac{n}{100} - \left(\frac{1}{2} Rb_2 SO_4\right)$.

Konzentration:

$$Q = 0{,}12 \cdot 10^{13}\ Rb\text{-Atome/cm}^3.$$

$v = 193{,}4$ cm/sec; $h = 2{,}2$ cm; $E_0 = 0{,}75$ Volt.

Abstände:

1. Anode → Gitterelektrode 2,0 cm
2. Gitterelektrode → Schutzringkathode 2,8 cm.

Der Ort der Feldumkehr befindet sich an der Stelle b der Potentialgefällekurve. X ist das Feld,

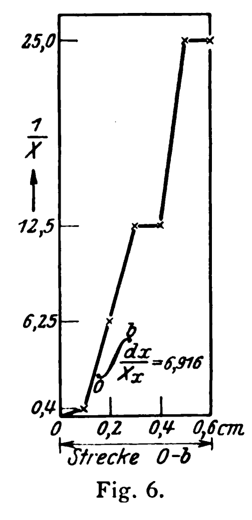


Fig. 6.

gemessen in Richtung senkrecht zu den Elektroden, X_x ist die Feldstärke in der Entfernung x cm von der Anode, h die Höhe der Anode. — Die Auswertung ergibt

$$\int_0^b \frac{dx}{X x} = 6{,}916 \text{ und } \overline{K_2} = \frac{v}{h} \cdot \int_0^b \frac{dx}{X x}$$

$$= 608 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \Big/ \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}.$$

Tabelle IV.

$\sqrt{\frac{1}{\text{Konz.}}}$	$\sqrt{\frac{1}{n}}$	$\sqrt{\frac{1}{n/2}}$	$\sqrt{\frac{1}{n/5}}$ [1])	$\sqrt{\frac{1}{n/10}}$	$\sqrt{\frac{1}{n/20}}$ [1])	$\sqrt{\frac{1}{n/50}}$	$\sqrt{\frac{1}{n/100}}$
$\bar{K}_2$ beob.	500	530	550	560	572	595	620
$\bar{K}_2$ berechn.			550,1	558,6	570,23	593	620

1) Diese Werte ergaben sich durch Interpolation der experimentell festgelegten Kurven der Fig. 7.

Ergebnisse der Untersuchung.

Bei Zerstäubung verschiedener Alkalisalzlösungen in die Erzeugerflamme ergibt sich als Abhängigkeit der Verschiebung von der Konzentration ein allmähliches Anwachsen der Verschiebung, wenn die Konzentration abnimmt (Fig. 7). Wie Fig. 8 zeigt, ist für schwache Kon-

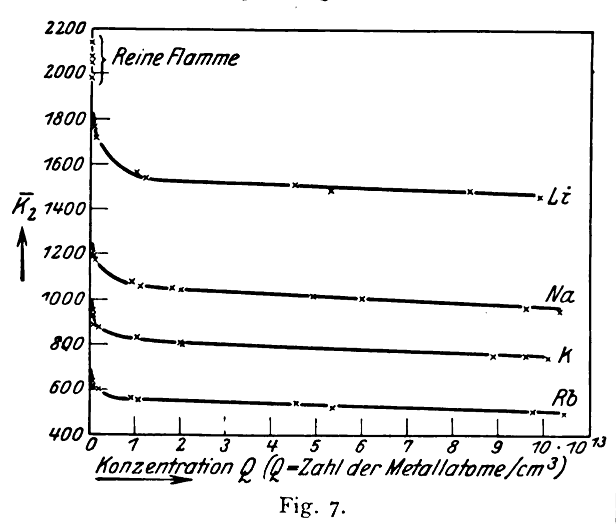


Fig. 7.

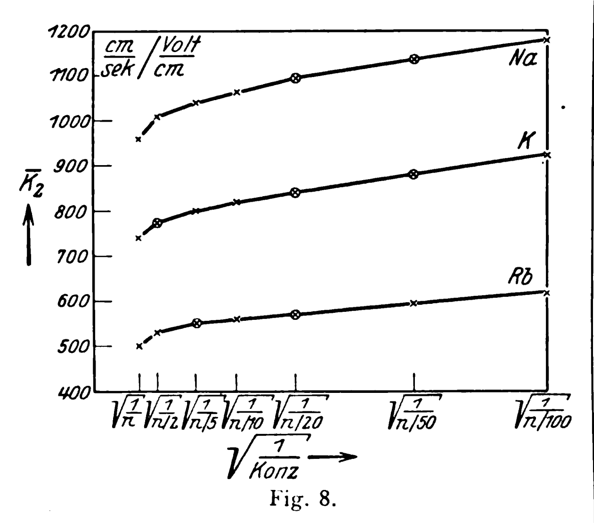


Fig. 8.

zentrationen die Abhängigkeit der Verschiebung von der Konzentration darstellbar durch die Beziehung $\bar{K}_2 \sim \sqrt{\frac{1}{Konz.}} + \text{const.}$ Für die Abhängigkeit der Verschiebung von der Konzentration ergab sich z. B. bei Zerstäubung von Rb_2SO_4-Lösung die Tabelle IV.

In der letzten Spalte ist gezeigt, daß die beobachteten $\bar{K}_2$ sich für schwache Konzentrationen von $\frac{n}{5}$ an nach der Formel $\bar{K}_2 = \frac{9}{\sqrt{n}} + 530$ berechnen lassen. — Diese Abhängigkeit ergibt sich nicht ohne weiteres aus der Marxschen Verschiebungsformel.

Ist nämlich $\bar{K}_2 = \beta K_2$, wo $K_2 = \frac{\beta_0 K_0 + \beta_M K_M}{\beta}$ die mittlere Beweglichkeit des negativen Trägers ohne Umladung bedeutet, also die Beweglichkeit, welche sich aus der Beweglichkeit der freien Elektronen und der Geschwindigkeit der durch Anhängung belasteten Elektronen zusammensetzt (β_0 ist der Bruchteil der Zeit der Existenz als freies Elektron, β_M der Bruchteil der Zeit der Existenz als Gasion), so wird (wenn β klein gegen 1 ist) $\beta = \sqrt{\frac{a}{\alpha n q}}$, wo $\frac{a}{\alpha}$ (der Quotient der Reaktionskonstante in die Rekombinationskonstante) nahe unabhängig vom Atomgewicht A und $q \sim A$ ist.

Als Abhängigkeit der Verschiebung von der Konzentration würde sich nur dann $\bar{K}_2 \sim \sqrt{\frac{1}{n}}$ ergeben, wenn K_2 und q unabhängig von der Konzentration wären. Aus der Marxschen Theorie läßt sich aber zeigen, daß $K_2 \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ und $q \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist. Es ergibt sich demnach aus der Formel für β noch nicht die beobachtete Abhängigkeit des $\bar{K}_2$ von der Konzentration. Man erhält diese erst quantitativ, wenn man im Ansatz formelmäßig berücksichtigt, daß die negative Verschiebung in der reinen Flamme wesentlich größer als die in der Alkaliflamme ist, also bei unendlicher Verdünnung in diese übergeht. Eine direkt experimentelle Elimination des Einflusses der reinen Flamme durch die Verschiebungsmessung selbst ist nicht möglich, da die reine Flamme die Trägerin der Alkaliflamme ist.

Tabelle V.

Konzentration		n	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{5}$	$\frac{n}{10}$	$\frac{n}{100}$
K_2	*Rb*	500	530	—	560	620
	K	740	—	800	820	925
	Na	960	1008	1040	1065	1180
	Li	1470	1495	—	1550	1715
$K_2 \cdot \sqrt{\text{Atomgew.}}$	*Rb*	4622	4899	—	5177	5731
	K	4627	—	5002	5128	5784
	Na	4604	4834	4988	5108	5659
	Li	3872	3938	—	4083	4517

Wir werden an anderer Stelle zeigen, daß aus den vorliegenden Beobachtungen bei gleichzeitiger Gültigkeit des Arrheniusschen Gesetzes $\lambda \sim \sqrt{n}$ (λ die Leitfähigkeit, n die Normalität der zerstäubten Lösung) streng folgt, daß die mittlere Beweglichkeit K_2 mit zunehmender Konzentration am Alkalimetall zunimmt. Diese Zunahme ist in der Formel $K_2 = \frac{\beta_0 K_0 + \beta_M K_M}{\beta}$ dadurch bedingt, daß β_0 relativ zum β_M zunimmt.

Dies bedeutet physikalisch: Anhängungen an neutrale *Na*-Atome oder auch Rekombinationen mit einem Alkali-Ion haben eine viel kürzere Verweilzeit als Anhängungen an Gasatome. Da nach der Auflösung der Rekombination oder Anhängung das Elektron wieder frei wandert, kommt hierdurch eine Vergrößerung der Beweglichkeit K_2 heraus, die, in Übereinstimmung mit der Marxschen Theorie, wie wir zeigen werden, mit der Wurzel aus dem Dissoziationsgrad des Salzes [bei Marx, S. 655, mit y bezeichnet] zunimmt.

Aus den Messungen bei Zerstäubung der Salze der Alkalimetalle *Rb*, *K*, *Na* und *Li* ergab sich folgende Tabelle.

Es zeigt sich, wie der untere Teil der Tabelle V erweist, die aus der Marxschen Formel sich ergebende Beziehung $\overline{K_2} \sqrt{\text{Atomgew.}} \sim \text{const.}$ Nur die für *Li* erhaltenen Werte sind kleiner, als nach dem Quadratwurzelgesetz zu erwarten ist.

Diese Abweichung ergab sich bereits bei früheren Messungen nach der Halleffekt-Methode[1]). *Li* ist ja bekanntlich auch bei sehr vielen anderen physikalischen Messungen etwas aus der Reihe der Alkalimetalle herausfallend.

Abgesehen von dieser einen Abweichung stehen also — wie Fig. 8 und Tabelle V dartun — die erhaltenen Verschiebungswerte mit der Theorie im Einklang[2])

1) E. Marx, Ann. d. Phys. IV, Bd. **2**, S. 831, 1900.
2) E. Marx, Ann. d. Phys. IV, Bd. **76**, 1925, S. 751, Formel 7 u. S. 756, Formel 14. Außerdem Marx, Handb. d. Radiol. IV, **3**, S. 640ff.

Die Abhängigkeit der Zahl der ankommenden negativen Träger von der Höhe der Auffangelektrode.

Wilckens[1]) kam auf Grund seiner Versuche zu dem Ergebnis, daß bei vertikaler Verschiebung der Auffangelektrode nach oben und unten relativ zur feststehenden Blende ein symmetrischer Stromabfall und bei genauer Gegenüberstellung ein Strommaximum auftritt. Er schloß daraus, daß durch die vertikal gerichtete Geschwindigkeit des Flammengases die Trägerbahnen nicht beeinflußt werden. Hieraus ergab sich dann notwendig der Schluß, daß die Moreausche Methode zu keinen zutreffenden Meßergebnissen führen könne. — Bedenken gegen die experimentellen Grundlagen dieses Resultats wurden bereits von einem von uns in den Annalen 50 loc. cit. geäußert.

Zur experimentellen Prüfung der Frage nach der Zahl der ankommenden Träger von der Höhe der Auffangelektrode diente die in Fig. 9 dar-

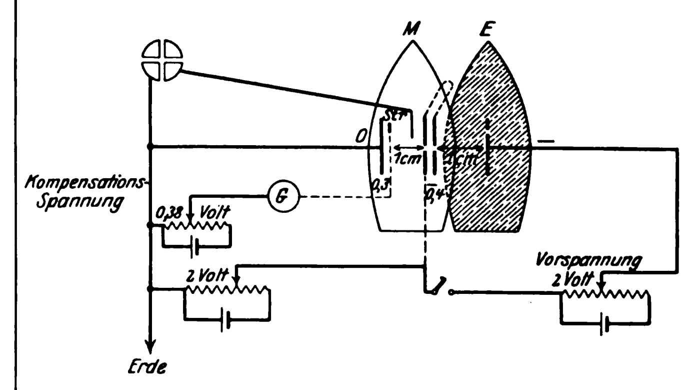


Fig. 9.

gestellte Anordnung. — Die Auffangelektrode wurde auf den unteren Anodenrand eingestellt und die Kompensationsspannung solange geändert, bis das Galvanometer keinen Ausschlag mehr zeigte. Bei Hebung des Auffangstreifens traten alsdann schwache Ausschläge in Ab-

1) E. Wilckens, Heidelberger Diss. 1914, S. 48ff.

hängigkeit von der Höhe auf, die in der unteren Kurve, Fig. 10, dargestellt sind. Nach Einschaltung der Trägerquelle — Zerstäubung von *NaCl*-Lösung oder Einführung einer isoliert angebrachten *CaO*-Elektrode in die Erzeugerflamme — ergaben sich bei Hebung des Auffangstreifens größere Galvanometerausschläge, die durch die obere Kurve der Fig. 11 wiedergegeben werden. Durch Subtraktion der gleichen Höhenstellungen entsprechenden Ausschläge erhält man den wirklichen Einfluß der Höhenstellung auf die Stromstärke, d. h. auf die Zahl der ankommenden Träger.

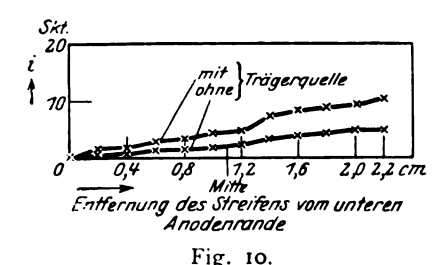


Fig. 10.

Zur Sicherung gegen Diffusion waren zwei Blenden auf gleichem Potential mit je einem 2 mm breiten Schlitz vor der Trägerquelle angebracht.

Die Zahlen in Fig. 9 beziehen sich auf einen in folgendem beschriebenen Versuch mit $\frac{n}{100}$ — *NaCl*-Lösung. — Das hierbei aus der Potentialgefällekurve (Fig. 11) errechnete $\int_0^b \frac{dx}{X_x}$ betrug 4,705, v war 225 cm/sec. Benutzt man den aus

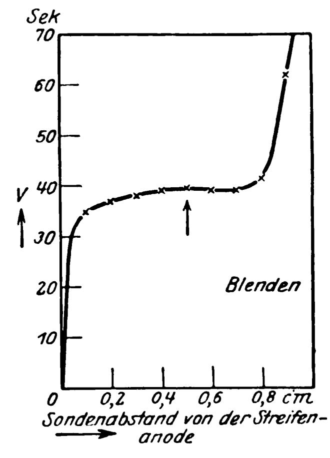


Fig. 11.

den Verschiebungsmessungen für $\frac{n}{100}$ — *NaCl* sich ergebenden Wert $K_2 = 1180$, so findet man

$$h = \frac{v}{K_2} \cdot \int_0^b \frac{dx}{X_x} = 0{,}9 \text{ cm}$$ als diejenige Tiefe,

von der aus das horizontale Feld die Träger zur Auffangelektrode treibt. Nun zeigt aber die bei diesem Versuch aufgenommene Kurve der Stromabhängigkeit von der Höhenstellung des Auffangstreifens (Fig. 12) einen Anstieg bei einer Höhe

Fig. 12.

von 0,2 cm über der Mittellage. Das läßt nur den einen Schluß zu, daß die ankommenden Träger von einer Stelle der Meßflamme sich schräg aufwärts zum Auffangstreifen bewegen, die 0,7 cm tiefer liegt als der Schlitz beider Blenden.

Eine Betrachtung derjenigen Kräfte, welche den Verlauf des durch die Blendenschlitze in die Meßflamme eintretenden negativen Trägerstrahls bestimmen, möge diese Tatsache erklären.

Drei Kräfte beeinflussen den Verlauf des Trägerstrahls:

1. Die an der Blende sehr große Feldstärke treibt die Träger nach der Anode, aber am Ende des Kathodenfalls hört dieser Einfluß auf.

2. Die von der Geschwindigkeit der vertikal nach oben bewegten Gasteilchen hervorgerufene Auftriebskraft ist zwar an der Blende selbst gleich 0, erreicht aber bereits in einiger Entfernung ihren maximalen Wert. Diese Auftriebskraft treibt vor allem die auf der Oberseite des Trägerstrahls befindlichen Teilchen aus dem Bereiche des Feldes heraus.

3. Die Diffusion ist am stärksten in der Nähe der Blende. Sie transportiert einen relativ großen Teil der auf der Unterseite des Strahles vorhandenen Träger entgegen der Richtung der Flammengeschwindigkeit schräg nach unten.

So gelangen eine große Anzahl negativer Träger in eine deutlich meßbare Tiefe unter das Mittelniveau. — Wie wir in einer späteren Mitteilung zeigen werden, befindet sich aber, von der Anode aus gerechnet, fast unmittelbar hinter der Stelle der Feldumkehr eine etwa 1 mm breite Zone positiver Raumladungen, die beiderseits von einer negativen Grenzschicht eingehüllt ist. Aus Messung und Rechnung unter Berücksichtigung der von Ort zu Ort verschieden großen effektiven Trägergeschwindigkeit $K_2 \cdot X_x$ ergibt sich, daß diejenigen Träger, die tatsächlich den Auffang-



streifen erreichen, vom unteren Teile der der Anode zugekehrten negativen Grenzschicht ausgehen. Die wirkliche Bahn dieser Träger ist

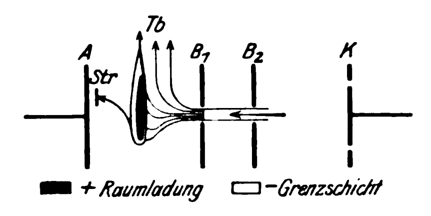


Fig. 13.

■	+ Raumladung	B_1	1. Spaltblende
□	— Grenzschicht	B_2	2. „
A	Anode	K	Kathode
Str	Auffangstreifen	Tb	Trägerbahn

ebenfalls berechenbar und wird durch Fig. 13 dargestellt.

Zu gleichen Ergebnissen führten — wie das in Fig. 14 und 15 angegebene Beispiel zeigt —

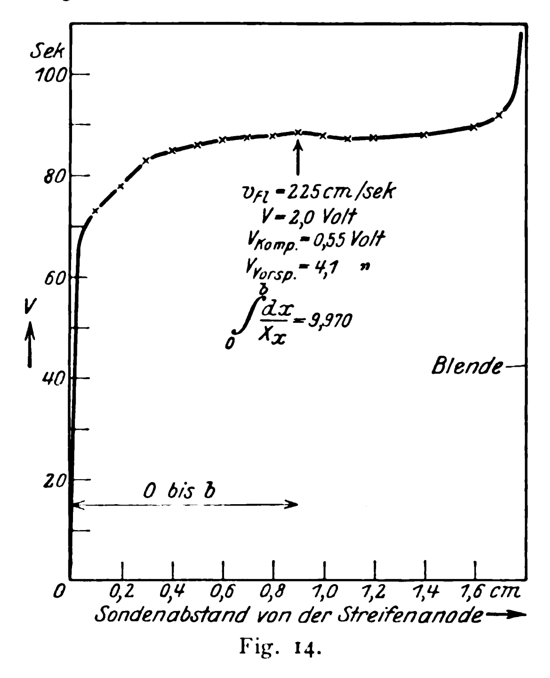


Fig. 14.

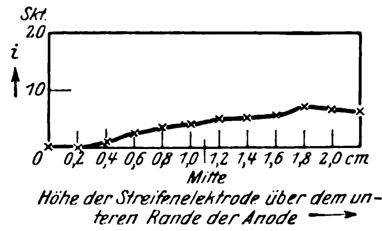


Fig. 15.

Versuche, bei denen als Trägerquelle nicht eine Salzflamme diente, sondern eine in der reinen Erzeugerflamme und zwar unmittelbar hinter dem zweiten Spalt angebrachte schmale CaO-Elektrode.

Fig. 14 stellt den von der Auffangelektrode aus gemessenen Potentialverlauf, Fig. 15 die Abhängigkeit des Stromes von der Höhenstellung des Auffangstreifens dar.

Es ergab sich $\int_0^b \frac{dx}{X_x} = 9{,}970$; da aber für die reine Flamme $K_2 \sim 2000$ ist, ergibt sich

$$h = \frac{v}{K_2} \cdot \int_0^b \frac{dx}{X_x} = 1{,}12 \text{ cm.}$$

Die Stromkurve weist 0,7 cm über der Mittellage (vgl. Fig. 15) einen deutlichen Anstieg, ja ein Maximum auf; folglich kamen hier bei der Oxydelektrode, die Träger von einer Stelle, die 4,2 mm unterhalb des Spaltniveaus liegt.

Die erhaltenen Werte sind theoretisch in Anbetracht des Schemas der Fig. 13 durchaus plausibel. Für Annahme von Trägergeschwindigkeiten, die zehnmal so groß sind, ist kein Grund mehr vorhanden.

Wir werden in einer folgenden Arbeit zeigen, daß das nunmehr ausführlich ergänzte experimentelle Material die Abhängigkeit der Flammenparameter von der Konzentration völlig übersehen läßt. Die Theorie führt hier zu einer Reihe einfacher Beziehungen, die sich weitgehendst experimentell erfüllt erweisen.

Auf das Zustandekommen der Feldumkehr und der positiven Raumladung nach der Kathode zu soll in einer besonderen Mitteilung eingegangen werden.

1) E. Marx, Ann. IV, **76**, S. 749, 1925.

Leipzig, Febr. 1928. Radiolog. Abt. des Physik. Instituts.

(Eingegangen 3. März 1928.)

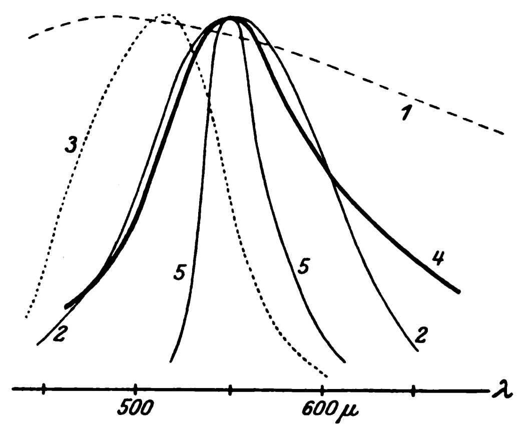
Über die Ursachen, welche die Lichtempfindlichkeit des Auges als Funktion der Wellenlänge des Lichtes bestimmen.

Von G. I. Pokrowski.

Wie bekannt, weist die Lichtempfindlichkeit des normalen menschlichen Auges ein ausgesprochenes Maximum auf. Dieses Maximum fällt auf die Wellenlänge des Lichtes von etwa 550 $m\mu$ für die Fovea centralis[1]). Bei dieser

1) H. Bender, Ann. d. Phys. **45**, 105, 1914; Ives, Phys. Rev. **35**, 1913.

Lage des Maximums und bei der gegebenen Form der Lichtempfindlichkeitskurve wird die Sonnenstrahlung am besten durch das Auge ausgenutzt, wie es O. Lummer und H. Kohn gezeigt haben[1]). Es läßt sich sogar die Sonnentemperatur recht gut berechnen unter der Annahme, daß das Auge die Sonnenstrahlung am besten ausnutzt. Aber bei näherer Zusammenstellung der Energieverteilungskurve der Sonne im sichtbarem Spektralgebiet (Fig. 1, Kurve 1) mit der



1. Energieverteilung im Sonnenspektrum. 2. Empfindlichkeit der Fovea centralis. 3. Empfindlichkeit der Peripherie der Netzhaut. 4. Energieverteilung in dem von Laubblättern reflektierten Sonnenlichte. 5. Energieverteilung in dem von Photuris Pennsylvanica emittierten Lichte.

Lichtempfindlichkeitskurve des Auges (Fig. 1, Kurve 2) wird die Verschiedenheit dieser Kurven sehr bemerkbar[2]). Die Tatsache kann so gedeutet werden, daß hier auch noch andere Ursachen eine gewisse Rolle spielen. So z. B. wurde mehrmals die Vermutung ausgesprochen, daß das Auge zuerst sich im Wasser, oder wenigstens, in einer sehr wasserreichen Atmosphäre entwickelt habe, da eine Ähnlichkeit zwischen der Lichtempfindlichkeit des Auges und der Lichtdurchlässigkeit des Wassers existiert.

Es können auch andere Ursachen gefunden werden, deren Wirkung viel wahrscheinlicher als die des Wassers ist. Es muß betont werden, daß nicht die ganze Netzhaut des Auges dieselbe Lichtempfindlichkeit aufweist. Die Peripherie der Netzhaut hat das Maximum der Empfindlichkeit bei etwa 518 mμ, also näher zum Energiemaximum der Sonnenstrahlung, wie es die Kurve 3 in Fig. 1 zeigt. Somit müssen besondere Gründe vorliegen, welche die Verschiebung des Empfindlichkeitsmaximums der Fovea centralis in den roten Teil des Spektrums bedingen.

1) O. Lummer, Grundlagen, Ziele und Grenzen der Leuchttechnik, München 1918, S. 186.
2) Alle Kurven in relativem Maßstab.

Am einfachsten und wahrscheinlichsten ist dabei folgende Hypothese. Das Auge der Menschen und Tiere hat in erster Linie nicht mit dem direkten Sonnenlichte zu tun, sondern mit demjenigen, welches durch die umgebenden Gegenstände reflektiert wird. Weisen diese Gegenstände eine selektive Absorption auf, so wird die Energieverteilung im reflektierten Lichte eine andere als im einfallenden sein. Wird das Auge oft auf solche Gegenstände gerichtet, so muß die Farbe dieser Gegenstände besonders die Fovea beeinflussen.

Es kann vermutet werden, daß die öfters durch das Auge wahrgenommene Farbe die der Blätter und des Grases ist. In einer andern Arbeit habe ich eine größere Anzahl von Reflexionsspektren verschiedener Laubblätter zusammengestellt[1]). Wie in dieser Arbeit gezeigt ist, kann das Reflexionsvermögen R in allen untersuchten Fällen durch eine solche Formel ausgedrückt werden:

$$R = R_1 A + R_2.$$

Hier sind R_1 und R_2 Konstanten für alle Wellenlängen in jedem gegebenen Fall. Von Fall zu Fall können sie sich aber ändern. A ist dagegen die Größe, welche die Farbe der Blätter ausdrückt. Die Funktion

$$A = f(\lambda)$$

(λ — die Wellenlänge des Lichtes) ist eine und dieselbe für alle Fälle. Diese Funktion multipliziert mit der Energie der Sonnenstrahlung gibt annähernd die Energieverteilungskurve (Kurve 4 in Fig. 1) im reflektierten Lichte der Blätter (da R_2 in allen Fällen relativ klein bleibt).

Man sieht, daß die Analogie zwischen der Empfindlichkeitskurve der Fovea und der Kurve des reflektierten Lichtes der Blätter äußerst groß ist. Somit kann unsere Vermutung als bestätigt angesehen werden.

Zur weiteren Prüfung der hier aufgestellten Hypothese wäre es wichtig, die Empfindlichkeitskurve der Augen verschiedener Menschenrassen und verschiedener Tiere zu erhalten, um sie mit der Farbe der entsprechenden Umgebung zu vergleichen.

Im Fall der Feuerfliegen haben wir ein Mittel die Lichtempfindlichkeit der Insektenaugen auf indirektem Wege zu erhalten. Es kann angenommen werden, daß die Energieverteilung im Lichte, welches von den Feuerfliegen emittiert wird, der Lichtempfindlichkeit dieser Fliegen gut angepaßt ist. Die Kurve der Energieverteilung in dem von der Feuerfliege Photuris Pennsylvanica ausgesandtem Lichte[2]) weist (wie es die

1) Biochemische Zeitschr. **165**, 420, 1925.
2) W. W. Coblentz, Physik. Zeitschr. **12**, 917, 1911.



Kurve 5 in Fig. 1 zeigt) eine gute Übereinstimmung mit der Kurve 3 auf. Somit müssen hier ähnliche Ursachen eine Rolle spielen, wie im Falle von Menschenaugen.

Moskau, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, November 1927.

(Eingegangen 6. Februar 1928.)

Die elektrischen Momente und die räumliche Atomanordnung einiger Paraderivate von Benzol.

Von John Warren Williams[1]).

Bekanntlich erhält man auf Grund von Messungen der Dielektrizitätskonstante und der Dichte von verdünnten Lösungen polarer Substanzen in nicht polaren Flüssigkeiten die Möglichkeit, die Molekularpolarisation und damit das elektrische Moment des gelösten Moleküls zu bestimmen[2]). In manchen Fällen ist es evident, daß das Moment verursacht wird durch die Anwesenheit gewisser polarer Atomgruppen. Nachdem der Einfluß solcher Gruppen nach der Dipoltheorie darauf beruht, daß sie eine elektrische Dissymmetrie im Molekül schaffen, liegt der Versuch nahe, den Einfluß mehrerer solcher Gruppen im Molekül durch ein resultierendes Moment zu charakterisieren, das sich durch geometrische Addition aus den Momentenvektoren der Einzelgruppen zusammensetzt[3]). Speziell im Falle der Benzolderivate hat man bisher so verfahren, wobei die Momente der substituierten Gruppen durch Vektoren dargestellt wurden, die implicite in der Ebene des Benzolringes angenommen werden. So schließt man, daß Paraderivate mit zwei gleichen Substituenten so symmetrisch sein sollten, daß das elektrische Moment verschwindet. In einer früheren Publikation[4]) wurden Angaben über das dielektrische Verhalten von p-Xylol und p-Dinitrobenzol mitgeteilt, aus welchen in der Tat auf ein Moment geschlossen wurde, daß vom Nullwerte nicht mehr unterschieden werden konnte. Smyth und Morgan[5]) kamen zu einem ähnlichen Ergebnis für p-Dichlorbenzol. In dieser Weise schien die speziell von Thompson[6]) hervorgehobene Vermutung über das Verhalten von Paraderivaten bestätigt.

1) National Research Council Fellow.

2) P. Debye, Handbuch der Radiologie **6**, 597, 1925.

3) Thompson, Phil. Mag. (6) **46**, 497, 1923; Errera, Journ. de Phys. (7) **6**, 390, 1925; Höjendahl, Nature **117**, 892, 1926; Smyth and Morgan, Journ. Amer. Chem. Soc. **49**, 1030, 1927.

4) Williams, Physik. Zeitschr. **29**, 174, 1928.

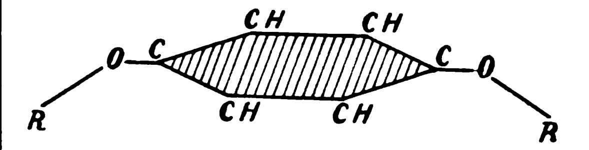
5) Smyth and Morgan, loc. cit.

6) Thompson, loc. cit.

Einige in letzter Zeit ausgeführte, vorläufige Messungen an Lösungen von Hydrochinondiäthyläther und Hydrochinondiacetat zeigen indessen, daß zwei gleiche Gruppen in Parastellung nicht notwendig zu einem Gesamtmomente Null führen müssen. Beide Molekeln haben eine relativ beträchtliche Polarität[1]).

In der folgenden Tabelle sind die Meßresultate für diese beiden Substanzen, sowie für die drei eingangs genannten Moleküle zusammengestellt.

Die erhaltenen Resultate legen es nahe, an eine gegenseitige Beeinflussung der beiden am Benzolring befestigten Gruppen zu denken, viel-



leicht im Sinne des obenstehenden Diagramms in dem die beiden OR-Gruppen aus der Ebene des Ringes hinausgedreht erscheinen.

Eine andere Möglichkeit wäre in diesem Verhalten eine Analogie mit Äthyläther zu sehen, in dem höchstwahrscheinlich die bei den C_2H_5-Gruppen nicht mit dem O-Atom in einer Linie liegen.

Die Resultate scheinen auch von Interesse im Zusammenhang mit den neulich von Ebert und v. Hartel[2]) mitgeteilten Messungen an Substanzen von Typus $C\alpha_4$. Gewisse von diesen Substanzen, wie CH_4, CCl_4, $C(CH_2Cl)_4$, sowie $C(NO_2)_4$ und $C(CH_2Br)_4$ (letztere beide nach bisher unveröffentlichten eigenen Versuchen[3]) haben keinen Dipolcharakter. Andere dagegen, wie $C(OCH_3)_4$, $C(OC_2H_5)_4$ und $C(CH_2O_2C\,CH_3)_4$ haben endliche Momente. Bekanntlich werden diese Ergebnisse nach Weißenberg gedeutet durch die Annahme, daß die Valenzen des C-Atoms nicht nur nach den Ecken eines Tetraeders, sondern auch nach den Ecken einer tetragonalen Pyramide gerichtet sein können, wobei das C-Atom in der Spitze gelegen ist. Es hat den Anschein, daß die elektrische Dissymmetrie erst auftritt, wenn die substituierten Gruppen eine genügende

1) Dr. A. Weißberger, hatte die Freundlichkeit die Substanzen herzustellen. Die Löslichkeit des Hydrochinons in Benzol ist zu gering, deshalb riet Herr Weißberger solche Derivate wie die oben genannten zu benutzen. Ich benutze gern die Gelegenheit, Herrn Weißberger meinen besten Dank auszusprechen.

2) Ebert und v. Hartel, Die Naturwissenschaften **15**, 668, 1927.

3) Herr Geheimrat Hantzsch hatte die Freundlichkeit mir die Substanzen in seiner Form zur Verfügung zu stellen, wofür ich auch hier meinen besten Dank aussprechen möchte.

Substanz	Molekular Polarisat. (cm^3)	Deformierungs-Anteil (cm^3)	Orientierungs-Anteil (cm^3)	Elektrisches Moment (e. s. E.)
p-Xylol	36,7	36	0,7	$< 0{,}1 \cdot 10^{-18}$
p-Dichlorbenzol	—	—	—	$0 \cdot 10^{-18}$
p-Dinitrobenzol	37,0	35	2,0	$< 0{,}3 \cdot 10^{-18}$
Hydrochinondiäthyläther	116	50	65	$1{,}7 \cdot 10^{-18}$
Hydrochinondiacetat	150	50	100	$2{,}2 \cdot 10^{-18}$

Länge oder Komplikation erreicht haben. Man könnte versucht sein, ähnliches auch für die oben diskutierten Benzolderivate zu folgern, bei denen die Gruppen nicht an einem C-Atom hängen, sondern durch den Benzolring getrennt sind. Die Versuche werden in der hier angedeuteten Richtung fortgesetzt.

Weiterhin möchte ich nicht versäumen, Herrn Prof. P. Debye zu danken für das Interesse, das er der Arbeit stets entgegengebracht hat.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 15. März 1928.)

Über Dipolmomente symmetrischer Verbindungen und cis- trans-Isomerie an „einfachen" Bindungen.

Von Arnold Weißberger.

(Aus dem Chemischen Laboratorium der Universität Leipzig.)

Die vorstehende Abhandlung veranlaßt zu den folgenden stereochemischen Bemerkungen:

Das Vorhandensein eines elektrischen Momentes bei einigen Verbindungen des Typus $C_6H_4\alpha_2$[1]) entspricht der gleichen Erscheinung bei den analogen Derivaten des Typus $C\alpha_4$[2]). K. Weißenberg[3]) wies auf die Möglichkeit hin, daß bei den letzteren Stoffen enantiomorphe Formen existieren, deren Beschaffenheit durch die Fig. 1 veranschaulicht wird. Fig. 2 zeigt die analoge Enantiomorphie bei Verbindungen des Typus $C_6H_4\alpha_2$.

In beiden Fällen können die physikalischen Isomeren aber nur dann getrennt existieren, wenn die Substituenten α um die einfachen Bindungen durch die sie an die Methan-C-Atome — bzw. an die paraständigen Kern-C-Atome — gebunden sind, nicht frei drehbar, sondern diese nur Achsen bevorzugter Lagen sind. Die von K. Weißenberg geforderte Isomerie setzt also die Ungültigkeit der sogenannten zweiten van't Hoffschen Hypothese[1]) voraus.

Mit dem Verlassen dieses Prinzips ergibt sich eine Möglichkeit, die „überzähligen Isomeren", die z. B. bei den cis-Zimtsäuren[2]), den Fulgiden[3]) und einigen Ketonen[4]) bekannt sind, zu erklären.

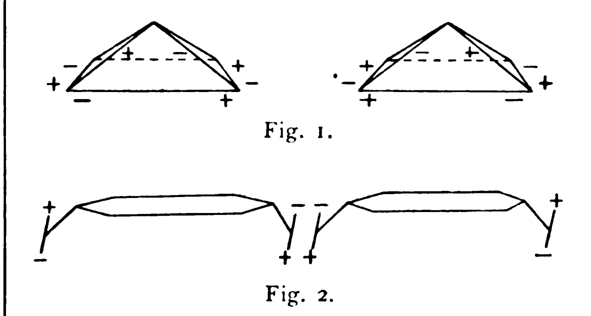


Fig. 1.

Fig. 2.

Im Zusammenhang mit den Ergebnissen der vorstehenden Mitteilung sei hier nur auf den Fall der isomeren gelben und farblosen substituierten Benzile eingegangen, die A. Schönberg und seine Mitarbeiter[5]) studiert haben. Sie erklären diese Isomerie damit, daß die gelben Formen normale 1,2-Diketone (I.) sind, während die farblosen Isomeren Superoxyde (II.) sein sollen.

$$\begin{array}{c} R \cdot C_6H_4 \cdot C - C \cdot C_6H_4 \cdot R \\ \quad\;\; \| \quad\;\; \| \\ \quad\;\; O \quad\;\; O \\ \text{I.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} R \cdot C_6H_4 \cdot C - C \cdot C_6H_4 \cdot R \\ \quad\;\; | \quad\;\; | \\ \quad\;\; O - O \\ \text{II.} \end{array}$$

1) Williams, s. vorstehende Abhandlung.
2) L. Ebert u. H. v. Harter, Naturwissenschaften **15**, 669, 1927.
3) Naturwissenschaften **15**, 662, 1927.

1) v. Auwers u. V. Meyer, Ber. d. d. chem. Ges. **21**, 785, 1888; Kritische Übersicht der Literatur s. F. Richter, Naturw. **14**, 889, 1926.
2) H. Stobbe u. C. Schönburg, A. **402**, 187, 1913; H. Stobbe, Ber. d. d. chem. Ges. **58**, 2620, 1925; s. auch E. Erlenmeyer jun. u. A. Arnold, Liebigs Ann. **337**, 329, 1904.
3) R. Dietzel, Diss. Leipzig 1921.
4) A. Schönberg u. O. Krämer, Ber. d. d. chem. Ges. **55**, 1174, 1922; A. S. u. W. Malchow, ibid. S. 3746, A. S. u. W. Bleyberg, ibid., S. 3753. C. Weygand, Ber. d. d. chem. Ges. **57**, 413, 1924; C. W. u. A. Matthes, Liebigs Ann. **449**, 29, 1926. Siehe ferner W. Fetkenheuer u. Mitarb., Ber. d. d. chem. Ges. **60**, 2528, 1927, S. 2534. B. Nekrassow, Z. physik. Chem. **128**, 203, 1927.
5) l. c.

Es erscheint aber möglich, daß hier ein Fall von Cis-trans-Isomerie an „einfachen" Bindungen vorliegt, wobei die Stabilität der verschiedenen Lagen durch die Anwesenheit der Substituenten (R) bedingt ist. Diese Vermutung gewinnt dadurch an Wahrscheinlichkeit, daß das chemische Verhalten der farblosen Benzile keine Anzeichen für das Vorhandensein einer Superoxydgruppe bietet, und daß die Schönbergschen Isomeren gerade bei Anwesenheit derjenigen Substituenten (R) auftreten, für die die oben zitierten Messungen von Dipolmomenten zeigen, daß sie starke Anziehungskräfte aufeinander ausüben. Diese Anziehungskräfte oder m. a. W. Restvalenzen müssen aber einer freien Drehbarkeit um die einfachen Bindungen entgegenwirken, so daß eine Kombination von Hauptvalenzen und genügend großen Restvalenzen dieselben sterischen Erscheinungen hervorruft, die an Doppelbindungen bekannt sind.

Die überraschende Beobachtung von Williams, daß das Trinitrobenzol[1]) im Gegensatz zum Tetranitromethan[2]) ein beträchtliches festes Dipolmoment hat, legt folgende Erklärung nahe.

1) Journ. Am. Chem. Soc. **50**, 362, 1928.
2) S. vorstehende Abhandlung.

Der niedrige Wert des elektrischen Moments des p-Dinitrobenzols im Vergleich zum Hydrochinon-diäthyläther und -diacetat zeigt, daß die Anziehung, die die Nitrogruppe auf andere gleiche Gruppen ausübt, wesentlich kleiner ist, als die entsprechende der Acetyl- und Äthoxylgruppe. Es besteht deshalb die Möglichkeit, daß das Tetraeder der normalen, regulären Methanderivate des Typus $C\alpha_4$ durch die Anziehung, die die -NO_2-Gruppen aufeinander ausüben, nur zu einer tetragonalen Bisphenoid deformiert wird, das nach seiner Symmetrie kein Dipolmoment zeigen kann, während die stärkeren Attraktionen der Acetyl- und der Äthoxylgruppen ein Umklappen des Bisphenoides in eine Pyramide bewirken.

Im symmetrisch trisubstituierten Benzol erscheint aber auch bei einander schwach anziehenden Substituenten keine Formulierung annehmbar, bei der die Restvalenzen der Substituenten im Gleichgewicht mit Kräften sind, die zu einem dipolfreien Molekül streben, und doch ein symmetrisch gebautes, d. h. ein Molekül ohne elektrisches Moment resultiert.

Herrn Professor Debye sage ich für die Gelegenheit zu fördernden Unterhaltungen meinen ergebensten Dank.

(Eingegangen 23. März 1928.)

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Die Beugung der Röntgenstrahlen in flüssigen Stoffen.

Von Carl Drucker.

Auf die Möglichkeit des Nachweises periodisch-variabler Struktur flüssiger Stoffe durch Beugung von Röntgenstrahlen wies zuerst W. Ostwald im Jahre 1913 hin[1]). Debye und Scherrer[2]) machten 1916 die ersten Versuche darüber an Wasser, Methylalkohol, Äthylalkohol und Benzol.

Die Stoffe wurden nach der von diesen Autoren ausgearbeiteten Methode mit Platin-L-Strahlen ($\lambda = 1{,}32$ Å) und Kupfer-K-Strahlen ($\lambda = 1{,}53$ Å) durchleuchtet, und zwar entweder in dünnen Bechern aus paraffiniertem Papier oder — in bisher noch nicht wiederholter Anordnung — ohne Gefäß als frei auslaufender Strahl. Alle vier Stoffe gaben Beugungsringe, die von in verhältnismäßig geringer Zahl vorhandenen Zentren herrühren mußten und, wie voraus vermutet werden konnte, krystalline Struktur nicht erkennen ließen.

1) Kolloid-Zeitschrift **13**, 121, 1913.
2) Nachr. Gött. Akad. 1916, 16.

Nach einigen Jahren erst folgte eine Untersuchung von E. Hückel[1]). Sie brachte Vergleiche zwischen denselben Stoffen im festen und im flüssigen Zustande, und zwar an solchen Substanzen, welche auch als Flüssigkeiten Strukturerscheinungen zeigen, also „liquokrystallin" auftreten können. Bei diesen Stoffen schiebt sich bekanntlich zwischen die Temperaturexistenzgebiete des festen und des „klarflüssigen" Zustandes das einer „trüben" Schmelze. In dieser jetzt nach Hunderten von Repräsentanten zählenden Gruppe bestehen sehr große quantitative Differenzen sowohl optischer wie thermodynamischer Art insofern, als diejenigen von ihnen, welche als trübe Schmelze deutliche Richtungseffekte aufweisen — Effekte, die zu dem Namen „flüssige Kristalle" Anlaß gegeben haben — auch relativ große, der gewöhnlichen Schmelzwärme nicht sehr fern liegende „Klärungswärme" für den Übergang der einen flüssigen Phase in die andere

1) Physik. Zeitschr. **22**, 561, 1921.

sowie recht scharfe „Klärungstemperatur" haben, während an anderen optische Erscheinungen nur als sehr stark temperaturempfindliche Farbenübergänge erkennbar sind, wie sie bei den kolloidähnlichen Gemischen von zwei flüssigen Stoffen im kritischen Entmischungsgebiete auftreten, und in diesen Fällen auch die Klärungswärmen sehr klein, infolge dessen also die Klärungstemperaturen gegen minimale Verunreinigung sehr empfindlich sind. Hückel hat, offenbar mit Absicht, Beispiele beider extremer Gruppen untersucht, und zwar von der ersten das p-Azoxyanisol, das p-Azoxyphenetol und das Dianisaldazin, von der anderen den Propionsäure- und den Benzoesäureester des Cholesterins. Bei allen diesen Stoffen fand er an der festen Form Raumgitterinterferenzen, an den beiden Schmelzen aber unscharfe Effekte ohne erkennbares Gitter und breite helle und dunkle Ringe um den Primärstrahl. Es besteht also auch in diesen Fällen eine gewisse Periodizität und zwar bei beiden flüssigen Formen. Hückel schließt deshalb auf das Vorhandensein von „geordneten Molekeln"[1]).

Von den Cholesterinestern könnte man nun vielleicht annehmen, daß die Beugungseffekte durch eine wenn auch geringe Zersetzungswirkung des Röntgenlichtes auf diese empfindlichen Substanzen vorgetäuscht seien, bei den viel stabileren anderen Stoffen fällt aber dieses Bedenken wohl weg. Qualitativ ist demnach auch hier die Beugungserscheinung festgestellt.

Bald darauf erschienen zwei kurze Mitteilungen von Keesom und de Smedt[2]) über das Verhalten von Wasser und kondensierten Gasen (Sauerstoff, Stickstoff, Argon) sowie von Schwefelkohlenstoff, Benzol, Äthylalkohol, Äthyläther und Ameisensäure. Es wurden Debye-Scherrer-Ringe mit Kupfer-K-Strahlen ($\lambda = 1,53$ Å) und später auch mit der kurzen Welle des Molybdäns ($\lambda = 0,71$ Å) aufgenommen, wobei die Flüssigkeiten sich in dünnen Röhrchen aus Glas oder Glimmer befanden. Während Schwefelkohlenstoff verwertbare Resultate nicht lieferte, wurden an den anderen genannten Stoffen deutliche Beugungsringe festgestellt, auch am Argon, also einem Stoffe, dessen Molekel im flüssigen Zustande allgemein als einatomig angenommen wird, wogegen Stickstoff und Sauerstoff mehratomig sind. Der hieraus zu ziehende Schluß wird uns später beschäftigen.

1) Solche „geordnete Molekeln" in liquokrystallinen Stoffen hat schon E. Bose, Physik. Zeitschr. **8**, 513, 1907, **9**, 708, 1908 und später, angenommen. Er bezeichnet sie als „Molekelschwärme". Diese Vorstellung ist verwandt mit der, welche M. Born für die Wanderung des Hydratwassers von Elektrolyten im Stromgefälle entwickelt hat.

2) Versl. Akad. Amsterdam **31**, 87, 1922 und **32**, 72, 1923. Vgl. auch die Diskussion dazu in Physica **2**, 121, 1922 und später in Hand. 21. Ned. Natuur- en Geneeskund. Congr., Amsterdam, April 1927.

De Smedt[1]) studierte dann noch einige andere organische Flüssigkeiten.

Hewlett[2]) untersuchte in Zelluloidröhrchen Benzol, Oktan und Mesitylen (symmetr. Trimethylbenzol) in der Molybdänstrahlung ($\lambda = 0,71$ Å) mittels Röntgenspektrometer und Ionisationskammer. Aus der Lage des Intensitätsmaximums[3]) ergaben sich auch hier wie bei den bereits genannten Autoren charakteristische Werte für die Abstände der Beugungszentren von einander in der Größe von rund 5 Ångströmeinheiten. Hewlett schließt, daß „Anzeichen kristalliner Struktur" vorhanden seien, diskutiert deren Art aber nicht näher.

R. W. Wyckoff[4]) nahm mittels Molybdänstrahlen Debye-Scherrer-Ringe von binären Gemischen aus Chlorkohlenstoff mit Benzol und Methylenjodid und aus Wasser mit Glyzerin auf, um festzustellen, ob der Beugungseffekt proportional der Zusammensetzung variiere. Wenn nämlich dies zutrifft, so wäre vermutlich die Ursache der Beugung am Atom zu suchen, da die gegenseitige Beeinflussung verschiedenartiger Molekeln wohl Abweichungen von der Additivität verursachen sollte[5]). Wyckoffs in diesem Falle nur mäßig genaue Resultate lassen solche Abweichungen vom linearen Verhalten nicht erkennen; er schließt demgemäß, daß der Effekt wahrscheinlich innerhalb der Molekel zustande komme, weist aber noch auf den bei dieser Überlegung nicht in Betracht gezogenen Einfluß etwaiger Assoziation mehrerer Molekeln hin, der sich vielleicht superponieren und das Ergebnis mehrdeutig machen könnte. Einen solchen Einfluß — bei einheitlichen Substanzen — hatten bereits Keesom und de Smedt in Betracht gezogen und sogar nachgewiesen zu haben geglaubt; man kann ihn aber heute noch nicht in Rechnung setzen, da ja die Frage der Assoziation sowohl einheitlicher Stoffe wie verschiedener im Gemische bis jetzt qualitativ wie quantitativ ungelöst ist.

Auch E. D. Eastman[6]), der mit Molybdänstrahlen festes und flüssiges Benzol nach Debye-Scherrer untersuchte, diskutiert diese Frage ohne Entscheidung; seine Resultate zeigen meh-

1) Bull. Acad. Belg. **10**, 366, 1924.

2) Phys. Rev. **20**, 688, 1922.

3) Vgl. unten Fig. 8.

4) Amer. Journ. of Science **5**, 494, 1923.

5) Die Mischungskurven einer ganzen Reihe von Eigenschaften sind für Wasser—Glyzerin bekannt und verlaufen niemals linear. Vgl. Drucker und Moles, Zeitschr. phys. Chem. **75**, 430, 1910.

6) Journ. Am. Chem. Soc. **46**, 917, 1924.

rere Beugungsmaxima des flüssigen Stoffes, und zwar bei genau den gleichen Abständen der Zentren — 4,9; 2,7; 2,0; 1,5 Å — wie sie von ihm und seinen Vorgängern am festen gefunden worden sind.

Sehr eingehend haben Stewart und Morrow[1]) — mittels Molybdänstrahlen — im Ionisationsspektrometer die Abhängigkeit der Intensität des gebeugten Strahles vom Beugungswinkel bei den ersten elf Gliedern der homologen Reihe der primären einwertigen Alkohole vom Methylalkohol an bis zum Laurylalkohol ($C_{11}H_{22}OH$) untersucht. Dabei wurden in jedem einzelnen Falle zwei reelle Maxima der Beugungsintensität gefunden, und zwar eines, das, wie die Fig. 11 zeigt, fast in allen Fällen demselben Winkel entspricht und nur bei Methyl- und Äthylalkohol etwas abseits liegt, und ein zweites, kleineres, welches mit wachsender Länge der Kette sich zu kleineren Winkeln, also zu größerer Dimension des Beugungselementes verschiebt. Das erste ergibt[2]) eine konstante Größe des Elementes von 4,6 Å, das zweite eine ständige Zunahme mit einem vom dritten Gliede an konstanten Inkremente $\Delta a = 1{,}54$ Å für eine CH_2-Gruppe. Maxima höherer Ordnung wurden nicht gefunden.

In weiteren Mitteilungen berichten Stewart, Morrow und Skinner[3]) über Ausdehnung ihrer Messungen auf die Reihen der normalen Fettsäuren und der Paraffine, sowie Kampfer, Naphthalin und α- und β-Naphthol. Die konstante Elementarlänge 4,55 Å fand sich bei den normalen Ketten wieder, Verzweigung der Kohlenstoffkette erhöhte diesen Betrag; die mit der Kettenlänge wachsende Dimension konnte aber bei den Paraffinen nicht gefunden werden.

Serienuntersuchungen an organischen Stoffen hat auch I. R. Katz[4]) angestellt. (Kupferstrahlen $\lambda = 1{,}54$ Å, Durchleuchtung nach Debye-Scherrer in Glasröhrchen.) Die Stoffe entstammten sehr verschiedenen Gruppen; in der ersten Untersuchung wurde fast ausnahmslos nur ein Ring gefunden, aus dessen Durchmesser die Elementardistanz sich immer in der Größe von rund 5,5 Å ergab, mit Unterschieden von etwa ± 10 Proz., obwohl auch hochkomplexe Substanzen wie Albumine und Fette eingeschlossen waren. Ein Einfluß der Kettenverzweigung zeigte sich nicht. Nur in einigen wenigen Fällen wurde ein kleinerer Interferenzring

1) Phys. Rev. **30**, 232, 1927.

2) Berechnet nach $a = \dfrac{\lambda}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}$.

3) Phys. Rev. **31**, 1, 10, 174, 1928; kurzer Bericht in Proc. Nat. Ac. Science **13**, 787, 1927.

4) Zeitschr. f. Phys. **45**, 97, 1927.

beobachtet. In einer Fortsetzung fanden dann aber Katz und Selman[1]) in den meisten Fällen zwei Beugungsringe, bisweilen sogar noch einen dritten von kleinerem Durchmesser. Die Abstände der Zentren liegen auch hier etwa zwischen 4 und 9 Å.

Nach demselben Verfahren und mit derselben Wellenlänge untersuchten R. O. Herzog und Jancke[2]) organische Stoffe im festen und im geschmolzenen Zustande. Wie in bereits erwähnten Fällen zeigten die Schmelzen wesentlich breitere Ringe als die festen Formen und zwar in einem Teile der Fälle mehr als einen Ring.

S. M. Sogani[3]) hat eine große Anzahl von Debye-Scherrer-Aufnahmen an organischen Flüssigkeiten mittels Kupfer-K-Strahlen ausgeführt und auch an Quecksilber durch Beobachtung des reflektierten Strahles den Abstand der Beugungselemente gemessen. In diesem Falle[4]) ergab sich $a = 3{,}0$ Å; die übrigen — nach $a = \dfrac{\lambda}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}$ berechneten — Resultate zeigt die untenstehende Tabelle.

Tabelle I.

Stoff	a	Stoff	a
Pentan	4,90	*m*-Nitrotoluol 7,25	4,07
Hexan	4,89	*p*-Nitrotoluol . . .	4,95
Heptan	4,97	Pyridin	4,73
Oktan	4,90	Piperidin	5,06
Äthyläther . . .	4,63	Chinolin . . 6,06	4,22
Glyzerin . . 4,49	8,5	Oleinsäure . . .	4,85
Benzol	4,90	Ameisensäure . .	3,91
Cyklohexan . . .	5,20	Essigsäure . 4,4	7,6
Phenol	4,90	Buttersäure . . .	4,82
Toluol	5,37	Laurinsäure . . .	4,90
Anilin	5,03	Palmitinsäure . .	4,82
Äthylbenzol . . .	5,37	Erukasäure . . .	4,78
o-Xylol	6,06	Brassidinsäure .	4,87
m-Xylol	6,40	Methylbenzoat .	4,64
p-Xylol	6,06	Äthylbenzoat . .	4,54
Mesitylen . . 7,25	3,81	Phenetol	4,95
o-Nitrotoluol 6,80	3,81		

(In der ersten Abhandlung rechnet Sogani mit $a = \dfrac{\lambda}{1{,}63 \sin \frac{\vartheta}{2}}$. Wo zwei Zahlen angegeben sind, wurden zwei Ringe beobachtet.)

Das gesamte bis heute vorliegende Beobachtungsmaterial beweist also, daß alle flüssigen Stoffe die Röntgenstrahlen beugen; quantitative

1) Zeitschr. f. Phys. **46**, 392, 1928.

2) Zeitschr. f. Phys. **45**, 194, 1927.

3) Ind. Journ. of Phys. **1**, 357, 1927 und **2**, 97, 1927.

4) Statt dieses einen Wertes hat I. A. Prins nach der Spektrometermethode mit K-Strahlen von Zink ($\lambda = 1{,}43$), Kupfer ($\lambda = 1{,}54$) und Eisen ($\lambda = 1{,}94$) drei gefunden: 2,84, 1,41, 1,04 Å (Physica **6**, 315, 1926).

Übereinstimmung der verschiedenen Ergebnisse besteht aber noch nicht[1]). Schon die Zahl der nach der Debye-Scherrer-Methode gefundenen Ringe wird ungleich angegeben, und es ist sogar behauptet worden, daß mehrere Ringe, die in einer Untersuchung gefunden worden waren, tatsächlich nichts weiter seien als ein einziger, dessen Schärfe von innen nach außen abnehme (s. darüber unten). Diese experimentellen Differenzen werden wohl bald geklärt werden; sie haben ihre Ursache offenbar nicht nur in der Versuchstechnik, sondern auch darin, daß verschiedene Stoffe sehr verschiedene Schärfe der Aufnahme zulassen. Als Beispiele dafür seien hier die Bilder 1—6 reproduziert, welche meist der Abhandlung von Sogani (Nr. 6 der von Katz und Selman) entnommen sind. Soviel ist jedoch sicher, daß man in keinem Falle die feststehende Struktur eines Kristallgitters beobachtet hat. Die Abstände der Beugungszentren, welche aus Ringphotogrammen oder Spektrometerkurven abgeleitet wurden, liegen meist in der Nähe von etwa 5 Å, ihre Genauigkeit wird im Mittel auf 0,1 Å geschätzt werden dürfen; danach bestehen zweifellos reelle Unterschiede zwischen den verschiedenen Stoffen, aber die quantitativen Schlüsse auf Beziehungen zur chemischen Konstitution lassen sich in manchen Fällen vorläufig vielleicht noch nicht sicher begründen.

Das bisher wichtigste positive Resultat dürfte der Befund von Stewart, Morrow und Skinner sein, nach dem in homologen Reihen eine mit der Länge der Kohlenstoffkette wachsende und eine konstante Distanz von 4,6 Å auftreten. Hiernach liegt die Vermutung sehr nahe, daß diese Abstände mit Länge und Breite des von der Einzelmolekel beanspruchten Raumes zu identifizieren seien, und dafür scheint unter anderem die nahe Übereinstimmung dieser Zahlen mit den an den festen Stoffen gefundenen Gitterkonstanten zu sprechen. Diese Tatsache wird von mehreren Autoren auch eingehend diskutiert, besonders von Stewart, Morrow und Skinner. Aus einer Anzahl von Abhandlungen, die meist im Braggschen Institute entstanden sind[2]), entnimmt man, daß feste Stoffe verschiedener Typen von Kohlenstoffketten drei charakteristische Distanzen aufweisen, von denen zwei in der homologen Reihe konstant gleich 4,0 bis 4,2 und 3,7 Å bleiben, während die dritte mit der Länge der Kette um 1,2 bis 1,3 Å für eine CH_2-Gruppe zunimmt, bei Säuren, Ketonen und einigen anderen Gruppen aber um rund 2,0 Å oder auch etwas mehr. Das Ketteninkrement beträgt nun nach Stewart, Morrow und Skinner bei flüssigen Alkoholen 1,54 Å, bei Fettsäuren im Mittel 2,0 Å, und der konstante Abstand, wie bereits erwähnt, etwa 4,6 Å.

Dimensionen der gleichen Größe leiten sich auch aus der Dicke und Breite von Films auf Wasser ab. Faßt man solche gemäß Langmuirs für Adsorptionsschichten entwickelter Hypothese als Lagen von molekularer Dicke auf, bei der alle Molekeln dicht nebeneinander senkrecht zur Oberfläche stehen[1]), so kann man Länge und Breite der molekularen Elementarzelle berechnen. Adams[2]) umfassende Untersuchungen an solchen Schichten haben nun den Querschnitt des Raumes der Molekel einer normalen Fettsäure zu $21 \cdot 10^{-16}$ cm², also, falls er quadratisch ist, die Breite zu $4,6 \cdot 10^{-8}$ cm² ergeben, in genauer Übereinstimmung mit dem schon erwähnten Beugungswerte. Das gleiche Resultat findet sich in anderen Fällen. Berechnet man nun danach die Länge der Molekularzelle, so entspricht auch diese dem Röntgenbefunde, und das Längeninkrement für eine Methylengruppe beträgt wieder 1 bis 2 Å. Auf diese jedenfalls wichtige Übereinstimmung nach ganz verschiedenen Methoden gewonnener Werte und auch auf die kleinen Differenzen der Breite, wie sie sich anscheinend bei Stoffen mit und ohne Seitenketten ergeben, gründen einige Autoren ziemlich weitgehende chemisch-konstitutive Schlüsse; wir wollen aber diese nicht besprechen, da sie vor Klärung der unten zu erörternden theoretisch-prinzipiellen Vorfragen wohl kaum als gesicherte Ergebnisse betrachtet werden dürfen[3]).

---

1) Z. B. findet Sogani, wie die Tabelle zeigt, für Essigsäure zwei Werte 4,4 und 7,6, wogegen Morrow (l. c.) zu 4,17 und 5,9 kommt. Ferner hat Morrow für alle Fettsäuren zwei Maxima gefunden, während bei Sogani nur die Essigsäure zwei ergibt. (S. Tabelle II.)

2) A. Müller, Journ. Chem. Soc. **123**, 2043; G. Shearer, ebenda **123**, 3152; A. Müller u. G. Shearer, ebenda **123**, 3156, 1923; A. Müller u. W. B. Saville, ebenda **127**, 599; W. B. Saville u. G. Shearer, ebenda **127**, 591, 1925. S. ferner Trillat, Ann. de Physique **6**, 5, 1926; Gibbs, Journ. Chem. Soc. **125**, 2622, 1924; Piper, Brown u. Dyment, Journ. Chem. Soc. **127**, 2194, 1925.

1) Diese plattenartige Anordnung wird für den Fall von mehreren übereinanderliegenden Schichten nach Friedel als „smektisch" bezeichnet (σμῆγμα, Seife), im Gegensatze zu der „nematischen" (νῆμα, Faden), bei welcher die gestreckten Molekeln oder Molekelketten einzeln liegen.

2) Proc. Roy. Soc. London A **99**, 336, 1921; **101**, 452, 516, 1922; **103**, 676, 1923.

3) Man darf auch nicht zu genau rechnen, schon weil die Filmsubstanzen und das Wasser, auf dem sie ausgebreitet sind, einander etwas lösen. Adam findet auf Wasser, das ein wenig Salzsäure enthält, den größeren Querschnittswert $25 \cdot 10^{-16}$, und Stewart und Morrow deuten dies auf Lagenänderung der Molekeln, welche durch deren polaren Charakter und die Ladungen der Salzsäureionen verursacht seien. Die Erklärung liegt aber mindestens zum Teile in der löslichkeiterniedrigenden Wirkung der starken Salzsäure auf die nur partiell dissoziierten Fettsäuren.

Cyklohexan

Mesitylen

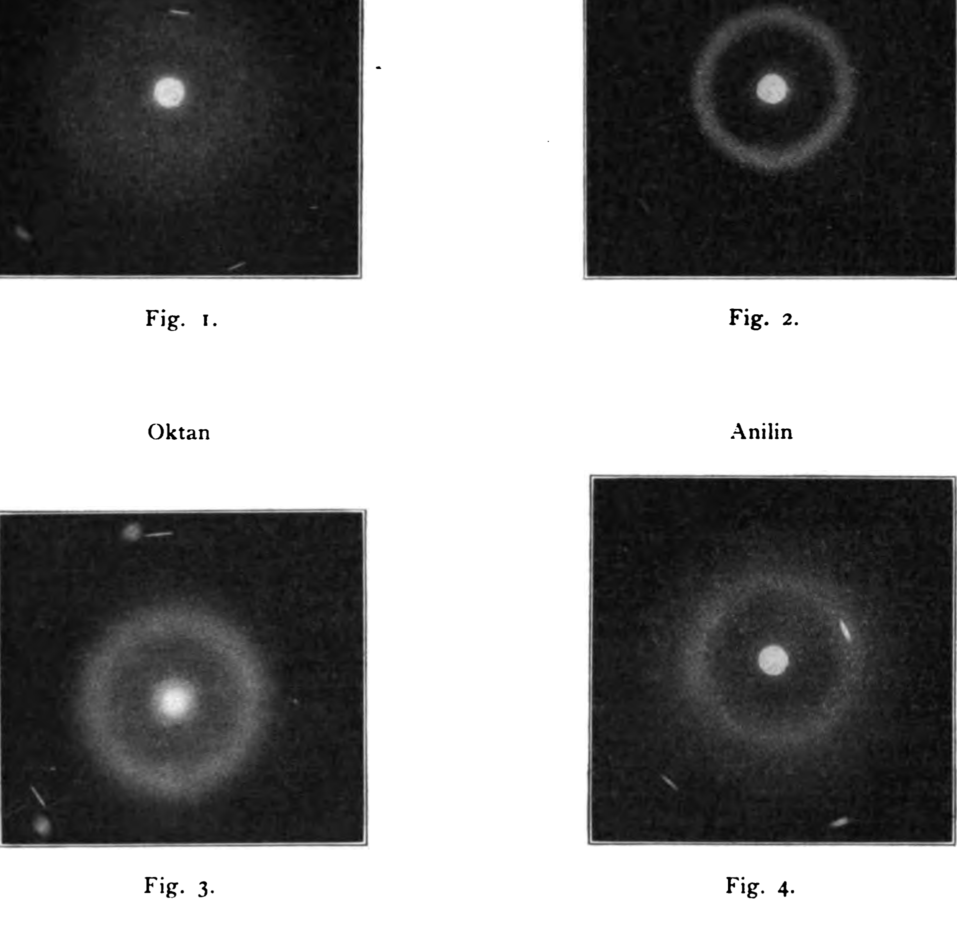


Fig. 1.

Fig. 2.

Oktan

Anilin

Fig. 3.

Fig. 4.

Phenetol

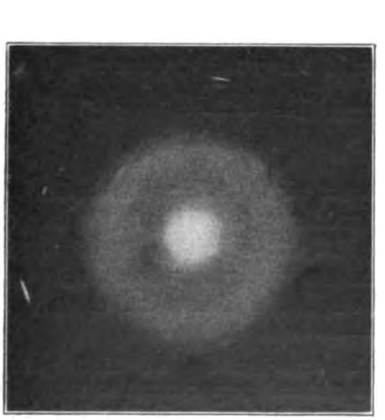


Fig. 5.

Orthoameisensäure-Isobutylester

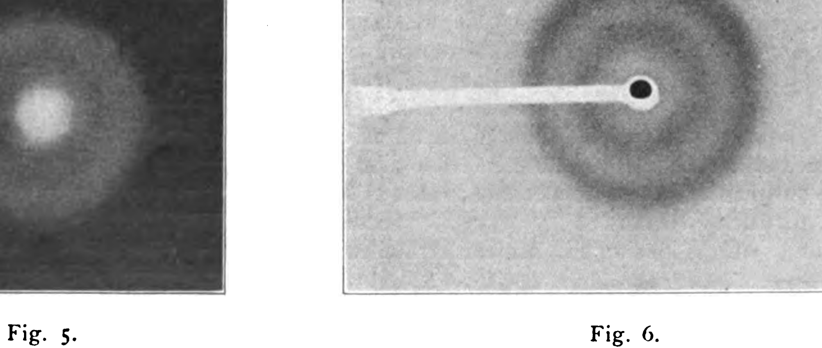


Fig. 6.

Übersicht.

	Sogani	Hewlett	Katz	Keesom u. de Smedt	Stewart u. Morrow	a'''
Benzol[1])	4,90	4,8	4,7	4,98	—	5,9
n-Oktan	4,90	5,0	4,6	—	—	7,2
Anilin	5,03	—	4,8	—	—	6,0
Pyridin	4,73	—	4,6	—	—	5,7
Piperidin	5,06	—	4,9	—	—	6,2
Glyzerin	4,49, 5,5	—	4,45	—	—	5,35
Aethyläther	4,63	—	—	4,6	—	—
Ameisensäure	3,91	—	3,7	3,7	3,65, 5,7	4,5
Essigsäure	4,4, 7,6	—	4,1	—	4,17, 5,9	—
n-Buttersäure	4,82	—	4,6	4,29, 2,46	4,64, 8,5	6,5
Methylalkohol	—	—	3,7	—	4,3, 5,8	4,6
Äthylalkohol	—	—	4,1	4,0	4,4, 8,0	5,2
Mesitylen	7,15, 3,81	6,3	—	—	—	6,9
Cyklohexan	5,2	—	6,1	—	—	6,3

Was übrigens die Zahlenwerte selbst betrifft, so muß beachtet werden, daß für die Berechnung aus den Röntgenaufnahmen sowohl die Formel von Bragg $a = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}$ benutzt wird, wie die von Debye-Ehrenfest $a = \frac{\lambda}{1{,}63 \sin \frac{\vartheta}{2}}$, so daß also ein allgemeiner Vergleich aller vorliegenden Resultate eine Umrechnung voraussetzt, und daß auch die rein geometrischen Ansätze für die molekulare Elementarzelle verschieden sind.

Dieser auf eine Molekel entfallende Raum erscheint in einigen Rechnungen, z. B. bei Adam und Stewart und Morrow, als vierseitiges Prisma, in dem man die Molekel selbst mit beliebiger Form annehmen kann — etwa als Rotationsellipsoid —, in anderen Fällen wird dichte Kugelpackung angenommen, wobei die Molekel selbst oder ihr Wirkungsraum als Kugel erscheint und je nach Art der Packung das der Einzelmolekel zukommende Volumen etwas verschieden ausfällt. Setzen wir den Raum jenes aus Dichte, Molargewicht und Avogadroscher Zahl berechneten Elementarprismas gleich eins und denken es als Würfel, so erfüllt eine solche Kugel bei kubischer Packung nur den Raum 0,524 und die Distanz a' zweier Molekularzentren ist gleich dem Kugeldurchmesser, also der Kantenlänge eines jener Würfel. Bei einem zentrierten kubischen Gitter ergibt sich dagegen der Zentralabstand zu $a'' = 1{,}09\, a'$. Keesom und de Smedt, die als erste die Beugungsdistanzen mit den aus der Dichte berechneten Molekularlängen verglichen haben, sowie andere Autoren setzen für den Abstand $a''' = 1{,}33\, a'$. Diese Rechnung mit sphärischen Molekularräumen kann natürlich mit den Ergebnissen der Röntgenbeobachtungen nur dann in Vergleich gesetzt werden, wenn entweder nur ein einziges Beugungsmaximum vorliegt oder das Auftreten von mehreren anderweit erklärt wird. Keesom und de Smedt haben auch in der Tat für ihren zweiten Beugungsring bei den kondensierten Gasen und die drei Ringe bei Wasser eine solche Erklärung gegeben. Diese und der dagegen erhobene Widerspruch werden uns noch beschäftigen.

Zur Orientierung über diese Zahlenverhältnisse und Rechnungen schließen wir hier eine kleine Zusammenstellung an, in der einige von verschiedenen Autoren gefundene Werte (in Ångströmeinheiten) nach der Braggschen Formel berechnet sind. In der letzten Kolumne stehen die Zahlen $a''' = 1{,}33\, a'$ gemäß dem Ansatze von Keesom und de Smedt.

Die von verschiedenen Autoren gefundenen Abstände stimmen also untereinander ziemlich gut und vertragen sich auch mit den aus der Dichte abgeleiteten Molekulardimensionen. Da diese natürlich nur näherungsweise berechnet werden können, so sind zwar quantitative Schlüsse vorläufig noch nicht zu begründen[1]), immerhin ist die Koinzidenz beider Zahlengruppen offenbar von Bedeutung.

Der Anschluß an die Keesom-de Smedtsche Formel bessert sich, wenn statt der Braggschen Formel $a = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}$ die von Debye-Ehrenfest benutzt wird, welche alle Abstände um rund 23 Proz größer ergibt. Diese ist aber abgeleitet für den Fall der Beugung an den Atomen von zweiatomigen Molekeln, welche weit voneinander entfernt sind. Bei Flüssigkeiten darf dies wohl

1) Eastman: 4,83, Debye und Scherrer: 4,97, 2,73, 2,00, 1,50.

1) Wir brauchen deshalb auch nicht auf den von Katz geltend gemachten Umstand einzugehen, daß die Keesom-de Smedtsche Beziehung immer weniger gut erfüllt sei, je mehr die Molekelform von der Kugel abweiche.



kaum angenommen werden, große Dichteänderung des Objektes muß vielmehr den Verlauf der Intensitätskurve wesentlich beeinflussen (s. unten).

Aber auch wenn man von quantitativen Einzelheiten absieht, bleibt erst noch die wichtige Vorfrage zu lösen, wie denn eigentlich die Beugung erfolgt: infraatomar, d. h. innerhalb des Atoms, inframolekular (interatomar), also an den Atomen innerhalb der Molekel, oder intermolekular, d. h. außen an der Molekel oder auch — eine ebenfalls zur Diskussion gezogene Möglichkeit — an komplexen Molekelgruppen.

Der erste Fall ist theoretisch noch nicht formuliert und also vorläufig wegzulassen. Der zweite, die Beugung am Atom, ist a priori besonders wahrscheinlich, aber die Entscheidung darüber, ob er allein oder zusammen mit dem dritten auftritt, kann erst in Zukunft gefällt werden. Sie ist nicht durch die Untersuchung eines Stoffes zu erbringen, der im flüssigen Zustande einatomig ist, wie man vom flüssigen Argon annimmt, an dem Keesom und de Smedt zwei Maxima fanden. Denn in diesem Falle wird ja die Molekel mit dem Atom identisch. Zweiatomige Molekeln mit verschiedenen Atomen, etwa die Halogenwasserstoffe, sind noch nicht untersucht.

Da die kondensierten Gase zwei Maxima gaben, Wasser sogar drei, so schlossen Keesom und de Smedt auf Vorhandensein von komplexen Molekeln und knüpften daran weitere Vermutungen über die zwischen den als Di- bzw. als Quadru- oder Oktopole aufgefaßten Molekeln bestehenden Kraftfelder. Man kann aber auch mit Stewart und Morrow auf verschiedene Orientierung der — nicht kugelförmigen — Molekeln zum Primärstrahle, also verschiedene Distanz beugender Atome in der Molekel schließen.

Auch aus der Tatsache läßt sich kein bestimmter Schluß ableiten, daß, wie Stewart, Morrow und Skinner gefunden haben, bei Stoffen, welche schon als Gase, erst recht also im flüssigen Zustande, assoziiert sind, die molekularen Längen wesentlich größer sind als bei solchen, welche für monomolekulare Flüssigkeiten gehalten werden. Denn wenn ein Stoff total dimer wird, so bildet er entweder die halbe Zahl Einzelmolekeln von doppelter Größe oder die einfachen Molekeln treten paarweise in gegenseitige Abhängigkeit („lockere Bindung" nach Nebenvalenzen), und wie sich dieser Unterschied in der Beugung äußert, ist noch unbekannt[1]).

1) Partielle Dimerie entspricht einem Stoffgemische, sollte also die Zahl der Beugungsmaxima erhöhen.

Nicht vergessen darf man auch den schon erwähnten Befund von Katz, daß sehr komplizierte Stoffe, wie Eiweiß und Polysaccharide, nahezu die gleichen Abstände geben wie Stoffe mit viel kleineren Molekeln.

Eine Klärung der Verhältnisse wird wohl erst dann eintreten, nachdem man die einzelnen Fälle theoretisch gesondert, d. h. festgestellt hat, was für jeden von ihnen zu erwarten ist. Von den hierfür entwickelten Ansätzen betrachten wir zunächst den von Raman und Ramanathan[1]).

Da eine Flüssigkeit keine stehende periodische Struktur hat[2]), so wird das Problem auf der Grundlage der Smoluchowski-Einsteinschen Schwankungstheorie betrachtet, nach welcher lokale Dichteschwankungen bestehen, die gemäß Wahrscheinlichkeitsbeziehungen räumlich und zeitlich wechseln, und es wird die hierauf beruhende Theorie der Streuung des sichtbaren Lichtes auf die Beugung von kurzen Wellen übertragen.

Die Lichtstreuung in einem idealen Gase ist proportional der Dichte, in einem nicht idealen dem Produkte aus (relativer) Kompressibilität und Quadrat der Dichte. Bei sehr dichten Gasen und bei Flüssigkeiten tritt hierzu noch der den Brechungsindex μ enthaltende Faktor $\left(\frac{\mu^2+2}{3}\right)^2$.

Die Röntgenwellen sind nicht mehr groß gegen die molekularen Dimensionen, mithin wird die für die starr hintereinander angeordneten Schichten fester Körper gültige Formel $a = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\frac{\vartheta}{2}}$ bei Flüssigkeiten nicht richtig bleiben. Sind aber die Beugungswinkel klein, also die Abstände der Beugungselemente einigermaßen groß, so kann die Formel noch näherungsweise zutreffen. Danach sollen Flüssigkeiten einen von innen nach außen an Schärfe stark abnehmenden Ring geben, was — nach Ansicht der Verfasser — die Aufnahmen von Keesom und de Smedt auch zeigen[3]). Daraus ergibt sich die Vorstellung eines „strukturellen Spektrums" in der Flüssigkeit, das ein Intensitätsmaximum bei derjenigen Wellenlänge hat, welche dem Abstande zweier Molekeln (Beugungszentren) gleich ist.

1) Proc. Ind. Assoc. for Cultiv. of Science **8**, II, 127, 1927.

2) Solche ist auf einem anderen Gebiete allerdings gelegentlich angenommen worden, nämlich von Ghosh und später von E. Wilke (Zeitschr. f. phys. Chem. **121**, 401, 1926, **125**, 420, 1927) bezüglich der kubischen Anordnung der Ionen in Elektrolytlösungen.

3) Andere Aufnahmen mit mehr als einem Maximum, wie etwa die oben reproduzierten Bilder und das Diagramm Fig. 11, lagen damals noch nicht vor.

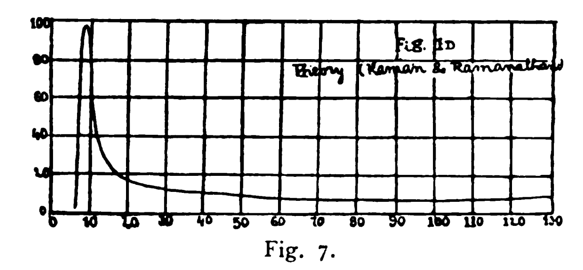


Fig. 7.

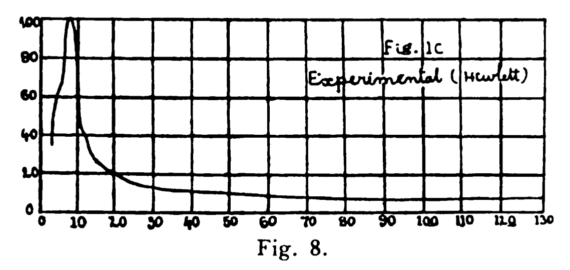


Fig. 8.

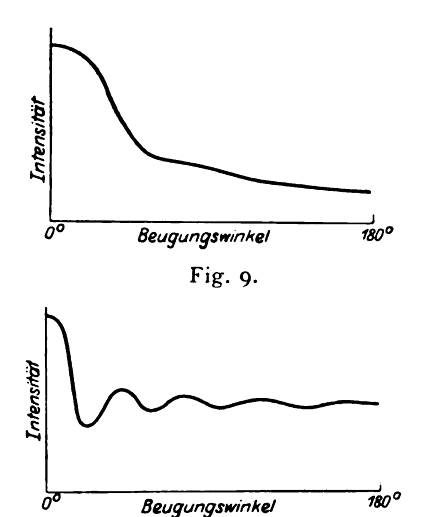


Fig. 9.

Fig. 10.

Der gesamte Intensitätsverlauf stellt sich dar als Funktion des mittleren Abstandes — hier λ_0 genannt — der relativen Kompressibilität β und des durch die Dichteschwankung[1]) auf λ_1 verkleinerten Abstandes proportional zu

$$\frac{1}{k\cdot T\cdot\beta}\cdot\lambda_0^3\cdot\left[1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^3\right]^2\cdot d\lambda_1,$$

wo T die absolute Temperatur und k die molekulare Gaskonstante bedeuten. Hiernach wird ein Intensitätsverlauf nach Fig. 7 zu erwarten sein[2]). Raman und Ramanathan vergleichen diese mit der von Hewlett (s. o.) tatsächlich gefundenen Kurve Fig. 8, die ihr sehr ähnlich ist. Wir wollen hierzu auch noch die folgenden drei Diagramme betrachten, von denen Nr. 9 der Beugung durch freie Atome, Nr. 10 der an dem Debye-Ehrenfestschen Modell der weit getrennten zweiatomigen Molekeln entspricht[1]) und endlich Nr. 11 einen Auszug aus den von Stewart und Morrow an normalen Alkoholen gewonnenen Kurven zeigt. Hier erkennt man deutlich wiederum das vor dem großen Hauptmaximum

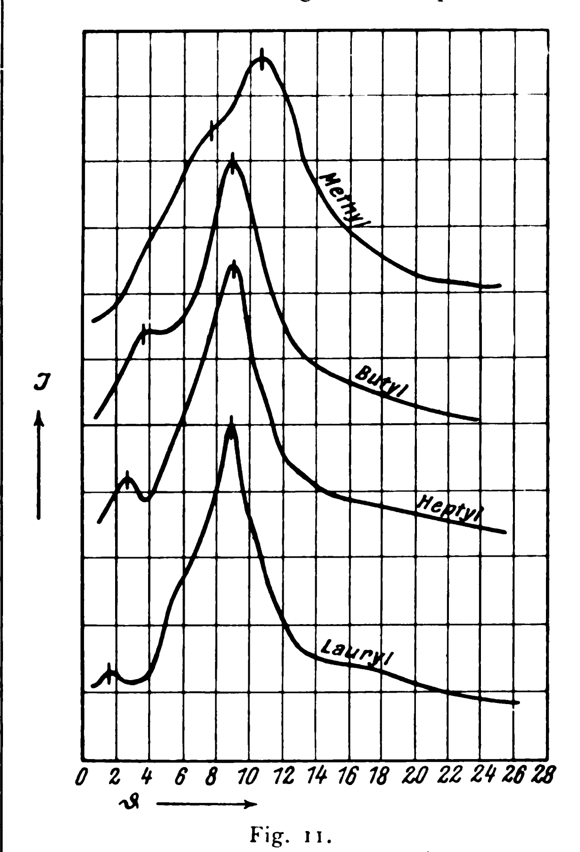


Fig. 11.

1) Diese Dichteschwankungen müssen natürlich auch als eine Art räumlicher Periodizität aufgefaßt werden, von der Kristallstruktur unterschieden durch die Abhängigkeit der Lage von der Zeit und — wenigstens von nichtkubischer — durch das Fehlen bevorzugter Richtungen. Vielleicht haben die Autoren, welche eine kristallverwandte Struktur der flüssigen Stoffe annehmen, wie Hückel, Keesom und de Smedt, Hewlett, Stewart und Morrow, sich davon ein ähnliches Bild gemacht wie Raman und Ramanathan. Darauf deutet wenigstens der Vorschlag von Stewart und Morrow, Flüssigkeiten als „kybotaktisch" (κύβος, Würfel) geordnet aufzufassen, was bedeuten soll, daß nicht etwa ganze Kristallfragmente in ihr vorhanden sind, sondern eine definierte räumliche Anordnung trotz Beweglichkeit der Molekeln besteht („a type of molecular arrangement wherein there is combined mobility of the component molecules and yet a recognizable space array"). Mit der oben erwähnten Strukturauffassung von Ghosh und E. Wilke hat dieser Vorschlag nichts zu tun.

2) Die Abszisse gibt Beugungswinkel an, die Ordinate Intensitäten; ebenso in den folgenden Figuren.

1) Beide entnommen aus Zernike u. Prins (s. S. 281).

liegende kleine, welches schon Hewlett gefunden hatte, das aber Raman und Ramanathan auf mangelhafte Reinheit des Primärlichtes zurückführen wollten. Es muß als reell betrachtet werden, und daraus folgt, daß die eben erwähnten theoretischen Überlegungen noch nicht ausreichen, wenn sie auch den wichtigen Einfluß von Dichte und besonders Dichteschwankung formuliert und weitgehend aufgeklärt haben[1]). Es ist aber jedenfalls nun der Weg zu weiterer Entwicklung gewiesen. Gelingt es, wie Debye[2]) betont, verdünnte Gase hinreichend genau zu untersuchen, so erfährt man, wie die Beugung an der Einzelmolekel und ihren Atomen erfolgt, und kann dann an den flüssigen Substanzen den intermolekularen Effekt studieren. Debye entwickelt darum die Theorie der Beugung an voneinander unabhängigen Einzelmolekeln oder — genauer gesprochen — an starren Kugeln, deren jede eine Molekel einhüllt. Es tritt dann eine Zerstreuungsfunktion mit einem von Wellenlänge und Kugeldurchmesser bestimmten Maximum auf. Bildung von komplexen Molekeln ist hierfür nicht wesentlich. Den Typus dieses Verlaufes zeigt die für einen speziellen Fall berechnete Kurve Fig. 12.

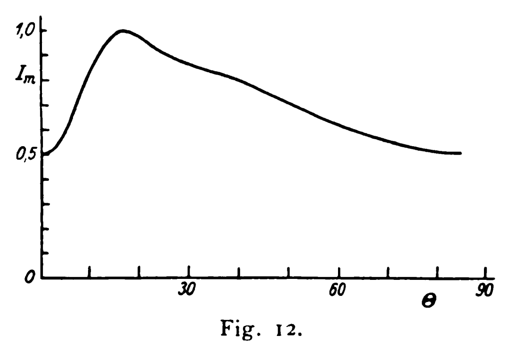


Fig. 12.

Diesem Gesamteffekt der Molekel wird sich ein von ihren einzelnen Atomen verursachter superponieren. Da nun die molekulare Wirkung eine Funktion der Gasdichte ist, so wird eine bei verschiedenen aber immer kleinen Drucken aufgenommene Serie die Summe des konstanten inframolekularen und des dichtevariablen „äußeren" Effektes liefern und durch Extrapolation auf die Dichte Null zu der lediglich von den Atomen verursachten Wirkung führen.

Weiterhin zeigt Debye, daß Abnahme der Dichte die Form der Intensitätskurve bei zweiatomigen Molekeln bis zum Verschwinden des der Beugung an der Molekel entsprechenden Maximums ändert, während ein zweites, welches dem interatomaren Effekte zukommt, bestehen bleibt. Dies zeigt Fig. 13 für die relativen Dichten

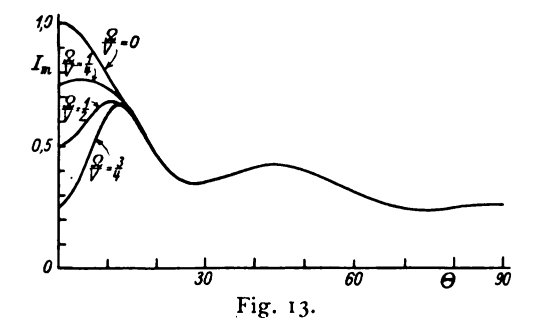


Fig. 13.

von der des idealen Gases $\left(\frac{\Omega}{V}=0\right)$ bis zu $\frac{\Omega}{V}=\frac{3}{4}$, was dem Flüssigkeitszustande entspricht.

Dieser rationelle Weg verspricht wohl die besten Erfolge. Erst an seinem Ende aber wird man wohl an das besonders den Chemiker interessierende Problem der flüssigen Gemische und der in diesen bestehenden gegenseitigen Abhängigkeit der Komponenten (Verbindungen und komplexe Molekeln) herantreten können. Für den Nachweis komplexer Molekeln in reinen Flüssigkeiten gibt es bis heute noch kein Kriterium, und auch auf spezifische Effekte (optische Methoden, besonders Absorption) hat man noch keines begründen können[1]). Die Röntgenanalyse wird vielleicht ein solches liefern, aber es ist wohl nicht wahrscheinlich, daß die bisher benutzten kurzen Wellen, die wesentlich auf das stabile Atom und die kleine Einzelmolekel ansprechen, auf große Komplexe hinreichend scharf reagieren werden[2]). Hierfür wird man sich wohl längerer Wellen — etwa von 10 bis 100 Å — bedienen müssen, deren Versuchstechnik für diesen Zweck noch zu schaffen ist.

1) In allgemeiner Fassung wurde die Anwendung der Schwankungstheorie auf unseren Fall auch von Zernike und Prins (Zeitschr. f. Phys. **41**, 184, 1927) vorgenommen.

2) Physik. Zeitschr. **28**, 135, 1927.

1) Vgl. betreffs des Standes dieser Frage: Dolezalek, Zeitschr. phys. Chem. **64**, 727, 1908 und später; Lenard, Probleme komplexer Moleküle, Heidelberg 1914; Drucker, Zeitschr. phys. Chem. **68**, 616, 1909 und „Molekularkinetik und Molarassoziation", Leipzig 1912.

2) G. L. Clark (Nature **120**, 119, 1927) schließt aus seinen Ergebnissen, daß Polymerie, Gelquellung, sogar Solvatation bereits heute mittels der Beugung der Röntgenstrahlen erkannt werden könne. „... X-ray science has apparently reached the stage wherein it may analyse all matter in any form whatsoever". Aber ganz so weit sind wir wohl noch nicht.

(Eingegangen 23. März 1928.)

BESPRECHUNGEN.

E. Marx, Handbuch der Radiologie, IV. Bd., 3. Teil: Glühelektroden von O. W. Richardson, Technische Anwendung der Glühelektroden von H. Rukop, Flammenleitung von E. Marx. 2. Aufl. Gr. 8⁰. XVI u. 724 S. Mit 190 Fig. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1927. M. 48.—, geb. M. 50.—.

Von der zweiten Auflage des Marxschen Handbuches liegt nunmehr auch der Band über Glühelektroden und Flammenleitung vor.

Er enthält als ersten Abschnitt Richardsons Bearbeitung des Gebietes „Glühelektroden", übersetzt von A. Karolus. Auf 260 Seiten bespricht der Verfasser der Reihe nach die verschiedenen älteren Theorien der Elektronenemission heißer Körper, die Temperaturabhängigkeit der Emission, den Einfluß von Gasen auf die Emissionseigenschaften insbesondere von Platin und Wolfram und die Energieverhältnisse der Elektronenemission. Auch die Aussendung positiver Ionen durch heiße Metalle und Salze und bei chemischen Vorgängen wird ausführlich besprochen.

Da dieser von Richardson verfaßte Teil mit dem Jahre 1922 abschließt, wurden Ergänzungen zu den einzelnen Abschnitten in Form eines „Nachtrages" notwendig, der in dankenswerter Weise von E. Rupp besorgt wurde und in Kürze auf 30 Seiten die Besprechung der theoretischen und experimentellen Arbeiten der letzten Jahre bringt, die ja für das ganze Gebiet der Thermionik von fundamentaler Bedeutung geworden sind (μ-Thermodynamik, monomolekulare Schichten). Leider muß man feststellen, daß diese Art der Behandlung weder dem heutigen Schwerpunkt der thermionischen Probleme gerecht wird, noch die Übersichtlichkeit der Darstellung fördert, zumal durch die Besprechung der vielen nur noch historisches Interesse beanspruchenden Arbeiten im Hauptteil dem Leser sowieso der Überblick über das Gebiet außerordentlich erschwert wird.

Entsprechend der großen Bedeutung, die dieses Teilgebiet der Physik für die Technik gewonnen hat, ist der technischen Anwendung der Glühelektroden ein selbständiger zweiter Abschnitt in der neuen Auflage gewidmet worden, der von H. Rukop verfaßt wurde. In konzentrierter, doch außerordentlich übersichtlicher Weise wird auf 120 Seiten ein Überblick über die Theorie und Praxis der Glühelektrodengleichrichter-, Eingitter- und Mehrgitter-Röhren sowie ihrer Schaltungen gegeben. Zahlreiche Abbildungen aus der Praxis geben einen Überblick über den Umfang der technischen und kommerziellen Bedeutung, die die Thermionik in den letzten Jahren gewonnen hat. Bei den Photographien wünschte man sich vielleicht hier und da, daß bei einer Neuauflage ihre Inhaltshöhe sich der musterhaften Konzentration des Textes mehr anschließen würde.

Im dritten Teil dieses Bandes (280 S.), der vom Herausgeber selbst stammt, wird in bemerkenswert übersichtlicher und vollständiger Darstellung das Gebiet der Flammenleitung behandelt: Die typischen elektrischen Eigenschaften der Flamme, die Messung ihrer Leitfähigkeit, Beweglichkeit und Verschiebung in Flammengasen und schließlich die Theorie der Flammengase. W. Espe.

Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie, Systemnummer 6: Chlor. Herausgegeben von der Deutschen Chemischen Gesellschaft. Bearbeitet von R. J. Meyer, Stellvertretender Redakteur Erich Pietsch. 8. Aufl. Gr. 8⁰. XVI und 442 S. Mit 9 Fig. Berlin, Verlag Chemie G.m.b.H. 1927. M. 68.—.

Es ist bei diesem Handbuch (im Gegensatz zu manchen älteren Unternehmungen gleicher Art) besonders begrüßenswert, daß die Einzelbände dank der vorzüglichen Organisation in so rascher Folge erscheinen können. So darf man hoffen, nach Fertigstellung ein ziemlich in einem Guß entstandenes Werk in Händen zu haben, für den Benutzer ein nicht zu unterschätzender Vorteil. So ist Ende vorigen Jahres der Band Chlor der Öffentlichkeit übergeben worden, von den bisherigen der umfangreichste. Die an dieser Stelle bei Besprechung der übrigen Bände hervorgehobenen Prinzipien in der Verarbeitung des Materials kehren hier wieder, so daß sich ein nochmaliges Eingehen erübrigt. Referent kann gerade bei diesem Bande aus eigener Erfahrung bestätigen, daß er für den Benutzer nicht nur ein vollständiger Literaturnachweis, sondern geradezu eine extrem gründliche Monographie darstellt. Das System der tabellenartigen Übersichten über ganze Stoffklassen, hier insbesondere bei der „Übersicht über die Chloride" recht weit ausgebaut, dürfte zumal der vergleichenden Forschung viel wertvolles Material liefern, das bisher mühsam aus der Originalliteratur gesammelt werden mußte.

Vereinzelte Inhomogenitäten und Fehler fallen demgegenüber nicht ins Gewicht und lassen sich hoffentlich zukünftig noch mehr wie bisher schon vermeiden. G.-M. Schwab.

R. Mügge, Über warme Hochdruckgebiete und ihre Rolle im atmosphärischen Wärmehaushalt. (Veröffentl. d. geophysik. Inst. d. Univ. Leipzig. Dir.: Prof. Dr. L. Weickmann). Zweite Serie. Spezialarbeiten aus dem geophysik. Inst. Bd. 3. Heft 4. S. 240—266. Mit 7 Fig. im Text. Leipzig 1927.

Neben den kalten, niederen Hochdruckgebieten, welche sich rein thermisch leicht erklären lassen, unterscheiden wir in der Meteorologie noch hochreichende Maxima, welche durch hohe Temperatur der Troposphäre und tiefe Temperatur der Stratosphäre gekennzeichnet sind. Da nun für die Abhängigkeit der vertikalen Temperaturverteilung unserer Atmosphäre von der geographischen Breite eine inverse Beziehung besteht in dem Sinne, daß über den Tropen die Troposphäre warm, die Stratosphäre sehr kalt ist und über dem Pole umgekehrt, so lag der Gedanke nahe, die warmen Hochdruckgebiete unserer Breiten durch meridionale Verschiebung, d. h. eine die ganze Atmosphäre umfassende Luftversetzung aus Süden zu erklären.

Mügge bringt nun in der vorliegenden Arbeit zwei Beispiele hoher Antizyklonen, bei denen die vorige Erklärung nicht zutrifft; an Hand von Temperatur- und Strömungskarten der Substratosphäre



wird gezeigt, daß es sich in beiden Fällen um die Ausbildung abgeschlossener stratosphärischer Kälteinseln mit selbständigem Druck- und Windsystem handelt, ein Zusammenhang mit der Äquatorialfront also nicht besteht. Mügge sucht nur in Anlehnung an die klassische Arbeit von Emden „Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung" das Zustandekommen der Stratosphärentemperaturen mit Hilfe der Strahlungstheorie zu erklären. Nach Emden ist die Stratosphärentemperatur wesentlich bestimmt durch die kurzwellige Zustrahlung A und die langwellige Rückstrahlung B; Strahlungsgleichgewicht in einer Atmosphärenschicht herrscht, wenn die Absorption gleich der Emission ist, also die Gleichung $dA = dB$ oder $A - B = R =$ Constans erfüllt ist. Emden behandelt rechnerisch nur den speziellen Fall $R = O$ oder $A = B$ und findet hierbei unter der Annahme mittlerer Verhältnisse für die Temperatur am Boden $+ 12^0$, für die Temperatur der Stratosphäre -60^0, also gute Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen; für die vertikale Temperaturabnahme in der Troposphäre und ebenso für die Abhängigkeit der Stratosphärentemperatur von der geographischen Breite dagegen ergeben sich große Widersprüche.

Mügge betrachtet nun den Fall des Allgemeinen Strahlungsgleichgewichts $A - B = R$; hierbei sind $R > O$ oder $A > B$ Gebiete unserer Erdoberfläche, in denen die Einstrahlung überwiegt, also die Tropen bis etwa 35^0 Breite, $R < O$ oder $A < B$ Gebiete, in denen die Ausstrahlung überwiegt, also die mittleren Breiten und die Polarzone. Mügge folgert nun weiter, daß infolge des meridionalen Temperaturgefälles in der Troposphäre durch horizontale Konvektion Wärmemengen in den unteren Schichten fort- oder herbeigeschafft werden. Hierdurch wird der in dem Weltenraum zurückgehende Strom langwelliger Strahlung B in den Einstrahlungsgebieten vermindert, in den Ausstrahlungsgebieten vermehrt, was auf die Temperatur der hohen durch diese Strahlung geheizten Luftschichten großen Einfluß haben muß. Mügge vermag aus der bekannten Zustrahlung J (effektive Sonnenstrahlung) und den tatsächlich in der Stratosphäre beobachteten Temperaturen den meridionalen Wärmestrom $R\varphi$ zu berechnen und kommt hierbei zu Werten, welche mit den von anderer Seite gefundenen Beträgen gute Übereinstimmung zeigen.

Die Arbeit von Mügge ist für die Erklärung der tiefen Stratosphärentemperaturen über warmen Hochdruckgebieten grundlegend. Peregrin Zistler.

B. Haurwitz, Beziehungen zwischen Luftdruck- und Temperaturänderungen. Ein Beitrag zur Frage des „Sitzes" der Luftdruckschwankungen. (Veröffentl. d. geophysik. Inst. d. Univ. Leipzig. Dir.: Prof. Dr. L. Weickmann). Zweite Serie-Spezialarbeiten aus dem geophysik. Inst. 3. Band. 5. Heft. S. 267—335. Mit 17 Tabellen, 16 Fig. u. 4 Tafeln. Leipzig 1927.

Die vorliegende Arbeit knüpft an an eine Untersuchung von Schedler „Über den Einfluß der Lufttemperatur in verschiedenen Höhen auf die Luftdruckschwankungen am Erdboden". Schedler hat aus der bekannten barometrischen Höhenformel $P = p \cdot e^{\frac{g z_m}{R T_m}}$ durch Differentation eine Gleichung für die Bodendruckänderung gewonnen von der Form $dP = \frac{P}{p} dp - P \frac{g z_m}{R T_m^2} dT$; in ihr wird das erste Glied auf der rechten Seite als Druck- oder Restglied auch als primäre Welle, das zweite Glied als thermischer Einfluß auch sekundäre Welle bezeichnet. Für $dT_m = 0$ also konstante Mitteltemperatur folgt $dP = \frac{P}{p} dp$; diese Formel ist vielfach so gedeutet worden, daß eine geringe Druckänderung in der Höhe eine große Bodendruckänderung bewirke. Der physikalische Vorgang ist dagegen folgender: Ein bestimmter Massenzuwachs in der Höhe z, dem eine bestimmte Bodendruckänderung entspricht, wird die unterhalb z liegende Luftsäule komprimieren, wobei der größte Teil der zugeführten Masse unterhalb z zu liegen kommt, von einem Barometer in z also nicht mehr registriert wird. Die Formel gibt nach eingetretenem Gleichgewichtszustand wohl die Beziehung zwischen Druckänderung oben und unten, läßt aber keinen Schluß auf Ursache und Wirkung zu. Die beiden Glieder auf der rechten Seite obiger Gleichung sind außerdem keineswegs voneinander unabhängig; ein Massenzuwachs oder eine Druckzunahme in der Höhe wird infolge Kompression die darunterliegende Luftschicht adiabatisch erwärmen, wodurch ein Teil des oberen Druckanstiegs kompensiert wird, ebenso werden Temperaturänderungen irgendeiner Schicht von Massenänderungen der anderen Schichten begleitet sein. Neben diesen Bemerkungen zur Schedlerschen Arbeit werden von Haurwitz im 1. Teil die Höhen- und Temperaturänderungen an der Stratosphärengrenze, die Vorgänge am Erdboden, die Zusammenhänge zwischen Bodendruck, Mitteltemperatur und Druck in der Höhe, adiabatische Änderungen, sowie Änderungen der Luftdichte theoretisch erörtert.

Der zweite Teil bringt eine statistische Untersuchung der Beziehungen zwischen Druck- und Temperaturänderungen in der Atmosphäre, der eine Einteilung in Gruppen nach Änderungen am Boden und an der Stratosphärengrenze zugrunde liegt. Die Ergebnisse, welche sich in der Hauptsache in eine Vorzeichenregel zusammenfassen lassen, sind kurz folgende: Teilweise ist das Vorzeichen der Temperaturänderung in Troposphäre und Stratosphäre dasselbe, teilweise ist es in der mittleren Troposphäre entgegengesetzt; bei einer Anzahl von Gruppen wurde gefunden, daß die Temperaturänderung in der Troposphäre und Stratosphäre gerade entgegengesetzt ist. In der Mehrzahl der Fälle muß die Erklärung der interdiurnen Bodendruckänderungen in Vorgängen der Troposphäre gesucht werden, in anderen Fällen in Troposphäre und Stratosphäre zugleich und nur in 18 Proz. der Fälle in der Stratosphäre allein.

Die synoptische Bearbeitung zweier Fälle im 3. Teil bestätigt das Ergebnis der Statistik; im ersten, weitaus häufigeren Falle wird der Bodendruck durch die Temperaturänderung der Troposphäre bestimmt, im zweiten Falle sind die Massenänderungen in den höheren Schichten ausschlaggebend.

Zahlreiche Tabellen und Figuren belegen und illustrieren die gefundenen Resultate. Die vorliegende Arbeit bildet einen wertvollen Beitrag zur Frage des „Sitzes" der Luftdruckschwankungen und hat mit manchen Unklarheiten aufgeräumt. Leider muß man, wie so oft in der Meteorologie, auch auf Grund der Untersuchungen von Haurwitz wieder feststellen, daß die Beziehungen zwischen Luftdruck- und Temperaturänderungen unserer Atmosphäre sich nicht einfacher, sondern komplizierter gestalten, als bisher angenommen wurde. Peregrin Zistler.

P. P. Kondratzkij, Theoretische Farbenlehre. 1. Teil. Kolorostatik (Lehre vom Gleichgewicht der Farben). Gr. 8⁰. VIII u. 46 S. Mit 14 Fig. Twerj, Chem. Labor. d. Prolet. Werkstätten. März 1927. Brosch. 85 Kopeken.

Inhalt: Der Verfasser baut auf der Tatsache, daß man bunte Farben durch optische Mischung zu Grau vereinigen (= ins Gleichgewicht bringen) kann, eine Farbenlehre auf, Kolorostatik genannt, in der die Farbe als komplexe Größe behandelt und durch die Gleichung

$$y = w + v/2\ [1 + \cos(x_0 - x)]$$

dargestellt wird.

Die Grundlage dieser mit Methoden der Mechanik aufgestellten Farbenlehre bildet das „farbige Gleichgewicht". Darunter versteht der Verfasser denjenigen Zustand, in dem sich zwei oder mehr Farben gegenseitig zu Grau mischen lassen. Zum optischen Mischen dient ihm der Farbkreisel, den er als Meßgerät „Kolorometer" nennt. Ein Satz bunter, möglichst reinfarbiger Kreisscheiben mit einem radialen Einschnitt sowie eine weiße und eine schwarze Kreisscheibe dienen zum Vergleichen mit dem als kleineren Kreis auf das Kolorometer aufgesteckten Prüfling. Bei Rotation des Kolorometers erhält er zwei konzentrische Kreise, die sich auf Gleichfarbigkeit einstellen lassen. Er gibt dann in Prozenten die Größe der Sektoren an, die an der Ermischung der zu messenden Farbe beteiligt sind. Den Schwarzanteil gibt er jedoch nicht erst an, „da er in der Rechnung nirgends auftritt".

Der Verfasser scheidet dann zunächst bunte und unbunte Farben; den letzteren schreibt er eindimensionale Ordnung zu, während er die bunten Farben der allgemeinen Auffassung entsprechend als dreidimensional annimmt und für sie drei Maßzahlen festlegt. Er unterscheidet weiter bei den bunten Farben trübe und reine Farben: reine Farben nennt er solche, die entweder nur einen Schwarz- oder nur einen Weißanteil oder überhaupt keinen unbunten Anteil aufweisen. Unter gesättigten Farben versteht er Farben ohne Zusatzweiß. Wird in solchen Farben der Schwarzgehalt immer geringer, was ja nur eine Steigerung der Helligkeit bedeutet, so nähert sich die Farbe der (idealen) Vollfarbe.

Die Entstehung des farbigen Eindruckes erklärt der Verfasser durchaus analog der üblichen Betrachtungsweise: von einer Oberfläche wird ein Teil des Lichtes aller Wellenlängen absorbiert, ein anderer Teil remittiert, außerdem wird noch Licht bestimmter Wellenlängen absorbiert, so daß das gesamte remittierte Licht sich zusammensetzt aus Licht aller Wellenlängen (= Weiß) und Licht bestimmter Wellenlängen (= Farbe). Jedoch kommt der Verfasser im Anschluß hieran gänzlich unvermittelt zu dem Schluß, die Menge des Lichtes bestimmter Wellenlängen, die absorbiert wird, müsse gleich der des remittierten Lichtes der übrigen Wellenlängen sein.

Der Verfasser führt nun einige neue Begriffe ein. Er nennt die Menge des weißen remittierten Lichtes die „unbunte Masse" und die Menge des bunten Lichtes (d. h. die Lichtmenge, von der nach seiner Annahme die Hälfte absorbiert und die Hälfte remittiert wird!) die „bunte Masse" einer Farbe. Dann bezieht er diese Massen auf die Fläche, von der sie remittiert werden und gelangt so zu den Begriffen „unbunte Spannung" bzw. „bunte Spannung". Die gesamte remittierte Lichtmenge heißt „farbige Gesamt-Masse". Bezieht er diese auf die Fläche, so erhält er die Definition des „Albedo". (Diesen Begriff wollen wir jedoch, um uns nicht von der sonst üblichen Vorstellung vom Albedo beirren zu lassen, mit dem von Dr. A. Klughardt[1]) eingeführten Wort „Bezugshelligkeit" wiedergeben, da die beiden Begriffe sich vollkommen decken). Für die unbunte Spannung führt er den Buchstaben w und für die bunte Spannung v ein. Dann ergibt sich für die Bezugshelligkeit

$$A = w + \frac{v}{2}.$$

Den Farbton einer Farbe definiert der Verfasser als das Merkmal, durch das sich zwei Farben von gleicher Bezugshelligkeit und gleichem Weißanteil unterscheiden. Er nimmt 36 ganze Farbtöne an, die je 10 Winkelgraden des Kreises entsprechen. Der Farbton soll eine direkte Funktion eines „Winkelparameters" x sein. Er wird mit einer Ordnungszahl (allgemein: X) bezeichnet, und es besteht folgende Beziehung zwischen x und X:

$$X = 0{,}1\,x.$$

Schließlich wird noch die „Konzentration" der Farbe eingeführt. Dies bedeutet das Verhältnis der halben bunten Spannung zur Bezugshelligkeit, auf 100 bezogen:

$$C = 100\,\frac{V}{2A}.$$

(Dies stellt eine Größe dar, die von Dr. A. Klughardt in der oben angezogenen Arbeit „Buntheit" einer Farbe genannt worden ist, da sie das farbige Aussehen charakterisiert. Er bezieht sie allerdings auf 1 und bezeichnet sie mit $\varkappa$).

Der Verfasser verwendet zur Charakteristik einer Farbe diese drei Größen A, X und C. Er schreibt sie dann als Farbsymbol in folgender Form:

$$Z = [A\,(X)\,C].$$

Für die Rechnung jedoch muß er die Größen w, x und v verwenden. Die Umrechnungsformeln gibt er an:

$$A = w + v/2 \qquad X = 0{,}1\,x \qquad C = 100\,v/2A$$
$$w = A\,\frac{100 - C}{100} \qquad x = 10\,X \qquad v = \frac{2AC}{100}.$$

Nach diesen Festlegungen kommt er zur Aufstellung der „Grundsätze der Kolorostatik". Er nennt dabei ein konjugiertes Farbenpaar ein solches, das bei Mischung Grau ergibt. Die Farbtöne dieser beiden nennt er, wie üblich, komplementär. Er gelangt schließlich zu folgenden beiden Hauptgrundsätzen:

1. Jedem Farbton ist ein komplementärer zugeordnet.
2. Die bunten Massen zweier im Gleichgewicht befindlichen Gegenfarben sind einander gleich.

Mittels dieser Sätze sucht der Verfasser die Farbe mathematisch zu erfassen. Er betrachtet zunächst die Remissionskurve, die die remittierte Lichtmenge über den Wellenlängen angibt. Er weiß nun, daß zwar einer bestimmten Kurve eine ganz bestimmte Farbe entspricht, daß aber umgekehrt eine Farbe die verschiedensten Remissionskurven haben kann. Er zieht daher Vergleiche mit der Mechanik, wo zwei Kräfte zu nur einer Resultierenden vereinigt werden können, jedoch jede Kraft in beliebig viele und beliebig gerichtete Komponenten zerlegt werden kann. Um die Rechnung zu ermöglichen, zerlegen wir die Kräfte in Komponenten, die zu den Achsen eines festen Koordinatensystems parallel sind. Warum, so

1) Dr. A. Klughardt, Farbmessungen an glänzenden Oberflächen. Leipziger Monatsschrift für Textilindustrie. 1927/6. 7.



meint der Verfasser, kann ich nicht auch aus der Mannigfaltigkeit der Remissionskurven mir die auswählen, die für die Rechnung zu verwenden sind. Er erhält diese Kurve, die er dann das „kanonische Spektogramm" einer Farbe nennt, indem er, allerdings nur unter Hinweis auf das Experiment als Beweis für die Richtigkeit der Methode, folgende Gleichung dafür aufstellt:

$$y = w + \frac{v}{2}\left[1 + \cos(x_0 + x)\right] \cdot$$

Das ergibt dann eine Cosinuslinie, deren Minimum (bei $180 + x_0$) den Betrag w hat und deren Maximum bei x_0 $w + v$ beträgt (x_0 ist der Winkelparameter der Farbe). Diese Gleichung diente dem Verfasser zur Berechnung von Mischfarben, und da nach seinen Angaben die Rechnungen mit den Versuchsresultaten übereinstimmten, sieht er hierin den Beweis für die Richtigkeit seiner Theorie. Er addiert optisch zwei Farben mit den Parametern w_1, v_1, x_1 und w_2, v_2, x_2. Bei der Mischung entsteht eine Farbe, die durch die Gleichung

$$Y = W + \frac{V}{2}\left[1 + \cos(\xi - x)\right]$$

dargestellt wird. Er findet dann

$$\tan\xi = \frac{v_1 \cdot \sin x_1 + v_2 \sin x_2}{v_1 \cdot \cos x_1 + v_2 \cos x_2}$$

$$V = \frac{v_1 \sin x_1 + v_2 \cdot \sin x_2}{\sin\xi} = \frac{v_1 \cdot \cos x_1 + v_2 \cdot \cos x_2}{\cos\xi}$$

$$W = w_1 + w_2 + \frac{(v_1 - v_2) - V}{2}.$$

Um nun weitere mathematische Untersuchungen zu ermöglichen, betrachtet er die Farbe als komplexe Größe, die aus dem Skalar w und dem Vektor v besteht, denn die bunte Spannung ist eine gerichtete Größe, deren Richtung durch den Winkelparameter des Farbtons angegeben wird. Daher sind die bunten Spannungen nach den Rechengesetzen der Vektorenrechnung zu behandeln. Analog der Mechanik, wo sich Kräfte dann im Gleichgewicht befinden, wenn ihre Resultierende gleich O wird oder, anders ausgedrückt, ihre Vektoren ein geschlossenes Krafteck bilden, so herrscht Gleichgewicht der bunten Spannungen, wenn ihre Vektoren ein geschlossener „Farbeck" bilden.

Auf Grund der aufgestellten Lehrsätze schildert nun der Verfasser, wie beispielsweise ein Satz von 6 Bezugs-Farbscheiben, die er zum Ermischen der zu messenden Farbe auf dem Kolorometer braucht, geeicht wird. Er findet zunächst die Winkelabstände der 6 Farbtöne von einander und bezieht sie dann auf den Farbton des äußersten spektralen Rot, dem er den Winkelparameter 0 bzw. 360 erteilt. Außerdem findet er für jede Farbscheibe eine Konstante, die zur Umrechnung der abgelesenen Sektorgröße in die bunte Spannung erforderlich ist. Er vereinigt dann diese Konstanten mit den Winkelparametern und deren Sinus- und Cosinusfunktion und einigen anderen Hilfsrechengrößen in einer Tabelle, die für alle Messungen, die mit diesem Farbscheibensatz ausgeführt werden, gültig ist.

Im letzten Kapitel seines Buches gibt er schließlich drei Beispiele der Anwendung seiner Methode: eins für die Messung der Bestimmungsstücke, eins für die Einstellung einer Farbe bei gegebenen Bestimmungsstücken und eins für die Berechnung und Einstellung der Gegenfarbe. Es wäre nun zur endgültigen Beurteilung der Theorie notwendig, die Angaben mit anderen, genaueren Hilfsmitteln, als es der primitive Farbkreisel ist, nachzuprüfen.

Im übrigen weist der Verfasser in seiner Schrift mehrfach auf den zweiten und dritten Teil seiner Farbenlehre hin, die noch erscheinen sollen: Kolorodynamik (= Lehre von den Farbstoffen) und Koloro-Ästhetik (= Farbenharmonielehre).

Referat, in der Wissenschaftlichen Abteilung der Deutschen Werkstelle für Farbkunde zu Dresden am 29. Mai 1927 gehalten von Manfred Richter.

Der russische Titel lautet:

П. П. Кондрацкий, Теоретическая Колористика; часть 1: Колоростатика. (Учение о цветовом равновесии). Издание сотрудников Химической Лаборатории Тверской Пролетарской Мануфактуры. Тверь. 1927 г. Цена 85 коп.

A. Boutaric, Thermodynamique et Chimie. Nach der zweiten Auflage des Werkes von P. Duhem. Gr. 8⁰. VI und 651 S. Mit 181 Fig. Paris, Librairie scientifique. J. Hermann. 1926. Fr. 70.—.

Diese Neuauflage der „Leçons de thermodynamique et chimie à l'usage des chimistes" von Duhem wurde unter weitgehender Erhaltung des Originals nur unter Anpassung an die neueren Fortschritte durchgeführt, um den Namen des Autors, der nach Ansicht Boutarics in der nichtfranzösischen Literatur zu wenig genannt wird, der Vergessenheit zu entreißen.

Für einen mathematischen Schriftsteller ist bekanntlich gerade die französische Sprache in besonderem Maße „eine gebildete Sprache, die für ihn dichtet und denkt". So zeichnet sich auch dieses Werk gegenüber zahlreichen gleichen Themas durch eine ganz ungemein instruktive Darstellungsweise aus. Die Verständlichkeit wird durchaus nicht durch einen dem gebrachten Material etwa nicht entsprechenden Umfang gewonnen. Unterstützt ist die klare Sprache durch eine große Zahl klarer Abbildungen, von denen besonders die anschaulichen Raumdiagramme mehrvarianter Systeme Erwähnung verdienen.

Der Inhalt ist der, den jedes vollständige Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Beziehung zur Chemie besitzen muß. Hauptsätze, Phasenregel, Massenwirkungsgesetz werden mit ihren Anwendungen vollständig behandelt. Die Auffassung der thermodynamischen Denkweisen ist dabei weniger eine besonders tiefe oder vielseitige, als eine einheitliche; alle Ableitungen werden vom Gesichtspunkt der freien Energie aus gegeben. Dem Umfang des Buches nach kommt der dritte Hauptsatz, der auf einigen Seiten und in veralteter Fassung besprochen wird, allzu kurz weg. Demgegenüber wird, im Sinne einer gewissen französischen Schule, ein zu großer Wert auf die sog. „falschen Gleichgewichte" gelegt. Daß es sich dabei zum Teil um echte, aber metastabile Gleichgewichte, zum Teil nur um Einstellungsverzögerungen handelt, kommt nicht genügend zum Ausdruck. Am Schluß hat der Bearbeiter, etwas über den Rahmen des Themas hinausgehend, ein kurzes Kapitel über Katalyse angefügt, in dem jedoch mehr auf die Probleme hingewiesen, als die vorhandenen Lösungsansätze gegeben werden.

Nichtsdestoweniger scheint das Werk als Lehrbuch ausgezeichnet gelungen zu sein.

G.-M. Schwab.



J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung. 2. Aufl. XVI u. 434 S. Mit 62 Abb. Stuttgart, Konrad Wittwer. 1926. Leinenband M. 27.—.

Das Buch ist bestimmt für den wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur und soll den verschiedenen Fachrichtungen wie Elektrotechnik, Festigkeitslehre, Turbinenbau in gleicher Weise dienen. Sein Zweck ist nicht, den physikalischen oder technischen Inhalt der verschiedenen Disziplinen, sondern die Vektorrechnung selbst zu lehren. Über den Wert der Vektorrechnung spricht sich der Verfasser ausführlich im Vorwort aus.

Das Buch zerfällt in drei Kapitel: Vektoralgebra, Vektoranalysis, Affinorrechnung. Den Abschluß bildet eine sehr ausführliche Formelsammlung. Die Aufnahme der Affinor-Rechnung dürfte dem Leser, der nicht alle Originalarbeiten studieren will, sehr willkommen sein, da letztere nicht nur in der Nomenklatur und Schreibweise, sondern auch in der Auffassung stark voneinander abweichen.

Die Darstellung ist sehr ausführlich und leicht verständlich. Obgleich nur wenige mathematische Vorkenntnisse vorausgesetzt sind, werden doch auch die schwierigsten Gebiete in methodischem Aufbau vorgeführt. Maßgebend für die ganze Anlage des Buches ist der didaktische Gesichtspunkt, daß, wie jede andere Disziplin, auch die Vektorrechnung nur durch Übung erlernt werden kann. Am Schluß jedes Paragraphen sind Aufgaben gestellt, welche selbst ebenso wie ihre Lösungen noch wichtige, im Text nicht berücksichtigte, Einzelheiten enthalten.

Das Buch kann bestens empfohlen werden.

Druck und Ausstattung sind sehr gut.

Schachenmeier.

W. Brückmann, Börnsteins Leitfaden der Wetterkunde. In 4. Auflage neu bearbeitet. Gr. 8⁰. VI u. 284 S. Mit 69 Abb. u. 22 Tafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn A.-G. 1927. M. 15.—, geb. M. 17.—.

Die rasche Entwicklung der Meteorologie nach dem Kriege, die zu teilweise ganz neuen Anschauungen führte, machte eine Neubearbeitung des im Jahre 1913 in 3. Auflage erschienenen Leitfadens der Wetterkunde von R. Börnstein notwendig. Prof. Brückmann hat diese Aufgabe in ausgezeichneter Weise gelöst, so daß das Buch, ohne seinen früheren Umfang wesentlich zu vergrößern, eine überaus klare und umfassende Übersicht über den jetzigen Stand der Meteorologie gibt.

Einen wesentlichen Fortschritt bedeutet schon die Neueinteilung der Materie: Die ursprünglichen drei Abschnitte über Luftfeuchtigkeit, Bewölkung und Niederschlag wurden folgerichtig in ein Kapitel „Der Wasserdampf der Atmosphäre" zusammengefaßt. Die Kapitel über Luftdruck und Wind wurden weiter vorangesetzt; die große Wichtigkeit, welche nach der Polarfronttheorie den „Luftbewegungen" zukommt, machte eine völlige Neubearbeitung dieses Abschnitts erforderlich. Die Loslösung der Wettervorhersage von der Luftelektrizität und ihre Vereinigung mit dem Kapitel Wetterdienst unter der gemeinsamen Überschrift „Synoptische Meteorologie" ist gleichfalls viel zweckentsprechender; ergänzend fanden hier auch die neueren Untersuchungen über Witterungsperioden Aufnahme. Neu ist das Kapitel über „Optische Erscheinungen", sowie die früher verstreute Beschreibung der „Meteorologischen Instrumente" in einem eigenen Schlußkapitel. Hervorzuheben wäre ferner die teilweise neue Darstellung der Strahlungsvorgänge, sowie die Aufnahme einiger wichtiger theoretischer Ableitungen, welche den Wert des Buches besonders für den Physiker bedeutend erhöhen. Volles Lob verdient wieder die Ausgestaltung mit klaren Textfiguren und prächtigen Tafeln, sowie das reichhaltige Literaturverzeichnis.

Der vorliegende Leitfaden der Wetterkunde kann jedem Physiker sowie jedem Studierenden der Meteorologie wärmstens empfohlen werden.

Peregrin Zistler.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1928.

Technische Hochschule Aachen. Starke: Experimentalphysik II, 4, Übungen im physikalischen Laboratorium, 4 und 2, für Vorgeschrittene, 4; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl. — **Seitz:** Theorie der Wechselströme, 2; Experimentalphysik, enzyklopädischer Kurs, 2; Übungen im physikalischen Praktikum, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Polis:** Klimatologie, 2; Aerologie, 1; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie, 1; Meteorologische Technik, 1, Übungen, 2—4. — **Kirschbaum:** Photographie, 1, Übungen, 4; Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1. —

Universität Berlin. Nernst: Experimentalphysik: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Physikalisches Kolloquium (mit v. Laue), 2 *g*; Physikalische Forschungsarbeiten (mit Wehnelt, Pringsheim, Hettner und Czerny), tägl. — **Schrödinger:** Mechanik deformierbarer Körper, 4; Theoretisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Hettner:** Theorie der Wärme, 4. — **Czerny:** Wärmestrahlung, experimenteller Teil, 1. — **v. Laue:** Optische Beugungserscheinungen, 2: Physikalisches Proseminar (mit Einstein, Pringsheim und Hettner), $1^1/_2$. — **Paschen:** Grundlagen spektroskopischer Forschung, 2. — **Pringsheim:** Elektrizitätsleitung in nichtmetallischen festen Körpern, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, 8. — **Bothe:** Röntgenphysik, 1. — **Weißenberg:** Röntgenographische Strukturbestimmung, 1. — **Ladenburg:** Elektrooptik: Lichtelektrischer Effekt, Starkeffekt u. ä., 1. — **Kiebitz:** Über die physikalischen Grundbegriffe der Elektrotechnik, 1. — **Grotrian:** Theorie und Praxis der spektroskopischen Instrumente, 1. — **Henning:** Grundlagen und Methoden der Temperaturmessung, 1. — **Byk:** Nicht-euklidische Geometrie und Relativitätstheorie, 2 *g*. — **Meitner:** Physikalisch-radioaktive Untersuchungen, tägl. — **Schüler:** Atombau und periodisches System, 1. — **Kallmann:** Über Ionisation und Dissoziation von Molekülen durch Licht und Elektronen, 1 *g*. — **Szillard:** Korpuskularstrahlen, 1 *g*; Besprechung neuerer Arbeiten zur Quantentheorie (mit Neumann v. Margitta), $1^1/_2$ *g*. — **Westphal:** Physik des täglichen Lebens, 1. — **Blasius:** Praktische Übungen für Fortgeschrittene, 7. — **Wehnelt:** Physikalisches Anfängerpraktikum, 7, Ergänzungen, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das naturwissen-

schaftliche Arbeiten, 3. — **Reichenbach:** Naturphilosophisches Kolloquium, 2 *g*; Das physikalische Weltbild der Gegenwart, 1. — **v. Ficker:** Dynamische Meteorologie, 2; Wetterverhältnisse der Alpen, 1 *g*; Anleitung zur Ausführung meteorologisch-klimatologischer Arbeiten (mit Knoch), tägl. *g*. — **Less:** Allgemeine Klima- und Wetterkunde, 1; Landwirtschaftliche Klimakunde, 1. — **Kähler:** Meteorologische Optik, 1. — **Knoch:** Quellenwerke der Meteorologie und Klimatologie, 1. — **Hergesell:** Über die Instrumente der aerologischen Forschung, insbesondere solcher, die im Flugzeug zu verwenden sind, nach Vereinbarung, *g*. — **Marcuse:** Luftfahrt, allgemeine Darstellung ihrer wissenschaftlichen und technischen Grundlagen, mit Lichtbildern, Demonstrationen und Exkursionen, 1½. — **Bartels:** Ebbe und Flut des Erdkörpers und der Atmosphäre, 1. —

Technische Hochschule Dresden. **Dember:** Experimentalphysik II: Elektrizität und Magnetismus, Gasentladungen, Kathoden- und Röntgenstrahlen, 5; Physikalisches Praktikum I, 3 und 6, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Seminar, 14 tägig, 1 *g*. — **Luther:** Ausgewählte Kapitel aus der wissenschaftlichen Photographie, 2 *g*; Photographisches Praktikum für Anfänger, 4 und 8, für Fortgeschrittene, 4, 8 und 12; Selbständige Arbeiten, 2, 4, ganz- und halbtägig. — **Toepler:** Theoretische Physik: Elektrizität und Magnetismus, 3, Übungen 14tägig, 2; Ausgewählte Abschnitte aus der theoretischen Physik, 2; Größere physikalische Arbeiten, ganztägig; Hochspannungspraktikum, ausgewählte Aufgaben für Fortgeschrittene, 6; Kolloquium über Strahlenforschung (mit Wiedmann und Saupe), 4 wöchentlich, 2 *g*. — **Wiedmann:** Fluoreszenz, Phosphoreszenz und Lichtelektrizität, 1; Röntgentechnische und spektroskopische Übungen, 3; Selbständige Arbeiten, ganztägig. — **Saupe:** Medizinisch-röntgentechnisches Praktikum, 14tägig, 2. — **Alt:** Ausgewählte geophysikalische Probleme, 1. — **Goldberg:** Kinematographie, 1 *g*. — **Klughardt:** Die Berechnung der optischen Systeme I: Farbenfehler, sphärische Aberration, Sinusbedingung, mit Übungen, 2; Die photographischen Objektive, 1; Einführung in die analytisch-optischen Rechenverfahren, 1. —

Universität Graz. **Benndorf:** Experimentalphysik: Wärmelehre, 3; Besprechung spezieller geophysikalischer Probleme (mit Wegener), 2; Physikalische Übungen für Anfänger I (mit Rumpf), 6, II, 9; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend, *g*; Besprechung physikalischer Fragen (mit Hess und Radakovic), 2 *g*. — **Hess:** Experimentalphysik II, 5; Physikalische Besprechungen, 1 *g*. — **Rumpf:** Ausgewählte Kapitel aus der neueren Elektrizitätslehre, 2. — **Rosenberg:** Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3. — **Radakovic:** Mechanik, 5; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Hillebrand:** Astromechanik (Fortsetzung), 5. — **Wegener:** Theoretische Meteorologie II: Optik, Akustik, Elektrizität der Atmosphäre, 3. —

Universität Greifswald. **Krüger:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler, 6, für Mediziner, 2; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl.; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten: Kolloquium (mit Seeliger), 1½. — **Seeliger:** Theorie der Wärme, 4; Übungen und Ergänzungen zur Thermodynamik, 14tägig, 2; Theorie der festen und flüssigen Isolatoren, 1; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl. — **Reinkober:** Der Magnetismus, 1; Einführung in das Physikalische Praktikum II: Maßeinheiten und Meßmethoden in Elektrizität und Optik, 1 *g*; Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 3. — **Mierdel:** Phys. Grundlagen der Elektromedizin, 2. —

Technische Hochschule Karlsruhe. **Gaede:** Physik I B, 2, II B, 2; Physikalisches Laboratorium, 6; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, nach Vereinbarung. — **Peppler:** Allgemeine und physikalische Meteorologie I, 3; Angewandte (synoptische und aeronautische Meteorologie), 2; Meteorologische Übungen I, 4. — **Riede:** Geometrische Optik: Optische Instrumente, 2; Röntgenstrahlen, 1. — **N. N.:** Grundlagen der theoretischen Physik, 2. —

Technische Hochschule Prag. **Tuma:** Physik, 5; Technische Physik, 3; Physikalisches Praktikum, 3 und 6. — **Lichtenecker:** Ausgewählte Kapitel der Physik: Atom- und Spektrallinien, 2. — **Koerner:** Allgemeine Wärmelehre, 2. — **Spitaler:** Meteorologie und Klimatologie, 3. —

Technische Hochschule Stuttgart. **Regener:** Physik II: Wärme, 2, IV: Elektrische Wellen und Optik, 3; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3, für Fortgeschrittenere, 6; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten in der Physik, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium (mit Ewald), 1½. — **Ewald:** Theoretische Physik IV: Optik, 4, Übungen, 2; Seminar über Atomphysik (mit Fues), 1—2; Anleitung zu Arbeiten aus dem Gebiet der theoretischen Physik, nach Vereinbarung. — **Fues:** Atomphysik: Klassische und Quantenstatistik, 2. — **Braunbek:** Physikalische Messungen, 2; Sondergebiet der technischen Physik, 1. — **Glocker:** Röntgenpraktikum für Anfänger, 3, für Fortgeschrittene, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im Röntgenlaboratorium, nach Vereinbarung; Materialprüfung mittels Röntgenstrahlen, 1. — **Wigand:** Meteorologische Übungen, 2. —

Universität Wien: **Jäger:** Wärmelehre, 5; Die kinetische Theorie der Lösungen, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. *g*; Besprechungen neuerer Arbeiten, 1 *g*. — **Meyer:** Die radioaktiven Substanzen, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*; Radioaktives Praktikum (mit Przibram), 3 *g*. — **Ehrenhaft:** Experimentalphysik II, 5; Mathematische Ergänzungen für Physiker usw., 1 *g*; Demonstrationsergänzungen, 2 *g*; Seminar: Aus der Physik der mikroskopischen und submikroskopischen Materie, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. *g*. — **Schweidler:** Experimentalphysik II, 5, Demonstrationsergänzung, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. *g*. — **Thirring:** Theorie der Wärme II, 5; Eigenwertprobleme der mathematischen Physik, 1; Seminar für theoretische Physik, 1 *g*; Proseminar für theoretische Physik, 1 *g*. — **Haschek:** Physikalisches Praktikum, 6; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, 12; Physikalische Apparate und Versuchsanordnungen, 2. — **Kottler:** Theorie der Strahlung, 5. — **Przibram:** Experimentelle Atomistik (Fortsetzung), 3. — **Haas:** Theorie der Linienspektren, 1. — **Smekal:** Kristallphysik II: Elektrische Eigenschaften, Metallische Stromleitung, 2; Partielle Diffe-

tentialgleichungen der Physik II, 3; Physikalisches Praktikum für Chemiker und Naturhistoriker, 6. — **Hauer:** Repetitorium für Physik, 2. — **Mache:** Kinetische Gastheorie, 2. — **Sirk:** Einführung in die theoretische Physik: Elektrizität und Optik, 3; Vektoranalysis, 2. — **Flamm:** Neuere Statistik, 1. — **Konstantinowski:** Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Fernsprechtechnik II, 1. — **Ettenreich:** Glühlampentechnik, 2. — **Kirsch:** Proton und Elektron, 1; Die Theorie der magmatischen Zykeln, 1. — **Stetter:** Massenspektroskopie, 1. — **Exner:** Erdmagnetismus und Luftelektrizität, 3; Besprechung neuerer Arbeiten aus Meteorologie und Geophysik, 2 *g*.—**Conrad:** Klima der Roßbreiten, 2.—**Schwedler:** Erdmagnetismus, Apparate und Meßmethoden, 1. —

Technische Hochschule Wien. **Mache:** Physik, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Spezialvorlesungen aus Physik, 2; Physikalisches Praktikum I, 8 und 4, II, 30. — **Flamm:** Physik: Wärmetheorie, 5; Theorie der Elektrizität, 3; Kinetische Theorie der Materie, 1. — **Aigner:** Physik, 4. — **Smekal,** Partielle Differentialgleichungen der Physik, 3; Kristallphysik II, 2. — **Bauer:** Theorie des Atombaues und der Spektren, 2. — **Schmidt:** Wetter und Klimalehre, 2. —

Berichtigung.

Über den Einfluß des Grenzkontrastes auf Präzisionsmessungen.

(Berichtigung zum Aufsatz in dieser Zeitschrift **29**, 1 u. f. 1928.)

Infolge eines Zeichenfehlers sind mir leider einige Schreibfehler unterlaufen, die ich mir zu berichtigen erlaube:

In Fig. 8 S. 16, 2 muß der Nullkreis statt bei der Ordinate 1,5 bei der Ordinate **3,0** eingezeichnet werden. Infolgedessen muß es im Text statt 1,5 lauten:

3,0 auf S. 17, 2 Zeile 13 von unten
18, 1 „ 2 „ oben
30, 1 „ 13, 17, 27 v. oben
30, 2 „ 1 v. oben u. Zeile 2 v. unten
31, 1 „ 21 „ „

und muß heißen richtig auf S. 30, 2 von oben

Zeile 1: **a) schwache** Treibung . . .
„ 4: **b)**, c), e) können . . .
„ 5: . . . Momente **a)** und d) . . .
„ 10: . . . um $+\frac{0{,}18 - 0{,}64}{2} = 0'',076$ zu **spät** registriert . . .

und muß gestrichen werden Seite 31, 2 letzter Absatz. Außerdem sind im Literatur-Verzeichnis zwei Druckfehler stehen geblieben. Es muß richtig heißen: bei III: **H.** Struve, bei XXXI: **E.** Hartwig.

München 24. März 1928. Dr. A. Kühl.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Böhmischen Technischen Hochschule Prag Dr. techn. Jaroslav Dedek für Zuckerfabrikation und Erzeugung der Kohlehydrate.

Ernannt: Der Privatdozent für Philosophie der Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Hans Lipps zum a. o. Professor ebenda, der Observator am Preußischen Meteorologischen Institut bei Potsdam Professor Dr. Karl Knoch zum a. o. Professor an der Universität Berlin, Professor Dr. Hans Grimm an der Universität Würzburg zum planmäßigen a. o. Professor der physikalischen Chemie mit Titel und Rang eines ord. Professors ebenda, der Leiter des wissenschaftlichen Laboratoriums der Chemischen Fabrik Schimmel & Co. in Leipzig-Miltitz und frühere a. o. Professor an der Universität Göttingen Dr. Heinrich Wienhaus zum a. o. Professor für Chemie an der Universität Leipzig, der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Hermann Steudel zum persönlichen ord. Professor für physiologische Chemie ebenda, der a. o. Professor für höhere Experimentalphysik an der Universität Frankfurt/M. Dr. Karl Wilhelm Meissner zum ord. Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte ebenda, Dr. Ing. O. Rontala zum ord. Professor der holzchemischen Technologie an der Technischen Hochschule Helsingsfors, der Professor für organische Chemie an der Universität London Dr. F. H. Mc Dewall zum Leiter des Forschungsinstitutes für Milchprodukte in Palmerston North New Zealand, der Professor der Physikalischen Chemie an der Universität von Pennsylvania in Philadelphia Herbert Spencer Hirned in gleicher Eigenschaft an der Yale Universität in New Haven.

Gestorben: Der ord. Professor der Geophysik an der Universität Göttingen Geh. Regierungsrat Dr. Emil Wiechert, der frühere ord. Professor der Chemie an der Universität Marburg Geheimer Rat Professor Dr. Theodor Zincke, der Professor für Flugzeugkunde und Luftschiffahrt an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Alexander Baumann, der Direktor des Instituts für angewandte Chemie Professor Dr. P. Camille Chabrié in Paris, der Professor der angewandten Meteorologie an der George Washington Universität in Washington Willis L. Moore, der Professor für chemische Technologie an der Universität Syracuse (New York) Dr. Charles Wilson Easley.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye,** Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 10. Ausgegeben am 15. Mai 1928. Nr. 788. Printed in Germany. **29. Jahrgang.**

INHALT:

Originalmitteilungen:

Vorträge und Diskussionen des IV. Deutschen Physikertages in Kissingen vom 18. bis 24. September 1927:

Besprechungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 10 | 15. Mai 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 12 am 10. Juni 1928

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Frage der starken Elektrolyte.

(Mitteilung aus der Forschungsabteilung des Kabelwerks der Siemens-Schuckertwerke A.-G. Berlin-Siemensstadt.)

Von A. Gyemant.

I. Einleitung.

Die Untersuchung hochohmiger Flüssigkeitswiderstände für technische Zwecke[1]) führte mich zu einigen Fragen, die auch vom rein physikalischen Standpunkt von Interesse sind. Sie mögen hier in Kürze erörtert werden. Es handelt sich bei diesen Widerständen um Lösungen starker Elektrolyte in Lösungsmitteln von sehr geringer Dielektrizitätskonstante (herunter bis 3,5). Da solche Lösungen einen spezifischen Widerstand haben, welcher auf ganz anderem Größenordnungsgebiet liegt als der von wäßrigen oder sonst untersuchten organischen Lösungen (DK herunter bis 20), so bieten sich mancherlei experimentelle Möglichkeiten, welche nur auf diesem Gebiet ohne Schwierigkeit ausführbar sind. Andererseits lassen diese Versuche Schlüsse zu, welche die Erfahrungen über starke Elektrolyte in wäßrigen Lösungen von einer ganz anderen Seite erleuchten bzw. ergänzen. Die Frage nach der Natur der starken Elektrolyte ist aber durch die Untersuchungen von Debye[2]) dann neuerdings von Nernst[1]) sowie von M. Wien[2]) stark in den Vordergrund gerückt, so daß auch dieser Beitrag seine Berechtigung haben dürfte.

Um das Wesentliche vorweg zu nehmen, handelt es sich um folgendes. Messungen der Abhängigkeit der Leitfähigkeit der oben erwähnten Lösungen von der Feldstärke bei hohen Feldern stehen in gutem Einklang mit den entsprechenden Befunden von Wien an gut leitenden Lösungen. Stellt man sich auf den Standpunkt von Joos[3]), so würde das bedeuten, daß die starken Elektrolyte auch in diesen extrem schlecht leitenden Lösungen vollständig dissoziiert sind. Die Messungen über die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der D. K. des Lösungsmittels lassen sich andererseits mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes zufriedenstellend wiedergeben. Die Auflösung dieses Widerspruches wird wahrscheinlich darin bestehen, daß man bei den starken Elektrolyten mit dem Vorhandensein von verbundenen Ionenpaaren zu rechnen hat, deren Konzentration durch die der freien Ionen nach dem Massenwirkungsgesetz geregelt wird, daß aber dieselben nicht als undissoziierte Molekeln in chemischem Sinne zu betrachten sind, vielmehr als eng zusammenliegende, als assoziierte

1) Zeitschr. f. techn. Phys. **8**, 491, 1927; Wiss. Veröff. d. Siem.-Konz. **6**, H. 2, 58, 1928.

2) Physik. Zeitschr. **24**, 185 u. 305, 1923.

1) Vortrag auf der Deutschen Bunsengesellschaft, Dresden, Mai 1927.

2) Ann. d. Phys. (4) **83**, 327, 1927; Physik. Zeitschr. **28**, 834, 1927.

3) Joos und Blumentritt, Physik. Zeitschr. **28**, 836, 1927.



Ionen, wie dies von Nernst und auch von N. Bjerrum[1]) angenommen wird. Daß solche Ionenpaare in hohen Feldern zur Leitfähigkeit beitragen, ist durchaus möglich.

Im einzelnen gestalten sich die Versuchsergebnisse folgendermaßen.

II. Der Wieneffekt.

Über die diesbezüglichen Versuche ist ausführlich in einer anderen Arbeit[2]) berichtet, auf welche in betreff der experimentellen Einzelheiten hingewiesen werden soll. Mittels gleichgerichteter Hochspannung sind Stromspannungskurven aufgenommen worden. Die Widerstände sind so hoch und dementsprechend die Ströme und die entwickelte Wärme so gering, daß auch bei einem Stromdurchgang von einer Minute Dauer die Temperaturerhöhung höchstens einige Grade beträgt. Gleichzeitig ist es gelungen, Mischungen von verschwindend geringem Temperaturkoeffizienten herzustellen, so daß auch die paar Grade Temperaturerhöhung auf den Widerstandswert ohne Einfluß waren. Aus den Messungen können folgende Schlüsse gezogen werden.

1. Das Anwachsen der Leitfähigkeit mit der Feldstärke ist linear. Der allererste Anstieg könnte vielleicht quadratisch sein, infolge der Streuung der Werte läßt sich dies jedoch nicht mit Sicherheit entscheiden.

2. Die Erhöhung der Leitfähigkeit beträgt 1—2 Proz. pro kV/cm, also ziemlich viel.

3. Anscheinend nimmt der Effekt mit abnehmender Ionenkonzentration zu.

Alle 3 Beobachtungen stehen im Einklang mit den von Wien gefundenen Tatsachen, so daß es sich höchstwahrscheinlich um dieselbe oder zumindest um eine sehr ähnliche Erscheinung handelt.

Da uns zunächst die Möglichkeit einer Aufspaltung von Molekeln, also eine Zunahme der Ionenkonzentration, wahrscheinlich schien, so haben wir durch einen besonderen Versuch diese Frage entschieden. Es wurde nämlich durch eine geeignete Versuchsanordnung die Querleitfähigkeit senkrecht zur angelegten hohen Feldstärke untersucht. Über diese Versuche ist ebenfalls in der erwähnten Arbeit das Nähere enthalten. Das Ergebnis war, daß die Änderung des Querwiderstandes nur einen Bruchteil der des Längswiderstandes betrug und außerdem dem Vorzeichen nach sich mit den Versuchsbedingungen änderte. Eine nennenswerte und eindeutige Änderung des Querwiderstandes mit der Feldstärke konnte somit nicht nachgewiesen werden. Die Möglichkeit der Zunahme einer Ionenkonzentration muß daher verneint werden, da in diesem Falle der Querwiderstand in demselben Maße sich hätte ändern müssen wie der Längswiderstand, es kann sich somit nur um einen ausdrücklich gerichteten Effekt handeln.

Alle Beobachtungen sprechen demnach dafür, daß infolge der Ähnlichkeit der experimentellen Befunde die Joossche Erklärung auch in unserem Falle zutreffen dürfte. Die dem äußeren Feld entgegengerichteten Ionenkräfte würden danach bei hohen Feldern relativ zur Feldstärke abnehmen. Die Lösungen starker oder mittelstarker Elektrolyte wären demnach auch in diesen Lösungsmitteln vollständig bzw. in hohem Grade dissoziiert, und der hohe Widerstand wäre nur eine Folge der geringen D. K. des Lösungsmittels.

Diese Folgerung widerspricht aber durchaus den folgenden Beobachtungen.

III. Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante.

Für einige Lösungen haben wir den Gang des spezifischen Widerstandes mit der D. K. des Lösungsmittels zahlenmäßig bestimmt. Letztere veränderten wir stetig durch das wechselnde Mischungsverhältnis von Benzol und Äthylalkohol (enthaltend 0,2 Proz. Wasser). An Elektrolyten untersuchten wir Salzsäure, Natriumhydroxyd und Pikrinsäure, alles starke bzw. mittelstarke Elektrolyte, die in Benzol löslich sind. Die Kurven verlaufen bei allen drei Elektrolyten sehr ähnlich, indem die Leitfähigkeit sehr stark mit der D. K. abnimmt. Dies spricht schon dafür, daß ein prinzipieller Unterschied zwischen den drei Elektrolyten nicht vorhanden ist. Bekanntlich konnte Debye zeigen, daß seine Gleichungen größenordnungsmäßig die Beobachtungen an organischen Lösungen richtig wiedergeben. Das Lösungsmittel mit der geringsten D. K. war Benzaldehyd (17). Bis dahin hat man mit relativ hohen Leitfähigkeiten zu tun, und die Beobachtungen werden von jeder Theorie, die einen gewissen Einfluß der D. K. in Rechnung zieht, mehr oder weniger richtig wiedergegeben. Eine Entscheidung unter ihnen kann daher nicht getroffen werden.

Anders verhält es sich jedoch bei noch kleineren Werten der D. K. wo die Leitfähigkeit ganz besonders starke Abnahmen aufweist. Die Gleichungen die aus der Annahme unvollständiger Dissoziation abgeleitet sind und damit die Abnahme der Leitfähigkeit erklären, geben die beobachteten Zahlen befriedigend wieder. Ein direkter Vergleich mit der Gleichung von Debye (l. c. S. 316) ist leider nicht möglich. Obwohl wir uns im folgenden auf geringe Kon-

1) Mat.-Fys. Medd. Kgl. Dansk. Vid. Selsk. Kopenhagen 1926.

2) Wiss. Veröff. d. Siem.-Konz. 7, H. 1 (unter Druck).

zentrationen beschränkt haben (0,02—0,002 normal), verliert seine Beziehung für den Leitfähigkeitskoeffizienten auch infolge der zu geringen Werte der D. K. ihre Gültigkeit. Unter diesen Umständen ist natürlich die Möglichkeit nicht ganz von der Hand zu weisen, daß eine für geringe Werte der D. K. gültige Gleichung — falls die Ableitung einer solchen im Sinne der Theorie der vollständigen Dissoziation gelingen und — unsere Experimente auch richtig wiedergeben wird. Solange aber dieser Nachweis nicht erbracht ist, können wir an dem Ergebnis festhalten, wonach die hier vorliegenden Versuche eben mit der Annahme unvollständiger Dissoziation bestens zu erklären sind. Die diesbezüglichen Überlegungen seien im folgenden durchgeführt.

Nehmen wir an, die Dissoziationskonstante sei K und es soll der Zusammenhang zwischen K und ε, der Dielektrizitätskonstante gesucht werden. Derselbe ergibt sich aus der Zunahme der freien Energie bei der Dissoziation eines Mols. Sie beträgt einerseits

$$-RT\ln K$$

(R = Gaskonstante, T = absolute Temperatur), andererseits läßt sie sich in einzelne Therme zerlegen. Die Aufspaltungsarbeit A eines Mols ist vom Lösungsmittel unabhängig. Der zweite Therm ist die dielektrische Solvatation, die sich nach Born[1]) zu

$$\frac{Ne^2}{2}\left(\frac{1}{r_k}+\frac{1}{r_a}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

(N = Avogadrosche Zahl, e = Ladung eines Ions, r_k und r_a = Radien des Kations und Anions) ergibt. Schließlich ist noch sicher ein dritter Therm vorhanden, welcher einer Art chemischen Bindung des Lösungsmittels Rechnung trägt. Daß eine solche vorhanden ist, beweist schon die Tatsache, daß ganz geringe Mengen von Wasser, welche die D. K. noch kaum merklich beeinflussen können, einen verhältnismäßig starken Einfluß auf die Leitfähigkeit und somit auf die Dissoziation haben. Wir lassen die spezifischen Einflüsse bei unserer Berechnung unberücksichtigt. Es wird somit für sie noch eine gewisse Korrektur zulässig sein.

Vereinigen wir die drei Ausdrücke, so haben wir

$$-RT\ln K = A - \frac{Ne^2}{2}\left(\frac{1}{r_k}+\frac{1}{r_a}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (1)$$

Die D. K. berechnen wir in erster Näherung nach der Additivitätsregel. Bezeichnet a den durch 100 dividierten Volumprozent-Gehalt an Alkohol der Mischung, so gilt

$$\varepsilon = 23{,}7a + 2{,}3.$$

1) Zeitschr. f. Phys. **1**, 45, 1920.

Aus K ergibt sich die Ionenkonzentration c nach dem Massenwirkungsgesetz zu

$$c = \frac{-K+\sqrt{K^2+4Kc_0}}{2}$$

wo c_0 die Gesamtkonzentration des Elektrolyten bedeutet. Für geringe Dissoziationskonstanten degeneriert dieser Ausdruck zu

$$c = \sqrt{Kc_0}.$$

Aus c ergibt sich endlich die spezifische Leitfähigkeit zu

$$\lambda = \lambda_\infty c.$$

λ_∞ für die jeweilige Mischung erhält man durch Multiplikation seines Wertes für reinen Alkohol mit dem Verhältnis der Viskositäten, also mit der Zahl:

$$\frac{0{,}012}{0{,}006a+0{,}006} = \frac{2}{1+a}$$

In diesen Gleichungen sind alle Größen bekannt, außer A. Diese konnte aber aus einem einzigen Versuch berechnet werden. Die Durchrechnung erfolgte für Salzsäurelösungen, und zwar für zwei Konzentrationen, nämlich 0,02 und 0,002 normal.

Was die einzelnen Größen betrifft, so ist $\lambda_\infty = 90$ gesetzt worden entsprechend den Untersuchungen von H. Goldschmidt[1]). Für die Ansetzung der Ionenradien haben wir zu den eigentlichen Radien den der Lösungsmittelmolekeln zugefügt, da die kleinste Entfernung der Dipolmomente durch diese Summe gegeben ist. Der Radius für H ist $1\cdot10^{-8}$, für Cl $1{,}2\cdot10^{-8}$[2]), der Radius der Lösungsmittelmolekeln beträgt im Durchschnitt $2{,}5\cdot10^{-8}$, entsprechend der Formel $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{M}{Nd}}$ (M = Molekulargewicht, d = Dichte) für Benzol $2{,}6\cdot10^{-8}$, für Äthylalkohol $2{,}3\cdot10^{-8}$. A ist aus einem mittleren Meßwert (HCl 0,02 normal, $a = 0{,}40$) zu $38\cdot10^{11}$ abs. berechnet worden. Für die Dissoziationskonstante erhält man nach dieser Berechnung z. B. folgende Zahlenwerte:

a	K
1,00	$2{,}5\cdot10^{-2}$
0,40	$4{,}1\cdot10^{-5}$
0,20	$5{,}0\cdot10^{-9}$
0,06	$2{,}5\cdot10^{-17}$

Die berechneten Leitfähigkeitskurven sind auf Fig. 1 und 2 aufgetragen. Man sieht, daß sie mit den experimentellen Zahlen gut übereinstimmen

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **89**, 129, 1914.
2) P. Walden, Zeitschr. f. anorg. Chem. **113**, 125, 1920.

und nur bei den geringsten Werten von a eine Abweichung vorhanden ist.

Somit erscheint die Folgerung daß es sich um eine unvollständige Dissoziation handelt, in der Tat berechtigt. Daß natürlich die vorhandenen freien Ionen stets nach der Debyeschen Theorie

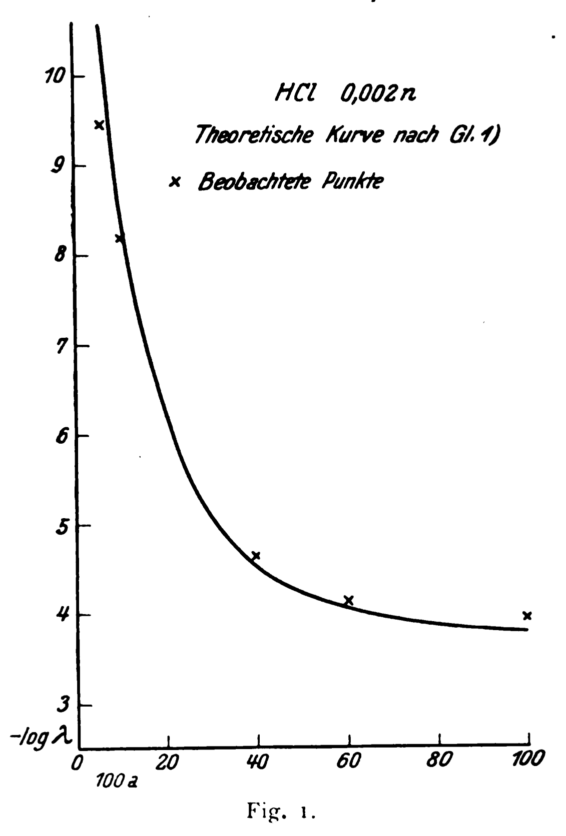


Fig. 1.

weiter zu behandeln sind, versteht sich von selbst. In der durchgeführten Rechnung haben wir davon allerdings abgesehen.

Überträgt man die oben abgeleitete Gleichung (1), zwischen K und ε auf Wasser, also $\varepsilon = 80$, so erhält man für K etwa 2. Das würde also heißen, daß in 0,01 normal HCl 0,5 Proz., in 1 normal HCl etwa 25 Proz. undissoziiert sind. Es sei aber erwähnt, daß diese Zahl nur der Größenordnung nach richtig sein kann, da die rechte Seite unserer Gleichung als Differenz zweier Glieder von ähnlicher Größe hier recht ungenau wird. Die beiden Terme müßten mit noch größerer Sorgfalt bestimmt werden, als dies hier geschehen ist, wenn man die Dissoziationskonstante in Wasser daraus genau ermitteln will.

IV. Die Natur der undissoziierten Ionenpaare.

Nachdem hiermit die Existenz nichtdissoziierter Ionenpaare als durchaus wahrscheinlich gemacht wurde, erhebt sich die eingangs erwähnte Frage, wieso in unseren Objekten dennoch ein Wienscher Effekt gefunden werden konnte, obwohl derselbe nach Joos den freien Ionen zuzuschreiben ist. Die Tatsache, daß auch hier, obwohl freie Ionen nur in sehr geringer Zahl vorhanden sind und somit ein Debye-Effekt nicht in Frage kommt, die Leitfähigkeit bei hohen Feldstärken zunimmt, spricht dafür, daß auch die

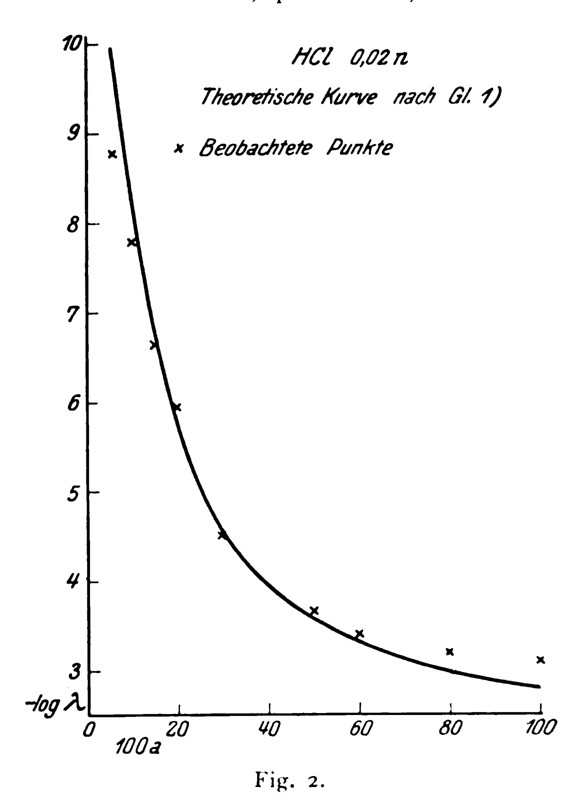


Fig. 2.

nichtdissoziierten Ionenpaare an dem Effekt teilnehmen müssen. Dies ist wiederum nur so möglich, wenn keine molekulare Vereinigung mit starker Verschiebung der Elektronenkonfiguration vorliegt, was bei der Natur der starken Elektrolyte auch unwahrscheinlich wäre, nur ein festes Aneinanderliegen der beiden Ionen. Dieselben werden aber in den hohen Feldern nicht etwa zu einem gewissen Bruchteil gespalten, denn dann hätte sich der Querwiderstand in demselben Maße ändern müssen wie der Längswiderstand. Vielmehr beteiligen sich diese Ionenpaare nur in Richtung des hohen Feldes an der Leitung.

Wie dies geschieht, müßte eine gesonderte Untersuchung aufdecken. Wahrscheinlich ist es aber, daß eine Art Auflockerung im Sinne einer Polarisation der Ionenpaare in Richtung des Feldes stattfindet. Die im elektrischen Feld wandernden Ionen werden dann, wenn sie in die Nähe eines Ionenpaares gelangen, in dieses hineinspringen, während das gleichgeladene Ion des Paares gleichzeitig herausspringt. Die Leitfähigkeit

nimmt also nach demselben Mechanismus zu, nach welchem die hohe Beweglichkeit des Wasserstoffions in Wasser zu erklären ist. Dieser Effekt dürfte sich zu dem von Joos angenommenen Mechanismus addieren, so daß der eigentliche Wieneffekt als Summe der beiden aufzufassen wäre. In unseren organischen Lösungen überwiegt jedenfalls der molekulare Effekt wesentlich über dem ionalen Anteil.

V. Zusammenfassung.

1. Messungen der Leitfähigkeit starker Elektrolyte in extrem schlecht leitenden organischen Lösungen lassen sich mit der Annahme einer unvollständigen Dissoziation der starken Elektrolyte — etwa im Sinne von Nernst — gut vereinbaren. Die aus dieser Annahme abgeleiteten Gleichungen geben die Beobachtungen recht befriedigend wieder.

2. An solchen Lösungen konnte ein positiver Wieneffekt nachgewiesen werden, während die gleichzeitig untersuchte Querleitfähigkeit sich als konstant erwies. Diese Beobachtung läßt zusammen mit der vorangegangenen die Folgerung zu, daß die undissoziierten Ionenpaare nur eine verhältnismäßig lockere Bindung darstellen und daß sie demnach in hohen Feldern zur Erhöhung der Gesamtleitfähigkeit beitragen können.

(Eingegangen 13. Februar 1928.)

Über die Grenzflächenwirkung in anisotropen Flüssigkeiten.

Von W. Kast.

In seinem Kissinger Vortrage „Über die Einwirkung magnetischer, elektrischer und mechanischer Kräfte auf Mesophasen (‚Flüssige Kristalle')" charakterisiert Zocher[1]) die anisotropen Flüssigkeiten vom Typus des *p*-Azoxyanisols dadurch, daß bei ihnen von den normalen sechs Überführungsbewegungen der Moleküle (drei Translationen und drei Rotationen) zwar alle drei Translationen, aber nur eine Rotation kontinuierlich auszuführen sind. So ergibt sich das Strukturbild der Fig. 1a, das Friedel „nematisch" nennt. Demgegenüber rechnet der Verfasser[2]) bei der Darstellung seiner dielektrischen Untersuchungen im Magnetfeld nach dem Ansatz von Ornstein[3]) so, daß eine anisotrope Flüssigkeit aus nematischen Elementen von etwa 10^5 Molekülen besteht, die ihrerseits unter dem Einfluß einer Art Brownscher Bewegung beim Fehlen äußerer Kräfte ungeordnet sind (Fig. 1b). Danach resultiert der Zustand (1a) aus (1b), also erst unter der Einwirkung irgendwelcher äußerer Richtkräfte, während er nach Zocher sich spontan einstellt.

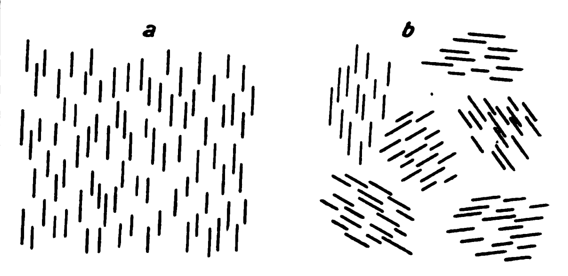


Fig. 1.

Die nach (1a) makroskopische spontane Anisotropie beschränkt sich nach (1b) auf die Gruppen von 10^5 Molekülen. Das ist nicht nur qualitativ in Übereinstimmung damit, daß das Experiment, *p*-Azoxyanisol in einem weiten Gefäße (etwa einem Reagenzrohr) aufzuschmelzen, in dem kritischen Temperaturbereich von 116^0 bis 134^0 C nur eine starke Trübung der Flüssigkeit ergibt, sondern auch quantitativ. An einer solchen trüben Schmelze führte nämlich Frl. Riwlin[1]) sehr genaue Extinktionsmessungen aus mit dem wichtigen Ergebnis, daß die Extinktion in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge des Lichtes und der Dicke des Präparates quantitativ übereinstimmt mit der von Ornstein und Zernicke[2]) für ein Medium berechneten, in dem zufällige Gradienten des Brechungsexponenten bestehen.

Zugleich lösen diese Extinktionsmessungen die Frage, warum man in dünnen Präparaten (beispielsweise zwischen Objektträger und Deckglas unter dem Mikroskop) meist makroskopisch, anisotrope Gebiete beobachtet. Während die Kurven, die die Extinktion als Funktion der Präparatdicke darstellen, für den ex-flüssigen Zustand erst bei der Dicke Null die Durchlässigkeit 100 Proz. erreichen, wird im ex-festen Zustand die Durchlässigkeit 100 Proz. bereits bei der Dicke 0,08 mm erreicht. In diesem Falle existiert also eine 0,08 mm dicke Schicht, die praktisch alles Licht hindurchläßt, also orientiert sein muß. Man wird geneigt sein, diese Orientierung aus dem Wachstum der festen Kristalle parallel zu den Begrenzungsflächen herzuleiten. Charakteristischerweise wird dadurch aber nicht etwa die Lage der Vorzugsrichtung des Zustandes (1a) bestimmt, vielmehr herrscht in einer Entfernung

1) H. Zocher, Physik. Zeitschr., **28**. 790, 1927.
2) W. Kast, Ann. d. Phys. (4) **83**, 391. 1927.
3) L. S. Ornstein, Ann. d. Phys. (4) **74**, 445, 1924.

1) R. Riwlin, Dissertation Utrecht 1923.
2) Ornstein u. Zernicke, Proc. Kon. Acad. v. Wet., Amsterdam **21**, 115, 1917.



von mehr als 0,05 mm vom Rande völlige Unordnung. Das bedeutet die Verwirklichung des Falles, den Zocher ausdrücklich ablehnt, daß nämlich Anisotropie nur in der Nähe der Grenzflächen vorliegt.

Durch geeignete Unterstützung kann man aber die von den Grenzflächen herrührende Orientierung durch eine dickere Schicht hindurch herbeiführen. So machten Ornstein und Moll[1]) die Beobachtung, daß die durch ein senkrecht zu den Grenzflächen verlaufendes Magnetfeld herbeigeführte Klärung der trüben Schmelze sofort nach dem Abschalten des Feldes wieder verschwindet, während nach einmaligem Anlegen eines parallelen Feldes die Klärung fast völlig erhalten bleibt. Mechanisch erreicht man bekanntlich dieselbe Homogenisierung durch leichtes Hin- und Herschieben des Deckglases.

Ob zwischen Grenzflächen einachsige Aufrichtung oder Parallelorientierung eintritt, dafür scheint die Beschaffenheit der Begrenzungsflächen maßgebend zu sein. Zwischen sauberen, planen Glasplatten ist einachsige Aufrichtung die Regel. Bei unvollkommener Politur, also vor allem bei Metallplatten, tritt Parallelorientierung ein, und zwar nach den Beobachtungen des Verfassers auch im ex-flüssigen Zustand. Jedenfalls aber darf hiernach die Homogenisierung der Schmelze nicht als spontan bezeichnet werden. Vielmehr wird sie unter Überwindung der desorientierenden Wärmebewegung durch die eigentümliche Randwirkung herbeigeführt.

Danach kann es also, wenn die Randwirkung nur stark genug, d. h. das Präparat dünn genug ist, für die Durchführung einer anderen Orientierung durch ein Magnetfeld genügen, die Wechselwirkung zwischen Randwirkung und Magnetfeld allein zu berücksichtigen. Im allgemeinen wird aber der Einfluß der Wärmebewegung nicht zu vernachlässigen sein. In dem Ansatz des Verfassers, in dem die Randwirkung als eine mittlere, durch das ganze Präparat hindurch konstante, parallel zu den Platten gerichtete Kraft eingeführt wird, muß diese also mit wachsendem Plattenabstand kleiner werden. Die parallele Richtung der Randwirkung ergibt sich hier aus der Beobachtung, daß in einem senkrechten Magnetfeld wohl eine sehr erhebliche Verkleinerung der Dielektrizitätskonstanten, in einem parallelen Feld aber kaum eine Änderung festzustellen ist. Ist die DK. der Elemente in der ausgezeichneten Richtung ε_1, in jeder darauf senkrechten Richtung ε_2, so hat in diesem Falle schon ohne Magnetfeld die DK. sehr nahe den Wert ε_2, während sie im Falle völliger thermischer Unordnung $\frac{1}{3}(\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2)$ betragen müßte. Um eine Anschauung von der Größe der Randwirkung zu haben, wird sie als Magnetfeld fingiert. Fig. 2

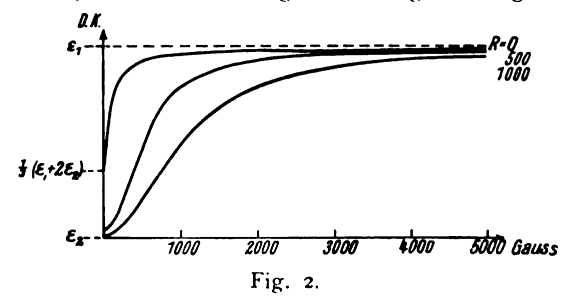


Fig. 2.

zeigt den Verlauf der DK., wie er sich für verschiedene „Randfelder" (*R*) als Funktion eines zu den Kondensatorplatten senkrechten Magnetfeldes berechnet.

Wie früher ausführlich gezeigt wurde, lassen sich die Meßresultate nach Abschätzung des magnetischen Momentes auf $1{,}5 \cdot 10^5$ Bohrsche Magnetonen für bestimmte Werte von *R* gut wiedergeben. Bezüglich der Abhängigkeit von *R* vom Plattenabstand waren diese Messungen jedoch nicht vergleichbar, weil bei den verschiedenen Kondensatoren mit verschiedenen Formen und Abständen der Polschuhe gearbeitet und mehr Wert auf die Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke vom Magnetisierungsstrom als auf ihren absoluten Betrag gelegt wurde, und weil die Kurven für verschiedenes *R* sich durch Verändern des Feldmaßstabes nahe ineinander überführen lassen.

Deshalb wurden solche Messungen jetzt mit einem Kondensator gemacht, der aus einem rechteckigen, heizbaren Kupfergefäß und einer darin auf Glasfüßen isoliert aufgestellten Mittelplatte bestand. Der Plattenabstand konnte hier ein-

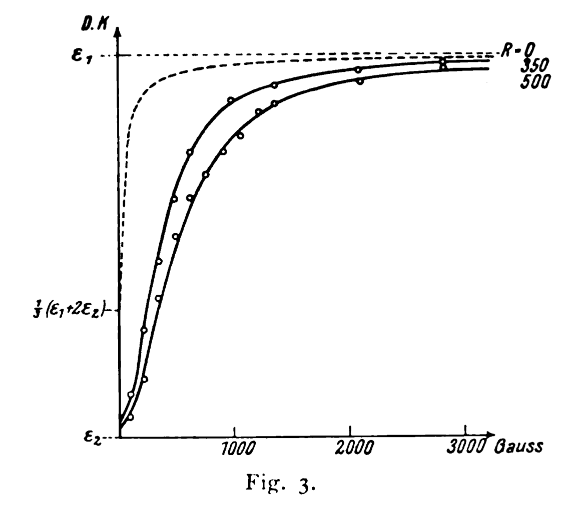


Fig. 3.

fach durch Verdicken der Mittelplatte verkleinert werden. Gemessen wurde bei 3 und bei 0,5 mm Plattenabstand. Fig. 3 zeigt die deutlich ver-

1) Moll u. Ornstein, Proc. Kon. Acad. v. Wet., Amsterdam **20**, 210, 1917.

schiedenen Kurven. Die Kreise markieren die gemessenen Punkte, die ausgezogenen Kurven sind für $R = 350$, bzw. 500 Gauß berechnet worden.

Außerdem wurde bei dem kleinen Plattenabstand noch beobachtet, daß die DK. verschieden ist, je nachdem, ob eine bestimmte Feldstärke von unten oder von oben aus erreicht wird (Fig. 4). Im letzteren Falle ist sie deutlich

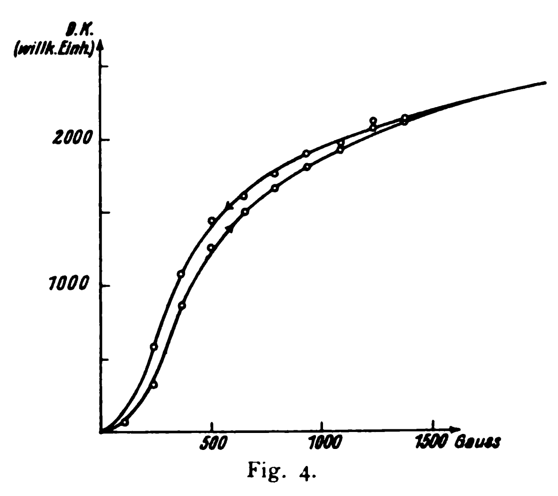


Fig. 4.

kleiner, die Orientierung also merklich vollständiger. Das wird daraus ohne weiteres verständlich, daß beim Anlegen eines Feldes die Randwirkung stark gegenwirkt, während beim Herabgehen von einem hohen Felde (beim Versuch etwa 5000 Gauß), das die Randschicht abgelöst hat, ihr Einfluß entfällt. Das gilt jedoch nur, solange das Feld genügend stark ist um so große Wärmeschwankungen zu verhindern, daß die Teilchen gelegentlich wieder in eine zu den Platten parallele Lage kommen, in der sie dann fest gehalten werden. Beim Abschalten des Feldes stellt sich aus diesem Grunde die Randschicht wieder her; die beiden Kurvenäste treffen sich daher im Nullpunkt wieder.

Zur Vervollständigung des Bildes der anisotropen Flüssigkeiten, das die dielektrischen Untersuchungen geben, wäre noch der strengere Nachweis erwünscht, daß beim Anlegen eines magnetischen Feldes parallel zu den Platten wenigstens einmalig eine Vergrößerung der DK. eintritt, als Beweis dafür, daß in größerem Abstand von den Platten wirklich thermische Unordnung herrscht. In Berücksichtigung dessen, daß dieser Beweis aber bereits durch die erwähnten Extinktionsversuche im Utrechter Laboratorium erbracht ist, schien es nicht nötig, mit der Veröffentlichung dieser Notiz bis zur Ausführung jenes Versuches zu warten.

Physikal. Institut d. Univ. Freiburg i. Br., März 1928.

(Eingegangen 10. März 1928).

Eine neue Methode zur Dämpfung der Schwingungen eines Kreiselkompasses.

Von O. Martienssen.

In der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1919, Nr. 39, Seite 165 ff. habe ich einen Kreiselkompaß beschrieben, wie er mit geringfügigen Abänderungen nunmehr in größerem Maßstabe von der Officine Galileo in Florenz nach meinen Angaben fabriziert wird. In diesem Aufsatz habe ich eine ältere Methode zur Dämpfung der Kreiselkompaßschwingungen angegeben, aber darauf hingewiesen, daß ich neuerdings eine andere Methode verwende. Diese letztere soll, da sie physikalisch von besonderem Interesse ist, nunmehr beschrieben werden.

Um die Methode zu verstehen, ist es notwendig, eine kurze Beschreibung des Kreiselkompasses selbst voranzustellen.

Der Kreiselkompaß ist in Fig. 1 in perspektivischer Ansicht schematisch dargestellt.

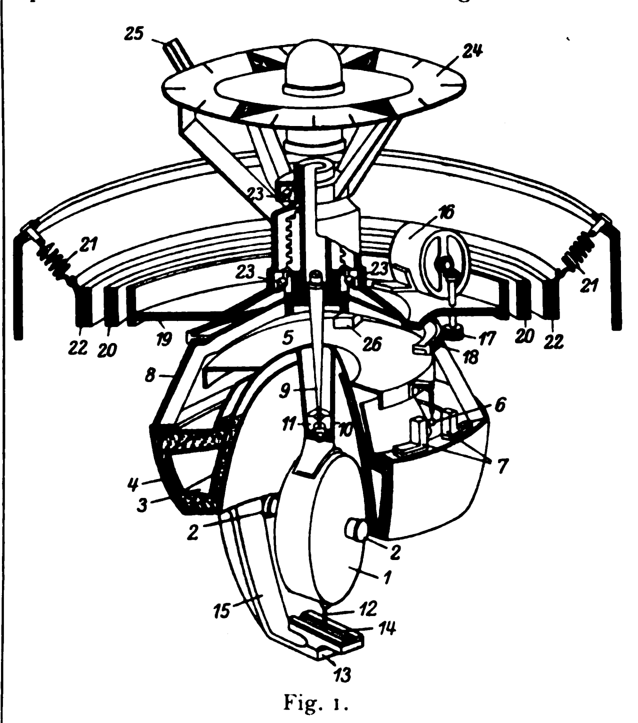


Fig. 1.

Im Kompaßhaus ist der Federring 22 an Federn 21 aufgehängt. In diesem Federring 22 ist mittels Kardanring 20 die Montageplatte 19 kardanisch aufgehängt. In der Platte 19 ist mittels Kugellager 23/23 der Bügel 8 drehbar gelagert, an welchem der mit Quecksilber gefüllte Kessel 4 hängt. Unten an diesem Kessel befestigt ist ein Bügel 15, der zwei feinpolierte Stahlschneiden 14 trägt, die einen kleinen Schlitz zwischen sich freilassen. Der Bügel 8

trägt oben einen Vertikalkreisel, der bewirkt, daß die Platte 19 selbst auf schlingerndem Schiffe stets nahezu horizontal bleibt und außerdem die Rose 24, deren Drehungen an dem Steuerstrich 25 abgelesen werden. Der Steuerstrich ist auf der Montageplatte 19 befestigt. Der Bügel 8 kann in den Kugellagern 23 mittels Zahnrädern 17 und 18 durch den Wendemotor 16 gedreht werden. Dieser letztere besitzt Doppelwicklung, derartig, daß er bei Einschaltung der einen Wicklung rechts herum, bei Einschaltung der anderen Wicklung links herum läuft.

In dem Quecksilberkessel befindet sich schwimmend untergetaucht der ringförmige Hohlkörper 3; an einer glockenförmigen Verlängerung desselben nach oben ist die Platte 5 und ein nach unten durchgehender Hals 10 befestigt, welcher die Kappe des Richtkreisels 1 trägt. Der Richtkreisel wird in dieser Kappe durch einen Elektromotor auf 20000 Touren pro Minute gebracht. Die Stromzuführung, die die Bewegungen des Schwimmers mit Kreisel nicht behindert, ist in der Figur fortgelassen. Zentriert ist der Schwimmer im Quecksilberkessel durch den Stift 9 einerseits und durch ein im Kappenhals angebrachtes Auge 11 andererseits, um das er sich in allen Richtungen drehen kann.

Am unteren Ende der Kreiselkappe ist ein dünner Stift 12 befestigt, der in den Schlitz zwischen die Backen 14 mit etwas Spielraum eingreift und sich in diesem Schlitz hin und her bewegen kann. Ferner trägt der Quecksilberkessel zwei Kontaktböcke 7, dagegen die Platte 5 die Kontaktperle 6. Je nachdem diese Kontaktperle mit dem rechten oder mit dem linken Kontaktbock 7 Kontakt macht, dreht sich der Wendemotor 16 rechts oder links herum, solange bis der Kontakt wieder geöffnet ist.

Die Wirkungsweise des Kompasses ist demnach folgende:

Der schwimmend aufgehängte Richtkreisel stellt sich mit seiner Achse 2 in die Nord—Süd-Richtung ein und mittels des Kontaktarmes 6 und der Kontaktböcke 7 wird der Quecksilberkessel den Bewegungen der Achse des Richtkreisels nachgedreht, und zwar derartig, daß der Schlitz der beiden Schneiden 14 stets angenähert dieselbe Richtung hat wie die Achse 2 des Richtkreisels. Im folgenden soll der Richtkreisel mit den an seiner Kappe fest angebrachten Teilen das „bewegliche System“ genannt werden, dagegen der Quecksilberkessel mit seinen Teilen das „nachgedrehte System“. Da die Rose 24 an dem nachgedrehten System befestigt ist, wird auch sie den Drehungen der Achse des Richtkreisels 2 nachgedreht und es kann die Stellung der Kreiselachse mittels Steuerstrich 25 an der Rose abgelesen werden.

Das bewegliche System wiegt bei dem ausgeführten Kreiselkompaß ca. 7 kg und sein Schwerpunkt liegt etwa 0,75 cm unter dem Mittelpunkt der verdrängten Flüssigkeit. Der gesamte kardanisch aufgehängte Apparat wiegt ca. 70 kg und sein Schwerpunkt liegt etwa 0,8 cm unter der Ebene der Kardanzapfen.

Das ganze System wird zunächst so ausbalanciert, daß der Schwerpunkt des beweglichen Systems sich auf der Rosenachse befindet, das ist die Verbindungslinie des Stiftes 12 und des Auges 11. Diese steht genau senkrecht zur Kreiselachse 2. Sodann wird das kardanisch aufgehängte System, also alles, was mit der Platte 19 verbunden ist, so ausbalanciert, daß der Schlitz zwischen den Schneiden 14 sich in einer durch den Zentrierstift 9 gehenden Vertikalebene befindet. Bei dieser Ausbalancierung des Systems sind die Schwingungen der Kreiselachse ungedämpft.

Die Dämpfungseinrichtung, die nunmehr beschrieben werden soll, besteht einfach darin, daß entweder das bewegliche System im Ostpunkt (der Punkt, der bei nach Norden eingeschwungenem Kreisel im Osten liegt) durch ein kleines Gewicht 26 ein Übergewicht bekommt, oder das nachgedrehte System im Westen. Durch eine derartige Schwerpunktsverlegung des einen oder anderen Systems wird der Stift 12 gegen die im Westen liegende Backe 14 gedrückt und hierdurch wird, wie der Versuch zeigt, eine gute Dämpfung der Kreiselkompaßschwingungen erzielt.

Diese Dämpfungseinrichtung erscheint auf den ersten Blick paradox, indem ein ungedämpft schwingendes System durch einfache Schwerpunktsverlegung zu einem gedämpft schwingenden System gemacht wird. Es scheint demnach, als wenn hier durch die potentielle Kraft der Erdschwere eine Dämpfung erzielt wird, während dieses nach den allgemeinen Regeln der Mechanik nicht möglich ist.

Darauf hingewiesen sei noch, daß wenn das Gewicht auf dem beweglichen System nicht im Osten, sondern im Westen oder auf dem nachgedrehten System nicht im Westen, sondern im Osten angebracht wird, so daß also der Stift 12 sich mit leisem Druck gegen die Ostbacke legt, nicht Dämpfung, sondern eine Beschleunigung der Schwingungen eintritt.

Aus Anlaß eines Patentprozesses über das deutsche Reichspatent 332 257, durch welches diese Dämpfungseinrichtung patentiert ist, ist ein Streit darüber entstanden, wie denn die Wir-

kungsweise dieser ungewöhnlichen Dämpfungseinrichtung erklärt werden muß.

Um die Erklärung für diese Dämpfungseinrichtung zu liefern, müssen wir von den Fundamentalgleichungen des Kreiselkompasses ausgehen. Diese sind von mir in der Physik. Zeitschr. **7**, 535, 1906 aufgestellt für ein körperfestes Koordinatensystem und diese Darstellungsweise ist auch von allen anderen Schriftstellern später beibehalten worden.

Wir wählen die Kreiselachse als x-Koordinate, die Rosenachse, die zur Kreiselachse senkrecht steht und sich bei ausbalanciertem System in einer durch die Kreiselachse gehenden Vertikalebene befindet, als y-Achse und die auf beiden Achsen senkrecht stehende horizontal liegende sogen. Elevationsachse als z-Achse.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Kreiselachse mit der durch den Meridian gehenden Vertikalebene einschließt, mit α, den Winkel, welchen die Rosenachse mit der Vertikalen einschließt, mit β, so ergeben sich aus dem Flächensatz für die Bewegung der Kreiselachse folgende zwei Gleichungen[1]):

$$m g a \beta = -B \frac{d^2\beta}{dt^2} + \Theta o \left(\frac{d\alpha}{dt} + \omega \sin\varphi\right) \quad (1)$$

$$O = C \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Theta o \left(\frac{d\beta}{dt} + \omega \cos\varphi \sin\alpha\right). \quad (2)$$

In diesen Gleichungen bedeutet Θ das Trägheitsmoment des Kreisels, o seine Winkelgeschwindigkeit, ω die Drehgeschwindigkeit der Erde, φ die geographische Breite des Aufstellungsortes; B ist das Trägheitsmoment des beweglichen Systems um die Elevationsachse. C ist das Trägheitsmoment desselben Systems um die Rosenachse. Schließlich ist m die Masse des beweglichen Systems, a die metazentrische Höhe und g die Erdbeschleunigung. Es ist also die Größe $m g a \beta$ in der Gleichung (1) das Drehmoment der Erdschwere um die Elevationsachse. In Gleichung (1) ist die Summe der Drehmomente um die Elevationsachse, in Gleichung (2) die Summe der Drehmomente um die Rosenachse dem Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung gleich gesetzt. Die den Kreiseldrall Θo enthaltenden Momente werden gewöhnlich als die Deviationsmomente des Kreisels bezeichnet. In diesen Gleichungen ist β entsprechend der praktischen Ausführung als klein vorausgesetzt, und $\omega \sin\varphi$ an Stelle von $\omega \sin\varphi \cos\beta$ geschrieben. Vernachlässigen wir in diesen Gleichungen das Glied $B \frac{d^2\beta}{dt^2}$, so ist die Lösung dieses Gleichungssystems:

1) O. Martienssen, Physik. Zeitschr. **7**, 535, 1906; Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1912, S. 309.

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\Theta o\, \omega \cos\varphi}{m g a}}\, \alpha_0 \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{\Theta o}{m g a}\, \omega \sin\varphi$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{\Theta^2 o^2}{m g a} + C}{\Theta o\, \omega \cos\varphi}} \sim \frac{2\pi}{\sqrt{\omega \cdot \cos\varphi}} \sqrt{\frac{\Theta o}{m g a}}.$$

Die Bewegung, welche das Nordende der Kreiselachse ausführt, ist nach diesen Gleichungen eine sehr flache Ellipse. Das Achsenverhältnis der Ellipse ist unter den praktisch benutzten Abmessungen etwa 1 : 30.

Es ist nun klar, daß wenn durch die geringe Massenverschiebung im beweglichen oder nachgedrehten System eine Dämpfung der Schwingungen erzielt wird, entweder in der Gleichung 1 oder in der Gleichung 2 ein dämpfendes Drehmoment hinzugetreten sein muß. Denn da diese beiden Gleichungen die Bewegung der Kreiselachse eindeutig beschreiben, kann ohne das Hinzutreten eines derartigen Gliedes die ungedämpfte Schwingung nicht zu einer gedämpften Schwingung werden.

Dieses dämpfende Drehmoment, welches in einer der beiden Gleichungen auftreten muß, kann niemals durch die Erdschwere geliefert werden, da diese als potentielle Kraft keine Dämpfung hervorrufen kann.

Betrachten wir im speziellen die Dämpfungsmethode, bei welcher ein Übergewicht im Westen des nachgedrehten Systems benutzt wird, so ist auch klar, daß hierdurch um die Rosenachse sicher kein Drehmoment ausgeübt wird. Denn wenn wir von der Reibung des Stiftes 12 zwischen den Schneiden 14 und des Auges 11 am Stifte 9 absehen (diese Reibung ist, wie der Versuch zeigt, sehr gering), so liegt keine Möglichkeit vor, durch das nachgedrehte System irgendein Drehmoment um die Rosenachse des beweglichen Systems auszuüben, da das bewegliche System bei dieser Dämpfungsart ganz unverändert bleibt. Es ist demnach kein Zweifel, daß das dämpfende Drehmoment nur um die horizontale Elevationsachse wirken kann. Es bleibt also auch bei dem gedämpft schwingenden Kompaß die Gleichung 2 unverändert bestehen, die Gleichung 1 dagegen muß eine Änderung erleiden.

Um zu erkennen, in welcher Weise eine solche Änderung durch die einfache Schwerpunktsverschiebung im System zustandekommt, müssen wir zunächst die Bewegung des Stiftes 12 etwas genauer betrachten. Infolge der Veränderlichkeit des Winkels β, d. h. infolge der Elevationsbewegungen der Kreiselachse bleibt

der Stift 12 nicht am Platze, sondern führt eine Bewegung relativ zur Erde aus.

Solange die Schwingungen des Kreiselkompasses ungedämpft sind, ist die Bewegung des Stiftes infolge der Elevationsschwingung relativ zu einem die Azimutschwingung $\frac{d\alpha}{dt}$ mitmachenden Koordinatensystem eine hin- und hergehende Bewegung. Relativ zur Erde dagegen beschreibt das Ende des Stiftes eine Lemniskate gemäß Fig. 2. Wenn die Achse des Krei-

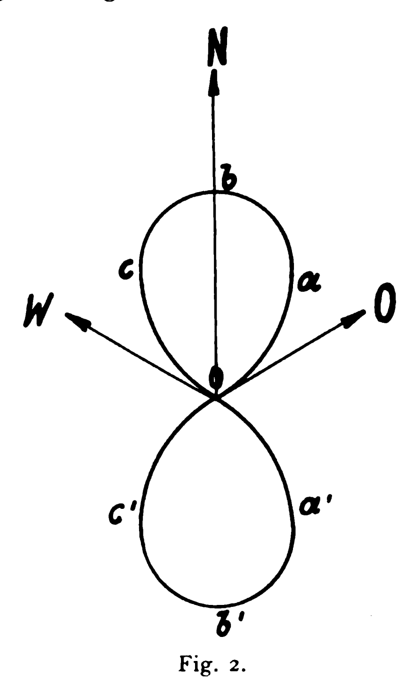


Fig. 2.

selkompasses von einem größten Ausschlag im Osten zu einem größten Ausschlag im Westen schwingt, so bewegt sich das untere Ende des Stiftes, also das untere Ende der Rosenachse vom Punkte O über a, b, c nach O zurück und wenn die Kreiselachse von Westen über Norden nach Osten schwingt, so bewegt sich die Rosenachsenspitze von O über a', b', c' nach O. Es ist demnach die Bewegung der Spitze relativ zu einem erdfesten Koordinatensystem keine gerade Linie.

Wenn infolgedessen der Schlitz zwischen den Schneiden 14 ganz genau durch den Wendemotor stets den Drehungen der Kreiselachse nachgedreht würde, also zu ihr genau parallel bliebe, so fände die Bewegung des Stiftes 12 genau in Richtung des Schlitzes statt und würde infolgedessen, wenn wir von der trockenen Reibung absehen, in keiner Weise behindert. Es ist also in diesem Falle auch die Elevationsbewegung vollkommen ungehindert und es kann der Kreiselkompaß keine Dämpfung zeigen.

Der Wendemotor dreht nun aber den Schlitz nicht exakt dem Kreiselkompaß nach, sondern es tritt folgendes ein:

Solange die Kontaktperle 6 frei zwischen den Kontaktklötzen 7 hängt, steht der Schlitz still; sobald die Kreiselachse relativ zum nachgedrehten System eine so starke Verstellung hat, daß ein Kontakt zustandekommt, wird der Wendemotor eingeschaltet. Dieser dreht wesentlich schneller als der Kreiselkompaß schwingt und infolgedessen rückt er den Kontaktbock, der vorher Kontakt gemacht hat, wieder von der Kontaktperle 6 ab, womit der Wendemotor zum Stillstand kommt. Das Spiel an den Kontakten bewirkt also, daß die Schneiden der Kreiselachse nicht kontinuierlich nachgedreht werden, sondern in kurzen Perioden ruckweise. Sie stehen also zeitweise still, zeitweise drehen sie sich schneller als die Kreiselachse. Die Zeiten des Stillstandes sind wesentlich größer als die Zeiten der Bewegung wegen der großen Geschwindigkeit, mit der der Wendemotor arbeitet.

Nehmen wir nun an, daß durch Westgewicht gedämpft wird, und daß (Fig. 3) der

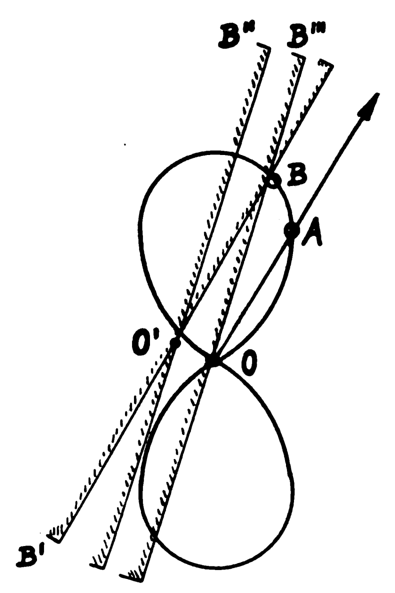


Fig. 3.

Stift 12 an dem Punkt A auf seiner Lemniskate angekommen ist. Die Kreiselachse hat dann die Richtung OA. Die Kontaktperle möge frei zwischen den Kontaktböcken schwingen, so daß also für eine kurze Zeit die Schneiden stillstehen. Während dieser kurzen Zeit möge die Spitze 12 nach dem Punkte B kommen. Dies ist aber nur möglich, wenn die Westschneide, welche vorher in der Richtung OA stand, in die Stellung $O'BB'$ verschoben

wird, denn durch die Schnecke am Wendemotor (in der Figur nicht angegeben) ist die Schneide bei nicht angetriebenem Wendemotor gegen Drehungen gesperrt. Bei dieser Verschiebung der Schneide muß sich der ganze kardanisch aufgehängte Apparat um seine horizontalen Kardanzapfen um einen kleinen Winkel γ verdrehen, welcher abhängt von der Entfernung der Kardanzapfen von den Schneiden und dem Abstand der Strecke OA von der Strecke $O'B$. Durch diese Verdrehung des Systems wird der Schwerpunkt des ganzen Systems angehoben und eine Arbeit geleistet, die gegeben ist durch die Größe des Winkels γ und die Stabilität des kardanisch aufgehängten Systems.

Wenn der Stift im Punkte B angekommen ist, so möge die Kontaktperle 6 mit dem linken Kontaktbock 7 Kontakt machen. Die Folge davon ist, daß jetzt die Schneide durch den Wendemotor um den Punkt O' verdreht wird und in die Richtung OB, d. h. in die Stellung $O'B''$ gebracht wird. Dadurch, daß diese Drehung schneller erfolgt, als die Bewegung der Kreiselachse, rückt die Schneide von dem im Punkte B verbleibenden Stifte ab und sie kann jetzt in die Stellung OB''' zurückfallen, d. h. die Hebung des Schwerpunktes des kardanisch

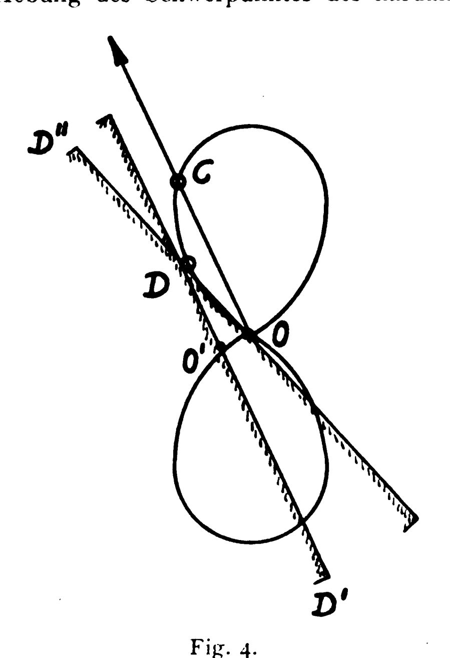


Fig. 4.

aufgehängten Systems wird rückgängig gemacht. Die hierbei freiwerdende Energie geht nicht auf das schwingende System zurück, sondern wird durch die Reibung in den Kardanzapfen und durch die Reibung in dem Getriebe des Wendemotors verbraucht. Daraufhin wiederholt sich der ganze Vorgang in genau derselben Weise.

Ist z. B. — Fig. 4 — die Kreiselachse in der Richtung OC angekommen, so daß also das Rosenachsenende sich im Punkte C befindet, und rückt dieses, während der Wendemotor nicht läuft, nach dem Punkte D, so wird die Schneide hierdurch in die Stellung $O'DD'$ gebracht unter Anhebung des Schwerpunktes des kardanisch aufgehängten Systems und Arbeit verbraucht. Diese geht verloren, während der Wendemotor nachdreht und die Schneide in die Stellung ODD'' bringt. Auch wenn die Kreiselachse zurückschwingt und der Stift 12 z. B. in der Stellung E (Fig. 5) angekommen ist, so

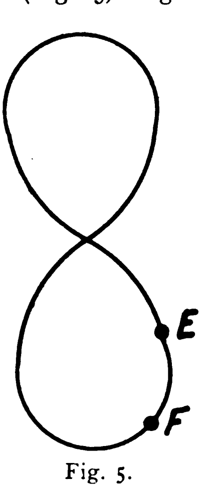


Fig. 5.

muß er beim Weiterwandern nach der Stellung F das kardanische Gehänge in demselben Sinne um einen Winkel γ anheben und Arbeit leisten, die während der Periode des Nachdrehens des Wendemotors durch Reibung verbraucht wird.

Umgekehrt liegen die Verhältnisse, wenn der Stift 12 nicht an der Westbacke anliegt, sondern durch entsprechende Gewichtsverteilung an der Ostbacke zum Anliegen gebracht wird (Fig. 6). Es möge sich der Stift in einem gewissen Moment im Punkte A befinden und während der Wendemotor nicht läuft, nach dem Punkte B wandern; die Ostbacke befindet sich in der Richtung OA, während der Stift sich im Punkte A befindet. In dieser Lage ist zwar der Schwerpunkt des ganzen nachgedrehten plus schwimmenden Systems in seiner tiefsten Lage, nicht aber der Schwerpunkt des nachgedrehten Systems für sich allein betrachtet. Denken wir uns nämlich die Beschleunigung (negative Dämpfung) durch ein Gewicht im Osten des nachgedrehten Systems hervorgerufen, so will dieses das nachgedrehte System um einen gewissen Winkel γ_1 verkanten. Hieran wird es teilweise gehindert, weil es wegen der Anlage des Stiftes 12 an der Ostbacke das bewegliche System mit ver-

kanten muß, so daß der Verkantungswinkel kleiner ist als der Winkel γ_1 und nur die Größe γ_2 erreichen möge. Wenn nun der Stift, während der Wendemotor nicht läuft, von A nach B (s. Fig. 6) wandert, so kann die Verkantung des nachgedrehten Systems zunehmen und der Schwerpunkt dieses Systems sich senken, also Arbeit gewonnen werden, indem die Senkung des Schwerpunktes des Systems die Bewegung des Stiftes von A nach B begünstigt. Die Ost-

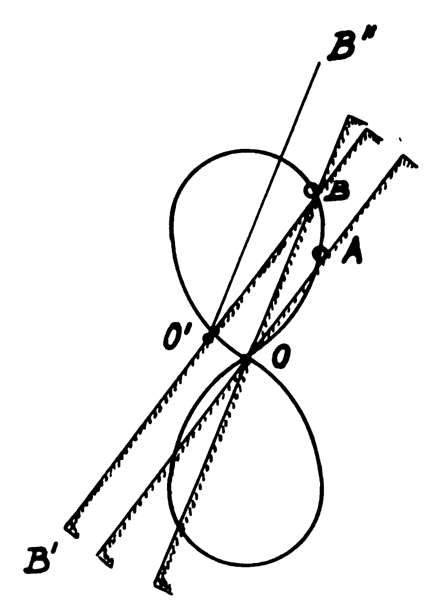


Fig. 6.

backe kommt hierbei durch die Wirkung der Erdschwere in die Richtung $BO'B'$. Jetzt setzt die Drehung des Wendemotors um den Punkt O' ein. Da während der Drehung der Stift in B verbleibt, kann die Schneide nicht in die Stellung $O'B''$ rücken, sondern muß in die Stellung OB rücken, d. h. die Drehung kann nur erfolgen unter gleichzeitiger Anhebung des Schwerpunktes des nachgedrehten Systems. Die Energie für diese erneute Hebung des Schwerpunktes liefert der Wendemotor und diese Energie ist es, welche bei der ganzen Periode das schwimmende System gewonnen hat und demnach zur Vergrößerung der Schwingungen des Systems dient.

Wir haben also das Resultat, daß bei der Dämpfung durch die geschilderte Schwerpunktsverschiebung die Elevationsbewegung unter Energieverbrauch stattfindet unter Drehung des kardanisch aufgehängten Systems um die horizontalen Kardanzapfen. Diese Verdrehung tritt periodisch ein und am Ende der Periode wird sie bei der Nachdrehung des Wendemotors in Reibungswärme umgesetzt. Es ist demnach in der obigen Schwingungsgleichung 1 noch ein Drehmoment um die Elevationsachse $\pm R$ hinzuzufügen, wobei das plus-Zeichen zu setzen ist, solange $\frac{d\beta}{dt}$ positiv ist, das negative Zeichen, solange $\frac{d\beta}{dt}$ negativ ist. Die Größe R selbst ist eine kurz periodische Funktion der Zeit, deren Mittelwert aber nahezu konstant ist. Sie ist gegeben durch den Abstand l der Schneiden 14 von dem Führungsauge 11 und dem Druck, welcher zur Hebung des Schwerpunktes des kardanisch aufgehängten Systems im Mittel aufgewandt werden muß[1]).

Diese Theorie über die Wirkungsweise der Dämpfung wird durch 3 Versuche bestätigt:

1. Wird der Strom des Wendemotors ausgeschaltet, das nachgedrehte System also nicht den Schwingungen nachgedreht, so ist weder Dämpfung noch Beschleunigung vorhanden; da der Druck P zwischen Stift und Backe unverändert bleibt, kann also dieser die Dämpfung direkt nicht bewirken.
2. Es ergibt der Versuch, daß die Schwingungsdauer durch die Dämpfung nicht verändert wird. Dies kann nach der Theorie der Schwingungen nur der Fall sein, wenn das dämpfende Drehmoment eine Konstante ist, nicht aber, wenn es der Geschwindigkeit proportional ist.
3. Bei schrägstehender Rosenachse übt natürlich die Erdschwere bei nicht ausbalanciertem beweglichen System ein Drehmoment um die Rosenachse aus, das keine Dämpfung aber eine Verstellung der Kreiselachse bewirkt. Der Versuch zeigt, daß diese Verstellung unabhängig von der Dämpfung ist. Daraus folgt, daß die Dämpfung nur durch ein horizontales Drehmoment erzielt sein kann, da jedes andere eine zusätzliche Verstellung hervorruft.

1) Herr Sommerfeld hat in Schriftsätzen, die mir bekannt geworden sind, eine grundsätzlich abweichende Theorie aufgestellt, und Herr v. Kármán und Herr Glitscher sind seinem Gedankengange gefolgt. Herr Sommerfeld leitet die Dämpfung aus einem Drehmomente her, das durch den Druck der Rosenachsenspitze gegen die Westbacke um die Vertikale entstehen soll, so daß also die Erdschwere die Dämpfung hervorrufen würde. Diese Theorie widerspricht demnach den Grundlagen der Mechanik und natürlich auch den Versuchsresultaten.

(Eingegangen 19. Dezember 1927.)



Wandrauhigkeit und Wärmeaustausch in der Strömungslehre.

Von H. Lorenz.

In meiner Mitteilung „Die Wandrauhigkeit in der Strömungslehre" (Physik. Zeitschr. **27**, 92, 1926) habe ich gezeigt, daß in einem Rohre oder Kanal das Druck- bzw. Spiegelgefälle $dp : dz$ bei rein turbulenter Strömung durch die Formel

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\gamma w^2}{2g} = \frac{2\tau}{r} \qquad (1)$$

im Einklang mit langjährigen Erfahrungen der Hydraulik gegeben ist, worin w die Mittelgeschwindigkeit im Querschnitte F, γ das Raumgewicht, g die Erdbeschleunigung und τ die Schubspannung an der Innenwand bedeuten, während der sog. hydraulische Radius r und die Widerstandszahl λ bei einem benetzten Umfange U und Unebenheiten der Wand von der mittleren Steigung $h : l$ durch

$$r = \frac{2F}{U}, \quad \lambda = \frac{4h}{l} \qquad (2)$$

gegeben sind. In einer weiteren Mitteilung „Wärmeübergang und Turbulenz" (Physik. Zeitschr. **28**, 446, 1927) habe ich ferner nachgewiesen, daß der Beiwert α in der bekannten Formel

$$dQ = \alpha (T_0 - T)\, dF \qquad (3)$$

für den Wärmeübergang Q zwischen einer festen Wand von der Temperatur T bezogen auf die Zeiteinheit und das Wandflächenelement dF mit der obigen Wandwiderstandszahl λ in der Beziehung

$$4\alpha = \lambda \cdot \gamma \cdot c_p \cdot w \qquad (4)$$

steht. Diese Beziehung, welche überdies schon vor mir van Iterson (De Ingenieur 1926, Nr. 17) aufgestellt hatte, wird durch die Erfahrung gut bestätigt. Im Falle einer laminaren Grenzschicht, die ich mir aber angesichts der darin auftretenden Wirbelballen nicht recht vorstellen kann, müßte die Wärmeleitung in dieser eine Korrektion bedingen, die Sellerio in dem Aufsatz „Beziehungen zwischen Wärmeübergang und Reibung" (Physik. Zeitschr. **29**, 55, 1928) angegeben hat. Haben wir es nun im Gegensatz zu dieser Strömung mit der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit bzw. der Umströmung der Außenwand eines Rohres zu tun, so verlieren die vorstehenden Formeln mit der nicht vorhandenen mittleren Geschwindigkeit w ihren Sinn, während die Grenzschicht auch auf der Außenseite des Körpers bzw. der Rohroberfläche durch deren Rauhigkeiten von der mittleren Steigung $h : l$ bestehen bleibt. In dieser können wir in erster Annäherung eine lineare Geschwindigkeitsverteilung mit dem Mittelwerte $v/2$ annehmen, so daß für die Geschwindigkeitszunahme v von der Haftung bis zum vollen Außenstrome die Impulsgleichung

$$W = v \cdot \frac{dm}{dt}, \quad \frac{dm}{dt} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v}{2} \cdot l \cdot b \qquad (5)$$

besteht, worin h die Grenzschichtdicke und b die Wandbreite bedeutet.

Unter Ausschaltung von $dm : dt$ und Einführung der Wandfläche $bl = F$ sowie des Steigungsverhältnisses

$$\zeta = \frac{h}{l} = \frac{\lambda}{4} \qquad (6)$$

als Maß für die Wandrauhigkeit erhalten wir alsdann aus (5)

$$\frac{W}{F} = \zeta \cdot \frac{\gamma v^2}{2g} = \tau \qquad (5a)$$

worin der Beiwert ζ gerade ein Viertel der Rohrwiderstandszahl λ ist, und τ die Schubspannung an der benetzten Fläche bedeutet.

Zu demselben Ergebnis gelangen wir auch mit der Verschiebungsarbeit $W \cdot dz$ der Platte, durch die dem Flüssigkeitselement $dm = \frac{\gamma}{g} b \cdot h \cdot dz$ der Grenzschicht die verlorene Wucht $\frac{v^2}{2} \cdot dm$ wieder erteilt wird, also mit $F = b \cdot l$

$$W \cdot dz = \frac{\gamma}{g} \cdot b \cdot h \cdot dz \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{h}{l} \frac{\gamma v^2}{2g} \cdot F \cdot dz$$

wie oben. Aus dem Vergleich von (1) mit (5a) erhellt, daß ein in der Achsenrichtung durch die Flüssigkeit mit $v = w$ gezogenes Rohr an der Innenfläche den doppelten Reibungswiderstand erfährt wie an der Außenfläche, offenbar wegen der dort gegen das Rohrinnere größeren Bewegungsfreiheit der an der Wand gebildeten Wirbelballen.

Über die Größe von ζ würden am besten Schleppversuche mit ebenen Platten Aufschluß geben, wenn diese nicht durch den Kanteneinfluß gestört würden. Diesen Fehler hat G. Kempf, der Leiter der Hamburger Schlepp-Versuchsanstalt[1]), dadurch vermieden, daß er solche Meßplatten in der Seitenwand eines großen Ozeandampfers unter gleichzeitiger Abdichtung derart beweglich eingebaut hat, daß die Reibungskraft auf der Innenseite durch Hebelübertragung gemessen werden konnte. Er fand bei Schiffsgeschwindigkeiten von 15,7—16,5 km = 8—8,5 m/sec im Mittel $\zeta = 0{,}00225$, d. i. genau den

1) Dr. G. Kempf, Neuere Erfahrungen im Schiffbauversuchswesen. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft **28**, 162, 1927.

vierten Teil von $\lambda = 0{,}009$ in guter Übereinstimmung mit früheren Plattenschleppversuchen von Gebers und eigenen an eisernen Zylindern[1]). Da für eiserne Rohre je nach der Glätte der Wand $\lambda = 0{,}008$ bis $0{,}01$ nach Gl. (1) aus dem Druckverluste gefunden wird, so liegt darin eine vorzügliche Bestätigung der Beziehung (6) und zugleich eine hohe Bewertung des Kempfschen Versuchverfahrens und seiner Ergebnisse. Die großen Kosten und der erhebliche Zeitaufwand verhindern allerdings die allgemeine Anwendung; und darum ist es gewiß wichtig und zu begrüßen, daß man zu denselben Ergebnissen durch die viel einfacheren Rohrversuche mit gleichem Wandmaterial und Oberflächenbeschaffenheit unter Benutzung von Gl. (6) gelangt.

Es liegt nun nahe, auch den Wärmeaustausch einer festen Oberfläche mit einer an ihr hinströmenden Flüssigkeit mit dem Beiwert ζ in Beziehung zu bringen.

Der in der Arbeitsformel

$$W \cdot dz = \zeta \cdot \frac{\gamma v^2}{2g} \cdot F \cdot dz$$

links stehenden Verschiebungsarbeit der Platte entspricht alsdann die Wärmezufuhr $\alpha(T_0 - T) F \cdot dt$, rechts aber der verlorenen und wiederersetzten Wucht $\frac{v^2}{2g}$ der Gewichtseinheit der Unterschied des Wärmeinhalts $c_p\,(T_0 - T)$. Daraus folgt alsdann nach Wegheben von $(T_0 - T) \cdot F$ die Beziehung

$$\alpha = \zeta \cdot \gamma \cdot c_p \cdot \frac{dz}{dt} = \zeta \gamma \cdot c_p \cdot v, \qquad (7)$$

die wegen $\lambda = 4\zeta$ mit (4) übereinstimmt, wenn wir darin v und w vertauschen, was angesichts der einseitig unbegrenzten Strömung an der Platte bzw. der Außenseite eines Körpers sowie der fast gleichförmigen Geschwindigkeitsverteilung der rein turbulenten Rohrströmung durchaus berechtigt ist.

1) G. Kempf, Über den Reibungswiderstand von Flächen verschiedener Form. Proc. Int. Congr. Applied Mechanics, Delft 1924.

(Eingegangen 10. März 1928.)

Zur Berechnung der Schallenergie.

Von Viktor Weißkopf.

Bei der Ableitung des Ausdruckes für den Energiefluß einer ebenen Schallwelle werden von allen Autoren die Größen zweiter Ordnung in den Druck- und Volumschwankungen vernachlässigt. Wir werden zeigen, daß dies bei der Berechnung der potentiellen Energie nicht berechtigt ist. Andererseits sind die Zusätze zweiter Ordnung durch die hydrodynamischen Gleichungen nicht eindeutig bestimmt. Sie werden erst durch die Forderung der Gleichheit von kinetischer und potentieller Energie bei Schallschwingungen genauer fixiert. Hierbei zeigt es sich, daß die von Airy berechneten Zusätze zweiter Ordnung nur in speziellen Fällen Geltung haben.

Aus den hydrodynamischen Grundgleichungen ergeben sich für die ebene Schallausbreitung bei kleinen Amplituden (unter Vernachlässigung der zweiten Ordnung) bekanntlich folgende Ausdrücke[1]):

$$\frac{d\xi}{dt} = A \sin \Theta$$

$$p = p_0\left(1 + \frac{\varkappa}{c} A \sin \Theta\right) \quad \Theta = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad (1)$$

$$v = v_0\left(1 - \frac{1}{c} A \sin \Theta\right)$$

(wobei p den Druck, v das spez. Volum, ξ die Verschiebung, p_0, v_0 die Größen im Ruhezustand, A die Geschwindigkeitsamplitude, $\varkappa$ das Verhältnis der spez. Wärmen, c die Schallgeschwindigkeit, ω die Kreisfrequenz bedeutet).

Der mittlere Energiefluß pro cm² und sec ist gleich dem mittleren Energieinhalt eines Prismas mit der Grundfläche 1 cm² und der Länge c parallel zur Fortpflanzungsrichtung.

Der mittlere kinetische Energieanteil ist leicht zu berechnen. Er ergibt sich zu[2]):

$$T = \frac{c}{4 v_0} A^2 \qquad (2)$$

Hierbei würden Zusätze 2. Ordnung zu den Ausdrücken (1) durch die Quadrierung in solche 3. und 4. Ordnung übergehen und daher keine Rolle spielen.

Die potentielle Energie wird meistens folgendermaßen abgeleitet[3])

$$\delta u = p\,\delta v = (p_0 + \delta p)\,\delta v = p_0 \delta v + \delta p\,\delta v\,. \qquad (3)$$

Das Glied $p_0 \delta v$ wird bei der Integration weggelassen, mit der Begründung, daß δv rein periodisch ist. Ist aber der Zusatz 2. Ordnung zu δv nicht rein periodisch, so würde das Glied einen Beitrag gleicher Ordnung wie $\delta p\,\delta v$ zur Energie liefern. Dies ist auch, wie wir zeigen wollen, der Fall.

1) Siehe z. B. Rayleigh, Theory of the sound, II. Band, S. 16, 2. Auflage, London 1890. Der Ausdruck für v entsteht aus $p\,v^\varkappa = \text{const.}$

2) Lamb, Dynamical theory of sound, S. 164, London 1910.

3) Siehe z. B. Lamb, Dynamical Theory of sound, 163.



Wir berechnen die Zusätze 2. Ordnung aus folgenden Gleichungen:

Eulersche Gleichung:

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} + \dot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$v\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} - \dot{\xi}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{5}$$

und setzen an:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\xi} = A\sin\Theta + f(x,t)\\ &v = v_0\left(1 - \frac{1}{c}A\sin\Theta + \varphi(x,t)\right)\\ &pv^\varkappa = \text{Const oder}\\ &p = p_0\Big[1 + \frac{\varkappa}{c}A\sin\Theta - \varkappa\varphi(x,t)\\ &\quad + \frac{\varkappa}{2}(\varkappa+1)\frac{A^2}{c^2}\sin^2\Theta\Big] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aus (4) erhält man durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c^2\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varkappa+1}{c}A^2\omega\sin\Theta\cos\Theta. \tag{7}$$

Aus (5) ebenso:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{8}$$

Das ergibt zusammen durch Differenzieren von (7) nach x und (8) nach t:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\varkappa+1}{c^2}A^2\omega^2\cos 2\Theta.$$

Das Integral lautet allgemein:

$$\varphi(x,t) = -\frac{\varkappa+1}{4c^2}A^2\left[\frac{ct+x}{2}\frac{\omega}{c}\sin 2\Theta + h(ct+x) + j(ct-x)\right],$$

wobei h und j beliebige Funktionen sind. Für die stationäre Welle gilt die spezielle Lösung:

$$\varphi(x,t) = -\frac{\varkappa+1}{4c^3}A^2\omega x\sin 2\Theta + \varphi^*(\Theta),$$

wobei φ^* eine beliebige Funktion von $\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ist.

Der Mittelwert des Raumintegrals über das erste Glied ist 0. Es liefert also keinen Beitrag zur Energie in (3). Da aber die Funktion $\varphi^*(\Theta)$ beliebig ist, kommen wir zu dem Resultat: Die potentielle Energie einer Schallwelle läßt sich nicht eindeutig aus den hydrodynamischen Gleichungen berechnen.

Hingegen kann man auf folgende Weise zu einem Wert für die potentielle Energie gelangen: Nach dem Hamiltonschen Prinzip ist $\int(T-U)\,dt$ ein Extremum. Daher muß der Mittelwert von $(T-U)$ für alle unendlich benachbarten virtuellen Bewegungen gleich sein. Eine von diesen ist die harmonische Wellenbewegung, da die Differenzen (die Zusätze 2. Ordnung zu [1]) unendlich klein von höherer Ordnung als die Variabeln selbst sind. Bei harmonischen Schwingungen ist $T-U=0$, daher gilt für die wahre Bewegung $T=U$, und für den Gesamtenergiefluß

$$W = T + U = \frac{c}{2v_0}A^2.$$

Der so bestimmte Ausdruck für die potentielle Energie liefert uns umgekehrt gewisse Bestimmungen für die Funktion φ^*. Die Berechnung der potentiellen Energie bei gegebenem φ^* würde folgendermaßen vor sich gehen: Es sei s definiert durch $v = v_0(1+s)$; dann ist der Energiezuwachs der Masseneinheit bei Vernachlässigung der Glieder von höherer als 2. Ordnung

$$\delta u = \int_{v_0}^{v} p\,dv = p_0 v_0\int_0^s (1-\varkappa s)\,ds = p_0 v_0\left(s - \frac{\varkappa}{2}s^2\right).$$

Den Energieinhalt des Prismas berechnen wir, indem wir es in $c\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$ Abschnitte von der Länge λ teilen. Für jeden von diesen gilt

$$U_\lambda = p_0\int_x^{x+\lambda} s\,dx - \frac{p_0\varkappa}{2}\int_x^{x+\lambda} s^2\,dx,$$

daher für den mittleren Energieinhalt $U = \frac{\omega}{2\pi}U_\lambda$.

Da nach (2) die Energie von der Größenordnung A^2 ist, kann man im zweiten Integral für s^2 mit unendlich kleinem Fehler $\frac{A^2}{c^2}\sin^2\Theta$ setzen. Die Ausrechnung des zweiten Integrals liefert für U den Anteil

$$\frac{c}{4v_0}A^2,$$

dieser ist nach (2) gleich der kinetischen Energie, das hat zur Folge, daß das erste Integral verschwinden muß oder daß φ^* gleich 0 oder eine Funktion von der 2. Größenordnung sein muß, deren räumlicher Mittelwert verschwindet.

Die genaue Form der Funktion wird durch die Grenzbedingungen, d. i. durch die Bewegung des Schallsenders an der Stelle $x = 0$ bestimmt. Erzeugt dieser obertonfreie Volumschwankungen, so ist $\varphi^*(\Theta) = 0$. Dann folgt aus (8)

$$f(x,t) = \frac{\varkappa+1}{4c^2}A^2\omega x\sin 2\Theta - \frac{\varkappa+1}{8c}A^2\cos 2\Theta. \tag{9}$$

Die Geschwindigkeitsänderungen sind dann auch an der Stelle $x = 0$ nicht ganz obertonfrei. Das-

selbe gilt nach (6) für die Druckänderungen. Setzen wir hingegen die Druck- oder Geschwindigkeitsänderungen als obertonfrei erzeugt an, so erhalten wir wieder für φ^* (Θ) einen von 0 verschiedenen Wert. Die Glieder 2. Ordnung sind also verschieden, je nach dem der Schallsender Druck-, Volum- oder Geschwindigkeitsänderungen erzeugt.

Die entsprechenden Verschiebungen ξ erhält man durch Integration von (9) oder den entsprechend abgeänderten Ausdrücken. Wenn von $B = -\frac{A}{\omega}$ bis die Amplitude des Gliedes 1. Ordnung ist und k (x) eine unbestimmte Funktion, so gilt bei obertonfreier Schallerzeugung durch Geschwindigkeitsänderungen:

$$\xi_{(\dot{\xi})} = B\cos\Theta - \frac{(\varkappa+1)\omega^2}{8c^2} x B^2 \cos 2\Theta + k(x)$$

durch Volumänderungen:

$$\xi_{(v)} = B\cos\Theta - \frac{(\varkappa+1)\omega^2}{8c^2} x B^2 \cos 2\Theta - \frac{(\varkappa+1)\omega}{16c} B^2 \sin 2\Theta + k(x)$$

und durch Druckänderungen:

$$\xi_{(p)} = B\cos\Theta - \frac{(\varkappa+1)\omega^2}{8c^2} x B^2 \cos 2\Theta + \frac{(\varkappa+1)\omega}{16c} B^2 \sin 2\Theta + k(x).$$

Bloß die erste Form stimmt mit der von Airy angegebenen überein[1]). Bei obertonfreier Schallerzeugung durch Druck- oder Volumschwankungen tritt eine Abweichung von Airys Formel ein, so daß es in diesen beiden Fällen keine Stelle im Raum gibt, wo die ebene Schallwelle bis in die zweite Ordnung obertonfrei ist.

1) Airy, Enc. Metrop. art. Tides and Waves, London 1845, siehe auch Lamb, l. c., S. 180f.

Wien, im Januar 1928.

(Eingegangen 20. Februar 1928.)

Versuche über Reibungselektrizität. II. Ein neuer Effekt.

Von Josef Tagger.

In einer ersten Mitteilung (diese Zeitschr. **28**, 365—375, 1927) habe ich über Versuche berichtet, die sich mit der Erzeugung von Reibungselektrizität durch Stoß befassen und habe die Mitteilung neuer Versuche in Aussicht gestellt, bei denen Reibungselektrizität durch Einwirkung von Gasen auf feste Körper entsteht. Obwohl seit dieser Mitteilung nahezu ein Jahr verflossen ist, war es mir nicht möglich, die Arbeit inzwischen wesentlich zu fördern. Da die ersten Versuche bereits in das Jahr 1923 zurückreichen und inzwischen dasselbe Problem von verschiedenen Seiten erfolgreich bearbeitet wird, sehe ich mich veranlaßt, über den heutigen Stand meiner Versuche zu berichten.

Bei meinen Versuchen, durch den Stoß fester Körper Elektrizität zu erzeugen, ist die beim Stoße umgesetzte mechanische Energie sehr gering, es genügt eine fast unmeßbar kleine Geschwindigkeit des stoßenden Körpers, verhältnismäßig große Ladungen zu erzeugen. Da ist die Frage naheliegend, warum nicht auch durch den Stoß der bewegten Moleküle ruhender Luft, die doch Geschwindigkeiten von mehreren hundert Metern pro Sekunde besitzen, auf feste Körper nicht ebenfalls elektrische Ladungen auftreten sollten. Es ist dies dieselbe Frage, die sich A. Güntherschulze[1]) später auch stellte, ohne sie jedoch zu beantworten. Daß der durch den Stoß der Moleküle erzeugte Druck pro Flächeneinheit viel höher ist als der bei meinen Versuchen angewendete, war mir klar, ebenso sicher ist es aber auch, daß unter normalen Verhältnissen dieser Molekülstoß nachweisbare Ladungen nicht hervorbringt. Die Ursache für das Nichtauftreten von Ladungen unter normalen Verhältnissen vermutete ich in dem Vorhandensein einer Gashaut, die bewirkt, daß der Stoß zwischen gleichartigen Körpern erfolgt, wodurch das Auftreten von Ladungen unterbleibt. Trifft der Stoß des Moleküls auf die freie metallische Oberfläche, so müssen Ladungen entstehen. Durch diesen Gedankengang ist die Anordnung der Versuche bereits gegeben.

Chrom-Nickel-(Cekas-) Draht von 0,55 mm Φ wurde zu einer engen Spirale gewickelt und diese Spirale an mehreren Stellen an einer Holzleiste befestigt (Fig. 1). Die Leiste wurde isoliert von einem Bernsteinstücke B gehalten. An die Enden der Spirale waren zwei starke Kupferdrähte angeschlossen, die mit ihren Enden je in einen Quecksilbernapf tauchten. Die beiden Quecksilbernäpfe saßen auf einem drehbaren Hebel und die Länge der Kupferdrähte war so bemessen, daß beim Senken des Hebels zuerst der eine und erst etwas später der andere Kupferdraht vom Quecksilber sich abhob. Dieser letztere Kupferdraht war außerdem leitend mit einem Quadrantenelektrometer verbunden. Durch die beiden Quecksilbernäpfe konnte die Spirale an eine Starkstromquelle angeschlossen werden, und zwar war jener Pol der Stromquelle, der mit der Spirale länger in Kontakt blieb, geerdet. Zur Vermeidung starker Funkenbildung war über

1) Zeitschr. f. Phys. **39**, 245, 1926.

dem Quecksilber eine Schichte Petroleum aufgegossen. Wurde nun der Hebel gehoben, so war der Strom geschlossen und die Spirale kam in lebhafte Glut. Durch das Senken des Hebels wurde der Strom unterbrochen, und zwar in der Weise, daß die Spirale im Momente der Isolierung auf Erdpotential sich befand.

Mit dieser einfachen Versuchsanordnung wurde eine große Zahl von Versuchen durchgeführt, aber immer mit demselben Material (Cekasdraht). Der Draht wurde zuerst etwa 10 Minuten schwach geglüht, dann isoliert und gemessen, nach längerer Pause wurde der Glüh-

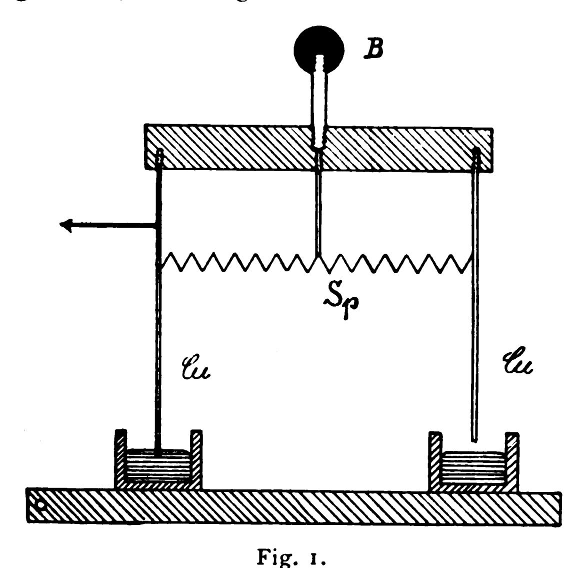


Fig. 1.

prozeß mit erhöhter Temperatur wieder 10—15 Minuten fortgesetzt und dann wieder beobachtet und so fort, bis nahe die Schmelztemperatur des Drahtes erreicht war. Bei den tieferen Glühtemperaturen war der Effekt sehr klein oder überhaupt nicht nachweisbar, bei hohen Glühtemperaturen trat vielfach ein sehr starker Effekt auf. In einzelnen Fällen wurden Spannungen gemessen, die 30 Volt erreichten. Die entwickelte Ladung war durchaus negativ. Die Empfindlichkeit des Quadrantenelektrometers betrug bei normaler Nadelspannung etwa 100 Partes pro Volt, die Kapazität der Versuchsanordnung war von der Größenordnung 80 cm. In einzelnen Fällen wurde die Nadelspannung weitgehend verringert, um auch höhere Spannungen messen zu können. Um ein Bild zu geben über den zeitlichen Verlauf der Ladungsentwicklung, führe ich folgende Tabelle an. Auf der linken Seite derselben stehen die Zeiten, innerhalb welcher seit Unterbrechung des Glühvorganges und Isolierung des Systems die Ausschläge erreicht wurden, die sich auf der rechten Seite der Tabelle befinden. Die Nullage des Instrumentes war auf 300 eingestellt, der Ausschlag 600 bedeutet das Ende der Skala. So oft dieser Ausschlag erreicht wurde, wurde kurz geerdet derart, daß sich wieder die Nullage ergab, wodurch naturgemäß nicht unbedeutende Ladungsmengen für die Messung verlorengingen.

30 sec	460	2^m 45 sec	600
40 sec	600	3^m 25 sec	600
1^m	600	4^m 30 sec	600
1^m 20 sec	600	6^m 25 sec	600
1^m 40 sec	600	8^m	480
2^m 10 sec	600	9^m 30 sec	600

Es wurde also bei diesem Versuche das System von 80 cm Kapazität innerhalb $9^1/_2$ Minuten 10mal auf eine Spannung von etwa 3 Volt aufgeladen. Wie man aus der Tabelle ersieht, erfolgt die Ladungsentwicklung anfangs sehr rasch und wird mit fortschreitender Zeit immer schwächer. Ein schwacher Effekt war noch nach 30 Minuten vorhanden. Für eine strengere Untersuchung des Effektes war die bisher benutzte Versuchsanordnung wenig geeignet. Die Frage nach dem Einflusse des Luftdruckes auf den Effekt war naheliegend und ebenso naheliegend war die Frage nach seiner Natur: ob es sich um einen physikalischen oder chemischen Effekt handelt. Um diese Fragen zu entscheiden, ließ ich mir von der Firma Vertex Elektrowerk, G. m. b. H. in Wien, Glühlampen gewöhnlicher Konstruktion aber mit 0,2 mm starkem Platindraht als Glühdraht anfertigen. Diese Firma hat mir eine Reihe von solchen Lampen in der entgegenkommendsten Weise vollkommen kostenlos für meine Versuche zur Verfügung gestellt. Die Lampen besaßen ein offenes Ansatzrohr, um sie beliebig evakuieren zu können. Ich habe mit diesen Lampen viele Versuche durchgeführt, der Effekt, der auftrat, war aber sehr klein, so klein, daß ich ihn als positives Ergebnis gar nicht anzusprechen wagte. Ich nahm an, daß sich beim Effekte auch eine Ladung entgegengesetzten Vorzeichens entwickle und daß diese Ladung bei diesen Lampen die zu beobachtende Ladung kompensiere. Um definierte Verhältnisse zu schaffen, mußte ich also für die Versuche Lampen verwenden, deren Glühdraht eine Schutzelektrode umgab, ein Metallzylinder, wie ihn die Verstärkerröhren der Radiotechnik als Anode verwenden. Zwei derartige Lampen, wieder mit Platindraht als Glühdraht, wurden mir durch die freundliche Vermittlung des Herrn Dr. Thaller von der Röntgenröhrenfabrik C. H. F. Müller in Hamburg, bereits im Oktober 1924 ebenfalls kostenlos in uneigennützigster Weise geliefert. Aber auch mit diesen Lampen erzielte ich, trotz Erdung der Schutzzylinder, keinen Effekt. Als Glühtemperatur verwendete ich dieselbe wie

bei den Cekasdrähten, einmal deshalb, weil ich glaubte, diese Temperatur sei, genügend lange einwirkend und mit Unterstützung des Vakuums, ausreichend zur Entgasung der Drahtoberfläche, und dann auch deshalb, weil ich durch höhere Temperatur die kostbaren Lampen nicht gefährden wollte.

Diese Mißerfolge schienen darauf hinzudeuten, daß es sich um einen chemischen Effekt handle. War dies zutreffend, so mußte sich ein Effekt einstellen, wenn die Versuche mit gewöhnlichen Glühlampen mit Wolframdraht als Glühdraht wiederholt wurden. Ich ließ solche Lampen längere Zeit mit normaler Spannung brennen, brach dann die Spitze durch, um Luft eintreten zu lassen, hatte aber wieder keinen sicheren Erfolg. Inzwischen war es nach zweijährigem Warten dem Institute doch möglich geworden, eine Quecksilberdiffusionspumpe aus Stahl nach Gaede zu beschaffen. Um die Pumpe ausnützen zu können, baute ich mir selbst ein Evakuierungsgefäß aus Eisen, das die Forderungen nach hoher Isolation des Glühkörpers, ausreichender Unempfindlichkeit gegen starke Erwärmung, hohem Vakuum und beliebiger Auswechselbarkeit des Glühkörpers erfüllen sollte. Erst das vierte Gefäß erfüllte die Bedingungen, wenn man ein höchsterreichtes Vakuum von 10^{-4} cm *Hg* als ausreichend gelten läßt. Dieses Gefäß ist in Fig. 2 schematisch dargestellt. Das mittlere Rohr R_1 dient zur Evakuierung. Seine untere Hälfte sitzt direkt auf einem selbst verfertigten Metallhahn, der mittels Konus der Pumpe aufgesetzt ist. Der mittlere, vollständig schwarz gezeichnete Doppelkonus aus Bernstein ist in die Rohrenden eingekittet und hat den Zweck, im Bedarfsfalle das ganze Gefäß isolieren zu können, besonders wenn es sich darum handelt, die Gegenladung des Effektes nachzuweisen. Die Rohre R_2 nehmen die Stromzuführungen auf. Die an dem unteren Ende konischen Zuführungsstäbe pressen konische Bernsteinbuchsen in das Messingrohr. Die Buchsen sind eingeschliffen und mit Klebwachs verkittet. Die eiserne Deckelhaube sitzt auf einem Schliffe — seine geringe Länge, die wenigstens zweimal so groß als der Durchmesser des Schliffes sein sollte, ist für das geringe erreichbare Vakuum verantwortlich zu machen — ist mit einer durch die kleinen Kreise angedeuteten, mit Wasser gespeisten Kühlspirale aus Kupfer umwickelt und trägt oben seitlich einen Tubus angesetzt, dessen Spiegelglasfenster, mit Pizein aufgekittet und verschraubt, die Beobachtung der Glühspirale ermöglicht. Die Deckelhaube wird in Wirklichkeit um 90° verdreht aufgesetzt.

Da die bisherigen Versuche zur Genüge den bedeutenden Einfluß der Glühtemperatur auf den Effekt aufgezeigt hatten, baute ich mir selbst ein optisches Pyrometer nach Holborn und Kurlbaum, nachdem alle Beschaffungsversuche gescheitert waren. Das Instrument besitzt eine etwa 3fache Vergrößerung, die es ermöglicht, auch dünne Drähte mit ausreichender Genauigkeit zu messen.

Mit dieser verbesserten Anordnung wurden die Versuche fortgesetzt. Die Pumpe blieb

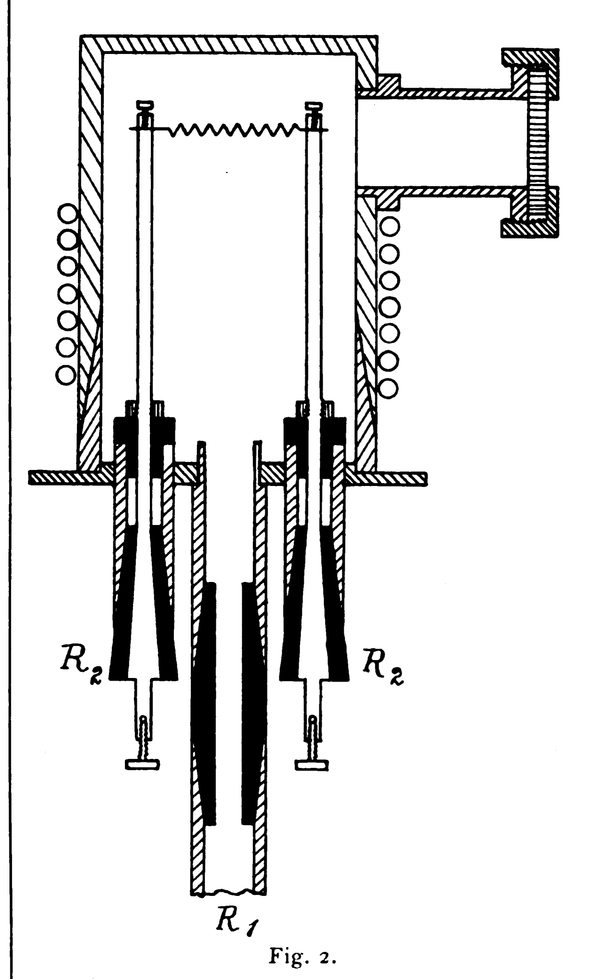


Fig. 2.

dauernd in Betrieb, auch wenn der Glühvorgang unterbrochen wurde. Ein Einfluß des erreichten Vakuums auf den Effekt war nicht vorhanden. Damit scheint auch wenigstens derzeit der Gedanke, den Effekt zur Messung höchster Vakua zu verwenden, geringe Aussicht auf Erfolg zu besitzen. Die Vertex Elektrowerk G. m. b. H. in Wien hatte mir in neuerlichem Entgegenkommen Wolframdraht zur Verfügung gestellt. Mit einer Spirale aus 0,3 mm starkem Drahte von 50 cm Länge machte ich ein Dutzend Versuche. Die Spirale wurde je 15—20 Minuten geglüht unter Temperaturen, die von 1600° auf etwa 2000° anstiegen. Beim letzten Versuche brannte die

Spirale durch. Sie war, ein Zeichen des schlechten Vakuums, mit einer dicken Oxydschichte bedeckt. Wären beim Effekte chemische Einflüsse wirksam, so hätten bei diesem Versuche starke Ladungen auftreten müssen. Bei den niedrigeren Temperaturen war aber gar kein Effekt vorhanden, erst bei den hohen Temperaturen konnten kleine, negative Ladungen nachgewiesen werden. Die höchste Spannung wurde bei einem der letzten Versuche mit etwa $^1/_4$ Volt gemessen (44 Partes).

Perucca[1]) hatte bei seinen Versuchen, Reibungselektrizität zwischen Metallen und Gasen zu erzeugen, auch mit Platin hohe Spannungen erzielt; Wolfram ergab bei Temperaturen von 1600° kaum einen Effekt, Temperaturen von 1400° und 1500° waren auf Platin ohne Einwirkung. Unter diesen Verhältnissen mußte sich der Gedanke aufdrängen, daß die Schmelztemperatur der verschiedenen Metalle bei der Erscheinung eine Rolle spiele. Ich setzte daher nochmals eine Platinspirale ein. Der Draht von 0,2 mm Φ hatte eine Länge von 35 cm. Beginnend mit einer Temperatur von 1150° stieg ich in 13 Stufen bis zur Schmelztemperatur. Nach dem Durchschmelzen der Spirale ergab sich ein Ausschlag von 80 Skalenteilen, der einer negativen Spannung von $^1/_2$ Volt entsprach. Damit war wohl der physikalische Charakter des Effektes bewiesen.

Spielte also die Schmelztemperatur wirklich eine Rolle, wie es der Versuch mit Platin ergab, so konnten auch Ladungen bei Metallen mit verhältnismäßig tiefer Schmelztemperatur auftreten. Ich verwendete Elektrolytkupfer und stieg mit der Glühtemperatur ohne den Glühprozeß zu unterbrechen in kleinen Stufen bis zum Schmelzpunkte (1075°). Bei diesem Versuche ergab sich die erste positive Ladung, der Ausschlag betrug 90 Skalenteile etwa 20 Minuten nach Beendigung des Glühens. Eine Nickeldrahtspirale ergab nach dem Durchbrennen (1460°) ebenfalls eine positive Ladung.

Diese Ergebnisse ändern das Bild unserer Vorstellungen. Die schwachen Effekte, die bei Temperaturen unter dem Schmelzpunkte auftreten, scheinen auf einen reinen Oberflächeneffekt hinzuweisen, die großen Ladungen, die bei Annäherung der Glühtemperatur an den Schmelzpunkt der Metalle auftreten, deuten auf einen Masseneffekt, auf eine Entgasung der Metallmasse als Ganzes. Es wird von besonderem Interesse sein, ob der Effekt auch noch eintritt bei Metallen ganz niedrigen Schmelzpunktes, bei Aluminium, Zink, vielleicht sogar Blei.

1) Zeitschr. f. Phys. **34**, 120—130, 1925.

Zur Klärung der Frage nach der zweiten Art der Elektrizität erdete ich beim Versuche eine Cekasdrahtspirale und schloß das jetzt isolierte Gehäuse an das Quadrantenelektrometer an. Die beobachtete, starke Ladung war jetzt positiv.

Um abschließend die nach dem Glühen von Chrom-Nickel auftretenden hohen Spannungen in einem Zuge messen zu können, setzte ich eine Spirale aus Chrom-Nickeldraht in den Apparat und verwendete das Quadrantenelektrometer in Nadelschaltung. Es ergab sich, trotz der kleinen Spirale und hohen Kapazität der Versuchsanordnung, eine Spannung von 48 Volt!

Daß bei Temperaturen, die einiges unter dem Schmelzpunkte liegen, der auftretende Effekt sehr klein ist, hat eine angenehme experimentelle Bedeutung für die Untersuchung von Nichtleitern auf denselben Effekt. Denn dies ermöglicht, die schlechten Leiter mit Hilfe von Platin- oder Wolframdrahtheizung bequem auf hohe Temperaturen zu bringen ohne fürchten zu müssen, daß ein großer Effekt durch die Einwirkung dieser Metalle verdeckt wird.

Die Reproduzierbarkeit des Effektes war bei den bisherigen Versuchen, selbst bei dem am stärksten reagierenden Chrom-Nickel, eine sehr unsichere. Ich glaube, daß hierbei die Verwendung des Glühdrahtes in Spiralenform mit eine Rolle spielt. Wenn ich auch alles Augenmerk darauf verwendete, den Abstand der einzelnen Drahtwindungen möglichst gleichmäßig zu gestalten — ich verwendete nur hartgezogene Drähte, deren Spiralen sich viel gleichmäßiger dehnen lassen — gelingt dies doch sehr schwer. Bei dem geringen Abstande der einzelnen Windungen spielen kleinste Unterschiede schon eine Rolle und bewirken eine ungleiche Verteilung der Temperatur. Wenn auch der Raum im Glühgefäße sehr beschränkt ist, werde ich doch dazu übergehen müssen, die Drähte in gestreckter Form oder Metallbänder zu verwenden.

Die Beobachtung starker Effekte ist sehr interessant. Verwendet man ein Meßinstrument der angegebenen Empfindlichkeit, so wird die Nadel nach Aufhebung der Erdung stoßartig, oft in einem einzigen Rucke über die Skala hinaus abgelenkt. Ist die stürmischste Ladungsentwicklung auch vorüber, behält der Vorgang immer noch den Charakter elementaren Geschehens: wie von kleinen Explosionen getrieben, zuckt die Nadel, hüpft das Teilungsbild in einzelnen Sprüngen durch das Gesichtsfeld. Es tritt aber bald Beruhigung ein. Dann ist die Bewegung eine schwankende, oft geht der Ausschlag ein Stück zurück, macht größere oder kleinere Pausen und schiebt sich schließlich nur mehr mit Mühe dem Ende der Skala entgegen.

Es ist sehr leicht, ohne besondere Vorkehrungen den Versuch zu wiederholen. Ich rate hiezu einen langen, 0,3—0,5 mm starken Chrom-Nickeldraht zu einer Spirale zu wickeln, diese auf eine Tonplatte als isolierende und feuerfeste Unterlage zu legen und mit einem Vorschaltwiderstande durch die Lichtleitung zu speisen. Man hat genügend Zeit, nach Beendigung des Glühens den Draht loszuklemmen und in eine dem Meßapparate aufgesetzte Metallschale zu legen, kann sich also alle Schaltmechanismen ersparen.

Ich bin jetzt dazu übergegangen, den Einfluß verschiedener Gase auf den Effekt zu überprüfen. Besonderes Interesse dürfte das Verhalten des Palladiums und des Platinschwamms dem Wasserstoffe gegenüber in Anspruch nehmen.

Wenn auch der für diese Mitteilung zugebilligte Raum sehr beschränkt ist, will ich doch auf zwei Arbeiten M. A. Schirmanns[1]) wenigstens hinweisen, die zum vorliegenden Problem in Beziehung stehen. In der ersten der beiden Arbeiten behandelt dieselbe die Sorption von Gasen durch entgaste Metalle (Wolfram) im Hochvakuum und in der zweiten die Frage nach der Existenz einer Elektrisierung durch Reibung zwischen festen Körpern und Gasen. Die Ergebnisse dieser beiden Arbeiten beanspruchen unter Berücksichtigung meiner Versuchsresultate vielleicht besonderes Interesse. Auch eine Arbeit von A. Stäger[2]), „Vulkanische Elektrizität und verwandte Gebiete" kann ich nicht unerwähnt lassen. Stäger hat in dieser Arbeit gewissenhaft alles Tatsachenmaterial gesammelt, das für die Erklärung der vulkanischen Elektrizität von Bedeutung ist und alle Erklärungsversuche zusammengestellt. Er nimmt kritisch zu diesen Versuchen Stellung und tritt, gestützt auf eigene Untersuchungen[3]) für die staubelektrischen Erklärungsversuche ein. Nachdem Stäger der von mir beobachtete Effekt nicht bekannt war, konnte er denselben zur Erklärung auch nicht heranziehen. Das von Stäger gesammelte Material scheint mir den Versuch, dem neuen Effekte bei der Bildung von Vulkanelektrizität eine gewisse Rolle zuzuschreiben, nicht aussichtslos zu gestalten. Die großen Massen feinster Asche besitzen bei der Eruption eine Temperatur, die auf 1000^0 bis 1100^0 geschätzt wird. Diese Temperatur dürfte zur Auslösung des Effektes genügen, falls der Effekt bei Asche überhaupt auftritt. Die von Stäger bevorzugte Erklärung scheint mir zwanglos und gangbar, besonders für die ersten Phasen der Eruption, in denen heftige Wirbelbewegungen den verlangten Reibungsvorgang herbeiführen können. Nicht mehr so wahrscheinlich dünkt mich das Auftreten dieser Vorgänge in den späteren Phasen, in denen sich die Aschenwolke in große Höhen und weite Entfernungen verschoben hat. In diesen Entfernungen muß wenigstens eine innere Beruhigung der Massen eingetreten sein und weitere Bewegungen sind nur mehr bedingt durch die Bewegung der Gasmassen als Ganzes und durch das Gewicht der festen Teile. Ob die hierbei auftretenden Geschwindigkeitsunterschiede zur Erzielung des großen Effektes ausreichen, wird sich nicht leicht entscheiden lassen. Nach Stäger treten Vulkangewitter aber noch auf bei Wolkenhöhen von über 10 km über dem Krater und in Entfernungen von 25 km und darüber. Da die Wolkengeschwindigkeit mit 25—50 m/sec angegeben wird, wird diese Entfernung erst in 10—20 Minuten nach der Eruption erreicht. Diese Zeiten sind mit dem neuen Effekte vereinbar, besonders wenn man bedenkt, daß die Abkühlungsgeschwindigkeit so großer Gasmassen keine sehr große ist.

Innsbruck, im Jänner 1928, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Februar 1928.)

1) Physik. Zeitschr. **27**, 748—751, 1926; Zeitschr. f. Phys. **46**, 3. u. 4. Heft, 1927.

2) Gerland's Beiträge zur Geophysik, **16**, 3.

3) Ann. d. Phys., IV. Folge, **76**, 1925 u. **77**, 1925.

Ein Accelerograph für das Praktikum.

Von Olaf Devik.

Beim elementaren physikalischen Unterricht ist die Mechanik vorwiegend ein Studium idealisierter Bewegungen und Kräfte. Daher kommt es wohl, daß die Studenten oft, sozusagen, entdecken müssen, daß die realen Bewegungen stets mit wechselnden Beschleunigungen und entsprechenden Trägheitskräften untrennbar verknüpft sind. Zwar hätte eine Analyse der alltäglichen Erfahrungen dies klar zeigen können, im Interesse der übersichtlichen Darstellung aber werden beispielsweise Erschütterungen als „Störungen" betrachtet, die durch geeignete Wahl der Versuchsbedingungen auf ein Minimum beschränkt werden können. Mit gutem Gewissen kann man sie dann vernachlässigen; das bedeutet aber psychologisch: vergessen. Das ist schade, denn erstens sind die Erschütterungen in der Praxis leider nicht zu vernachlässigen, und zweitens führen uns eben diese Erschütterungen sehr anschaulich vor Augen, wie Trägheit, Beschleunigung und Kraft miteinander verknüpft sind.

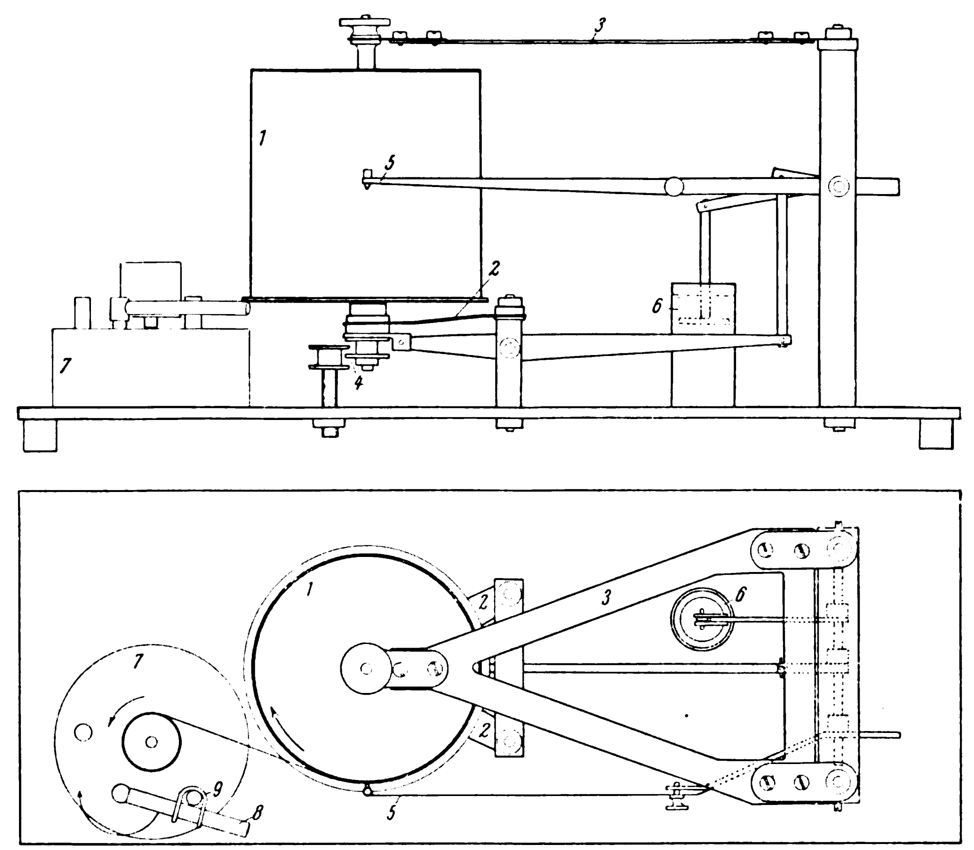


Fig. 1.

Wie bekannt, kann die Messung einer Beschleunigung auf dynamischem Weg sehr einfach geschehen; es wird im Prinzip eine belastete Federwage benutzt, wie es die Seismographen und die technischen Accelerometer in mannigfachen Ausführungen zeigen.

Im folgenden wird ein derartiger einfacher Accelerograph für das Praktikum beschrieben, welcher für die Messung von Vertikalbeschleunigungen von der Größenordnung 100 cm/sec² bestimmt ist (Fig. 1). Das schwere Gewicht (1) bildet gleichzeitig den Registrierzylinder und ist an einer kräftigen Blattfeder (2) aufgehängt; die Bewegung des Gewichtes wird oben durch den V-förmigen Arm (3) gesteuert. Dieser Verschiebung ist durch eine Sperrvorrichtung (4) ein begrenzter Spielraum gesetzt. Die Verschiebung wird in gewöhnlicher Weise vergrößert und auf die Schreibfeder (5) übertragen. Es sei die Verschiebung der Schreibfeder $= L_0$ bei einer Zusatzbelastung p_0, die Empfindlichkeit der Federwage also $a = \frac{p_0}{L_0}$. Wenn das Instrument z. B. eine aufwärts gerichtete Beschleunigung b erfährt, wird die träge Masse M des Zylinders nachbleiben, bis der Zug der Federspannung der Kraft $M \cdot b$ das Gleichgewicht hält. Von diesem Zeitpunkt an ist die Verschiebung der schweren Masse dem Instrumentstativ gegenüber unverändert, solange die Beschleunigung konstant bleibt. Ist der entsprechende Ausschlag der Schreibfeder L_1, so ist also

$$M b = a L_1, \quad \text{d. h.} \quad b = \frac{a L_1}{M}. \qquad \text{(I)}$$

M ist etwas größer als die Masse des Zylinders, denn das ganze, bewegliche Stangensystem wird auch beschleunigt. Falls man die — vorläufig unbekannte — Beschleunigung b reproduzieren kann, so kann die Masse M in der Weise bestimmt werden, daß man den Zylinder mit einer Zusatzmasse m belastet und den neuen Ausschlag L_2 beobachtet. Dann ist

$$\frac{a L_1}{M} = \frac{a L_2}{M + m}, \quad \text{d. h.} \quad M = \frac{L_1}{L_2 - L_1} \cdot m.$$

Bequemer ist jedoch das Instrument mit einer genau bekannten Beschleunigung zu eichen. Zu diesem Zweck müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: 1. Die Eigenschwingungen des Instrumentes müssen aperiodisch gedämpft sein; dies wird durch Öldämpfung (6) erreicht. 2. Periodische Beschleunigungen müssen außerhalb des Resonanzgebietes der Eigenschwingung sein.

3. Die Beschleunigung muß annähernd konstant sein, während einer Zeit wenigstens so groß wie die Eigenperiode ist. Dauert die Beschleunigung eine kürzere Zeit, wird das Instrument einen Mittelwert und nicht den größten Wert angeben.

Beim Registrieren wird der Zylinder von einem Uhrwerk oder Federwerk getrieben; entweder wird das Werk im Zylinder selbst eingebaut sein, oder man kann, wie in der Figur angedeutet, den Zylinder durch eine Schnur von einem seitlich angebrachten Federwerk (7) treiben. In diesem Falle läßt man das Ablaufen des gespannten Federwerks derart begrenzen, daß der Zylinder nur einmal umgedreht wird[1]). Bequem ist es, das Federwerk ganz in Öl laufen zu lassen.

Für die Eichung des Instrumentes kann man bequem die Schwingung einer belasteten Spiralfeder benutzen. Ist die Amplitude einer Schwingung y, so ist ja die Beschleunigung:

$$b = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot y \qquad \text{(II)}$$

und also durch die Periode T und die Amplitude y gegeben. Die Eichvorrichtung kann einfach an einem Tisch befestigt sein (Fig. 2). An einer

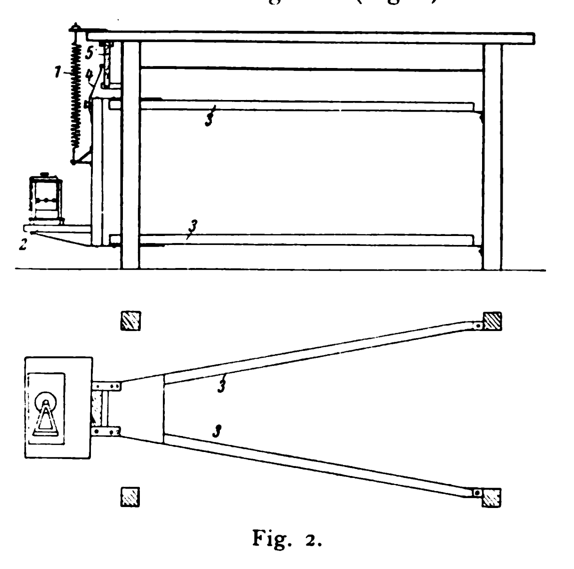


Fig. 2.

Spiralfeder (1) ist ein Brett (2) aufgehängt; die Vertikalbewegung dieses Brettes ist durch eine Parallelogrammsteuerung (3) gesichert. Die Schwingungsdauer T wird zuerst bestimmt. Dann sollen zusammenhörende Werte von Amplitude und Beschleunigung registriert werden.

Die Amplitude kann durch die Schreibfeder (4) registriert werden; das Registrierpapier wird an die Platte (5) befestigt, welche einfach mit der Hand seitwärts gezogen wird. Um eine bestimmte Anfangsamplitude einstellen zu können, wird das Brett (2) vor dem Beginn der Messung entsprechend gehoben und durch eine Kette an einem Stift aufgehängt (an der Zeichnung fortgelassen); die Schwingung wird dadurch eingeleitet, daß die Kette vom Stift wieder weg-

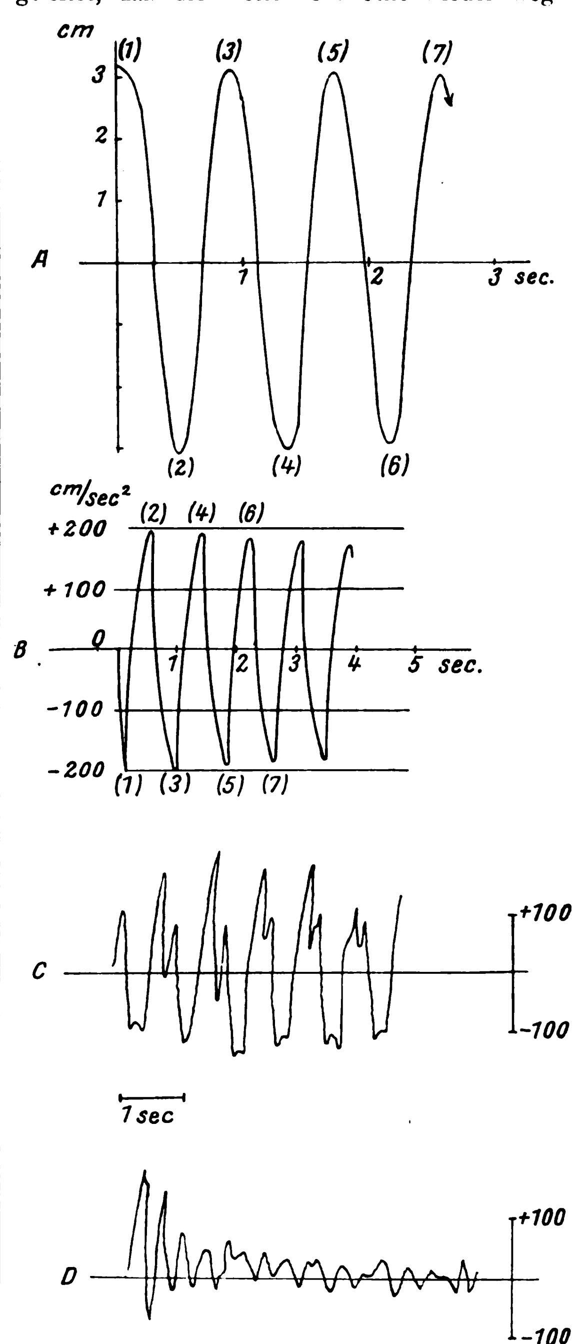


Fig. 3.

1) Die Triebfeder wird gespannt, wenn der Arm (8) nach rechts gedreht wird, und mit dem kleinen Bügel (9) festgehalten. Beim Ablaufen wird der Bügel gelöst, und der Arm dreht sich nach der Ausgangsstellung zurück.

geschoben wird, wenn man die Registrierplatte (5) in Bewegung setzt. Beim Eichen wird also der Accelerograph auf das Brett gestellt und dieses in Ausgangsstellung gebracht; nachdem der Registrierzylinder in Gang gesetzt ist, wird die Registrierplatte (5) mit der Hand seitwärts gezogen und die Schwingung wird ausgelöst; sowohl die Amplitude wie die Beschleunigung werden dann an Größe und Phase registriert. Nach beendeter Registrierung wird die Platte (5) zurückgeschoben, wodurch die Nullinie auf das Papier gezeichnet wird.

In Fig. 3 sind derartige Registrierungen von Amplitude und Beschleunigung in *A* bzw. *B* angegeben. Die Registrierungen geben ein instruktives Beispiel von zwei miteinander verbundenen Größen, welche eine Phasenverschiebung von einer halben Periode haben. An der Figur sind die zusammenhörenden Scheitelwerte der Kurven *A* und *B* durch dieselbe Nummer bezeichnet. Diese werden ausgemessen, nach (II) wird die Beschleunigung berechnet, und dann die Skalenlinien wie in Fig. 3 *B* gezeichnet.

Zwei Übungsbeispiele sind in Fig. 3 *C* bzw. 3 *D* gegeben. Bei *C* wurde das Instrument an der Hand frei getragen (die Traghandgriffe sind auf der Fig. 1 fortgelassen); die Vertikalbeschleunigung beim Gehen wurde also registriert. Bei *D* ist ein Stück einer Registrierkurve dargestellt, welche die Beschleunigung eines Fahrstuhles beim Ingangsetzen wiedergibt. Durch diese Kurve kann z. B. dann die maximale Beanspruchung des Tragseiles berechnet werden.

Trondhjem, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule (20. März 1928).

(Eingegangen, 27. März 1928.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES IV. DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN KISSINGEN VOM 18.—24. SEPTEMBER 1927.

P. Selényi (Budapest), Ionen und Elektronen in der Vakuumglühlampe[1]). (Aus dem Forschungslaboratorium „Tungsram“ der Vereinigten Glühlampen und Elektrizitäts A. G., Ujpest b. Budapest.)

Einleitung.

Verfasser hat in den letzten Jahren zum Teil mit den Herren Ing. Rostás und Ing. Tarján gemeinsam in einer Reihe von Arbeiten[2]) die in der Vakuumglühlampe auftretenden Elektronen- und Ionenströme untersucht. Es stellte sich dabei heraus, daß in der Vakuumglühlampe eine solche Mannigfaltigkeit von gaselektrischen Erscheinungen sich abspielt bzw. durch Veränderung der Versuchsbedingungen sich hervorrufen läßt, daß die Vakuumglühlampe als das beste Versuchsobjekt für diesen Zweig der Elektrizitätslehre angesehen werden kann. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet soll hier ein kurzer Überblick der gefundenen Erscheinungen — ergänzt mit einigen neueren Beobachtungen — gegeben werden. Ferner sind aus diesen Untersuchungen auch zwei, für die Glühlampenindustrie wichtige Prüfmethoden hervorgegangen: eine Methode zum Nachweis des Thoriums in den Glühfäden fertiger Lampen (vgl. die Arbeit d) und einige Methoden zur Vakuumbestimmung an fertigen Glühlampen (vgl. die Arbeit c). Auch auf diese praktischen Anwendungen kommen wir weiter unten kurz zurück.

1. Reine Elektronenerscheinungen.

11. Elektrostatischer Nachweis der Thermionenemission.

Dieser Versuch, welcher in seiner einfachsten Form — wie wir nachträglich gefunden haben — bereits im Jahre 1914 von F. Lloyd Hopwood und Eve in der Nature veröffentlicht wurde, gestattet es, den genannten Effekt mit den denkbar einfachsten Mitteln zu demonstrieren. Man braucht dazu außer einer Vakuumglühlampe mit gestrecktem Faden nichts als einen positiv und negativ elektrischen Körper, also etwa einen durch Reibung elektrisierten Glas- bzw. Hartgummistab. Nähert man den einen oder den anderen einer nicht brennenden Lampe, so werden in beiden Fällen die Glühfäden — wie zu erwarten — von dem elektrisch geladenen Körper angezogen und sie biegen sich aus; entfernt man den elektrisierten Körper, so strecken sich die Fäden — infolge der

1) Vortrag, gehalten auf dem 4. Deutschen Physikertage in Kissingen vom 18.—24. September 1927.

2) a) Zeitschr. f. techn. Phys. **5**, 412, 1924; b) ebenda **7**, 232, 1926; c) ebenda **8**, 230, 1927; d) Zeitschr. f. anorg. u. allg. Chemie **160**, 318, 1927; e) Ann. d. Phys. (4) **84**, 11, 1927.

Elastizität der Fadenhalter — wieder gerade. Wiederholt man denselben Versuch mit der brennenden Lampe[1]), so findet man keine Änderung im Verhalten der Glühfäden dem negativ-elektrischen Hartgummistabe gegenüber, ein gänzlich anderes Verhalten dagegen bei dem Versuche mit dem positiv elektrischen Glasstabe. Nähert man nämlich den positiv geladenen Glasstab, so werden die Fäden nicht angezogen, sondern bleiben vollständig unbeweglich, entfernt man aber plötzlich den Glasstab, so spreizen sich die Fäden stark auseinander und bleiben längere Zeit ausgebaucht. Die Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung ergibt sich wie folgt. Die Anziehung eines elektrisch neutralen Körpers — etwa des Glühfadens — durch einen geladenen Körper erfolgt durch die elektrische Influenzwirkung desselben. Nähert man z. B. den Ebonitstab der Lampe, so wirkt er auf den Glühfaden verteilend; die gleichnamige, hier negative Ladung wird abgestoßen und fließt durch die Leitungsdrähte in die Erde ab, die entgegengesetzte, hier positive Ladung des Fadens wird dagegen durch die negative Ladung des Ebonitstabes angezogen. Ist diese entgegengesetzte Ladung an den betreffenden Körper gebunden, so äußert sich diese gegenseitige Anziehung der Ladungen in einer gegenseitigen mechanischen Kraft zwischen den betreffenden Körpern; mit der angezogenen positiven Ladung des Fadens wird der Faden selbst mit angezogen. Im Falle des angenäherten positivelektrischen Glasstabes ist aber die entgegengesetzte influierte Ladung des Fadens negativ, und diese ist — wenn der Faden glüht — nicht an denselben gebunden, sondern kann als Elektronenschwarm aus diesem entweichen; es wird also bei der Annäherung des Glasstabes die negative Ladung aus dem Faden sozusagen herausgezogen, und der Faden, auf welchen keine mechanische Kraft übertragen wird, bleibt in Ruhe. Gleichzeitig kompensiert die auf die innere Ballonwand hinübergegangene Ladung die Wirkung des Glasstabes so, daß auf der ganzen Länge des Fadens die elektrische Feldstärke gleich Null wird. Entfernt man jetzt den Glasstab, so fällt seine Wirkung fort und die Fäden werden durch die Anziehung der negativen Ballonladung stark ausgebaucht.

Über die Richtigkeit dieser Erklärung kann man sich noch dadurch überzeugen, daß man die Lampe mit einer Drahtschlinge umgibt und diese mit einem gewöhnlichen Elektroskop verbindet. Nach Entfernen des Glasstabes spreizen die Elektroskopblätter stark auseinander und man findet eine negative Ladung derselben[1]).

Über die Komplikationen, die durch das Mitwirken der positiven Ionen entstehen können, wird weiter unten noch die Rede sein.

12. Nachweis des ,,inneren" Elektronenstromes.

Auf Grund des beschriebenen Versuches ist anzunehmen — und die Erfahrung bestätigt diese Annahme —, daß in jeder Vakuumlampe andauernde Thermionenströme bestehen, indem die aus dem einen Teil des Glühfadens austretenden Elektronen nach den anderen Glühfadenteilen von höherem positiven Potential sich bewegen. Es fließen also diese Elektronenströme vorzugsweise zwischen dem ersten und letzten Fadenabschnitt, die nämlich am nächsten beieinander liegen und die größte Potentialdifferenz gegeneinander aufweisen. Das heißt aber, daß der Verbrauchsstrom der Lampe, den wir mit einem eingeschalteten Amperemeter messen, eigentlich aus zwei Teilen besteht: der weit größere Teil fließt als gewöhnlicher Leitungsstrom durch den Glühfaden, ein kleiner Teil dagegen als Elektronenstrom durch das Vakuum hindurch, welches sozusagen einen Nebenschluß zu dem Glühfaden bildet (s. Fig. 1). Könnten wir den letzteren irgendwie unterdrücken, so sollte erwartungsgemäß der Verbrauchsstrom um den Betrag dieses „inneren" Elektronenstromes abnehmen. Es gibt dazu tatsächlich mehrere Möglichkeiten, die wir nacheinander besprechen wollen.



Fig. 1.
Leitungsstrom und Elektronenstrom in der Vakuumlampe.

1) Aus später zu erwähnendem Grunde nimmt man zu diesem Versuche Lampen, die schon lange gebrannt wurden, oder aber unterspannt man sie.

1) Vgl. hierzu: Greinacher, Zeitschr. f. techn. Phys. 4, 9, 1923.

121. Magnetische Beeinflussung des inneren Elektronenstromes.

Wird eine normale Vakuumlampe in das Innere einer Spule gebracht, so daß Lampenachse und Spulenachse zusammenfallen und wird durch Schließen des Spulenstromes ein magnetisches Feld von einigen hundert Gauß erregt, so zeigt das in den Lampenstromkreis eingeschaltete Milliamperemeter eine kleine, aber sicher zu beobachtende Stromabnahme von einigen Zehntel Milliampere. Das magnetische Feld lenkt nämlich die, von dem negativen nach dem positiven Fadenabschnitt auf geraden Bahnen sich bewegenden Elektronen ab, und zwingt sie, sich auf krummen Bahnen zu bewegen, so daß sie die positiven Fadenteile entweder gar nicht oder aber nur auf längerem Wege erreichen, was einer Abnahme der Elektronenströme entspricht[1]).

122. Elektrostatische Beeinflussung des inneren Elektronenstromes.

Eine andere, und zwar einfachere Möglichkeit zum Sperren des Elektronenstromes ergibt sich aus der Tatsache, daß das Austreten der Elektronen durch negativ geladene Körper verhindert wird. Mit einer durch Reibung elektrisierten Hartgummiplatte läßt sich das sehr schön zeigen; bringt man sie schnell in die Nähe der Lampe[2]), so nimmt der Lampenstrom um einige Zehntelmilliampere ab, entfernt man sie, so kehrt das Milliamperemeter wieder in seine ursprüngliche Lage zurück[3]).

Wiederholt man denselben Versuch mit dem positiv elektrischen Glasstabe, so merkt man bei der Annäherung desselben keine Änderung der Lampenstromstärke, nach dem Entfernen desselben findet aber gleichzeitig mit dem Auseinanderspreizen der Fäden eine Abnahme des Lampenstromes statt. Nach dem Vorhergesagten ist dies leicht zu erklären: nach dem Entfernen des Glasstabes bleibt auf der inneren Kolbenwand eine freie negative Ladung und unter Wirkung derselben wird der innere Elektronenstrom gesperrt. Dieser Zustand der Lampe — Ausbauchen der Glühfäden und Aufhören des Elektronenstromes — kann je nach den Isolationsverhältnissen kürzere oder längere Zeit bestehen bleiben, die Glühfäden strecken sich allmählich wieder aus, das Galvanometer kehrt aber nur später — dann aber momentan — in seine ursprüngliche Lage zurück, weil zur Sperrung der Elektronenströme — wie wir später sehen werden — eine negative Aufladung von bloß 20—30 Volt unterhalb des Potentials der negativen Glühfadenenden ausreicht.

1) Die genaue Erklärung ergibt sich bekanntlich aus der Tatsache, daß durch die magnetische Ablenkung der Elektronen die Raumladung verstärkt wird.

2) Zu diesem Versuch nimmt man auch eine schon lange gebrauchte Lampe. Vgl. weiter unten.

3) Da die erwähnten Änderungen der Stromstärke klein sind, so bedient man sich hierzu vorteilhaft einer Nullmethode, die die kleinen Änderungen mit einem empfindlichen Instrument sowohl zu messen als auch zu demonstrieren gestattet. Anfangs haben wir eine einfache Kompensationsschaltung verwendet, wie sie auf Fig. 2 dargestellt ist. Die Lampe L ist durch die Widerstände R und r an die Klemmen der Stromquelle angeschlossen, das Amperemeter A und das Voltmeter V mißt Stromstärke und Spannung der Lampe. Der Kompensationskreis enthält eine Akkumulatorenbatterie B und das Zeigergalvanometer G von etwa 10^{-7} Amp. Empfindlichkeit, das man durch Verschiebung des Kontaktes von r auf Null oder auf einen beliebigen Skalenteil einstellen kann. Der Vorteil dieser Anordnung außer ihrer Einfachheit ist, daß aus dem beobachteten Ausschlag α des Nullinstrumentes die entsprechende Änderung des Lampenstromes ΔJ sofort zu berechnen ist. Ist C die Empfindlichkeit des Instrumentes und r_g der Widerstand des Galvanometers, so gilt einfach

$$\Delta J = \frac{r + r_g}{r} C \alpha .$$

Ein Nachteil dieser Anordnung ist, daß sie auch zur Speisung der Lampe eine konstante Stromquelle verlangt. Dies ist bei einer Brückenanordnung nicht der Fall. Bildet man zwei nebeneinander liegende Zweige einer Wheatoneschen Brücke aus zwei Lampen gleicher Type, die zwei anderen aus zwei veränderlichen Widerständen, so ist diese Anordnung gegen Änderung der Stromquellenspannung fast vollständig unempfindlich: das auf Null gebrachte Galvanometer bleibt trotz Schwankungen der Betriebsspannung ständig auf Null. Wird aber durch irgendeine Einwirkung die Stromstärke nur in der einen Lampe geändert, so wird der Brückenausgleich gestört und der Zeiger schlägt aus. Durch eine bekannte Änderung in dem Lampenzweige, etwa durch Einschalten eines kleinen, bekannten Widerstandes, läßt sich das Brückeninstrument direkt eichen. Vgl. übrigens die unter a) zitierte Arbeit, insbesondere Seite 413.

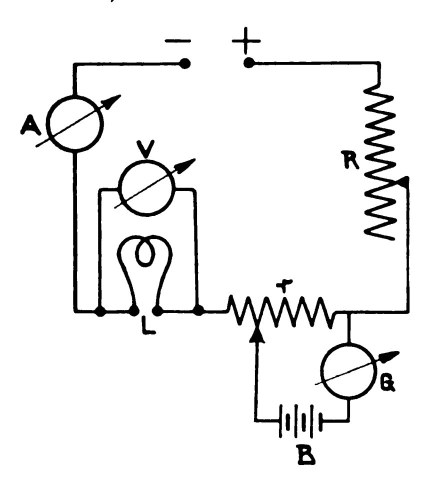


Fig. 2.
Kompensationsschaltung zum Messen des inneren Elektronenstromes.



13. Die Vakuumglühlampe als Dreielektrodenröhre, insbesondere

131. mit isoliertem Gitter, als Detektor.

Die unter 122. beschriebenen Versuche lassen sich mit genau demselben Ergebnisse an einer Dreielektrodenröhre mit isoliertem Gitter wiederholen: nähert man dieser einen negativ elektrischen Körper, so hört der Anodenstrom auf, entfernt man ihn, so fließt er wieder in unveränderter Stärke; wiederholt man dasselbe mit einem positiv elektrischen Körper, so findet man bei der Annäherung desselben keine Änderung des Anodenstromes; nach dem Entfernen wird aber das etwa mit einem Elektroskop verbundene Gitter negativ aufgeladen, und der Anodenstrom wird mehr oder minder geschwächt oder hört ganz auf. Man wird so dazu geführt, daß eine Vakuumglühlampe gleichzeitig als eine Dreielektrodenröhre aufzufassen ist: das negative Glühfadenende derselben bildet die Glühkathode, das positive Glühfadenende die Anode und der Kolben das in diesem Falle isolierte Gitter. Ist diese Auffassung richtig, so muß die Vakuumlampe auch auf elektrische Schwingungen reagieren. Sie tut es auch, wovon man sich mit den verschiedensten Anordnungen leicht überzeugen kann. Wir könnten z. B. die in der unter 121 erwähnten Magnetisierungsspule beim Schließen des Stromkreises[1]) auftretenden Schwingungen mit einer Lampe sehr schön demonstrieren: wurde die Lampe in das Spuleninnere gebracht und der Strom mit einem Morsetaster öfters geschlossen und geöffnet, so zeigte das mit dem Lampenkolben verbundene Elektrometer eine negative Aufladung und der Lampenstrom nahm um einige Zehntelmilliampere ab, genau so wie es ein Audion oder Detektor — eine Dreielektrodenröhre mit isoliertem Gitter — getan hätte. Zugleich haben wir eine sehr handgreifliche Erklärung der meistens unklar dargestellten Audionwirkung erhalten, denn der Vorgang: Nähern und Entfernen zuerst eines negativ-elektrischen, dann eines positiv-elektrischen Körpers, stellt einfach eine Periode eines elektrischen Wechselfeldes dar, und man sieht hier klar, wie unter der Wirkung eines solchen die negative Aufladung des Gitters zustandekommt.

132. Charakteristik der Vakuumlampe als Dreielektrodenröhre.

Wird der Kolben der Lampe etwas erwärmt, so wird das Glas leitend; dann kann man also das Potential des Gitters d. h. des Kolbens galvanisch beeinflussen[1]): wir haben es dann mit einer gewöhnlichen Dreielektrodenröhre zu tun, allerdings mit dem Unterschied, daß hier immer nur die Summe von Heiz- und Anodenstrom (s. Fig. 1) zu messen ist, was aber nicht hindert, die Charakteristik der Röhre aufzunehmen. Man schaltet die Lampe in eine Kompensations- oder Brückenanordnung, wie oben beschrieben, umgibt sie mit einer Stanniolhülle, die mit dem sich stark erwärmenden Kolben einen guten Kontakt herstellt, bringt die Stanniolhülle auf verschiedene Potentialwerte und beobachtet die Stellung des Nullinstrumentes. Man findet dabei Folgendes: Die Lage des Zeigers ändert sich nicht, wenn man den zuerst isolierten Kolben mit dem negativen Pole der Lampe verbindet; der Kolben (die innere Kolbenfläche) einer Vakuumglühlampe wird also durch die aufprallenden Elektronen stets auf das Potential des negativen Glühfadenendes gebracht, wie dies auch zu erwarten ist. Wird der Kolben — gegenüber dem negativen Lampenpol — negativ gemacht, so nimmt der innere Elektronenstrom (Anodenstrom) schnell ab, und bei 20—30 Volt negativer Kolbenspannung wird er gleich Null, wie die folgenden Beobachtungen zeigen.

Kolben-potential	Galvanometer-stellung	Elektronenstrom
0 Volt	41	253×10^{-6} Amp.
— 10	31,5	111
— 20	24,5	7
— 30	24	0
— 40	24	0

Erteilt man dem Kolben positive Potentialwerte, so wird dadurch der innere Elektronenstrom kaum beeinflußt, es fließt aber gleichzeitig ein Elektronenstrom dem Kolben zu: der Gitterstrom. Dieser Strom kann bei genügend erwärmtem Kolben ganz beträchtliche Werte von mehreren Milliampere erreichen und für mancherlei Demonstrationen und Anwendungen benützt werden; da bei diesen die Lampe immer als Zweielektrodenröhre benutzt wird, so sei für diesen, nach der äußeren leitenden Belegung des Kolbens fließenden Strom die Bezeichnung „äußerer Elektronenstrom" gewählt.

14. Anwendungen des äußeren Elektronenstromes.

141. Die Glühlampe als Gleichrichter.

Eine jede Vakuumglühlampe läßt sich in einfacher Weise als Gleichrichter verwenden. Man

1) Die Spule wurde aus 110 Volt mit einem Vorschaltwiderstand von 10000 Ohm gespeist, letzteren braucht man um die Stromstärke so klein zu halten, daß keine magnetische Beeinflussung der Elektronenströme zu befürchten sei.

1) Es genügt hierzu reichlich eine Erwärmung auf 60—80° C.

wickelt die Lampe in Stanniol (s. Fig. 3), wobei man am Halse einen Streifen von etwa 1 cm Breite freiläßt, man bindet um die Stanniolhülle einen blanken Draht und der Gleichrichter ist fertig. Es ist wichtig, Stanniol als leitende Hülle zu verwenden; wird nämlich die Lampe eingeschaltet, so wird der Kolben stark erwärmt und wird gut leitend, gleichzeitig brennt das Stanniol sozusagen an und gibt einen sehr guten Kontakt; Aluminiumfolie z. B. ist für den gleichen Zweck nicht gut geeignet. Speist man die Lampe mit Gleichstrom und verbindet man die Stanniolhülle durch ein Milliamperemeter

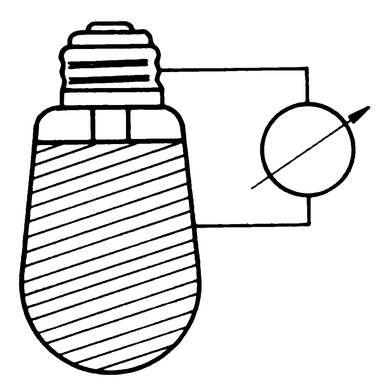


Fig. 3.
Die Vakuumlampe als Gleichrichter.

mit dem negativen Lampenpol, so entsteht natürlich kein Strom, verbindet man sie mit dem positiven Lampenpol, so erhält man einen äußeren Elektronenstrom von 6—8 Milliampere; läßt man die Lampe mit Wechselstrom brennen, so erhält man bei beliebiger Polung in diesem äußeren Stromkreis einen gleichgerichteten Strom von 3—4 Milliampere. Allerdings ist die nutzbare Lebensdauer dieses Gleichrichters recht beschränkt. Das Glas leitet — wie bekannt — elektrolytisch, und während des Betriebes wandert Natrium in die Lampe hinein, und an der kältesten Stelle, in dem Hals, erscheint ein spiegelnder Belag von Natrium[1]), gleichzeitig verarmt die mit dem Stanniol sich berührende Schicht des Glases an Natrium, es entsteht dort eine schlechtleitende Schicht von Kieselsäure, und die Stromstärke fällt allmählich zu Null herunter. An einer 110 Volt, 50 Watt-Lampe wurden folgende Stromwerte erhalten:

Zeit:	Stromstärke:
Beim Einschalten	4,0 Milliampere
nach 1 Stunde	1,8 „
„ $2^1/_2$ Stunden	1,0 „
„ $4^1/_2$ „	0,25 „

Es können also aus einer Lampe insgesamt etwa 10—15 Milliamperestunden Strommenge entnommen werden; man wird daher an eine praktische Anwendung kaum denken können, außer an Demonstration; hier kann aber diese Anordnung als Notbehelf für die Gewinnung von minimalen Gleichströmen sich gelegentlich nützlich erweisen.

142. Magnetische Ablenkung der Elektronen (Magnetron).

Stellt man eine mit einer Stanniolhülle versehene „Gleichrichterlampe" koaxial in eine Magnetisierungsspule hinein, so kann man die Verminderung des Elektronenstromes durch das magnetische Feld — auf welcher Wirkung bekanntlich die Magnetronröhren beruhen — sehr schön zeigen. Mit der von mir benutzten Spule erhielt ich z. B. folgende Werte:

Magnetisierungsstrom	Elektronenstrom
0 Milliampere	7,0 Milliampere
65 „	6,2 „
108 „	4,0 „
136 „	3,0 „
208 „	2,0 „
636 „	1,0 „

143. Nachweis des Thoriums in den Glühfäden fertiger Vakuumlampen.

Wie in der unter d) zitierten Arbeit gezeigt wurde, kann man mit Hilfe des äußeren Elektronenstromes einfach entscheiden, ob der Glühfaden der betreffenden Lampe Thorium enthält oder nicht. Der thoriumhaltige Wolframfaden emittiert nämlich Elektronen bekanntlich bei niedrigeren Temperaturen viel stärker wie der reine Wolframfaden. Mißt man also durch Verwendung eines hohen positiven Potentials (etwa 300 Volt) den Sättigungsstrom des Fadens und geht man mit der Lampenspannung d. h. mit der Glühtemperatur derselben allmählich herunter, so fällt der Emissionsstrom eines reinen Fadens sehr rapid, die eines thoriumhaltigen Fadens dagegen viel langsamer ab und ist bei 30—40 Proz. der Nennspannung noch gut meßbar. Es wurde dort auch gezeigt, daß das hineinelektrolysierte Natrium hierbei eine entscheidende Rolle spielt: es bindet die etwa vorhandenen Sauerstoffreste und ermöglicht die Ausbildung der aktiven Thoriumschicht auf der Drahtoberfläche.

1) Vorausgesetzt, daß der Kolben aus bleifreiem Glas besteht. Ist er bleihaltig, so wird das Natrium unter Reduktion von Blei wieder aufgenommen und der Kolben wird braun-schwarz gefärbt. Da die inneren Glasteile der Lampen ausnahmslos aus Bleiglas bestehen, so werden diese immer reduziert und stark gefärbt.

143. Die Vakuumglühlampe als Voltameter.

Bei der Verwendung einer natriumhaltigen Schmelze als äußere Anode (vgl. Punkt 15) kann man vermittels des äußeren Elektronenstromes beliebige Mengen von Natrium in die Lampe hineinelektrolysieren, wobei das Faradaysche Gesetz auch hier quantitativ erfüllt ist, wie dies aus der Literatur bekannt[1]) und durch einige bei uns ausgeführte Messungen bestätigt wurde. Bei Verwendung einer gewöhnlichen Vakuumlampe erreicht man hierbei Stromstärken bis etwa 100 Milliampere; füllt man eine kleine Autolampe (etwa 8 Volt, 40 Watt) mit Argon von kleinem Drucke, so läßt sich die Stromstärke leicht auf 500 Milliampere bringen, und da eine Milliamperestunde ein Milligramm Natrium in die Lampe hineinbringt, so kann man diese Anordnung vorteilhaft für die Demonstration des Faradayschen Gesetzes anwenden. Da die Elektrolyse hier unter sehr reinen Umständen vor sich geht, so könnte man auch daran denken, die Glühlampe als Normalvoltameter zu verwenden, eine Anwendung, die bereits von Burt (Phys. Rew. **27**, 813, 1926) vorgeschlagen wurde. Er findet, daß die Genauigkeit eines solchen Natriumvoltameters — allerdings mit Metallelektroden an Stelle der Thermionemission — einen Wert von $^1/_{2000}$, vielleicht sogar einen von $^1/_{6000}$ erreicht.

15. Die Vakuumglühlampe als Photozelle.

Auf den Gedanken, die Vakuumlampe in eine Photozelle umzuwandeln, wurde ich durch die im hiesigen Laboratorium vor etwa Jahresfrist angestellten, nicht veröffentlichten, Versuche des Herrn Dr. L. Márton und Ing. E. Rostás geführt, die durch Hineinelektrolysieren von Natrium und Kalium in eine entsprechend gebaute Vakuumlampe vorzügliche Photozellen herstellen konnten. Die von mir benutzte Anordnung war identisch mit der ihrigen, nur nahm ich eine gewöhnliche Vakuumlampe mit gestrecktem Faden. Die Lampe tauchte etwa zu $^2/_3$ in ein geschmolzenes Gemenge (etwa 1:1) von Natriumnitrat und Natriumnitrit; das obere Drittel des Kolbens ragte durch die Öffnung eines Asbestdeckels aus dem Salpeterbad heraus und wurde mit einem Luftstrom gekühlt. Die Lampe wurde mit ihrer normalen Spannung eingeschaltet und die Schmelze unter Zwischenschaltung eines Milliamperemeters mit dem positiven Lampenpol verbunden. Man erhält so eine elektrolysierende Stromstärke von 40—100 Milliampere, und da eine Milliamperestunde rund 1 mg Natrium mitführt, so bringt eine Elektrolyse durch 10—15 Minuten eine genügende Menge Natrium hinein, um auf der gekühlten Kolbenfläche einen starken Belag von Natrium zu erhalten. Um eine Zuführung zu dem Natriumspiegel herzustellen läßt man einfach das stark überlastete negative Glühfadenende[1]) durchbrennen; dies geschieht immer knapp an der Elektrode, und der freigewordene Glühfaden legt sich auf den Natriumbelag; die bloße negative Elektrode bildet dann die Anode der Photozelle. Eine so hergestellte Photozelle ergab z. B. bei einer Beleuchtung mit einer 200 Watt-Lampe aus 25 cm Entfernung (etwa 3500 Lux) einen photoelektrischen Strom von etwa 250×10^{-10} Ampere, kann also mit einer guten Photozelle nicht wetteifern[2]), für Demonstrationszwecke jedoch entspricht sie vollkommen.

1) Vgl. z. B. R. C. Burt, Phys. Rev. **25**, 719, 1925.

2. Erscheinungen unter Mitwirkung von positiven Ionen.

Unter gewöhnlichen Umständen sind in einer Vakuumglühlampe außer Elektronen immer auch positive Ionen vorhanden, die die beschriebenen Erscheinungen komplizieren und eine Anzahl von neuen Erscheinungen hervorzurufen imstande sind. Die positiven Ionen werden durch den inneren Elektronenstrom vermittels Stoßionisation gebildet, ihre Anzahl pro Sekunde ist also umso größer, je größer der Gasdruck in der Lampe und je stärker der innere Elektronenstrom.

Verhindern kann man die Ionisation prinzipiell und vollständig nur durch die Sperrung des inneren Elektronenstromes, man kann aber ihre Stärke durch Verminderung der Elektronenströme — also durch Unterspannung der Lampe oder aber durch Auswahl von Lampen mit hohem Vakuum — das sind länger gebrannte Lampen — herabsetzen: Maßnahmen, die wir bei den Versuchen unter 11. und 122. eben zu diesem Zwecke angewendet haben.

21. Elektrostatischer Nachweis der positiven Ionen.

In einer frischen oder überlasteten Lampe sind positive Ionen in solch großer Anzahl vorhanden, daß sie, ähnlich wie früher die Elektronen, mit Hilfe eines elektrisch geladenen, und zwar diesmal mit einem negativ-elektrischen Körper,

1) Sie führt nämlich auch den ganzen äußeren Elektronenstrom und glüht viel stärker wie der positive, nur mit dem Leitungsstrom belastete positive Glühfadenabschnitt.

2) Dies liegt hauptsächlich daran, daß die Anode durch den kurzen, dünnen Elektrodendraht gebildet wird. In manchen Lampen findet man eine mangelhafte Isolation zwischen Anode und Kathode; ist dies durch einen Natriumniederschlag zwischen den beiden Einschmelzdrähten verursacht, so kann die Lampe nicht gebraucht werden; liegt der Fehler im Sockel, so nimmt man diesen (durch Herumsägen) herunter und verwendet die Lampe ohne Sockel.

z. B. mit einem geriebenen Hartgummistab, leicht nachzuweisen sind. Bringt man nämlich einen solchen der Lampe nahe, so werden positive Ionen an die innere Kolbenfläche gezogen, sie heben die Wirkung des Stabes auf, es werden weder die Glühfäden angezogen, noch wird der innere Elektronenstrom gesperrt; schaltet man jetzt die Lampe aus und entfernt den elektrischen Stab, so spreizen sich die Fäden unter der Wirkung der positiven Kolbenladung stark auseinander. (Hätte man die Lampe zuerst nicht ausgeschaltet, so würde die positive Kolbenladung durch die Elektronen sofort wieder neutralisiert werden, und eine Wirkung auf die Fäden würde dann ausbleiben.)

22. Das Gleichgewicht von Ionen und Elektronen.

Im allgemeinen Falle, wenn positive Ionen nicht in zu großer Anzahl vorhanden sind, hängt die Wirkung eines, der Lampe angenäherten negativ-elektrischen Körpers wesentlich von der Geschwindigkeit der Annäherung ab. Ist sie klein, so bleibt eine Wirkung während der Annäherung aus, wie oben auseinandergesetzt, ist sie groß genug, so daß mehr positive Ionen aus dem Gasraum entfernt wie durch Ionisation nachgeliefert werden, so kommt die Wirkung des negativ-elektrischen Körpers zur Geltung: die Glühfäden werden ausgebaucht, ein mit dem Kolben verbundenes Elektroskop ladet sich auf und der innere Elektronenstrom wird gesperrt (der Lampenverbrauchsstrom nimmt ab), wodurch auch die weitere Bildung von positiven Ionen verhindert wird.

Ähnlich liegt es mit der Wirkung eines positiv elektrischen Körpers, nur gilt hier für das Entfernen desselben, was oben über die Annäherung gesagt wurde. Beim Annähern eines positiven Körpers ist — sofern man den Faden nicht ganz schwach glühen läßt — keine Wirkung zu beobachten, denn die auf der inneren Kolbenfläche lagernden Elektronen heben die Wirkung des Glasstabes auf; entfernt man ihn rasch, so kommt die Wirkung der negativen Kolbenladung zum Vorschein (Fadenausbauchung, Sperrung des Elektronenstromes), entfernt man ihn langsam, so wird der Elektronenstrom nicht gesperrt, es werden also auch positive Ionen gebildet, die negative Kolbenladung wird neutralisiert und ihre Wirkung fällt fort[1]).

1) Diese, sowie eine im nächsten Punkte beschriebene Beobachtung lassen sich mit verschiedenen Erscheinungen in Beziehung setzen, so z. B. mit den durch Wandladungen hervorgerufenen Pseudohochvakuum-Erscheinungen (Güntherschulze, Zeitschr. f. Phys. **31**, 606, 1925) und mit der von Dunoyer (vgl. Phys. Ber. **6**, 477, 1925), gefundenen Beeinflussung der Quecksilberlichtbogenentladungen durch äußere Elektroden.

23. Vakuumbestimmung an fertigen Glühlampen.

[Vgl. die unter c) zitierte Arbeit.] Auf Grund der beschriebenen Versuche könnten verschiedene Methoden hierzu angegeben werden. Diese sollen der Reihe nach kurz erwähnt werden.

231. Die elektrostatische Methode.

Auf Grund der im Punkt 22 beschriebenen Vorgänge kann die Luftleere einer fertigen Lampe mit Hilfe eines durch Reibung elektrisierten Hartgummistabes einfach beurteilt werden. Sie ist, wie leicht einzusehen, um so höher, bei je langsamerer Annäherung des Stabes die Fadenausbauchung noch hervorzurufen ist und umgekehrt: ist die Fadenausbauchung nur durch schnelles Annähern oder gar nicht hervorzurufen, so heißt das, daß in der Lampe eine starke Ionisation, also ein schlechtes Vakuum ist. Man kann auch quantitative Angaben erhalten, wenn man — bei gleichbleibender Annäherungsgeschwindigkeit — die Lampenspannung (also den Wert des Elektronenstromes bzw. den der Ionisation) solange ändert, bis die Fadenausbauchung nicht mehr hervorzurufen ist. Diese Spannung in Prozenten der Nennspannung ausgedrückt haben wir als „Vakuumvoltzahl" bezeichnet. Da diese einfache Vakuummeßmethode auch sonst sich bewähren dürfte — indem man der betreffenden Vakuumanordnung eine fertige Vakuumglühlampe anschmelzen läßt — so soll der an einer 220 Volt-Lampe gefundene Zusammenhang der Brenndauer, „Vakuumvoltzahl" und Höhe des Vakuums mitgeteilt werden.

Brenndauer	Vakuum-voltzahl	in Prozent	Vakuum relativ	absolut
—	92	42	1	1×10^{-3} mm
2 Minuten	140	64	1/43	23×16^{-6}
12 „	160	73	1/330	3×10^{-6}
19 Stunden	188	85	1/835	12×10^{-7}
43 „	206	94	1/1500	$6{,}5\times10^{-7}$
90 „	210	90	1/2100	$4{,}8\times10^{-7}$
162 „	220	100	1/3300	3×10^{-7}
258 „	250	114	1/4500	$2{,}2\times10^{-7}$

232. Die Wechselstrommethode.

Umgibt man die Lampe mit einer leitenden Hülle — am einfachsten durch Eintauchen ins Wasser — und legt man an diese, sowie an das Glühfadensystem eine konstante Wechselspannung, so ist die Zunahme des durchgehenden Wechselstromes, die man erhält, wenn man die zuerst nicht brennende Lampe auf die volle Spannung einschaltet, ein Maß der Leitfähigkeit des Gasraumes, also zugleich ein Maß der Luftleere. Die Messung dieser schwachen Wechselströme kann

z. B. mit einem empfindlichen Zeigergalvanometer geschehen, wenn man vor dem Galvanometer einen Kristalldetektor und an beiden parallel einen Widerstand von etwa 10000 Ohm anordnet.

233. Die akustische Methode.

Die mit einer leitenden Hülle umgebene Lampe bildet einen Kondensator, dessen scheinbare Kapazität um so größer ist, je besser der Gasraum leitet. Ordnet man also den „Lampenkondensator" in einen Schwingungskreis mit hörbarer Frequenz ein, so ist die Höhe des bei brennender Lampe erhaltenen Tones um so tiefer, je schlechter das Vakuum ist. Es könnten die Kippschwingungen einer Neon-Glimmlampe hierzu mit gutem Erfolg verwendet werden und es könnte die Anordnung so getroffen werden, daß die Zuschaltung der zu prüfenden Lampe an den Glimmlampenkreis durch einfaches Umfassen derselben durch die prüfende Person erfolgte[1]). Bleibt dabei die Höhe eines im Kopfhörer (oder Lautsprecher) hörbaren Tones unverändert, so hat die betreffende Lampe ein ausgezeichnetes Vakuum, wird der Ton tiefer, so ist die Luftleere keine vollständige, und zwar um so schlechter, je größer die Tonvertiefung. Mit dieser einfachen Anordnung kann man viele Hunderte von Lampen pro Stunde betriebsmäßig auf Luftleere prüfen. Betreffs näherer Einzelheiten soll auf die erwähnte Arbeit in der Zeitschr. f. techn. Physik hingewiesen werden.

24. Die elektrolytische Zersetzung des Glases.

Macht man die äußere leitende Hülle einer Lampe mit stark erwärmten, also leitenden Kolben (vgl. Punkt 14) zur Kathode, und sind in der Lampe genügende positive Ionen vorhanden, so läßt sich eine Elektrolyse des Kolbenglases auch in dieser „umgekehrten" Richtung ausführen, wobei als unlösliche Anode der innere, leitende Gasraum fungiert. Es wandert dann das Natrium aus dem Glase nach außen, an der inneren Kolbenfläche bildet sich die bekannte schlechtleitende Schichte von Kieselsäure und in dem Gasraum wird Sauerstoff frei. [Vgl. die unter e) zitierte Arbeit[1]).]

1) Es bildet dann die Handfläche die äußere Belegung des „Lampenkondensators".

3. Kalte Elektronenentladung in der Vakuumlampe.

Legt man den negativen Pol einer Influenzmaschine auf das Glühfadensystem, den positiven etwa auf eine, um die Lampe gewickelte Drahtschlinge, so kommt in der Lampe eine Lilienfeldsche autoelektronische Entladung zustande, indem aus den Spitzen der Fadenhalter und Elektroden durch die hohe Feldstärke Elektronen ausgetrieben werden. Näheres darüber findet man in der unter b) zitierten Arbeit.

Zusammenfassung.

Es wurden die in einer Vakuumglühlampe sich abspielenden bzw. die mit einer solchen hervorgerufenen mannigfaltigen Elektronen- und Ionen-Erscheinungen systematisch dargestellt. Es wird das Verhalten der Lampe, bzw. das der Ionen und Elektronen gegenüber elektrostatischer, magnetischer und elektromagnetischer Beeinflussung behandelt; es wurde gezeigt, wie eine Vakuumlampe als Detektor, Gleichrichter, Voltameter, Magnetron, Photozelle und Vakuummeter funktionieren kann, einige mit Hilfe von Vakuumlampen ausgeführten Untersuchungen (Nachweis des Thoriums in den Glühfäden, Nachweis der Sauerstoffentwicklung bei der Elektrolyse des Glases) werden erwähnt und einige Methoden zur Vakuumbestimmung an fertigen Glühlampen kurz beschrieben.

Diskussion.

Herr Ewest: Bei Glühlampen mit Kolben aus bleifreiem Glase läßt sich die Lampe selbst als Ionisationsmanometer gebrauchen; Näheres in demnächst erscheinender Zeitschr. f. techn. Physik. Durch das bleifreie Glas läßt sich Ionen und Elektronenstrom messen, das Verhältnis beider ist proportional dem Druck in der Lampe.

1) Es könnte auch gezeigt werden, daß diese Sauerstoffentwicklung quantitativ erfolgt. Vgl. den demnächst in den Ann. d. Phys. erscheinenden Nachtrag (Anm. 6 d. Korrektur).

BESPRECHUNGEN.

A. C. Elsbach, Der Lebensgehalt der Wissenschaften. Wissenschaftstheoretische Grundfragen. Gr. 8⁰. 39 S. Berlin u. Leipzig, Walter de Gruyter & Co. 1926. M. 1.20.

Will man wissen, ob eine Wissenschaft zu den Natur- oder Geisteswissenschaften zählt, so benütze man — so rät der Verfasser der oben genannten Schrift — das folgende „Kriterium":

„Hat die Geschichte einer Wissenschaft ausschließlich historische Bedeutung, so gehört diese Wissenschaft zu der naturwissenschaftlichen Gruppe. Kann ihre Geschichte auch eine systematische Funktion erfüllen so gehört sie zu der geisteswissenschaftlichen Gruppe" (S. 27).

Der Verfasser „macht die Probe auf das Exempel", indem er einerseits feststellt, daß „die Naturforschung nie direkt dadurch gefördert wird, daß



man die Geschichte einer Theorie studiert", und andererseits „auf den hohen systematischen Gehalt der Geschichte für die Theologie" hinweist. — „Bis hierher stimmt alles", sagt er, befriedigt über seine Feststellungen.

Ich möchte meinen, daß er aus richtigen Beobachtungen falsche Konsequenzen gezogen hat. Es ist richtig, daß die Naturforscher sich im allgemeinen recht wenig um die Geschichte ihrer Wissenschaft kümmern. Aber daraus folgt nicht, daß die Naturforschung nicht in gleicher Weise wie irgendeine Geisteswissenschaft durch historische Studien gefördert werden kann. Wenn z. B. Felix Klein eine Geschichte der Mathematik schrieb, so tat er das gewiß nur in der Absicht, die Mathematik zu fördern (die ja auch nach des Verfassers Ansicht zu den Naturwissenschaften zu rechnen ist). Und daß Ernst Machs „Mechanik" nicht bloß Geschichte ist, sondern Geschichte gemacht hat, muß doch dem Verfasser, der ein philosophisches Buch über die Einsteinsche Relativitätstheorie geschrieben hat, bekannt sein.

Es ist ferner richtig, daß historische Studien in den Geisteswissenschaften eine viel größere Rolle spielen. Der Verfasser hält hier aber für das Wesentliche einer Wissenschaft, was nur ein besonderer Mangel derselben ist. Dieses Überwuchern des Historischen hatte Kant im Auge, wenn er in seinen „Prolegomena" sagt: „Es gibt Gelehrte, denen die Geschichte der Philosophie (der alten sowohl als neuen) selbst ihre Philosophie ist" und hinzufügt: „Für diese sind gegenwärtige Prolegomena nicht geschrieben". Jene Wucherung war für Kant ein Symptom dafür, daß die Philosophie (Metaphysik) noch keine Wissenschaft sei. Im Gegensatz hierzu will der Verfasser der vorliegenden Schrift von einem „Unterschied in der Entwicklungsstufe" der Geistes- und Naturwissenschaften nichts wissen, weil dadurch „dem eigenen und unvergleichlichen Charakter der Geisteswissenschaften zu nahe getreten" würde (S. 12). Daß die Theologie eine Wissenschaft ist, steht für ihn außer Frage: er zitiert sie mehrmals als Exempel einer Geisteswissenschaft und macht eine Bemerkung, die sogar auf eine recht hohe Entwicklungsstufe dieser Wissenschaft schließen läßt. Man muß in der Tat sehr weit in der Erforschung Gottes vorgedrungen sein, wenn es möglich ist, einen Satz wie den folgenden hinzuschreiben: „Für Gott gibt es keine Naturgesetze und keine Geisteswissenschaften" (S. 21). Wenn das wahr ist, so hat das in der vorliegenden Schrift erörterte Problem — für Gott — kein Interesse. Dr. Heinrich Löwy.

K. Faigl, Ganzheit und Zahl. Ein Versuch über Bau und Erkenntniswert des mathematischen und ganzheitlichen Begriffsgebäudes. Bd. 2 der Ergänzungsbände zur Sammlung Herdflamme, herausgegeben von O. Spann. Kl. 8⁰. VIII u. 187 S. Jena, G. Fischer. 1926. M. 6.—, geb. M. 7.—.

Der Methode der mathematischen Physik wird eine neue, die sog. „ganzheitliche" Methode, den Namen Newton und Laplace werden die Namen Hans Driesch und Othmar Spann entgegengestellt als der Schöpfer einer neuen Theorie, der nach Meinung des Verfassers die Zukunft gehört. Zweck des Buches ist, „diese allgemeine Wendung der Wissenschaften so klar als möglich zu kennzeichnen". Speziell soll ein Weg gebahnt werden zu jenem „Urgut an Einsicht", das in Othmar Spanns „Kategorienlehre" (1924) enthalten sein soll.

Das Charakteristische der von der mathematischen Physik studierten Vorgänge besteht nach Ansicht des Verfassers darin, daß „der Zustand in einem Zeitmomente bestimmend ist für das ganze Geschehen". Faigl bezeichnet dies als die „Schnitthaftigkeit" des Geschehens, weil ein „Zeitschnitt" zur Bestimmung des Geschehenablaufs genügt. In der „Ganzheitstheorie" von Driesch und Spann jedoch können auch zeitlich entfernte Vorgänge einander beeinflussen. Nach der Ansicht Faigls wäre aber eine derartige zeitliche Fernwirkung „in einem mathematisch-physikalischen Systeme unmöglich, da in diesem ein Momentanzustand, ein zeitlicher Querschnitt das Kommende schon vollständig bestimmt" (S. 73).

Diese Ansicht wird widerlegt durch die Tatsache, daß es eine mathematisch-physikalische Theorie solcher zeitlicher Fernwirkungen gibt. Im Jahre 1874 hat Ludwig Boltzmann seine Theorie der elastischen Nachwirkung veröffentlicht, die man nach der Spann-Faiglschen Definition als eine „ganzheitliche" bezeichnen kann, insofern darin der Zustand in einem Zeitmoment zur Bestimmung des weiteren Geschehens nicht ausreicht. Es handelt sich hier also nicht um eine Unterscheidung von Vorgängen, die mathematisch-physikalisch beschreibbar, und solchen, die es nicht sind, sondern um eine Unterscheidung, die V. Volterra in seinen „Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik" (1914) folgendermaßen formuliert hat: „In der Mechanik ohne Vererbung hängt der künftige Zustand eines Systems in einem gegebenen Augenblick nur vom gegenwärtigen Zustand ab oder, allgemeiner gesprochen (da die Kräfte möglicherweise auch von den Geschwindigkeiten abhängen können) von dem gegenwärtigen und dem unmittelbar vorhergehenden Zustand. In der Mechanik mit Vererbung hingegen hinterläßt jede Einwirkung eine bleibende Beeinflussung des Systems, und der gegenwärtige Zustand hängt von der gesamten Vorgeschichte ab" (l. c. p. 157).

Dem Verfasser ist diese Sachlage, wie das Kapitel „Einwendungen" (S. 23) zeigt, durchaus nicht unbekannt. Wir sehen ihn hier gleichsam zum Äußersten entschlossen: er wird sein Buch schreiben, auch wenn noch so gewichtige Gründe dagegen sprechen; er wird Driesch und Spann als Schöpfer einer neuen Theorie preisen, obwohl diese Theorie, lange vor Driesch und Spann, und nicht in Form eines philosophischen Aperçu, wie bei Driesch und Spann, sondern in Form einer exakten mathematischen Beschreibung der Nachwirkungserscheinungen von Ludwig Boltzmann entwickelt worden ist. Da der Verfasser diese ihm bekannte Tatsache nicht zugeben will, verwickelt er sich in Widersprüche. Obwohl ihm bekannt ist, daß es Integrodifferentialgleichungen gibt, tritt er doch auf S. 25 den Beweis an, „daß die Beziehungen, die die Mathematik behandelt, immer Schnittbeziehungen sein werden".

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Ganzheitstheorie in dem von Faigl definierten Sinn nicht im Gegensatz zur mathematisch-physikalischen Methode steht, sondern eine prinzipiell wichtige Fortentwicklung derselben darstellt. In dem Buche Volterras findet man die mathematischen Grundlagen der „Ganzheitstheorie". Wer sich aber für die philosophische Bedeutung dieser Theorie interessiert, der lese nicht die Bücher von Driesch, Spann oder Faigl, sondern den kurzen Aufsatz über „Das Gedächtnis der Materie" (in „Naturwissenschaften" 1916, S. 489), worin Th. v. Kármán die Boltzmannsche Nachwirkungstheorie auseinandergesetzt hat. Dr. Heinrich Löwy.

Tagesereignisse.

Planckmedaille. Ende 1927 verbreiteten die Unterzeichneten einen Aufruf, zu Max Plancks 70. Geburtstage, dem 23. April 1928, eine goldene Medaille zu stiften, die zu verleihen wäre für besondere Verdienste um die theoretische Physik, insbesondere für solche Arbeiten, welche an Plancks Werk anknüpfen. Der Aufruf hat einen vollen Erfolg gehabt. Wir sagen allen, die dazu beigetragen haben, unseren verbindlichsten Dank.

Wir konnten daher heute Herrn Planck in seiner Wohnung ein Schreiben überreichen (am 23. hatte er sich allen Besuchen entzogen), welches außer dem Wortlaut des Aufrufs und der namentlichen Aufzählung aller Einzelpersonen, Gesellschaften und Firmen, welche die Stiftung zusammengebracht haben, auch die Bitte an ihn enthält, dem Stiftungszweck zuzustimmen, demnächst die wissenschaftliche Körperschaft namhaft zu machen, welche die Verleihungen vornehmen soll, und schließlich einem Künstler von Rang die Sitzungen zu gewähren, die notwendig sind, damit die Vorderseite der Medaille sein Bildnis tragen kann.

Mit Worten herzlichen Dankes nahm Herr Planck die Stiftung an. Da es ihm bei der großen Zahl der Stifter, so gern er es täte, nicht möglich ist, jedem einzeln zu schreiben, beauftragte er uns, seinen Dank auf diesem Wege der Gesamtheit der Stifter auszusprechen.

Berlin, 27. April 1928.

(gez.) M. Born A. Einstein M. v. Laue
E. Schrödinger A. Sommerfeld

Berichtigung.

Im Aufsatz Marx-Kappler, Die Messung der Verschiebung negativer Träger in Flammen (diese Zeitschr. **29**, 261 ff.) ist ein störender Druckfehler stehen geblieben:

Auf Seite 266 rechte Spalte, 13. Zeile von unten muß es statt

$$K_2 \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n}}, \quad K_2 \sim \sqrt[4]{n}$$

heißen und Seite 267 statt „mit der Wurzel", „umgekehrt wie die Wurzel".

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der o. Professor an der Universität Leipzig Dr. Georg Wentzel zum ord. Professor der mathematischen Physik ebenda, Dr. Ing. Willy Steidinger vom Montan-Bureau der Siemens-Schuckert-Werke zum ord. Professor der theoretischen Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Karlsruhe, der Observator am Geodätischen Institut in Potsdam Dr. Erich Brennecke zum ord. Professor für Geodäsie an der Technischen Hochschule in Berlin, der Honorarprofessor an der Universität Breslau Dr. Walter Herz zum ord. Professor für physikalische Chemie ebenda, der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Julius Bartels zum a. o. Professor für Meteorologie und Geodäsie an der Forstakademie Eberswalde, die a. o. Professoren an der Masaryk-Universität in Brünn Dr. Josef Frejka (Organische Chemie) und Dr. Antonin Simek (Theoretische und physikalische Chemie), sowie Dr. Vaclav Kubelka (Tier- und Pflanzenchemie) an der Tschech. Technischen Hochschule daselbst und Dr. E. Svags (Gerichtliche Chemie und Giftanalyse) von der Böhmischen Technischen Hochschule in Prag zu a. o. Professoren an der letzteren Hochschule, der Privatdozent an der Universität Wien Dr. Leopold Victoris zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Innsbruck, der Privatdozent der Universität Berlin Dr. Ad. Hammerstein zum a. o. Professor der Mathematik ebenda, der Privatdozent an der Universität Greifswald Dr. Karl Reinhardt zum ord. Professor der Mathematik ebenda, Dr. K. Menger zum a. o. Professor für Geometrie an der Universität Wien, der Privatdozent für Chemie an der Technischen Hochschule Hannover Dr. Wilhelm Bachmann zum a. o. Professor ebenda, der Professor der Chemie an der New York University James Kendell in gleicher Eigenschaft an der Universität Edinburgh, der a. o. Professor an der Universität Königsberg Dr. Gerhard Hoffmann zum ord. Professor der Physik an der Universität Halle, der a. o. Professor für Mathematik, insbesondere darstellende Geometrie, an der Universität München Dr. Friedrich Hartogs zum ord. Professor ebenda, Dr. I. C. Earl zum Professor für reine und angewandte organische Chemie an der Universität Sydney, Dr. W. E. Gibbs zum Ramsay-Professor für chemische Technologie an der Universität London, Dr. Ing. O. Quadrat, Dr. Ing. R. Hac und Dr. Aug. Ondley zu ord. Professoren der reinen und angewandten Chemie an der Böhmischen Technischen Hochschule Prag.

Beurlaubt: Der a. o. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Berlin Dr. John Eggert (zwecks Übernahme der Leitung der wissenschaftlichen Abteilung der I. G. Farbenindustrie in Wolfen).

Neuer Lehrauftrag: Der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Wilhelm Westphal mit der Leitung des physikalischen Praktikums an der Technischen Hochschule daselbst.

Ehrung: Dem ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin Geh. Reg. Rat Dr. Max Planck der Adlerschild des Reichspräsidenten.

Rücktritt vom Lehramt: Professor der Chemie an der Yale University Dr. John Johnston und Professor der Physik am California Institut of Technology Dr. Milliken (zwecks Übernahme des neuen Forschungsinstitutes der United Steel Corporation), der a. o. Professor der physikalischen Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Alfred Reis (zwecks Übernahme des Hauptlaboratoriums des Vereins für chemische und metallurgische Produktion in Aussig).

Gestorben: Der Abteilungsvorsteher am Geodätischen Institut in Potsdam Professor Dr. Bernhard Weinach, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Rostock Geheimer Hofrat Dr. Otto Staude, der Professor der Chemie an der Harvard University in Cambridge USA Theodore William Richards, der Professor für allgemeine Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Mailand Dr. Riccardo Arno, der ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Marburg Geh. Regierungsrat Dr. Johannes Gadamer, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien Hofrat Dr. Emil Müller, der ord. Honorarprofessor für Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Ludwig Schleiermacher, der ord. Professor der Mathematik an der deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Emil Waelsch, der Professor der Technischen Chemie an der Technischen Hochschule München Geh. Regierungsrat Dr. Gustav Schultz.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 11. Ausgegeben am 1. Juni 1928. 29. Jahrgang.

Nr. 759. Printed in Germany.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Leipziger Universitätswoche

vom 17.–24. Juni 1928

In der Zeit vom 17.–24. Juni organisiert die Leipziger Universität eine Universitätswoche. Bei dieser Gelegenheit werden im Physikalischen Institut täglich die folgenden Colloquiums-Vorträge zum Thema: „Quantentheorie und Chemie" mit anschließender freier Diskussion gehalten:

P. A. M. DIRAC (Cambridge): Über die Quantentheorie des Elektrons

E. FERMI (Rom): Über eine statistische Theorie der Elektronen im Atom

C. N. HINSHELWOOD (Oxford): Probleme der Energieübertragung in der chemischen Reaktionskinetik

W. KOSSEL (Kiel): Die Molekularkräfte beim Kristallwachstum

F. LONDON (Berlin): Quantentheorie und chemische Bindung

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 11 | 1. Juni 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 13 am 5. Juli 1928.

INHALT:

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Die unperiodischen Vorgänge in der Wellenmechanik.

Von Gregor Wentzel.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

In der alten Quantentheorie wurden bekanntlich die Energie- bzw. Frequenzprobleme mit Hilfe des $h\nu$-Prinzips und der Quantenbedingungen, die Intensitätsprobleme mit Hilfe des Korrespondenzprinzips behandelt. Die Aussagen des letzteren waren ihrer Natur nach unscharf, und dies machte sich besonders in der Theorie der kontinuierlichen Spektren bzw. der unperiodischen Vorgänge störend geltend, da es sich ja bei diesen lediglich um Intensitätsfragen handelt. Infolgedessen konnten die älteren Versuche zur korrespondenzmäßigen Behandlung solcher Probleme wie des Photoeffekts (H. A. Kramers ([1])) und des Elektronenstoßes (E. Fermi ([2])) naturgemäß keine eindeutigen und befriedigenden Lösungen geben. Die Quantenmechanik, die eine scharfe Formulierung des Bohrschen Korrespondenzprinzips mit sich gebracht hat, hat hier Abhilfe geschaffen, und während sie bezüglich der periodischen Vorgänge (der abgeschlossenen Systeme) nur eine Verbesserung und Vervollständigung der Bohr-Sommerfeldschen Theorie bedeutet, kann man sagen, daß die Theorie der unperiodischen Vorgänge durch die neue Quantenmechanik überhaupt erst möglich gemacht worden ist. Und zwar erweist sich die Quantenmechanik in diesen Problemen bei weitem am einfachsten anwendbar in der Gestalt der de Broglie-Schrödingerschen Wellenmechanik. M. Born hat in seiner Theorie des Elektronenstoßes ([3]) als erster die Wellenmechanik zur Behandlung unperiodischer



Vorgänge nutzbar gemacht; dabei hat er darauf hingewiesen, daß in diesen Problemen die statistische Interpretation der de Broglie-Schrödingerschen Wellen unerläßlich ist. Die Grundlagen der Bornschen Theorie sind im II. Abschnitt des folgenden Berichtes dargestellt. Eine allgemeinere Behandlung unperiodischer Vorgänge gestattet die Methode der Variation der Konstanten, die mit ihren wichtigsten Anwendungen den III. Abschnitt ausmacht. Es sei noch hervorgehoben, daß wir hier nur Quantenmechanik treiben, also alle diejenigen Probleme beiseite lassen, die ihrem Wesen nach zur Quantenelektrodynamik gehören, wie Emission und Zerstreuung von Licht. Auf diesen Punkt kommen wir in den Schlußbemerkungen zurück.

I. Abschnitt.

Allgemeine Ansätze der Wellenmechanik.

§ 1. Dichte, Stromdichte und Geschwindigkeit der Elektronen (4).

Voranstellen müssen wir zunächst einige einfache Ansätze der allgemeinen Wellenmechanik. Bezüglich ihrer näheren Begründung verweisen wir auf einen zusammenfassenden Bericht von C. Eckart und H. Hönl, der bald in dieser Zeitschrift erscheinen wird.

Für ein mechanisches System von N Elektronen $x_s y_s z_s$ $(s = 1 \ldots N)$, in welchem die Kräfte durch eine Potentialfunktion $U = U(x_1 \ldots z_N)$ darstellbar sind, lautet bekanntlich die Schrödingersche Wellengleichung unter Vernachlässigung der Relativitätskorrektion und des Elektronenmagnetismus:

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \Delta\psi + U\psi$$
$$\Delta = \sum_s \Delta_s, \quad \Delta_s = \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_s^2}. \tag{1}$$

In die potentielle Energie U ist hier auch die Ruhenergie der Elektronen $(N \cdot mc^2)$ mit aufzunehmen. Bei beliebigen Kräften hat man zu schreiben:

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = H[\psi], \tag{1a}$$

wo $H[\ ]$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, den man dadurch erhält, daß man in der klassischen Hamiltonschen Funktion H des Systems p_x, p_y, p_z bzw. durch $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$ ersetzt.

Die physikalische Bedeutung der Wellenfunktion ψ besteht darin, daß

$$\varrho = \psi\psi^* = |\psi|^2 \tag{2}$$

als Elektronendichte und

$$\mathfrak{i} = \frac{h}{4\pi i m}(\psi \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \operatorname{grad} \psi) \tag{3}$$

als Elektronenstromdichte (zunächst im abstrakten $3N$-dimensionalen Raum der Lagenkoordinaten) angesprochen werden kann (4). Die Berechtigung hierzu ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{i} = 0, \tag{4}$$

die man aus der Wellengleichung (1) herleitet, indem man sie mit ψ^* multipliziert und das konjugiert Komplexe subtrahiert. Dabei deuten wir ϱ und $\mathfrak{i}$ statistisch: $\varrho \cdot d\tau$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System zur Zeit t im Element $d\tau$ des $3N$-dimensionalen Lagenkoordinatenraumes angetroffen wird; $\mathfrak{i}_n \cdot d\sigma dt$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System in der Zeit dt durch das $(3N-1)$ dimensionale Flächenelement $d\sigma$ hindurchgeht. Aus der Bedeutung von ϱ ergibt sich ohne weiteres die „Normierungsbedingung" für die Wellenfunktion ψ:

$$\int \varrho\, d\tau = \int \psi\psi^*\, d\tau = 1. \tag{5}$$

Nach Schrödinger (4) kann man aber auch dem einzelnen Elektron (s) im 3-dimensionalen Raum eine Dichte ϱ_s und eine Stromdichte $\mathfrak{i}_s$ zuordnen durch die $3(N-1)$-fachen Integrale $(d\tau_s = dx_s\, dy_s\, dz_s,\ d\tau = d\tau_1 \cdot d\tau_2 \ldots d\tau_N)$:

$$\varrho_s = \int \cdots \int d\tau_1 \cdots d\tau_{s-1} \cdot d\tau_{s+1} \cdots d\tau_N \cdot \psi\psi^* \tag{6}$$

$$\mathfrak{i}_s = \int \cdots \int d\tau_1 \cdots d\tau_{s-1} \cdot d\tau_{s+1} \cdots d\tau_N \cdot \frac{h}{4\pi i m}(\psi \operatorname{grad}_s \psi^* - \psi^* \operatorname{grad}_s \psi). \tag{7}$$

Multipliziert man nämlich Gl. (4) mit $d\tau_1 \ldots d\tau_{s-1} \cdot d\tau_{s+1} \ldots d\tau_N$ und integriert, so folgt mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und selbstverständlicher Randbedingungen die Kontinuitätsgleichung für die „Strömung" des $s$ten Elektrons in seinem Raum $x_s y_s z_s$:

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \operatorname{div}_s \mathfrak{i}_s = 0. \tag{8}$$

Die Dichte ϱ_s hängt natürlich von $x_s y_s z_s$ allein ab; wir deuten $\varrho_s d\tau_s$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß das $s$te Elektron zur Zeit t im Element $d\tau_s = dx_s dy_s dz_s$ des (wirklichen) 3-dimensionalen Raumes angetroffen wird; entsprechend $\mathfrak{i}_s$. In der Tat ist nach (5) und (6)

$$\int \varrho_s d\tau_s = 1. \tag{9}$$

Ist $\mathfrak{v}_s$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung des $s$ten Elektrons, so ist offenbar

$$\mathfrak{i}_s = \varrho_s \cdot \mathfrak{v}_s. \tag{10}$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit (6) und (7), definiert also die Geschwindigkeit, mit der das $s$te Elektron gegebenenfalls den Punkt $x_s y_s z_s$ passiert. Ist nur 1 Elektron vorhanden ($N = 1$), so wird dessen Geschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{i}}{\varrho} &= \frac{h}{4\pi i m}\left(\frac{\operatorname{grad}\psi^*}{\psi^*} - \frac{\operatorname{grad}\psi}{\psi}\right) \\ &= -\frac{h}{2\pi m}\,\mathfrak{Im}\{\operatorname{grad}\log\psi\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Bekanntlich verhält sich die Wellenmechanik zur klassischen Mechanik ähnlich wie die Wellenoptik zur Strahlenoptik. Soweit ϱ, $\mathfrak{i}_x$, $\mathfrak{i}_y$, $\mathfrak{i}_z$ langsam veränderliche Ortsfunktionen sind, geht die Wellenmechanik asymptotisch in die klassische Mechanik über; die Wellengleichung (1) bzw. (1a) wird zur Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung für die Wirkungsfunktion

$$S = -\frac{h}{2\pi i}\log\psi;$$

und nach (11) wird

$$m\mathfrak{v} = \operatorname{grad} S,$$

d. h. die Elektronenbahnen fallen in die Orthogonaltrajektorien der Flächenschar $S = \text{const}$, wie es sein muß. An den Stellen aber, wo ϱ, $\mathfrak{i}_x$, $\mathfrak{i}_y$, $\mathfrak{i}_z$ schnell veränderlich sind, treten merkliche Abweichungen von der klassischen Mechanik auf, die Beugungserscheinungen der Materie. Ebenso wie in der Optik kann man diese dadurch erzeugen, daß man Hindernisse in den Strahlenweg stellt (z. B. Spaltinterferenzen). Im Bereich dieser Beugungserscheinungen hat es keinen Sinn, einem einzelnen Elektron eine bestimmte Bahn zuzuordnen, ebensowenig wie einem Lichtquant in optischen Beugungserscheinungen. Deshalb hat auch die Definition der Elektronengeschwindigkeit durch Gl. (10) oder (11) nur einen Sinn im Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik.

§ 2. Das freie Elektron.

Hat man es mit einem Elektron ($N = 1$) zu tun, auf das keine äußeren Kräfte wirken, so bleibt in der Wellengleichung für die potentielle Energie U nur die innere Energie $U = mc^2$ stehen. Ein partikuläres Integral der so erhaltenen Differentialgleichung ist die de Brogliesche ebene Welle ([5])

$$\psi = a \cdot e^{-ikx + i\omega t} \tag{12}$$

$$k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mT}, \quad \omega = \frac{2\pi}{h}(mc^2 + T). \tag{13}$$

Dieselbe entspricht einem homogenen parallelen Kathodenstrahl von der kinetischen Energie T; in der Tat ist nach (2), (3) und (10) oder (11):

$$\left.\begin{aligned} &\varrho = |a|^2, \quad \mathfrak{i}_x = \frac{hk}{2\pi m}|a|^2, \quad \mathfrak{i}_y = \mathfrak{i}_z = 0 \\ &\mathfrak{v}_x = \frac{hk}{2\pi m} = \sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad \mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0 \\ &\frac{m}{2}|\mathfrak{v}|^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{hk}{2\pi}\right)^2 = T. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ein anderes partikuläres Integral (für $U = mc^2$) ist die Kugelwelle

$$\psi = a \cdot \frac{e^{-ikr+i\omega t}}{r}, \tag{15}$$

welche einem Strom von Elektronen entspricht, die von einem Zentrum nach allen Seiten auseinanderlaufen.

In der „monochromatischen" Welle (12) ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ scharf definiert, der Ort eines Elektrons dagegen völlig undefiniert (wegen $\varrho =$ const). Beschränkt man den Ort des Elektrons etwa auf ein Intervall Δx, so braucht man „abgeschnittene" Wellenzüge, die (nach Ausweis ihrer Fourierzerlegung) nicht mehr monochromatisch sind; die „Verbreiterung der Spektrallinie" ist von der Größenordnung $\Delta k \sim \frac{1}{\Delta x}$, was nach (14) der Heisenbergschen „Ungenauigkeitsrelation"

$$m \cdot \Delta \mathfrak{v}_x \cdot \Delta x \sim h$$

entspricht. Beschränkt man andererseits den Ort des Elektrons auf ein Intervall Δy senkrecht zur Bewegungsrichtung (etwa durch einen Schirm mit Spalt), so entsteht durch Beugung des Kathodenstrahls eine y-Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, wiederum in Übereinstimmung mit der „Ungenauigkeitsrelation":

$$m \cdot \Delta \mathfrak{v}_y \cdot \Delta y \sim h$$

(Bohr). In diesen Fällen hat man es also mit „Wellenpaketen" oder „Wellengruppen" zu tun. Bemerkenswert ist der schon von de Broglie (5) hervorgehobene Umstand, daß die Gruppengeschwindigkeit dieser Wellengruppen mit der Elektronengeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ übereinstimmt; in der Tat folgt aus (13), (14):

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dT} \Big/ \frac{dk}{dT} = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \mathfrak{v}_x.$$

Dies ist in Anbetracht der Bedeutung von $|\psi|^2$ anschaulich evident.

§ 3. Abgeschlossene Systeme (4).

Man pflegt auch hier — wie in (12) und (15) — ψ als rein periodisch in der Zeit anzusetzen:

$$\psi = e^{i\omega t} \cdot u(x_1 \cdots z_N), \quad \omega = \frac{2\pi}{h}(N \cdot mc^2 + W). \tag{16}$$

Dann nimmt die Wellengleichung (1) die Form an:

$$\Delta u + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V)u = 0; \tag{17}$$

hier ist V die gewöhnliche potentielle Energie — ohne Ruhenergie —:

$$U = V + N \cdot mc^2 \tag{18}$$

Hinzukommt bei abgeschlossenen Systemen die Randbedingung, daß die Elektronendichte $\varrho = |\psi|^2$ im Unendlichen verschwinden soll. Zusammen mit dieser Randbedingung stellt die Differentialgleichung (17) bekanntlich ein Eigenwertproblem dar; das Problem ist nur lösbar für bestimmte Werte des Energieparameters W. Verschwindet die potentielle Energie V im Unendlichen, so hat man stets eine diskrete und eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Eigenwerten (W_n bzw. W); die ersteren (W_n) entsprechen den gequantelten periodischen Lösungen der alten Quantentheorie (z. B. Ellipsenbahnen), die letzteren (W) den unperiodischen Lösungen (z. B. Hyperbelbahnen). Die entsprechenden Lösungen u der Differentialgleichung, die sog. Eigenfunktionen, verhalten sich im Unendlichen in beiden Fällen ganz verschieden: die den diskreten Eigenwerten W_n entsprechenden Eigenfunktionen u_n verschwinden exponentiell, während die zum kontinuierlichen Spektrum W gehörenden u_W sich asymptotisch wie Kugelwellen $\frac{\cos(kr - \alpha)}{r}$ verhalten, wo k durch (13) gegeben ist; die Analogie mit den korrespondierenden klassischen Lösungen ist hier nicht zu verkennen. Dementsprechend muß auch die „Normierung" der beiden Typen von Eigenfunktionen in verschiedener Weise erfolgen. Für die diskreten Eigenfunktionen u_n bestimmt man den konstanten Faktor in u_n zweckmäßigerweise durch die Gleichung:

$$\int d\tau\, u_n^2 = 1. \tag{19}$$

Die kontinuierlichen Eigenfunktionen u_W dagegen normiert man pro Energieintervall ΔW (6):

$$\lim_{\Delta W=0} \frac{1}{\Delta W} \int d\tau \left[\int_{W}^{W+\Delta W} dW u_W \right]^2 = 1. \tag{20}$$

Außer diesen Normierungsrelationen brauchen wir im folgenden hauptsächlich die sog. „Orthogonalitätsrelationen":

$$\left.\begin{aligned} &\int d\tau u_n u_m = 0 \text{ für } W_n \neq W_m \\ &\int d\tau u_n u_W = 0 \\ &\int d\tau u_{W'} u_{W''} = 0 \text{ für } W' \neq W''. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Man leitet sie dadurch ab, daß man die Differentialgleichung der Eigenfunktion u_n bzw. $u_{W'}$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u_n + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W_n - V) u_n = 0 \\ &\Delta u_{W'} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W' - V) u_{W'} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

mit $u_m d\tau$ oder mit $u_{W''} d\tau$ multipliziert und integriert, dann die durch Vertauschung der Indizes erhaltene Gleichung abzieht und den Greenschen Satz anwendet.

Ist ein Eigenwert entartet, d. h. gehören zu einem Eigenwert W_n oder W mehrere Eigenfunktionen, so sind die letzteren zunächst nicht notwendig orthogonal aufeinander; doch kann man dies immer durch lineare Transformationen der betreffenden Eigenfunktionen erzielen. Dies sei im folgenden stets als geschehen vorausgesetzt, so daß wir statt (21) schreiben können:

$$\int d\tau u_n u_m = 0 \text{ für } n \neq m, \tag{23}$$

gleich ob $W_n \neq W_m$ oder $W_n = W_m$.

Die Eigenfunktionen u_n, u_W bilden ein „vollständiges orthogonales Funktionensystem", nach dem man eine beliebige Funktion $f(x_1 \ldots z_N)$ entwickeln kann:

$$f = \sum_n f_n u_n + \int dW f_W u_W.$$

Die Entwicklungskoeffizienten f_n bzw. f_W findet man dadurch, daß man vorstehende Gleichung mit $u_m d\tau$ bzw. mit $\int_{\Delta W} dW u_{W'} \cdot d\tau$ multipliziert und integriert. Mit Hilfe der Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen (19) bis (23) folgt dann:

$$f_m = \int d\tau \cdot f u_m$$
$$f_W = \int d\tau \cdot f u_W.$$

Damit ist die Sammlung von Formeln abgeschlossen, die wir im folgenden zu verwenden haben werden.

II. Abschnitt.

Borns Theorie des Elektronenstoßes (3).

§ 1. Störungsrechnung.

Es soll jetzt die Wechselwirkung eines Atomsystems (N Elektronen $x_s y_s z_s$, $s = 1 \ldots N$), dessen Eigenwerte und Eigenfunktionen als bekannt vorausgesetzt sind, mit einem Kathodenstrahl, d. h. mit einer de Broglie-Welle (12) untersucht werden. Die Koordinaten des Kathodenstrahlelektrons seien mit $x_0 y_0 z_0$ bezeichnet.

In der Theorie von Born wird die Zeit t von vornherein durch den Ansatz (16) eliminiert, d. h. das Problem wird auf Grund der Differentialgleichung (17) behandelt, wo aber jetzt natürlich u von $3(N+1)$ Koordinaten $(x_0 y_0 z_0 x_1 \ldots z_N)$ abhängt und Δ die Summe von $(N+1)$ Δ_s-Operatoren bedeutet ($s = 0, 1 \ldots N$):

$$\sum_{s=0}^{N} \Delta_s u + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V) u = 0. \tag{24}$$

Die Randbedingung sagt aus, daß u sich im Unendlichen bezüglich der Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ wie eine ebene de Broglie-Welle (12), bezüglich der Koordinaten $x_1 \ldots z_N$ wie ein abgeschlossenes System verhalten soll.



Die potentielle Energie V läßt sich aufspalten in die innere potentielle Energie V^0 des Atoms und die Wechselwirkungsenergie V^1 zwischen Kathodenstrahlelektron und Atom:

$$V = V^0(x_1 \cdots z_N) + V^1(x_0 \cdots x_1 \cdots z_N). \tag{25}$$

Born löst nun das Problem durch eine Störungsrechnung, die davon ausgeht, daß V^1 als klein gegen V^0 betrachtet werden kann. Vernachlässigt man nämlich zunächst V^1, so konstruiert man leicht eine Lösung, die den oben genannten Randbedingungen genügt:

$$u^0 = a\, e^{-ikx_0}\, u_n(x_1 \cdots z_N). \tag{26}$$

Hier bedeutet u_n die Eigenschwingung, in der sich das Atom anfänglich (zu Beginn der Kathodenstrahlbeschießung) befindet, d. h. im allgemeinen die dem Grundzustand entsprechende Eigenfunktion; ist W_n der zugehörige Eigenwert des Atoms, so gilt definitionsgemäß:

$$\sum_{s=1}^{N} \Delta_s u_n + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W_n - V^0)\, u_n = 0. \tag{27}$$

In nullter Näherung ($V^1 = 0$) wird Gl. (24) durch den Ansatz (26,) (27) befriedigt, sofern

$$W = W_n + T,\quad T = \frac{1}{2m}\left(\frac{hk}{2\pi}\right)^2 \tag{28}$$

gesetzt wird; T bedeutet nach (13), (14) die kinetische Energie der Kathodenstrahlelektronen.

Setzt man nun:

$$u = u^0 + u^1 + u^2 + \cdots \tag{29}$$

und bestimmt u^1, u^2, ... sukzessive durch die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u^0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V^0)\, u^0 = 0\\
&\Delta u^1 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V^0)\, u^1 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V^1 u^0\\
&\cdots\cdots\\
&\Delta u^\alpha + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V^0)\, u^\alpha = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V^1 u^{\alpha-1}\\
&\cdots\cdots\cdots,\qquad \left(\Delta = \sum_{s=0}^{N}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

so ist die Differentialgleichung (24) befriedigt. Der Randbedingung ist Genüge getan, wenn u^1, u^2, ... sowohl bezüglich der Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ als auch bezüglich der Koordinaten $x_1 \ldots z_N$ im Unendlichen verschwinden. Die Konvergenz des Verfahrens läßt sich, wie Born angibt, beweisen unter der Voraussetzung, daß V^1 für große Entfernungen des äußeren Elektrons wie r_0^{-2} verschwindet; das ist bei neutralen Atomen der Fall. Bei ionisierten Atomen versagt die Bornsche Methode (schon die erste Näherung führt auf ein divergentes Integral); man muß dann auf eine im III. Abschnitt zu besprechende Methode zurückgreifen.

Die Differentialgleichungen (30) werden gelöst durch Entwicklung von u^α nach den Eigenfunktionen des Atoms $u_r(x_1 \ldots z_N)$, wobei die Entwicklungskoeffizienten natürlich noch von $x_0 y_0 z_0$ abhängen werden:

$$u^\alpha = \sum_r f_r^\alpha(x_0 y_0 z_0) \cdot u_r(x_1 \cdots z_N) + \int dW' \cdot f_{W'}^\alpha(x_0 y_0 z_0)\, u_{W'}(x_1 \cdots z_N). \tag{31}$$

Setzt man dies in (30) ein und benutzt die Differentialgleichung (27) für die Eigenfunktionen u_r bzw. $u_{W'}$, so folgt:

$$\sum_r u_r \cdot \left[\Delta_0 f_r^\alpha + k_{nr}^2 f_r^\alpha\right] + \int dW' \cdot u_{W'} \cdot \left[\Delta_0 f_{W'}^\alpha + k_{nW'}^2 f_{W'}^\alpha\right] = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V^1 u^{\alpha-1}, \tag{32}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
k_{nr}^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - W_r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2}(T + W_n - W_r)\\
k_{nW'}^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - W') = \frac{8\pi^2 m}{h^2}(T + W_n - W').
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Multipliziert man Gl. (32) beiderseits mit $u_m d\tau_1 \ldots d\tau_N$, bzw. mit $\int\limits_{\Delta W} dW u_W \cdot d\tau_1 \ldots d\tau_N$ und integriert über alle Atomkoordinaten, so ergibt sich in Anbetracht der Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen (19) bis (23):

$$\left.\begin{aligned} \Delta_0 f_m^\alpha + k_{nm}^2 f_m^\alpha &= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\int\cdots\int d\tau_1 \cdots d\tau_N \cdot V^1 u^{\alpha-1} u_m \equiv \Phi_m^\alpha (x_0 y_0 z_0) \\ \Delta_0 f_W^\alpha + k_{nW}^2 f_W^\alpha &= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\int\cdots\int d\tau_1 \cdots d\tau_N \cdot V^1 u^{\alpha-1} u_W \equiv \Phi_W^\alpha (x_0 y_0 z_0). \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Hier stehen rechterhand bekannte Funktionen von $x_0 y_0 z_0$; wir haben also für die Funktionen $f(x_0 y_0 z_0)$ Differentialgleichungen vom Typus der (z. B. aus der elektromagnetischen Lichttheorie bekannten) inhomogenen Wellengleichung. Die oben formulierte Randbedingung besagt, daß die Funktionen f im Unendlichen ($r_0 \sim \infty$) verschwinden sollen. Mit Rücksicht hierauf sind die Gleichungen (34) in bekannter Weise mit Hilfe des Greenschen Satzes zu integrieren; man erhält:

$$f_m^\alpha = -\frac{1}{4\pi}\int d\tau' \Phi_m^\alpha (x' y' z') \cdot \frac{e^{(\pm) i k_{nm} |\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_0|}, \quad (35)$$

analog f_W^α. Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Wir wollen noch speziell die erste Näherung $\alpha = 1$ betrachten. Die in das Integral für Φ^1 (34) eingehende nullte Näherung u^0 ist durch Gl. (26) gegeben. Wir begnügen uns mit der asymptotischen Darstellung von f (35) für große $r_0 = |\mathfrak{r}_0|$, die hier allein interessiert; sie entspricht bekanntlich einer inhomogenen Kugelwelle (und zwar einer auslaufenden Kugelwelle, da die einlaufende keinen physikalischen Sinn hat). Mit (31) bekommen wir also für $k r_0 \gg 1$:

$$u^1 = \sum_m a_{nm} \frac{e^{-i k_{nm} r_0}}{r_0} \cdot u_m (x_1 \cdots z_N) + \int dW \cdot a_{nW} \frac{e^{-i k_{nW} r_0}}{r_0} \cdot u_W (x_1 \cdots z_N) \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{nm} &= -a \cdot \frac{2\pi m}{h^2}\int d\tau V^1 e^{-ikx_0 + i k_{nm}(\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0)} \cdot u_n u_m \\ a_{nW} &= -a \cdot \frac{2\pi m}{h^2}\int d\tau V^1 e^{-ikx_0 + i k_{nW}(\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0)} u_n u_W. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Hier ist die Integration über alle Koordinaten $x_0 y_0 z_0 x_1 \ldots z_N$ zu erstrecken ($d\tau = d\tau_0 \cdot d\tau_1 \ldots d\tau_N$), und $\mathfrak{n}$ bedeutet den (bei der Integration festzuhaltenden) Einheitsvektor der Wellennormalen (Komponenten $x_0/r_0, y_0/r_0, z_0/r_0$).

Für $u^2, u^3, \ldots$ erhält man Formeln vom gleichen Typus wie (36), nur natürlich mit anderen Werten der Konstanten a. Die endgültige Lösung des Problems kann also nach (26) und (29) in der Form geschrieben werden:

$$u = a e^{-ikx_0} u_n + \sum_m c_{nm} \frac{e^{-i k_{nm} r_0}}{r_0} \cdot u_m + \int dW c_{nW} \frac{e^{-i k_{nW} r_0}}{r_0} \cdot u_W. \quad (38)$$

§ 2. Diskussion.

Jedes Glied der Reihe $\sum_m$ in (38) bedeutet nach I, § 2 einen Strom von „gebeugten" Elektronen, die von dem Atom radial auslaufen, und zwar ist die kinetische Energie der dem Gliede m entsprechenden Elektronen nach (14) und (33):

$$T_{nm} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h k_{nm}}{2\pi}\right)^2 = T - (W_m - W_n). \quad (39)$$

Die Elektronen $m = n$ sind elastisch reflektiert ($T_{nn} = T$), alle übrigen dagegen unelastisch; ihr Energieverlust ist gleich einer Eigenfrequenz des Atoms (mal h). Gleichzeitig tritt (nach Maßgabe desselben Koeffizienten c_{nm}) die Eigenschwingung u_m des Atoms auf, wodurch dieses zur Emission der Eigenfrequenzen

$$\nu_{mr} = \frac{W_m - W_r}{h} > 0$$

befähigt wird. Die Anregung des Atoms ist begrenzt durch die Bedingung

$$T_{nm} > 0, \quad W_m - W_n < T; \quad (40)$$

denn nur diejenigen Glieder der Reihe in (38), die dieser Bedingung genügen, liefern richtige Kugelwellen von gestreuten Elektronen; die übrigen Glieder, für welche k_{nm} rein imaginär wird, stellen in r_0 exponentiell abklingende Schwingungen dar, die der Beobachtung nicht zugänglich sind.

Ist T hinreichend groß, so liefert auch das Integral in (38) Kugelwellen, entsprechend unelastisch reflektierten Elektronen von der kinetischen Energie

$$T_{nW} = \frac{1}{2m}\left(\frac{hk_{nW}}{2\pi}\right)^2 = T - (W - W_n) > 0. \tag{41}$$

Gleichzeitig werden im Atom die Eigenschwingungen u_W des kontinuierlichen Spektrums angeregt; die letzteren entsprechen nach I, § 3 hyperbelartigen Bahnen, auf denen sich die Atomelektronen ins Unendliche entfernen; d. h. das Atom wird ionisiert.

Wie man sieht, sind all diese qualitativen Aussagen der Theorie im Einklang mit den bekannten Versuchsergebnissen von Franck und Hertz.

Die Ausbeute der elastischen und unelastischen Stöße, bzw. der Anregungs- und Ionisationsprozesse berechnen wir nach den Vorschriften von I, § 1. Wir beschränken uns dabei auf die erste Näherung der Bornschen Störungsrechnung, deren Ergebnis in den Formeln (36), (37) niedergelegt ist. Für die Stromdichte der gestreuten Elektronen $x_0 y_0 z_0$ ist nach Formel (7) zu setzen

$$|\mathfrak{i}_0| = \frac{h}{4\pi i m}\int\cdots\int d\tau_1\cdots d\tau_N\left(u^1\frac{\partial u^{1*}}{\partial r_0} - u^{1*}\frac{\partial u^1}{\partial r_0}\right).$$

Setzt man hier (36) ein, so folgt, unter Berücksichtigung der Normierungs- und Orthogonalitätsrelationen, für $kr_0 \gg 1$:

$$|\mathfrak{i}_0| = \frac{h}{2\pi m}\cdot\frac{1}{r_0^2}\left[\sum_{\substack{m \\ W_m < T + W_n}} k_{nm}|a_{nm}|^2 + \int\limits_{W < T + W_n} dW\cdot k_{nW}|a_{nW}|^2\right]. \tag{42}$$

Dies ist noch richtungsabhängig, da ja in die Formeln (37) für a_{nm} und a_{nW} noch die Wellennormale $\mathfrak{n}$ eingeht. Die Gesamtzahl der pro sec gestreuten Elektronen erhält man durch Integration über die Kugel vom Radius r_0 ($d\sigma = r_0^2\, d\Omega$); diese, durch die Stromdichte der Primärwelle $\frac{hk}{2\pi m}|a|^2$ — vgl. (14) — dividiert, stellt den „Wirkungsquerschnitt" q des Atoms für Elektronenstöße dar:

$$q = \sum_{\substack{m \\ W_m < T + W_n}} \frac{k_{nm}}{k}\int d\Omega\left|\frac{a_{nm}}{a}\right|^2 + \int\limits_{W < T + W_n} dW\cdot\frac{k_{nW}}{k}\cdot\int d\Omega\left|\frac{a_{nW}}{a}\right|^2. \tag{43}$$

Die Summe stellt den „anregenden", das Integral den „ionisierenden Querschnitt" dar; jedes Glied der Summe und jedes Element des Integrals gehört zu einer bestimmten Geschwindigkeit der gestreuten Elektronen.

§ 3. Anwendung auf das *H*-Atom.

Die Auswertung der Integrale (37) für die Größen a_{nm} ist bisher bloß für den Fall des *H*-Atoms ($N = 1$) mit Hilfe der Schrödingerschen Eigenfunktionen u_n durchgeführt, und zwar für den elastischen Stoß und die ersten unelastischen Stöße (2-quantige Bahnen) von Born (7) und allgemeiner von W. Elsasser (8). Für die Richtungsverteilung der gestreuten Kathodenstrahlen ergibt sich im Falle des elastischen Stoßes [Glied $m = n$ in (42)] die Rutherfordsche Verteilung, d. h. die gleiche Verteilung, wie man sie auf Grund der klassischen Mechanik aus der Statistik der Hyperbelbahnen erhält; sieht man von kleinsten Streuwinkeln ab, so ergibt sich für das Verhältnis der Stromdichten im gestreuten und primären Kathodenstrahl (9):

$$\frac{1}{r_0^2}\,\frac{e^4}{16\,T^2\sin^2\frac{\Theta}{2}} \qquad (\Theta = \text{Streuwinkel}).$$

Für die unelastischen Stöße ergibt sich eine etwas weniger starke Abhängigkeit der Intensität vom Streuwinkel. Die Gesamtausbeute der elastischen Stöße (Glied $n = m$ in (43)) nimmt mit wachsender Primärenergie T monoton ab, und zwar für große T wie $1/T$. Die Ausbeute der anregenden Stöße dagegen steigt von der jeweiligen Anregungsgrenze ($W_m - W_n$) aus mit wachsendem T an,



erreicht bei einem Vielfachen von $(W_m - W_n)$ ein Maximum und fällt darauf wieder monoton ab. Für sehr schnelle Teilchen gelingt es Elsasser (8), einen Zusammenhang zwischen seinen Formeln und der Bohrschen Formel für den mittleren Geschwindigkeitsverlust der α-Strahlen herzustellen (10).

Messungen der Ausbeute von Elektronenstößen liegen bisher nur an Atomen vor, deren Grundzustände zu wenig wasserstoffähnlich sind, als daß sie zu einer Prüfung der Formeln von Born und Elsasser herangezogen werden könnten. Außerdem muß betont werden, daß diese Formeln nur die erste Näherung der Bornschen Störungsrechnung darstellen, welche für kleine Kathodenstrahlgeschwindigkeiten sicher nicht ausreichend ist. Ein Versuch, die höheren Näherungen durchzurechnen, ist bisher noch nicht unternommen worden; insbesondere ist es noch nicht möglich gewesen, den Ramsauer-Effekt, d. i. die Wiederabnahme des Wirkungsquerschnittes bei kleinsten Geschwindigkeiten, theoretisch zu erfassen. Die verschiedenerseits unternommenen Versuche, diesen Effekt als Einkörperproblem [$N = 0$, Beugung der de Broglie-Welle in geeigneten statischen Zentralfeldern $V = V^1 = \Phi(r_0)$] zu behandeln (11), dürften dem Problem wohl kaum auf den Grund kommen, da beim Stoß langsamer Elektronen vermutlich gerade die Veränderung des Atoms durch den Kathodenstrahl eine entscheidende Rolle spielt.

III. Abschnitt.

Methode der Variation der Konstanten.

§ 1. Allgemeine Theorie (12).

Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt werde jetzt die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktionen ψ wieder mitgenommen; d. h. wir gehen wieder von der Wellengleichung (1), (1a), nicht von (17) aus.

Sei H^0 die Hamilton-Funktion eines abgeschlossenen (ungestörten) Systems, und seien $\psi_n = e^{i\omega_n t} u_n$, $\psi_W = e^{i\omega t} u_W$ die zugehörigen Eigenfunktionen:

$$\frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = H^0[\psi_n], \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi_W}{\partial t} = H^0[\psi_W]. \tag{44}$$

Dann kann der allgemeinste Zustand des Systems beschrieben werden durch

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n + \int dW a_W \psi_W, \tag{45}$$

wo die a_n und a_W Konstante sind, die nur nach (5), (19) bis (23) der Normierungsrelation

$$\int |\psi|^2 d\tau = \sum_n |a_n|^2 + \int dW |a_W|^2 = 1 \tag{46}$$

genügen müssen. $|a_n|^2$ bzw. $dW|a_W|^2$ stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß das System im $n$ten Zustand bzw. im Energiebereich dW angetroffen wird.

Läßt man nun von einem gewissen Zeitpunkt ($t = 0$) ab eine äußere Störung mit der Hamilton-Funktion H^1 auf das System wirken, so gilt Gl. (1a):

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H[\psi] = H^0[\psi] + H^1[\psi]. \tag{47}$$

Man kann jetzt die Wellengleichung immer noch formal durch den Ansatz (45) befriedigen, muß aber dann zulassen, daß die „Integrationskonstanten" a_n, a_W des ungestörten Problems mit der Zeit t langsam veränderlich werden, ähnlich wie in der astronomischen Störungstheorie. Setzt man (45) in (47) ein, so folgt unter Beachtung von (44):

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\sum_n \frac{da_n}{dt}\psi_n + \int dW \cdot \frac{da_W}{dt}\psi_W\right] = H^1[\psi].$$

Multipliziert man hier beiderseits mit $\psi_m^* d\tau$ bzw. mit $\int\limits_{\Delta W} dW' \psi_{W'}^* d\tau$ und integriert, so folgt mit (19) bis (23):

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i} \frac{da_m}{dt} &= \int d\tau \psi_m^* H^1[\psi] \\ \frac{h}{2\pi i} \frac{da_W}{dt} &= \int d\tau \psi_W^* H^1[\psi]. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Oder indem man rechterhand ψ durch (45) ausdrückt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i}\frac{d a_m}{dt} &= \sum_k a_k H^1_{mk} + \int dW' a_{W'} H^1_{mW'}, \\ \frac{h}{2\pi i}\frac{d a_W}{dt} &= \sum_k a_k H^1_{Wk} + \int dW' a_{W'} H^1_{WW'}, \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

wo

$$H^1_{\alpha\beta} = \int d\tau\, \psi^*_\alpha\, H^1_t[\psi_\beta] \quad (\alpha, \beta = m, W). \qquad (50)$$

(49) ist ein vollständiges System von linearen Differentialgleichungen für die a_n und a_W mit konstanten Koeffizienten, allerdings ein unendliches System.

Soll die statistische Bedeutung der Größen $|a_n|^2$, $dW|a_W|^2$ zu Recht bestehen, so muß die Relation (46) nach Einschaltung der Störung erhalten bleiben. Dies ist der Fall, wenn die Matrix der Störungsfunktion (50) „hermitisch" ist, d. h. wenn:

$$H^1_{\alpha\beta} = H^{1*}_{\beta\alpha}. \qquad (51)$$

Diese Relation ist evident, wenn H^1 nur von den Lagenkoordinaten abhängt, also kein Differentialoperator, sondern lediglich eine (reelle) Funktion ist; sonst kann (und muß) der Störungsoperator $H^1[\ \ ]$ immer so „symmetrisiert" werden, daß (51) erfüllt ist. Aus (49) und (51) ersieht man dann aber leicht, daß die Summe

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\sum_m a^*_m \frac{d a_m}{dt} + \int dW\, a^*_W \frac{d a_W}{dt}\right]$$

reell ist, und hieraus folgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_m a^*_m a_m + \int dW\, a^*_W a_W\right] = 0,$$

was im Anschluß an (46) verlangt wurde.

Ein Verfahren, das Differentialgleichungssystem (49) zu lösen, besteht darin, daß man rechterhand für a_n und a_W zunächst die Werte einsetzt, die sie zu Beginn der Störung ($t = 0$) haben; dann liefert die Integration von (49) eine erste Näherung für die Zeitabhängigkeit von a_n und a_W. Setzt man dann rechts die Werte der ersten Näherung ein, so gibt (49) eine zweite Näherung, und so fort. Dieses Verfahren soll in den folgenden Beispielen durchgehend angewendet werden.

§ 2. Der Photoeffekt (13).

Wir untersuchen jetzt speziell die von einer linear polarisierten Lichtwelle

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{2}\left\{E e^{2\pi i \nu\left(t - \frac{x}{c}\right)} + E^* e^{-2\pi i \nu\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right\} \qquad (52)$$

in einem Atom hervorgerufene Störung. Hat man es mit 1 Elektron zu tun, so ist die klassische Störungsenergie $-e\,(\mathfrak{A}\mathfrak{v})$, wo $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential der Lichtwelle ist: $\mathfrak{E} = \partial\mathfrak{A}/\partial t$,

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y = 0, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{1}{4\pi i \nu}\left\{E e^{2\pi i \nu\left(t - \frac{x}{c}\right)} - E^* e^{-2\pi i \nu\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right\},$$

Um den Störungsoperator $H^1[\ \ ]$ zu erhalten, hat man nach I, § 1 den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{p}/m$ durch den Operator $\left(\frac{h}{2\pi i m}\,\mathrm{grad}\right)$ zu ersetzen; folglich wird

$$H^1[\psi] = -\frac{eh}{2\pi i m}\mathfrak{A}_z \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{eh}{8\pi^2 m\nu}\left\{E e^{2\pi i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)} - E^* e^{-2\pi i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right\}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Im Falle mehrerer Elektronen ist noch über alle Elektronen $s = 1 \ldots N$ zu summieren:

$$H^1[\psi] = \frac{eh}{8\pi^2 m\nu}\cdot\sum_s\left\{E e^{2\pi i\nu\left(t - \frac{x_s}{c}\right)} - E^* e^{-2\pi i\nu\left(t - \frac{x_s}{c}\right)}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial z_s}. \qquad (53)$$

Schließlich wird das Matrixelement der Störungsfunktion (50), wenn noch [vgl. (16)]:

$$\psi_\alpha = u_\alpha \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(N m c^2 + W_\alpha\right) t} \tag{54}$$

gesetzt wird:

$$H^1_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta} e^{\frac{2\pi i}{h}(W_\beta - W_\alpha + h\nu) t} + \Phi^*_{\beta\alpha} e^{\frac{2\pi i}{h}(W_\beta - W_\alpha - h\nu) t}, \tag{55}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} &= + \frac{e h}{8\pi^2 m \nu} \cdot E \cdot \sum_s \int d\tau\, e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} x_s} u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial z_s} \\ \Phi^*_{\beta\alpha} &= - \frac{e h}{8\pi^2 m \nu} \cdot E^* \cdot \sum_s \int d\tau\, e^{+2\pi i \frac{\nu}{c} x_s} u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial z_s}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Daß das zweite Integral (56) aus dem ersten tatsächlich durch Vertauschung der Indizes und Übergang zum konjugiert Komplexen hervorgeht, beweist man leicht durch partielle Integration nach z_s. Infolgedessen erfüllt (55) auch die Bedingung (51); die Störungsmatrix ist in der Tat „hermitisch".

Wir gehen jetzt mit dem Ansatz (55) in die Differentialgleichungen (49) ein und integrieren in erster Näherung, indem wir rechterhand die Anfangswerte von a_n, a_W einsetzen. Nehmen wir an, daß sich das Atom zu Beginn der Beleuchtung ($t = 0$) im $n$ten Zustande befindet:

$$|a_n| = 1,\ a_k = 0\ (k \neq n),\ a_W = 0\ [\text{für } t = 0], \tag{57}$$

so ergibt (49):

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{d a_m}{d t} = a_n H^1_{mn}, \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{d a_W}{d t} = a_n H^1_{Wn}. \tag{58}$$

Integriert man mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung (57), so folgt ($m \neq n$):

$$\left.\begin{aligned} a_m &= a_n \left\{ \Phi_{mn} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W_m + h\nu) t} - 1}{W_n - W_m + h\nu} + \Phi^*_{nm} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W_m - h\nu) t} - 1}{W_n - W_m - h\nu} \right\} \\ a_W &= a_n \left\{ \Phi_{Wn} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W + h\nu) t} - 1}{W_n - W + h\nu} + \Phi^*_{nW} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W - h\nu) t} - 1}{W_n - W - h\nu} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Hier treten die charakteristischen Resonanznenner auf, die aussagen, daß ein Zustand m besonders stark angeregt wird, wenn seine Energiedifferenz zum Grundzustand $|W_m - W_n|$ nahezu mit dem $h\nu$ der Primärwelle übereinstimmt. Jedoch bleiben a_m und a_W auch im Falle exakter Resonanz endlich.

Damit sind die Koeffizienten der Eigenfunktionenentwicklung (45) in erster Näherung bestimmt; (45) in Verbindung mit (59) stellt die Schwingung dar, welche die Lichtwelle im Atom induziert. Diese Formeln sind unter anderm für die Theorie der Zerstreuung (Dispersion) des Lichtes von Bedeutung; sie dienen zur Berechnung des elektrischen Momentes, welches nach dem Korrespondenzprinzip für die Emission der sekundären Lichtwelle maßgebend ist ([14]).

Es soll jetzt die Resonanzerscheinung näher untersucht werden für den Fall, daß die Resonanzstelle

$$W = h\nu + W_n = h\nu - |W_n| \tag{60}$$

[vgl. die zweite Gl. (59)] in das kontinuierliche Eigenwertsspektrum des Atoms fällt, was bei hinreichend großem $h\nu$ zutrifft. Die Eigenschwingungen in der nächsten Umgebung dieses Eigenwertes werden dann besonders stark angeregt werden, d. h. es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß Atomelektronen auf hyperbelartige Bahnen von der Energie (60) (oder nahezu dieser Energie) hinaufgehoben werden und das Atom verlassen. Wir haben also lichtelektrischen Effekt; (60) ist die bekannte Einsteinsche Gleichung, welche aussagt, daß das absorbierte Energiequantum $h\nu$ in mechanische Energie ($W - W_n$) umgesetzt wird.

Die Ausbeute des Photoeffekts bestimmt sich am einfachsten durch das Integral

$$\int dW\, |a_W|^2.$$

In dem Ausdruck für a_W (59) kann man das zweite Glied, das keine Resonanz gibt, gleich weglassen; beachtet man überdies, daß der Integrand für große t ein sehr steiles Maximum bei W (60) hat, so



kann man für die langsam veränderliche Größe Φ ihren Wert an der Stelle W (60) einsetzen, und erhält:

$$\int dW' |a_{W'}|^2 = |\Phi_{Wn}|^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dW' \frac{2\left[1-\cos\frac{2\pi}{h}(W'-W)t\right]}{(W'-W)^2} = |\Phi_{Wn}|^2 \cdot \frac{4\pi^2}{h} t = \gamma \cdot t. \tag{61}$$

Die Zahl der Hyperbelbahnen nimmt also, wie zu erwarten, linear mit der Zeit zu; die Zahl der pro Zeiteinheit austretenden Photoelektronen ist

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{h} \cdot |\Phi_{Wn}|^2. \tag{62}$$

Hierdurch ist zugleich der Absorptionskoeffizient des Lichtes von der Frequenz ν bestimmt. Ist $\mathfrak{N}$ die Zahl der Atome pro Volumeneinheit, so ist die in einem Kubikzentimeter pro Sekunde absorbierte Energie $\mathfrak{N}\gamma h\nu$. Dividiert man dies durch die Energie $\frac{c}{8\pi}|E|^2$, welche die primäre Lichtwelle pro Sekunde durch den Quadratzentimeter hindurchschickt (den Mittelwert des Poyntingschen Energiestroms), so erhält man den Absorptionskoeffizienten des Lichtes pro Zentimeter [vgl. (62), (56)]:

$$\mu = \frac{8\pi\mathfrak{N}\gamma h\nu}{c|E|^2} = \mathfrak{N} \cdot \frac{e^2 h^2}{2\pi c m^2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left|\sum_s \int d\tau\, e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} x_s} u_W \frac{\partial u_n}{\partial z_s}\right|^2. \tag{63}$$

Ist die Lichtwellenlänge c/ν groß gegen die Atomdimensionen, so kann man den Faktor $e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} x_s}$ in dem Integranden von $\Phi_{\alpha\beta}$ (56) unterdrücken; ferner kann nach bekannten Matrizengleichungen (zu verifizieren durch wiederholte partielle Integration und Heranziehung der Wellengleichung)

$$\int d\tau u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial z_s} = \frac{4\pi^2 m}{h^2}(W_\beta - W_\alpha)\int d\tau z_s u_\alpha u_\beta$$

gesetzt werden. Im Grenzfall großer Wellenlänge wird demnach unter Beachtung von (60):

$$\Phi_{Wn} = \frac{1}{2} E \cdot M_{Wn}, \tag{64}$$

$$M_{Wn} = -e \cdot \int d\tau \left(\sum_s z_s\right) u_n u_W. \tag{65}$$

M_{Wn} ist das dem Resonanzsprung $u_n \rightarrow u_W$ entsprechende Matrixelement der Projektion des elektrischen Momentes des Atoms auf die Feldrichtung z. Für den Absorptionskoeffizienten μ erhält man in dieser Näherung nach (62), (63):

$$\mu = \mathfrak{N} \cdot \frac{8\pi^3 \nu}{c} \cdot |M_{nW}|^2. \tag{66}$$

Zum Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung eignet sich vor allem der Photoeffekt von Röntgenstrahlen, da dieser hauptsächlich an den kernnahen Elektronen angreift, deren Eigenschwingungen wasserstoffähnlich gerechnet werden können. Die Formel (66) liefert in der Tat die richtige Größenordnung für den Absorptionskoeffizienten der Röntgenstrahlen und gibt auch seine Abhängigkeit von der Primärwellenlänge und der Kernladung des Atoms richtig wieder ([13]). Eine genauere Berechnung der (wasserstoffähnlichen) Matrixelemente M_{nW} (65) ist von Y. Nishina ([15]) durchgeführt worden; danach scheint es, daß die Formel (66) bei leichten Elementen, wo sie am besten stimmen sollte, um etwa 50 Proz. zu kleine Werte gibt. Erwähnt sei noch, daß die Absorptionskoeffizienten μ der verschiedenen Elektronenbahntypen (z. B. 2_2 und 2_1) nach (66) verschieden stark mit der Wellenlänge variieren, ganz entsprechend dem experimentellen Befunde von H. R. Robinson ([16]) (Methode der magnetischen Analyse der Photoelektronen nach M. de Broglie-Whiddington).

Um die Richtungsverteilung der Photoelektronen zu berechnen, müssen wir die Stromdichte der induzierten Schwingung (45), (59) in großem Abstand vom Atom untersuchen; bzw., da die Geschwindigkeit der Elektronen in allen Richtungen die gleiche ist, genügt auch die Kenntnis der Ladungsdichte $\psi\psi^*$. Deren Richtungsabhängigkeit übersieht man leicht im Grenzfall langer



Wellen („lang" gegen die Wellenlänge der Absorptionskante), d. h. wenn (64) gilt. Nach den Auswahlregeln für das Wasserstoffspektrum (bzw. für die Röntgenspektren) ist nämlich M_{Wn} nur dann von Null verschieden, wenn die Eigenschwingungen $u_n = u_{nkm}$ und $u_W = u_{Wkm}$ sich im Azimutalquantum k um ± 1 unterscheiden und die gleiche Orientierungsquantenzahl m haben. Handelt es sich also z. B. um den Photoeffekt an K-Elektronen ($n = 1$, $k = 1$, $m = 0$), so treten in der Entwicklung (45) nur die Eigenfunktionen mit $k = 2$, $m = 0$ auf; diese sind aber proportional der ersten Legendreschen Kugelfunktion $\cos \vartheta$, wo ϑ den Winkel der Elektronenbahn (Wellennormale) gegen die Feldrichtung z bedeutet. Folglich ist die Stromdichte proportional $\cos^2 \vartheta$ (13). Dieses Resultat gilt exakt nur für K-Elektronen (im Grenzfall langer Wellen), läßt sich aber aus bekannten Kugelfunktionenrelationen als Näherungsgesetz auch für beliebige Elektronentypen ableiten, und zwar auf Grund der Voraussetzung, daß die beiden nach der Auswahlregel in Betracht kommenden kontinuierlichen Eigenfunktionen $u_{W,\,k+1,\,m}$ und $u_{W,\,k-1,\,m}$ annähernd den gleichen asymptotischen Verlauf im Unendlichen (gleiche Phase) haben. Letzteres trifft zu bei großen Energien, d. h. bei kurzen Wellen, wo dann freilich die Formel (64) nur noch näherungsweise gilt.

Benutzt man statt (64) die exakte Formel (56), so läßt sich zeigen (17), daß das Maximum der Elektronenemission, welches nach (64) in die Richtung des elektrischen Feldvektors $\vartheta = 0$ ($\cos^2 \vartheta = 1$) fallen würde, in Richtung der Primärwellennormale um einen Winkel ϑ_0 vorgeneigt ist, welcher durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\sin \vartheta_0 = \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2mh(\nu - \nu_0)}} \tag{67}$$

(ν_0 = Frequenz der Absorptionsgrenze.) Genauer gesagt stellt $\pi/2 - \vartheta_0$ die Öffnung des Kegels dar, welcher die Zahl der Photoelektronen halbiert.

Die letzten experimentellen Untersuchungen über die Richtungsverteilung der von (polarisierten) Röntgenstrahlen ausgelösten Photoelektronen (Zählung der Nebelspuren in der Wilson-Kammer) haben die Theorie sehr gut bestätigt. Bei Beobachtung parallel zum Strahl ergibt sich die theoretische $\cos^2 \vartheta$-Verteilung, mit dem Maximum in der Feldrichtung (Polarisationsebene) (18); bei Beobachtung senkrecht zum Strahl die durch Vorneigung entsprechend (67) verzerrte $\cos^2 \vartheta$-Verteilung (19). Nur die Abhängigkeit der Vorneigung von der Grenzfrequenz ν_0 in (67) scheint bei langen Wellen ($\nu \sim \nu_0$) noch nicht in Ordnung zu sein; die Messungen scheinen im Gegensatz zu (67) eine Abnahme von ϑ_0 mit wachsendem ν_0 anzudeuten (19).

Der innere Photoeffekt, d. i. die Absorption von γ-Strahlen im Eigenatom unter Erzeugung sekundärer β-Strahlen, ist von B. Swirles (20) behandelt worden. Das Atom wird hier nicht durch eine ebene Welle sondern durch eine aus seinem eigenen Kern stammende Kugelwelle gestört. Der Absorptionskoeffizient für die K-Schale kommt theoretisch ungefähr in richtiger Größenordnung (allerdings wieder zu klein) heraus.

§ 3. Strahlungslose Sprünge (Auger-Effekt) (21).

Beim Wasserstoffatom ($N = 1$) liegen bekanntlich das diskrete und das kontinuierliche Eigenwertspektrum in getrennten Energiebereichen ($W_n < 0$, $W > 0$); beim Zwei- und Mehrkörperproblem dagegen gibt es in der Regel einen Energiebereich, in welchem sich diskretes und kontinuierliches Spektrum überdecken. Beim Heliumatom z. B. ist der Zustand, in dem sich beide Elektronen in 2-quantigen Bahnen befinden, energetisch gleich hoch wie der Zustand, in dem das eine Elektron einquantig gebunden und das andere frei ist (Hyperbelbahn). Streng genommen ist eine saubere Unterscheidung zweier derartiger in Resonanz stehender Zustände quantenmechanisch nur möglich, solange man die Wechselwirkung der Atomelektronen untereinander vernachlässigt; denn dann besteht, wie man leicht nachrechnet (vgl. das folgende), keine Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den beiden Zuständen, da gleichzeitige Sprünge von 2 Elektronen in dieser Näherung verboten sind [wegen $V^0 = \sum_s f_s(x_s)$, $u_n = \prod_s \varphi_s(x_s)$]. Schaltet man aber nun die Wechselwirkung zwischen den Elektronen ein, so ergibt die Störungsrechnung, daß die beiden in Resonanz stehenden Zustände nicht mehr einzeln sondern nur gemeinsam in einem bestimmten Verhältnis angeregt werden können. Wird also z. B. primär der diskrete Zustand angeregt, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System in den Zustand des kontinuierlichen Spektrums umschlägt; d. h. es erfolgt eine spontane Ionisierung des Atoms. Die betreffenden diskreten Zustände haben demnach eine begrenzte Lebensdauer (d. h. eine kürzere als die durch die Strahlungsdämpfung bedingte Lebensdauer). Dies hat natürlich zugleich eine „Unschärfe" des betreffenden Eigenwerts zur Folge.



Um jene Lebensdauer nach der in III, § 1 entwickelten Methode zu berechnen, müssen wir nach dem oben Gesagten den Hamiltonschen Störungsoperator H^1 [ ] mit der Coulombschen Wechselwirkungsenergie der Elektronen $V^1 = e^2 \Sigma \frac{1}{r_{ik}}$ identifizieren; und zwar denken wir uns diese Wechselwirkungskräfte in dem Augenblick ($t = 0$) eingeschaltet, in welchem die diskrete Eigenschwingung u_n angeregt wird. H^1 ist diesmal nicht explizite von der Zeit abhängig. Die Eigenschwingungen u_n, u_W des ungestörten Systems sind einfach Produkte von Wasserstoff-Eigenfunktionen bzw. lineare Kombinationen von solchen (wegen $V^0 = -Ne^2 \sum_s \frac{1}{r_s}$).

Setzt man in den Differentialgleichungen (49) rechterhand wieder den Anfangszustand ein [wie (57)], so folgt:

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{da_W}{dt} = a_n \cdot V^1_{Wn}, \tag{68}$$

$$V^1_{Wn} = \int d\tau\, V^1 \psi_W^* \psi_n = e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W)t} \cdot \Phi_{Wn} \tag{69}$$

$$\Phi_{Wn} = \int d\tau\, V^1 u_W u_n. \tag{70}$$

Die Integration von (68), (69) ergibt:

$$a_W = a_n \Phi_{Wn} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W)t} - 1}{W_n - W}; \tag{71}$$

und man erhält für die Gesamtwahrscheinlichkeit, daß das System zur Zeit t in einem Zustand des kontinuierlichen Spektrums ($W \gtrsim W_n$) angetroffen wird, ähnlich wie beim Photoeffekt [vgl. (61)]:

$$\int dW\, |a_W|^2 = |\Phi_{Wn}|^2 \cdot \frac{4\pi^2}{h}\, t = \gamma t. \tag{72}$$

Die Größe

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{h} |\Phi_{Wn}|^2 \tag{73}$$

bedeutet also wieder die Zahl der pro Zeiteinheit austretenden Elektronen, wo jetzt Φ_{Wn} nach (70) das dem Übergang $u_n \rightarrow u_W$ entsprechende Matrixelement der Wechselwirkungsenergie der Atomelektronen bedeutet. $1/\gamma$ ist die mittlere Lebensdauer des Zustandes u_n.

Gl. (73) stellt natürlich nur eine erste Näherung dar. Man könnte nach der Art des Integrationsverfahrens glauben, daß sie für sehr kleine Zeiten exakt gültig sei; doch trifft dies nicht zu, denn auch die zweite Näherung liefert in (72) Beiträge, die linear mit der Zeit gehen. Dagegen ist die Näherung (73) um so besser, je kleiner V^1 im Verhältnis zu V^0 ist; darum ist z. B. die entsprechende Näherung (62) beim Photoeffekt schon völlig ausreichend (die zweite Näherung würde bloß ein Zusatzglied proportional E^4 geben). Im vorliegenden Falle kann die Formel (73) besonders vorteilhaft auf die kernnahen Elektronen schwerer Elemente angewendet werden, wo die Wechselwirkungsenergie der Elektronen sehr klein gegen ihre Energie im Kernfeld ist.

Neben der Wahrscheinlichkeit (73) des spontanen „strahlungslosen" Zerfalls hat das Atom in dem (angeregten) Zustand u_n noch eine Wahrscheinlichkeit β, unter Emission von Licht spontan in einen energetisch tieferen Zustand überzugehen, eine Wahrscheinlichkeit, die sich bekanntlich nach dem (quantenmechanisch verschärften) Korrespondenzprinzip berechnen läßt. Mit Rücksicht auf diese beiden Zerfallsmöglichkeiten hat man dem Zustand die mittlere Lebensdauer $\frac{1}{\beta + \gamma}$ zuzuschreiben, und die „Unschärfe" des Eigenwerts, d. h. die Verbreiterung der von ihm ausgehenden Spektrallinien wird proportional $(\beta + \gamma)$ sein. $\frac{\beta}{\beta + \gamma}$ ist die Ausbeute der Lichtemission („Fluoreszenzausbeute" nach Auger), $\frac{\gamma}{\beta + \gamma}$ die Ausbeute der Elektronenemission.

Auger ([22]) hat diese Ausbeuten für die von ihm entdeckten strahlungslosen Sprünge durch Auszählung der Nebelspuren in einer Wilson-Kammer bestimmt. Primär werden die Atome (Edelgase) durch Photoeffekt in der K-Schale einfach ionisiert; sie sind kenntlich an der Spur des Photoelektrons. Diejenigen unter ihnen, die noch eine weitere Spur bestimmter Reichweite aufweisen, sind



die strahlungslos zerfallenen Atome (Beispiel: in der L-Schale doppelt ionisiertes Atom plus freies Elektron); die übrigen sind offenbar unter Aussendung eines K-Serien Lichtquants zerfallen. Andererseits kann man die theoretischen Werte von β und γ mit Hilfe der Wasserstoff-Eigenfunktionen abschätzen. Der Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung fällt durchaus befriedigend aus, sowohl was die Größenordnung der Lebensdauer als auch was ihre Abhängigkeit von der Atomnummer anlangt ([21]); γ wird in dieser Näherung von der Kernladung unabhängig.

Auf ähnliche Vorkommnisse bei gewissen Termen von Serienspektren (Beobachtungen von Russell und Saunders) und von Bandenspektren (V. Henri) sei hier nur kurz hingewiesen. Für die Anwendbarkeit obiger Formeln auf allgemeinere strahlungslose Übergänge ist nur wesentlich, daß man von einem ungestörten System ausgeht, in welchem sich die potentielle Energie V^0 additiv aus den Anteilen der einzelnen Teilsysteme (Elektronen, Kerne) zusammensetzt. Und zwar haben als „strahlungslose" Prozesse alle diejenigen Übergänge zu gelten, die durch solche Wechselwirkungskräfte H^1 verursacht werden, bei welchen die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von einem Teilsystem zum andern (die Retardierung der Potentiale) vernachlässigt werden kann. Ist letzteres nicht der Fall, so hat man es mit Energieübertragung durch elektromagnetische Strahlung zu tun, d. h. mit einem viel schwierigeren Problem, bei welchem die hier entwickelten Methoden versagen (vgl. die Schlußbemerkungen).

§ 4. Elektronenstoß.

Wir behandeln jetzt auch den Elektronenstoß als „strahlungslosen Übergang", indem wir das stoßende Kathodenstrahlelektron $x_0 y_0 z_0$ (vgl. den II. Abschnitt) zum System hinzurechnen. In nullter Näherung sei wie früher die Wechselwirkungsenergie zwischen Atom und Elektron unterdrückt; dann werden die Eigenfunktionen des Gesamtsystems: Atomeigenfunktionen $\psi_n = u_n(x_1 \ldots z_N)\, e^{\frac{2\pi i}{h} W_n t}$, multipliziert mit Eigenfunktionen des freien Elektrons, d. h. ebenen Wellen

$$e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}, \quad \omega = \omega(|\mathfrak{k}|).$$

Um die letzteren mitnehmen zu können, müssen wir die Formeln in III, § 1 ein wenig erweitern. Statt (45) ist offenbar anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} \psi = & \sum_n \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z a_n(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)\, \psi_n e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t} \\ & + \int dW \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z a_W(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)\, \psi_W e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Setzt man dies in die Wellengleichung (47) ein und berücksichtigt die Differentialgleichung der Eigenfunktionen ψ_n, so folgt:

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\sum_n \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z \frac{da_n(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)}{dt} \psi_n e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t} + \int dW \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z \frac{da_W(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)}{dt} \psi_W e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}\right] = H^1[\psi].$$

Multipliziert man hier mit

$$\psi_m^* e^{+i(\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0) - i\omega' t} d\tau \quad (d\tau = d\tau_0 d\tau_1 \cdots d\tau_N)$$

und integriert, so kommt auf Grund des Fourier-Theorems:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{da_m(\mathfrak{k}'_x \mathfrak{k}'_y \mathfrak{k}'_z)}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\tau\, \psi_m^* e^{+i(\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0) - i\omega' t} H^1[\psi]; \tag{75}$$

entsprechendes gilt für a_W. Setzen wir nun für unsere Zwecke $H^1 = V^1$, und approximieren ψ rechterhand durch den Anfangszustand $\psi_n \cdot a e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}$, so folgt mit (13) und (39):

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i} \frac{da_m(\mathfrak{k}'_x \mathfrak{k}'_y \mathfrak{k}'_z)}{dt} & = a \cdot \Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k}) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W_m)t} e^{i(\omega - \omega')t} \\ & = a\, \Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k}) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(T_{nm} - T')t} \end{aligned} \tag{76}$$

$$\Phi_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\tau\, V^1 \cdot e^{-i(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}', \mathfrak{r}_0)} u_m u_n. \tag{77}$$

Die Integration von (76) mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen ergibt:

$$a_m(\mathfrak{k}'_x \mathfrak{k}'_y \mathfrak{k}'_z) = a\,\Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k}) \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(T_{nm} - T')t} - 1}{T_{nm} - T'}. \tag{78}$$

Hiernach besteht eine Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Atom von dem $n$ten auf den $m$ten Zustand springt und gleichzeitig die Welle $\mathfrak{k}$ in die Welle $\mathfrak{k}'$ übergeführt wird, und zwar tritt Resonanz ein für $T' = T_{nm}$, d. h. für $|\mathfrak{k}'|^2 = k^2_{nm}$ (33). Die Gesamtzahl der bis zur Zeit t angeregten m-Zustände ist offenbar

$$\int\!\!\int\!\!\int dx_0\,dy_0\,dz_0 \cdot \left|\int\!\!\int\!\!\int d\mathfrak{k}'_x d\mathfrak{k}'_y d\mathfrak{k}'_z \cdot a_m(\mathfrak{k}'_x \mathfrak{k}'_y \mathfrak{k}'_z)\cdot e^{-i(\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0)+i\omega' t}\right|^2,$$

was mit Hilfe des Fouriertheorems übergeht in

$$(2\pi)^3 \int\!\!\int\!\!\int d\mathfrak{k}'_x d\mathfrak{k}'_y d\mathfrak{k}'_z\,|a_m(\mathfrak{k}'_x \mathfrak{k}'_y \mathfrak{k}'_z)|^2 = (2\pi)^3 \int d\Omega \int d|\mathfrak{k}'|\cdot|\mathfrak{k}'|^2 \cdot |a_m(\mathfrak{k}')|^2$$

$$= (2\pi)^3 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi^2 m}{h^2}\right)^{3/2} |a|^2 \cdot \int d\Omega \int dT' \sqrt{T'}\,|\Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k})|^2 \cdot \frac{2\left[1 - \cos\frac{2\pi}{h}(T' - T_{nm})t\right]}{(T' - T_{nm})^2}$$

$$= t\cdot|a|^2 \cdot \frac{(2\pi)^8 m}{h^4} \sqrt{2m\,T_{nm}} \int d\Omega\,|\Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k})|^2.$$

Die Zahl der pro Sekunde in den Raumwinkel $d\Omega$ (Richtung $\mathfrak{k}'$, $|\mathfrak{k}'| = k_{nm}$) gestreuten Elektronen von der Energie T_{nm} ist demnach [vgl. (77)]:

$$d\Omega \cdot |a|^2 \cdot \frac{4\pi^2 m}{h^2} \sqrt{2m\,T_{nm}} \cdot \left|\int d\tau\, V^1 e^{-i(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}',\mathfrak{r}_0)} u_m u_n\right|^2. \tag{79}$$

Dies entspricht genau der ersten Näherung der Bornschen Störungsrechnung (42), (37). Würde man nun die erste Näherung (78) rechterhand in (75) einführen und abermals integrieren, so würde man zu den Formeln der zweiten Bornschen Näherung gelangen, und so fort. Es versteht sich von selbst, daß die Wahrscheinlichkeit der Ionisierungsprozesse ebenso wie die der Anregungsprozesse nach dem obigen Verfahren berechnet werden kann (Index W statt m).

Wie schon oben hervorgehoben würde, konvergiert dieses Näherungsverfahren dann und nur dann, wenn das Atom neutral ist, d. h. wenn V^1 für große r_0 mindestens wie r_0^{-2} verschwindet. Handelt es sich dagegen um ein ionisiertes Atom, etwa von der Gesamtladung Ze, so muß der rein Coulombsche Anteil der Wechselwirkung ($-Ze^2/r_0$) in die ungestörte Hamiltonfunktion H^0 mit aufgenommen werden, d. h. man muß bezüglich der Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ die Fourierentwicklung (74) (Entwicklung nach den Eigenfunktionen des freien Elektrons) ersetzen durch eine Entwicklung nach Wasserstoff-Eigenfunktionen.

Auf einen Punkt möge noch hingewiesen werden. Rechnet man im ungestörten Atom mit wasserstoffähnlich gebundenen Elektronen, d. h. vernachlässigt man in H^0 die Wechselwirkung der Atomelektronen untereinander, so werden die Wahrscheinlichkeiten für solche Anregungsprozesse, bei denen zwei oder mehr Elektronen gleichzeitig „springen" würden, gleich Null [da nämlich $V^1 = \sum_s f_s(x_0, x_s)$ und $u_n = \prod_s \varphi_s(x_s)$]; infolgedessen bekommt man in dieser Näherung auch keine Wahrscheinlichkeit für Doppelionisation, d. h. für eine gleichzeitige Abtrennung von 2 Atomelektronen. Ist aber das Atom einmal durch Photoeffekt oder Elektronenstoß einfach ionisiert und zwar auf einen energetisch genügend hohen Zustand gebracht, so steht letzterer in Resonanz mit doppelt ionisierten Atomzuständen. Schaltet man also jetzt die Wechselwirkung der Atomelektronen ein, so werden strahlungslose Übergänge aus dem einfach ionisierten in den doppelt ionisierten Zustand stattfinden, deren Wahrscheinlichkeit ähnlich wie in III, § 3 berechnet werden kann. Auf diese Weise kommt heraus, daß die Zahl der doppelt ionisierten wie die der einfach ionisierten Atome linear mit der Zeit zunimmt; wird also ein Atom durch Licht von hinreichend hoher Frequenz oder durch Kathodenstrahlen von hinreichend hoher Geschwindigkeit ionisiert, so steht die Zahl der Doppelionisationen zu der der Einfachionisationen in einem festen Verhältnis, das sich nach der vorstehend entwickelten Methode ermitteln läßt.

Schlußbemerkungen.

Die Anwendungen der Theorie auf die Probleme des Elektronenstoßes, des Photoeffekts und des Augereffekts werden genügen um zu zeigen, wie man in jedem Fall eine eindeutige Aussage über die Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten kann. Daß wir ursprünglich nur die Bewegung von Teilchen gleicher Masse (Elektronen) behandelt haben, ist keine wesentliche Beschränkung;



insbesondere die Methode des III. Abschnittes läßt sich ohne weiteres auf die Fälle übertragen, in denen auch die Kernbewegung eine Rolle spielt (z. B. Dissoziation von Molekülen). Viel wesentlicher ist die schon in der Einleitung erwähnte Beschränkung, die uns verbietet den Vorgang der Strahlungsdämpfung hier zu besprechen. Zwar ist es Dirac ([23]) gelungen, die Lichtemission auf Grund der Differentialgleichungen (49) zu behandeln, indem er die elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes durch gequantelte harmonische Oszillatoren symbolisch repräsentiert und die Resonanzübergänge zwischen diesen und einem im Hohlraum befindlichen Atom untersucht. Hierzu reichen aber die Methoden der Wellenmechanik nicht aus, vielmehr wird dabei der weiter reichende Apparat der *q*-Zahlenrechnung benötigt. Lichtemission und Lichtzerstreuung sind ja schon in der klassischen Physik Probleme der Elektrodynamik, und es ist deshalb natürlich, daß sie auch in der Quantentheorie allgemeinere und abstraktere Methoden erfordern, auf deren Darstellung wir im Rahmen dieses Berichtes verzichten müssen.

Literaturverzeichnis.

1) H. A. Kramers, Phil. Mag. **46**, 836, 1923.
2) E. Fermi, Lincei Rend. **33**, 243, 1924 und **1**, 77, 1925.
3) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863 und **38**, 803, 1926.
4) E. Schrödinger, mehrere Arbeiten in den Ann. d. Phys. 1926, in Buchform erschienen als „Abhandlungen zur Wellenmechanik". Leipzig 1927.
5) L. de Broglie, Thèses, Paris 1924. Deutsche Übersetzung: „Untersuchungen zur Quantentheorie", Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927.
6) H. Weyl, Math. Ann. **68**, 220, 1910; E. Fues, Ann. d. Phys. **81**, 281, 1926, § 3.
7) M. Born, Göttinger Nachrichten 1926, S. 146.
8) W. Elsasser, Zeitschr. f. Phys. **45**, 522, 1927.
9) Vgl. auch G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **40**, 590, 1926, § 2; I. R. Oppenheimer, Zeitschr. f. Phys. **43**, 413, 1927; W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **48**, 180, 1928.
10) Vgl. auch I. A. Gaunt, Proc. Cambridge Phil. Soc. **23**, 732, 1927.
11) H. Faxén u. I. Holtsmark, Zeitschr. f. Phys. **45**, 307, 1927; L. Mensing, Zeitschr. f. Phys. **45**, 603, 1927.
12) Vgl. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **112**, 661, 1926, § 5.
13) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **40**, 574, 1926; I. R. Oppenheimer, Zeitschr. f. Phys. **41**, 268, 1927; G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **41**, 443, 1927; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 243, 1927.
14) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **81**, 109, 1926; O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **41**, 407, 1927; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 710, 1927.
15) Y. Nishina, Vortrag auf der Gautagung der D. Phys. Gesellschaft in Göttingen, 5. Febr. 1928; Verh. d. D. phys. Ges. **9**, 6, 1928.
16) H. R. Robinson, Proc. Roy. Soc. **104**, 455, 1923; H. R. Robinson u. A. M. Cassie, Proc. Roy. Soc. **113**, 282, 1926.
17) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **41**, 828, 1927.
18) F. Kirchner, Ann. d. Phys. **83**, 521, 1927.
19) P. Auger, Journ. de Phys. **8**, 85, 1927.
20) B. Swirles, Proc. Roy. Soc. **116**, 491, 1927.
21) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **43**, 524, 1927; E. Fues, Zeitschr. f. Phys. **43**, 726, 1927.
22) P. Auger, Ann. de Phys. **6**, 183, 1926.
23) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 243 u. 710, 1927.

(Eingegangen 31. März 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Beobachtungen beim Übergange des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen.

(Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung m. b. H.)

Von H. Ewest und A. Rüttenauer.

Bei der Herstellung von Gleichstrom-Wolframbogenlampen für höhere Stromstärken wurde eine Reihe von Beobachtungen über den Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen gemacht, die für theoretische Betrachtungen wichtig sein können und daher im folgenden kurz mitgeteilt seien:

Die Wolframbogenlampe ist ein zwischen Wolframelektroden brennender Lichtbogen von 5—7 mm Bogenlänge, luftdicht eingeschlossen in eine mit Stickstoff gefüllte Glashülle. Bei der Gleichstromlampe besteht die Anode aus einem reinen Wolframkörper, die Kathode aus einer Mischung von reinem Wolfram und Thoroxyd. Die Elektroden werden in Formen gepreßt und bei Temperaturen, die genügend weit unter dem Schmelzpunkt der benutzten Materialien liegen, längere Zeit gesintert. Zur Füllung der Lampen wird reiner Stickstoff benutzt, der (abgesehen von einigen Zehntel Proz. Argon) sorgfältigst von Verunreinigungen befreit wird.



1. Übergang des Glimmbogens in Form 3.

Der Lichtbogen der Wolframbogenlampe ist bei den normalen Betriebsstromstärken nach der Hagenbachschen Definition[1]) ein Glimmbogen der Form 1, d. h. ein Bogen, bei dem die Anode von dem anodischen Glimmlicht ganz oder teilweise bedeckt ist. Bei Steigerung der Stromstärke geht der Glimmbogen unter hörbarem Zischen in den normalen Lichtbogen, Form 3, über, wobei die Bogenspannung um etwa 10 Volt sinkt. Dieser Übergang findet immer dann statt, wenn die anodische Glimmlichtdichte einen solchen Wert erreicht hat, daß die hierdurch erzeugte Wärmeproduktion das Anodenmaterial an einer Stelle zum Verdampfen bringt. Der Übergang in den normalen Lichtbogen, der sog. Zischpunkt, wird also durch eine Erhitzung des Anodenmaterials, die auf einen sehr kleinen Teil der Anodenoberfläche beschränkt ist, veranlaßt. Die Temperatur an der dem Bogen abgewandten Seite der Anode t_1 kann hierbei je nach der Größe und Form der Anode und ihrer Wärmeableitung gegen die Temperatur am Lichtbogenansatz t_2 eine erhebliche Differenz aufweisen. Die Temperaturdifferenz ist um so größer oder die Temperatur t_1 liegt um so tiefer unter t_2, je größer die Anode ist, was aus den Messungen der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle.

Anoden-durch-messer	Anoden-dicke	Anoden-temper. t_1	Stromstärke beim Übergang in den Lichtbogen
5,2 mm	2,6 mm	2600° K	7,0— 7,5 Amp.
7,1 mm	3,2 mm	2550° K	7,5— 8,0 „
9,1 mm	3,8 mm	2400° K	10,0—10,5 „
12,8 mm	4,2 mm	2200° K	15,0—17,0 „

Kleine Anoden sind ganz oder zum größten Teil vom anodischen Glimmlicht bedeckt. Dadurch herrscht auf der Anodenoberfläche eine ziemlich gleichmäßige Temperaturverteilung. Da auch die Wärmeableitung bei kleinen Anoden gleichmäßiger ist als bei großen, kann der Glimmbogen zwischen solchen Elektroden bei sehr viel höheren Temperaturen t_1, also bei größeren Strombelastungen aufrecht erhalten werden als bei großen Elektroden. Die großen Elektroden sind nämlich nur noch teilweise vom anodischen Glimmlicht bedeckt. Hierdurch ist der Temperaturunterschied zwischen der dem Bogen abgewandten Seite der Anode und dem Glimmbogenansatz ungleich größer als bei kleinen Elektroden. Durch die noch ungleichmäßigere Wärmeableitung erfolgt bei großen Elektroden der Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen bei geringeren Temperaturen t_1, also bei geringeren Strombelastungen. Es kommt noch hinzu, daß der Glimmbogenansatz bei geringer Ausdehnung seine Lage auf der Anodenoberfläche leicht verschiebt. Findet er hierbei eine für den Übergang in den Lichtbogen günstige Stelle, die z. B. oxydischer Natur sein kann, so zieht sich das anodische Glimmlicht noch stärker zusammen, bewirkt vorzeitig eine lokale Überhitzung des Anodenmaterials, so daß der normale Lichtbogen entstehen kann. Brennt eine Lampe mit normalem Lichtbogen, so findet eine starke Verdampfung des Anodenmaterials statt; nach 3—5 Stunden ist der Lampenkolben vollkommen geschwärzt.

2. Übergang des Glimmbogens in Form 2.

An einer Reihe von Wolframbogenlampen wurde beobachtet, daß der Glimmbogen bei Steigerung der Stromstärke zuerst in die von Hagenbach bezeichnete Form 2 überging und dann erst bei weiterer Erhöhung der Stromstärke in den normalen Lichtbogen, Form 3. Beim Lichtbogen der Form 2 sitzt auf der Anode an dem Bogenansatz ein gelbliches Lichtbüschel. Beim Übergang der Form 1 in 2 sinkt die Bogenspannung um 1—2 Volt. Diese Erscheinung konnte nicht immer beobachtet werden, ebenso war die Ursache hiervon nicht festzustellen.

3. Abhängigkeit des Zischpunktes vom Gasdruck.

Bei Wolframbogenlampen mit einer Stickstoffüllung zeigte sich nun, daß der Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen bei um so höheren Stromstärken stattfand, je niedriger der Gasdruck war. Bei niedrigerem Gasdruck wird die anodische Glimmlichtdichte kleiner, d. h. das anodische Glimmlicht kann einen größeren Teil der Anodenoberfläche bedecken und aus den in Abschnitt 1 erwähnten Gründen tritt der Zischpunkt bei höheren Strombelastungen auf. So lag z. B. bei einer Anode von 7,8 mm Durchmesser und 3,4 mm Dicke der Zischpunkt bei einer Stickstoffüllung von 100 mm *Hg* bei 7,0 Amp., bei 75 mm *Hg* bei 9,0 und bei 25 mm *Hg* bereits über 15,0 Amp.

4. Abhängigkeit des Zischpunktes von der Oberflächenbeschaffenheit und Form der Anode.

Kleine Krater und Vertiefungen auf der Anodenoberfläche verdichten das anodische Glimmlicht und geben so schon bei geringen Stromstärken Veranlassung zur Entstehung des normalen Lichtbogens. Verschmilzt man in einem Kohlelichtbogen die Oberfläche einer gesinterten Wolframanode, die nach der Sinterung eine rauhe Oberfläche besitzt, zu einem einheit-

1) A. Hagenbach, Der elektrische Lichtbogen.

lichen Meniskus, so daß eine gleichförmige, völlig spiegelnde Oberfläche entsteht, so tritt der Zischpunkt bei um etwa 50 Proz. höheren Stromstärken auf als bei rauhen Oberflächen[1]).

Die Abhängigkeit des Zischpunktes von der Form der Anode ist, wie bereits erwähnt, von der Wärmeableitung derselben bedingt.

5. Abhängigkeit des Zischpunktes vom Anodenmaterial.

Da bei den Untersuchungen an Wolframbogenlampen lediglich Wolframanoden benutzt wurden, konnte nur die Abhängigkeit des Zischpunktes von Verunreinigungen der Anode, die bei ungenügender Sinterung der Anode noch zurückblieben, beobachtet werden. Wenn sich auf der Anodenoberfläche Verunreinigungen oxydischer Natur befinden, so zieht sich das anodische Glimmlicht auf diese Stelle zusammen. Es entsteht eine ungleichmäßige Flächenbedeckung, wie dies auch beim kathodischen Glimmlicht der Fall ist. An einer solchen Stelle oxydischer Verunreinigungen kann die anodische Glimmlichtdichte so groß werden, daß plötzlich der Glimmbogen in den normalen Lichtbogen umschlägt, wobei die oxydischen Verunreinigungen zum Verdampfen gebracht werden. Sowie der Verdampfungsprozeß zu Ende ist, geht der normale Lichtbogen von selbst wieder in den Glimmbogen zurück.

6. Abhängigkeit des Zischpunktes von der Gasart.

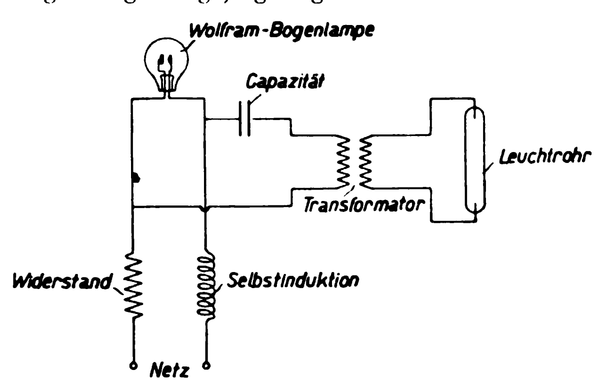
Es wurde gefunden, daß bei Wolframbogenlampen mit Argonfüllung der Zischpunkt bei sonst gleichen Versuchsbedingungen bei wesentlich höheren Strombelastungen lag als bei Lampen mit Stickstoffüllung. Es genügte bereits ein Zusatz von $^1/_4$—1 Proz. Argon zur Stickstofffüllung, um das Auftreten des Zischpunktes auf 20—30 Proz. höhere Stromstärken zu verlegen. Bei Füllungen mit reinem Wasserstoff, ebenso bei Quecksilberdampf, erfolgte der Übergang des Glimmbogens in den Lichtbogen bei geringeren Strombelastungen als bei reinem Stickstoff. Geringe Zusätze von Wasserstoff von $^1/_{10}$—5 Proz. hatten dagegen keinen wesentlichen Einfluß auf den Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen.

7. Abhängigkeit des Zischpunktes von der Kathode.

Eine Abhängigkeit des Auftretens des Zischpunktes von der Kathode wurde in keinem Falle beobachtet.

1) Diese Untersuchungen sind im wesentlichen von Herrn Dr. Bobek ausgeführt worden; an den übrigen hier mitgeteilten Beobachtungen ist Herr Dr. Bobek ebenfalls beteiligt.

Beim Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen kommen bei einzelnen Lampen hörbare Schwingungen zustande; in den meisten Fällen vernahm man jedoch nur ein kurzes Zischen. Schaltet man eine normale Gleichstrom-Wolframbogenlampe, Type 4 G, in eine Apparatur, wie sie zur Erzeugung von hochfrequenten Strömen mittels Wolframbogen-Schwingungslampe üblich ist[1]), also parallel zur Lampe eine Kapazität von 4—6 μF und einen Hochfrequenztransformator, an letzterem ein Leuchtrohr, z. B. einen Neonleuchtbuchstaben (siehe Schaltskizze), so leuchtet der Neon-Buchstabe bei 4—6 Amp. nur sehr schwach auf, da die elektrischen Verhältnisse dieser Lampe (geringe Bogenlänge, geringer Unterschied der



Schaltschema zur Schwingungserzeugung für den Nachweis des Übergangs des Glimmbogens in den Zischbogen.

Zünd- und Abreißspannung) zur Erzeugung von Schwingungen wenig geeignet sind, im Gegensatz zur eigentlichen Schwingungslampe, die für diese Zwecke besonders konstruiert ist. Steigert man jedoch die Stromstärke der Lampe, so leuchtet der Neon-Buchstabe während des Überganges des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen hell auf. Der Übergang selbst geht sehr viel langsamer vor sich als ohne Schwingungsschaltung. Man kann so genau beobachten, daß der Übergang in 2 Etappen zu etwa 5 Volt vor sich geht. Besonders deutlich ist das Zischen der Lampe zwischen dem ersten und zweiten Voltsprung wahrnehmbar. Brennt die Bogenlampe dauernd mit Form 3 der Entladung, so leuchtet das Neonrohr wiederum nur ganz schwach.

Diese Beobachtungen wurden vor längerer Zeit bei der von Herrn Dr. Skaupy veranlaßten Weiterentwicklung der Wolframbogenlampe gemacht.

Herrn Dr. Skaupy danken wir bestens für verschiedene Anregungen.

1) F. Skaupy, E. T. Z. 48 (1927), 1797.

(Eingegangen 20. April 1928).



Wärmeübergang strömender Flüssigkeit in Rohren.

Von L. Schiller und Th. Burbach.

Der hauptsächliche Entwicklungsgang der Theorie[1]) ist kurz so: Zuerst hat Reynolds[2]) in Erkenntnis des Gemeinsamen von Wärme- und Impulskonvektion eine Gleichung für den Wärmeübergang abgeleitet. Dann hat — ohne Kenntnis der Reynoldsschen Arbeit — Prandtl[3]) durch strengere Behandlung die Grenzen der Reynoldsschen Gleichung aufgezeigt: sie gilt nur für $\sigma = \frac{\lambda}{c\mu} = 1$ (λ = Wärmeleitfähigkeit, c = spez. Wärme bei konstantem Druck, μ = Zähigkeit), d. h. annähernd für reale Gase, dagegen nicht für Flüssigkeiten. Für diese hat Prandtl gleichzeitig eine Theorie aufgestellt: ausgehend von seiner Grenzschichtenhypothese teilt er die Flüssigkeit in einen turbulenten Kern und in eine laminare Grenzschicht. Für den ersteren gilt — wegen der dort völlig gleichartig verlaufenden Konvektion von Impuls und Wärme — derselbe Gedankengang wie oben (nur das Zähigkeits- bzw. das Wärmeleitungsglied fehlt jetzt in den Differentialgleichungen, und daher erübrigt sich die Bedingung $\sigma = 1$); für die Grenzschicht gilt der laminare bzw. der Wärmeleitungsansatz. Da beide Wärmeströme gleich sein müssen, ergibt sich so eine neue Gleichung für den Wärmeübergang.

Sie enthält aber noch eine Unbekannte: $\frac{u_g}{u}$, das Verhältnis der Geschwindigkeit an der Innenseite der Grenzschicht zu der mittleren Geschwindigkeit. Prandtl gibt gleich einen Weg zu seiner angenäherten Bestimmung, nämlich aus den Nusseltschen Wärmeübergangsbeobachtungen. Er kommt so zum Wert 0,056, den er allerdings als unwahrscheinlich klein bezeichnet. Es ist ein eigenartiges Spiel des Zufalls und kennzeichnet den Grad der Unsicherheit, daß 6 Jahre später G. J. Taylor — nun augenscheinlich wieder ohne Kenntnis der Prandtlschen Arbeit — ganz ähnliche Grenzschichtbetrachtungen anstellt und — ausgehend von Stantons Geschwindigkeitsverteilungsmessungen für $\frac{u_g}{u}$ den Wert 0,56, also genau das Zehnfache findet. Nun ist man allerdings neuerdings[1]) — seit Entwicklung der Prandtl-Kármánschen Ähnlichkeitsbetrachtungen — imstande, $\frac{u_g}{u}$ sicherer abzuschätzen, insbesondere als Funktion der Reynoldsschen Zahl anzugeben. Es ergibt sich unter Voraussetzung des $\frac{1}{7}$ Gesetzes $\frac{u_g}{u} = \text{Zahl} \cdot R^{-1/8}$, wobei Prandtl die „Zahl" zu etwa 1 abschätzt. Eine Prüfung an geeigneten Versuchen steht noch aus, dagegen hat Stanton[2]) die Taylorsche Gleichung an Wasserversuchen von Sönnecken[3]), an eigenen und ebenso an Luftversuchen von Pannell geprüft. Die Abweichungen betragen 20—40 Proz.

Die experimentelle Arbeit, die sowohl nach der Güte der Versuche als auch nach ihrer Fassung in eine von Ähnlichkeitsbetrachtungen diktierte Form heute als die klassische Arbeit bezeichnet werden kann, ist die von Nusselt[4]) an Preßluft und anderen Gasen. Leider aber versagte die Nusseltsche Gleichung bisher gegenüber den mit Flüssigkeiten angestellten Versuchen. Lag das an der Ungeeignetheit der Versuche (zu kurze Anlauflängen) oder daran, daß die Nusseltsche Gleichung vielleicht nur für Werte σ nahe 1 gilt, oder an beidem? Wir werden im Folgenden eine theoretische Behandlung geben, die auch für $\sigma \neq 1$ zu einer der Nusseltschen weitgehend verwandten Gleichung führt. Diese Gleichung stimmt bei entsprechend großen Anlauflängen mit unseren, an Wasser angestellten Messungen befriedigend überein.

Ehe wir die Ableitung für $\sigma \neq 1$ durchführen, wollen wir vorerst eine etwas veränderte Ableitung für $\sigma = 1$ angeben, verändert insofern, als wir schon hier unser Hauptaugenmerk auf die Vorgänge an der Wand (statt in der Grenzschicht) richten. Dies wird uns später im Falle $\sigma \neq 1$ den Vorteil verschaffen, daß der mehr oder weniger unsichere Quotient $\frac{u_g}{u}$ in unserer Rechnung und in unserem Resultat nicht auftaucht, und wir außerdem schon im ersten Fall $\sigma = 1$

1) Uns beschäftigen hier nur die Schritte, die zu Ergebnissen für „Flüssigkeiten" im engeren Sinn geführt haben. Die Entwicklung nach anderer Richtung, nämlich von dem Gebiet „großer Anlauflängen", das uns hier beschäftigt, in das (thermische und hydrodynamische) „Anlaufgebiet" hinein verdanken wir den Arbeiten von v. Kármán-Latzko.

2) Proceedings Manchester Lit. and Phil. Soc. 1874, pag. 9. S. auch bei Stanton, On the Passage of Heat between Metal Surfaces and Liquids in contact with them. Phil. Trans. Roy. Soc. (A) **190**, 67, 1898.

3) Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten. Physik. Zeitschr. 1910, S. 1072—1078.

1) Worauf mich Herr Prandtl freundlichst hingewiesen hat.

2) Techn. Rep. of. the Advisory Committee for Aëronautics 1916/17, S. 16.

3) Der Wärmeübergang von Rohrwänden an strömendes Wasser. Diss. Techn. Hochschule München, 1910.

4) Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. Habilitationsschrift 1909.



zu einer präzisen Angabe kommen, für welchen Bereich die einzelnen Stoffkonstanten einzusetzen sind. Für $\sigma = 1$ folgt aus der Ähnlichkeit[1]) der beiden Differentialgleichungen (der thermischen und der hydrodynamischen) die Ähnlichkeit des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes. Insbesondere gilt deswegen an der Wand:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\bar{u}} = \left(\frac{dT}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\bar{T} - T_W}.$$

(Index „W" = „an der Wand", u = Geschw., T = Temperatur, $\bar{u}, \bar{T}$ = Mittelwerte der Flüssigkeit).

Aus dem Widerstandsgesetz folgt:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\bar{u}} = \frac{\psi \varrho \bar{u}}{4 \mu_W}$$

(ϱ = Dichte, μ = Zähigkeit, ψ = Widerstandskoeffizient). Durch Elimination von $\left(\frac{du}{dy}\right)_W$:

$$\left(\frac{dT}{dy}\right)_W = \frac{\psi \varrho \bar{u}}{4 \mu_W} \cdot (\bar{T} - T_W).$$

Für den Wärmetransport Q durch die Wand gilt:

$$\frac{Q}{t \cdot F} = \lambda_W \cdot \left(\frac{dT}{dy}\right)_W = \frac{\lambda_W \psi \varrho \bar{u} (\bar{T} - T_W)}{4 \mu_W}$$

(t = Zeit, F = Fläche)

und für die Wärmeübergangszahl α in der üblichen Definition:

$$\alpha = \frac{Q}{t \cdot F (\bar{T} - T_W)} = \frac{\lambda_W \psi \varrho \bar{u}}{4 \mu_W};$$

und schließlich in dimensionslosen Größen:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = \frac{\psi \varrho \bar{u} d}{4 \mu_W} \qquad (1)$$

(d = Rohrdurchmesser)

Im Fall $\sigma \neq 1$ gilt der obige Ähnlichkeitsansatz für Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld allgemein nicht mehr; er gilt noch (wegen des Wegfallens des Zähigkeits- und Wärmeleitungsgliedes) in der turbulenten Kernströmung, dagegen nicht mehr in der laminaren Grenzschicht, also auch nicht an der Wand. Um nun das von dem tatsächlichen Geschwindigkeitsgefälle an der Wand abweichende Geschwindigkeitsgefälle zu finden, welches das Abbild des gesuchten, vorhandenen Temperaturgefälles darstellt, verfahren wir folgendermaßen: Wir denken uns eine Flüssigkeitsströmung, die von der vorhandenen darin abweicht, daß sie eine abgeänderte Zähigkeit μ' besitzt, die $\sigma'_W = \sigma' = 1$ macht; d. h. $\mu'_W = \mu' = \mu_W \sigma$. Dann ändert diese neue Zähigkeit an dem Strömungs- und Temperaturbild der Kernströmung, das wesentlich durch konvektive Wirkungen beeinflußt ist, nichts. Dagegen wird das Geschwindigkeitsfeld der Grenzschicht jetzt das Abbild des vorhandenen Temperaturfeldes und insbesondere das Gefälle an der Wand das gesuchte Abbild des gesuchten Temperaturgefälles. Die Abänderung des Geschwindigkeitsfeldes an der Wand ist wegen der dort streng vorhandenen Laminarströmung mit genügender Annäherung[1]) ohne Einfluß auf den Wärmeübergang.

Das gesuchte Geschwindigkeitsgefälle der Ersatzflüssigkeit an der Wand erhält man aus dem tatsächlich vorhandenen mit Hilfe des Blasiusschen Widerstandsgesetzes zu:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)'_W = \left(\frac{du}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1/4}.$$

Durch Vergleich mit der obigen Rechnung für $\sigma = 1$ erkennt man, daß man den Wert $\frac{\alpha d}{\lambda_W}$ jetzt erhält, wenn man den obigen mit $\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1/4}$ multipliziert.

Also:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = \frac{\psi}{4} \frac{\varrho \bar{u} d}{\mu_W} \cdot \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1/4}$$

oder mit Blasius' Wert für ψ:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = 0{,}0395 \frac{\bar{u}^{-1/4} d^{-1/4} \varrho^{-1/4}}{\mu^{-1/4}} \cdot \frac{\varrho \bar{u} d}{\mu_W} \cdot \frac{c_W \mu_W}{\lambda_W} \cdot \frac{\lambda_W^{1/4}}{c_W^{1/4}} \cdot \frac{1}{\mu^{1/4}}$$

oder

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = 0{,}0395 \left(\frac{\bar{u} d \varrho c_W}{\lambda_W}\right)^{3/4} \qquad (2)$$

Wir schreiben daneben die Nusseltsche empirische Gleichung:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = 0{,}0292 \left(\frac{\bar{u} d \bar{\varrho} \bar{c}}{\lambda_W}\right)^{0{,}786}\text{ 2)}$$

und erkennen die weitgehende Verwandtschaft.

1) Über die strengere Fassung hierzu vgl. die Arbeit von Prandtl, l. c.

1) Die Temperaturverteilung der fiktiven Flüssigkeit stimmt sowohl in der Kernströmung, als auch in der laminaren Grenzschicht mit der der wirklichen überein. Dagegen kann in der Übergangszone eine gewisse Abweichung sein, die auch den Wert $\bar{T}$ etwas beeinflussen kann. In diesem Punkt ist die Theorie als Näherung zu werten.

2) Die Nusseltsche Gleichung ist hier zwecks besseren Vergleichs der unsrigen angepaßt worden. Insbesondere ist im Nenner λ_W statt λ bei Nusselt gesetzt. Das hat zur Folge, daß sich der Zahlfaktor gegen den bei Nusselt nicht unbeträchtlich ändert. Auch gilt die Gleichung so, wie die Nusseltsche Gleichung an sich, zunächst nur für die Verhältnisse der Nusseltschen Versuche, während unsere Gleichung allgemeine Gültigkeit beansprucht.

Ein Vorzug unserer theoretischen Ableitung liegt darin, daß die Indizes für die Stoffwerte ganz klar herauskommen, was bisher nicht der Fall war[1]).

Eine Übereinstimmung unserer Gleichung (2) mit dem Experiment wird man natürlich nur erwarten können, wenn die der Ableitung zugrunde liegenden Bedingungen annähernd erfüllt sind. Das ist hier in erster Linie genügende Anlauflänge bis zur Meßstelle, so daß die Gültigkeit des Blasiusschen Gesetzes gewährleistet ist. Wie

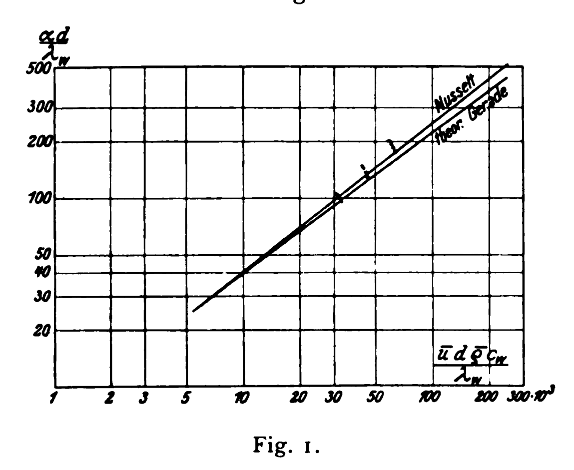


Fig. 1.

unsere mit heißem Wasser angestellten Versuche zeigen, ist diese benötigte Anlauflänge sehr erheblich, was jedoch nicht weiter wundernehmen darf, da die starken thermischen Störungen, die aus dem Kessel mitkommen, natürlich auch erhebliche Zeit zum Abklingen brauchen. Wir werden also in dem Wert der Gleichung (2) einen unteren Grenzwert für große Anlauflängen zu sehen haben, Anlauflängen, die um so größer ausfallen müssen, je höher die Kesseltemperaturen liegen.

Mit dieser Überlegung durchaus in Übereinstimmung sind unsere Versuchsergebnisse[2]), von denen einige in Fig. 1 wiedergegeben sind. Die Meßstelle lag bei einer Anlauflänge von 400 Durchmessern. In jeder Gruppe von Versuchspunkten gehört der unterste, der theoretischen Kurve nächstliegende, zur tiefsten Kesseltemperatur von 69,2⁰, die nach oben zu folgenden zu 85,5⁰, 101,8⁰ und 118,0⁰. Daß die Nusseltsche Kurve über unserer liegt, rührt daher, daß seine Versuchsdaten Mittelwerte über Strecken bedeuten, die ins Anlaufgebiet hineinragen. Wie sich die Versuchspunkte mit zunehmender Anlauflänge dem theoretischen Wert nähern, erkennt man gut aus Fig. 2, deren Kurvenverlauf erwarten läßt, daß auch für die höheren Kesseltemperaturen bei entsprechend höherer Anlauflänge theoretische und experimentelle Werte zusammenfallen[1]).

Unsere Ableitung läßt sich natürlich auch auf jedes andere Widerstandsgesetz, damit vielleicht

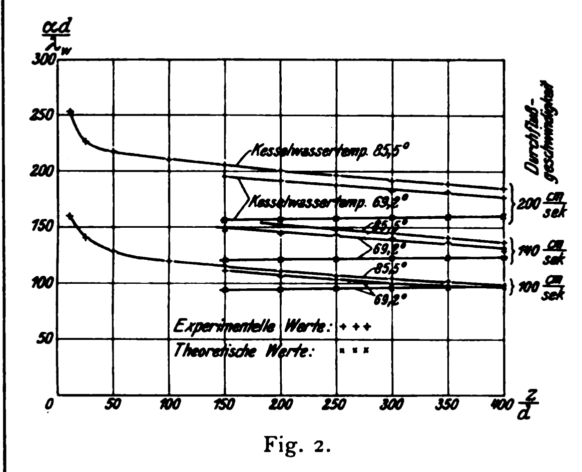


Fig. 2.

näherungsweise auch auf den Anlauf, anwenden. Versuche mit einem rauhen Rohr, d. h. quadratischem Widerstandsgesetz[2]), sind zur Zeit im Gang und versprechen auch zufriedenstellende Resultate betr. Übereinstimmung mit der Theorie.

Unsere Versuche erfuhren weitgehende Förderung durch die Helmholtzgesellschaft, der auch an dieser Stelle hierfür der beste Dank ausgesprochen sei.

1) Vgl. hierüber Nusselt in der Festschrift zur Hundertjahrfeier der Technischen Hochschule Karlsruhe 1925: Die Wärmeübertragung an Wasser im Rohr.

2) Die ausführlichere Darstellung der Versuche und ihrer Ergebnisse wird in der Dissertation von Burbach erfolgen, in der auch Vergleiche mit den anderen bekannten Formeln gegeben werden.

1) Die theoretische Kurve verliert natürlich bei den kleineren Anlauflängen ihre Bedeutung, da, wie entsprechende Messungen ergaben, dort das Blasiussche Gesetz nicht mehr gilt. Sie ist dort nur gezeichnet, um die Annäherung der experimentellen Kurve an den theoretischen Wert deutlich zu machen.

2) In diesem Fall kommt man zu der Gleichung: $\frac{\alpha d}{\lambda W} = \frac{\psi}{4} \frac{\bar{u}\, d\, \varrho\, c W}{\lambda W}$ und damit zu Übereinstimmung mit Prandtls Theorie für sehr starke Turbulenz.

Leipzig, Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik des Physikalischen Instituts, 6. April 1928.

(Eingegangen 18. April 1928.)



Demonstration des Doppler-Effekts in der Akustik.

Von J. Zenneck.

Ein einfaches und wirkungsvolles Verfahren, dessen Prinzip nicht neu ist, ist folgendes.

Ein Lautsprecher L (Fig. 1) wird an ein Flacheisen (E_1 E_2) angeschraubt und mit seinen Zuleitungen an der Decke des Hörsaals aufgehängt. Man läßt den Lautsprecher senkrecht zu einer nicht zu weit entfernten Wand (W) des Hörsaals hin- und herpendeln. Beschickt man den Lautsprecher mit Wechselstrom (z. B. von der Frequenz 1000/sec), so bekommt der Zuhörer stets zwei Schallwellen, eine direkte vom Lautsprecher und eine an der Wand reflektierte. Während der Pendelung des Lautsprechers haben diese beiden Wellen Frequenzen, die von der Ruhfrequenz des Lautsprechers verschieden sind, und zwar besitzt bei der Bewegung des Lautsprechers auf den Zuhörer zu und von der Wand weg die direkte Welle eine höhere, die reflektierte Welle eine niedrigere Frequenz, als bei ruhendem Lautsprecher. Der Zuhörer muß also Schwebungen hören. Sie sind am raschesten in den Zeiten, in denen der Lautsprecher in der Nähe seiner Gleichgewichtslage sich befindet und also ein Maximum seiner Geschwindigkeit besitzt. Durch Änderung der Amplitude der Pendelung läßt sich die Frequenz der Schwebungen in weiten Grenzen variieren.

In Fig. 2[1]) ist das Schallbild, das der Zuhörer erhält, oszillographisch bei einer Frequenz von 1000/sec aufgenommen (Reißmikrophon, Verstärker mit Widerstandskopplung, Siemensscher Oszillograph); Fig. 3 dasselbe bei größerer Amplitude der Pendelungen. Die geringe Un-

1) Für die Ausführung der Aufnahmen bin ich den Herren Diplomingenieuren Kuntze und Linck zu Dank verpflichtet. — Die Zeitmarken bedeuten 1/32 Sekunden.

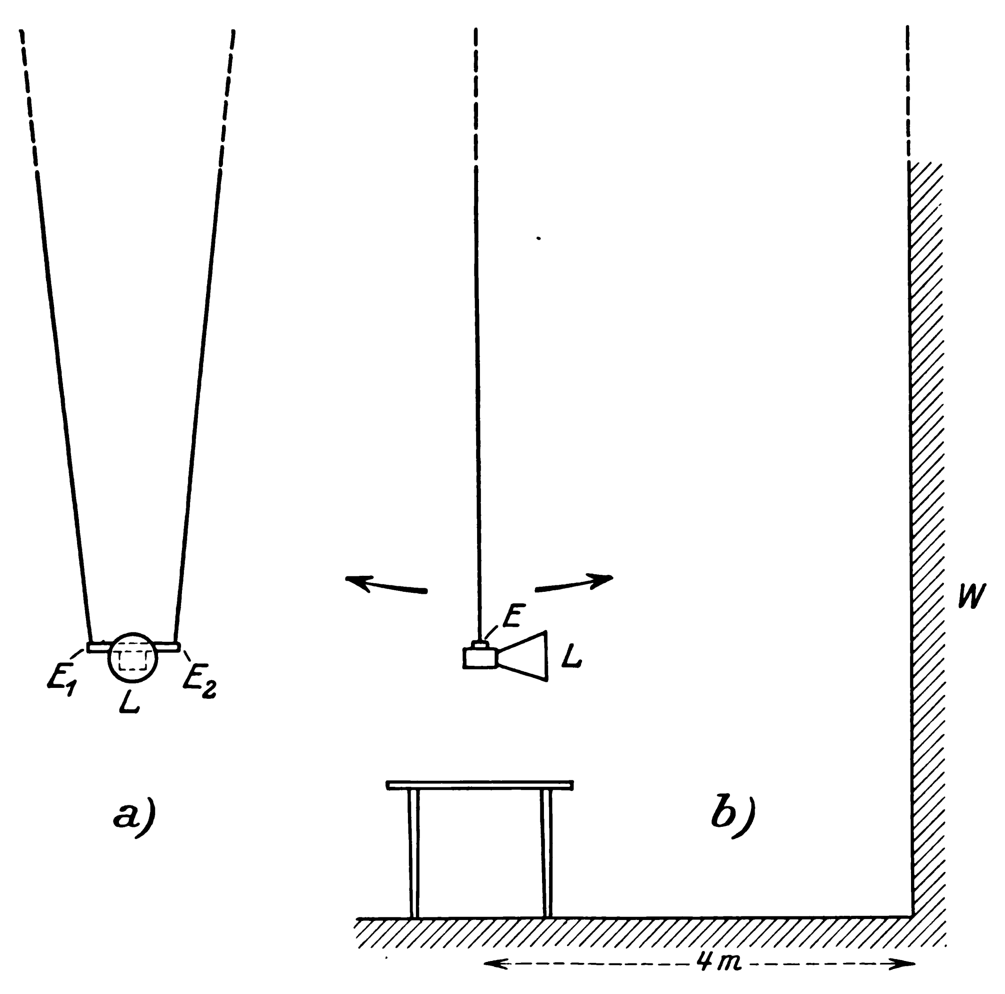


Fig. 1.

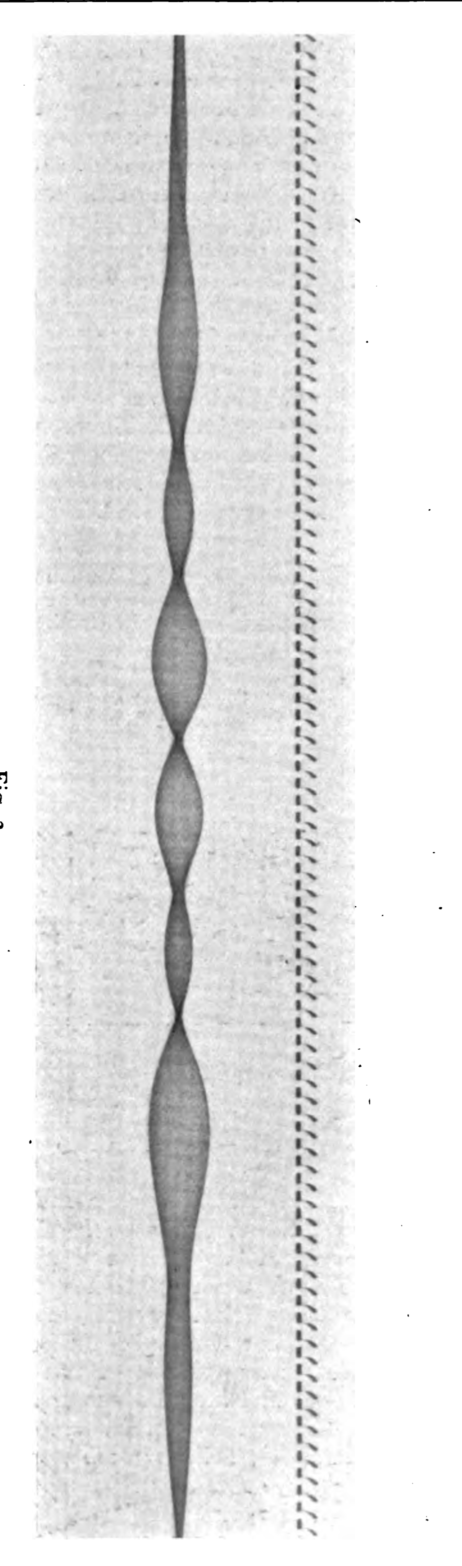


Fig. 3.

symmetrie rührt davon her, daß der Lautsprecher in einem Umkehrpunkt sich viel näher beim Aufnahmemikrophon befindet, als im anderen.

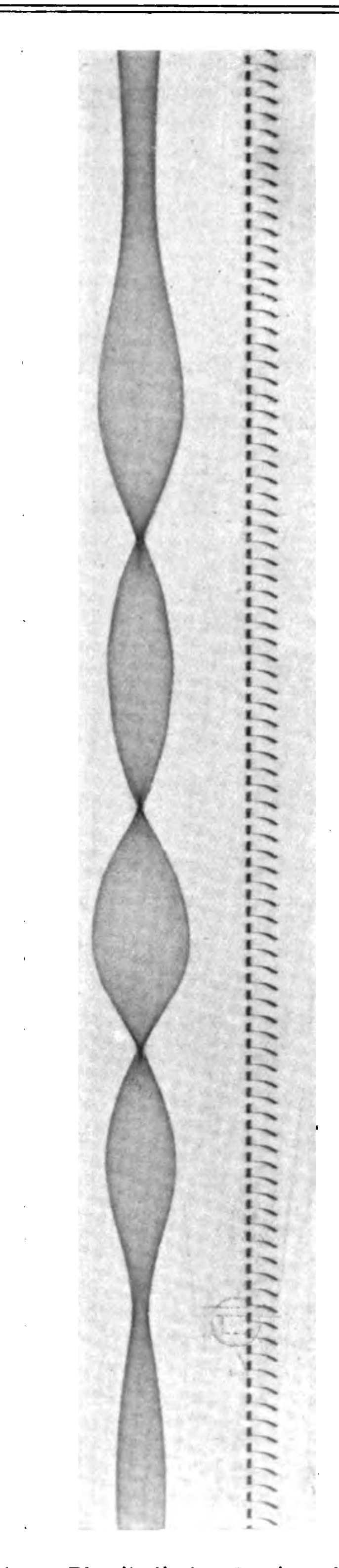


Fig. 2.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 27. April 1928.)

Zur Abbildung bei der Projektion von Diapositiven.

Von J. Zenneck.

Bei der Abbildung von Diapositiven, die durch einen Kondensor beleuchtet werden, gehen bekanntlich die Strahlen, die ein bestimmtes Flächenelement des Diapositivs (*D*) durchsetzen, durch ein ganz bestimmtes Flächenelement des Objektivs (*P*) hindurch (Fig. 1). Bildet man

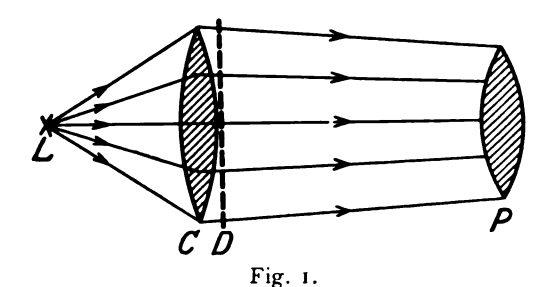


Fig. 1.

dagegen ein selbstleuchtendes oder diffus reflektierendes Objekt ab, so treffen die Strahlen, die von einem bestimmten Flächenelement des Objekts ausgehen, auf alle Oberflächenelemente des Objekts auf (Fig. 2). Die optische Beanspruchung des Objekts und die Bedingungen, denen es für eine gute Abbildung zu genügen hat, sind also in den beiden Fällen ganz verschieden. Sie sind bei der Projektion von Diapositiven mit Kondensor auch noch verschieden, je nachdem man die Lichtquelle so einstellt, daß die Strahlen vom Kondensor ungefähr in der Mitte des Objektivs vereinigt werden (Fig. 3, normale

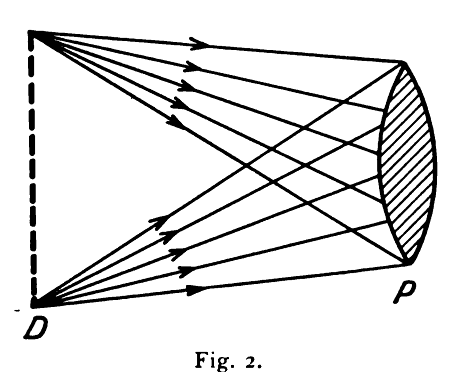


Fig. 2.

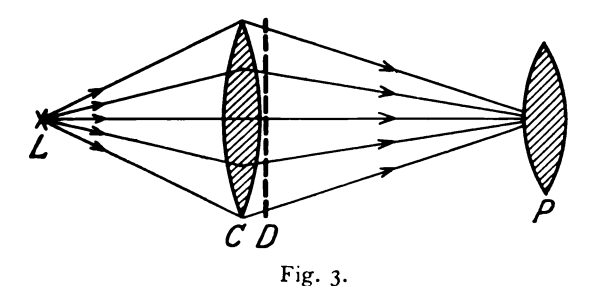


Fig. 3.

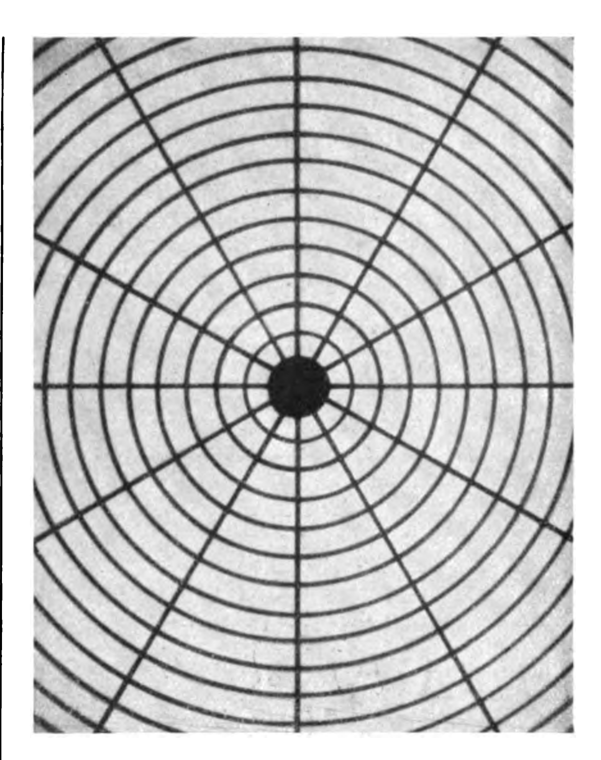


Fig. 4.

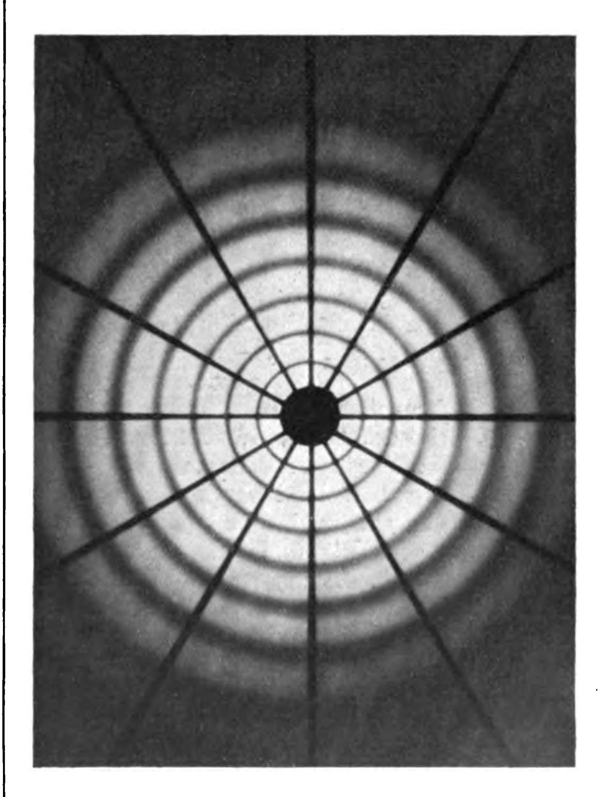


Fig. 5.

Einstellung) oder so, daß sie das ganze Objektiv erfüllen (Fig. 1). Bei der normalen Einstellung von Fig. 3 wird nur ein ganz kleiner Teil des Objektivs zur Abbildung herangezogen.

Diese Verhältnisse lassen sich einfach demonstrieren, wenn man dasselbe Diapositiv bei genau derselben Stellung von Diapositiv und Objektiv projiziert und zwar 1. bei der Einstellung von Fig. 3 — ein solches Bild

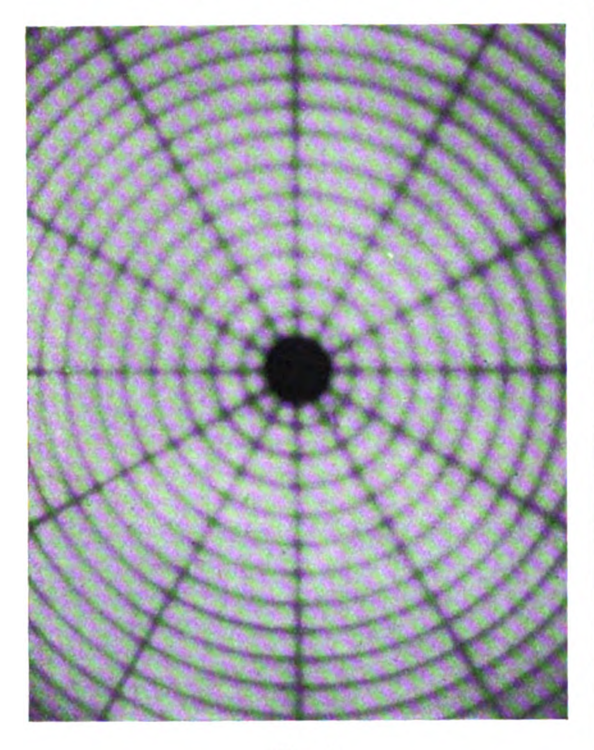


Fig. 6.

ist Fig. 4 —; 2. bei der Einstellung von Fig. 1 — ein Beispiel dafür ist Fig. 5 — und endlich 3. bei der Einstellung von Fig. 3 oder auch Fig. 1, aber nachdem man die dem Kondensor zugekehrte Seite des Diapositivs mit einem mäßig durchlässigen Pauspapier oder mattem Überfangglas belegt hat. In diesem Falle ergab sich das in seiner ganzen Fläche völlig unscharfe verschleierte Bild (Fig. 6). Die Hinterlegung des Diapositivs mit Pauspapier oder Überfangglas hat zur Folge, daß die Strahlen, die vom Kondensor auf das Pauspapier bzw. Überfangglas gelangen, von dort ziemlich gleichmäßig nach allen Seiten zerstreut werden und demnach wesentlich in derselben Weise weiter verlaufen, wie wenn das Diapositiv ein selbstleuchtendes bzw. diffus reflektierendes Objekt wäre.

Bei den Aufnahmen (Fig. 4—6[1])) wurde als Projektionsobjektiv (*P*) eine Doppellinse, wie man sie für Kondensoren verwendet, benützt. Projiziert man in entsprechender Weise mit einem für das Plattenformat korrigierten Anastigmaten, so unterscheiden sich die 3 Bilder nicht merklich voneinander.

1) Für die Anfertigung der Aufnahmen bin ich Herrn Assistent Wisshak zu Dank verpflichtet.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 27. April 1928.)

Zur Demonstration gekrümmter Lichtstrahlen.

Von. J. Zenneck.

Unter den Methoden zur Demonstration der Krümmung von Lichtstrahlen in einem geschichteten Medium verwende ich seit mehreren Jahren die folgende. In einem Leyboldschen Gefäß (bei meinen Versuchen Grundfläche: 5×10 cm², Höhe: 10 cm) wird in üblicher Weise eine nahezu konzentrierte Kochsalzlösung und Wasser übereinander geschichtet. Man hat dann unten Kochsalzlösung, oben Wasser und dazwischen eine Diffusionsschicht, in der die optischen Konstanten der Kochsalzlösung in horizontalen Schichten allmählich in diejenigen des Wassers übergehen.

Stellt man ein solches Gefäß vor eine von der Rückseite beleuchtete Mattglasplatte, so erscheint es vollkommen gleichmäßig hell (vgl. die photographische Aufnahme Fig. 1[1])). Bringt

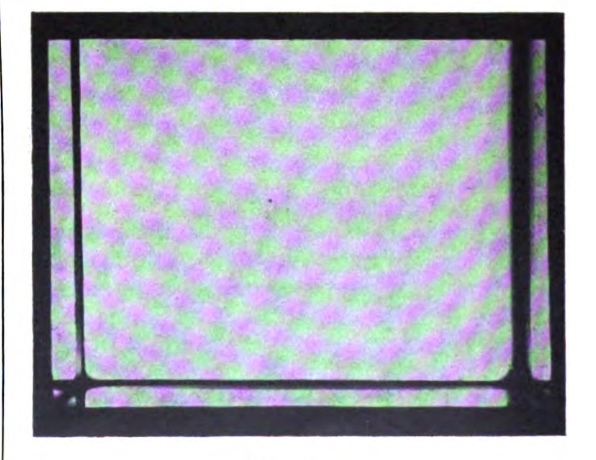


Fig. 1.

man das Gefäß aber vor den Kondensor einer Projektionslampe und projiziert man dasselbe mit einem Projektionsobjektiv, so erhält man

1) Für die Anfertigung der Aufnahmen bin ich Herrn Assistent Wisshak zu Dank verpflichtet.



überraschenderweise ein Bild von der Form der Fig. 2[1]) (geringe Diffusion) oder Fig. 3[1]) (stark

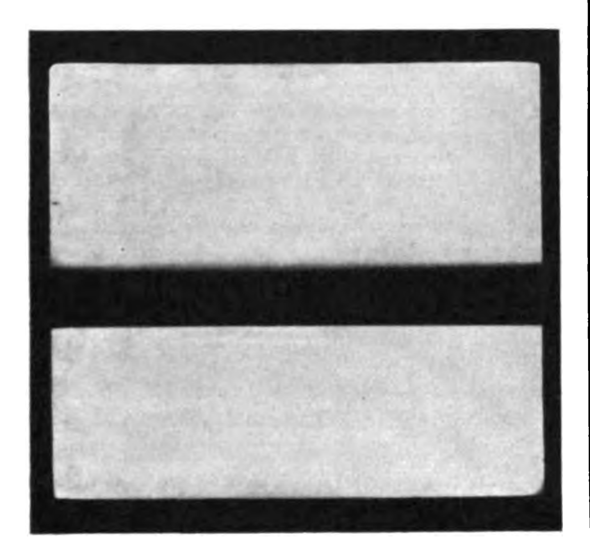


Fig. 2.

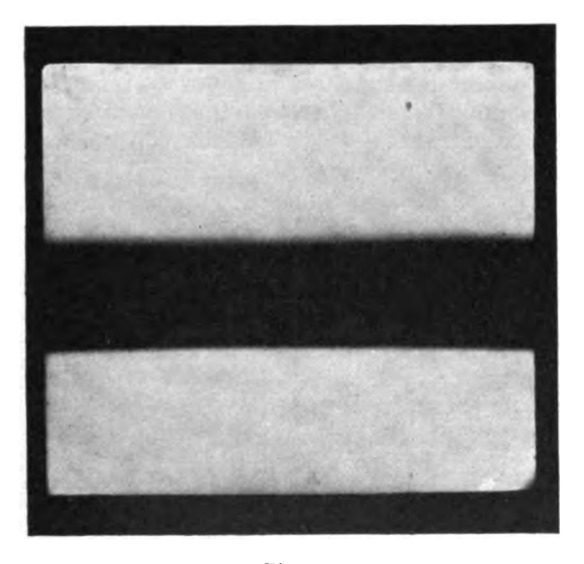


Fig. 3.

fortgeschrittene Diffusion): die Diffusionsschicht erscheint dunkel. Die vom Kondensor kommenden Strahlen treffen die Diffusionsschicht in ungefähr horizontaler Richtung und werden von ihr so stark nach unten gekrümmt, daß sie überhaupt nicht ins Projektionsobjektiv gelangen.

1) Für die Anfertigung der Aufnahmen bin ich Herrn Assistent Wisshak zu Dank verpflichtet.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 27. April 1928.)

Über eine einfache Vorrichtung zur Messung hoher elektrischer Potentiale.

Von H. Dember.

§ 1. Auf jedes Flächenelement eines elektrisch geladenen Körpers wirkt eine nach außen gerichtete Kraft, die vom Potential abhängt. Ist σ die Flächendichte der Elektrizität auf dem Leiter, so ist, wenn die Dielektrizitätskonstante der Umgebung gleich eins gesetzt wird, die nach außen gerichtete Kraft $p = 2\pi\sigma^2$. Die elastischen Kräfte des Materials halten dieser Kraft das Gleichgewicht. Bei einem Kugelkondensator, dessen innere Kugel den Radius r, dessen äußere den Radius R hat, ist

$$p = \frac{1}{8\pi} \frac{R^2}{(R-r)^2} \cdot \frac{V^2}{r^2}, \tag{1}$$

wobei V das Potential bedeutet. Dieser Druck p wird bei einem bekannten Seifenblasenversuch durch Vergrößerung des Volumens sichtbar gemacht und ist auch manometrisch meßbar.

Ersetzt man einen Teil der Oberfläche der inneren Kugel des Kondensators durch eine feine leitende und elastische Membran, so gibt diese gerade wie die Haut der Seifenblase den elektrischen Kräften nach. Die bewirkte Ausbiegung kann als Maß für das Potential des Leiters benutzt werden.

§ 2. Für eine längs des Randes eingespannte und gleichmäßig belastete, kreisrunde Membran vom Radius a gilt[1]), wenn φ der Winkel ist, den die Tangente gegen die Ausgangslage an der Stelle x bildet und x von der Mitte aus gerechnet wird

$$\varphi = \frac{N}{8} (a^2 x - x^3).$$

Hierin ist

$$N = \frac{3(m^2-1)\cdot p}{4 m^2 E d^3},$$

p bedeutet den Druck, m die Poissonsche Zahl ($\sim {}^{10}/_3$), E den Elastizitätsmodul und d die Membrandicke. φ hat eine Maximum Φ im Wendepunkt bei $x_4 = 0{,}577 \cdot a$. Wird für p der Wert aus Gleichung (1) eingesetzt, so gilt

$$\Phi = 0{,}00144 \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{a^3}{E \cdot d^3 \cdot r^2} \cdot \frac{R^2}{(R-r)^2} \cdot V^2.$$

Diese Abhängigkeit wurde durch den folgenden Versuch geprüft.

§ 3. Die Messingkugel K von 2 cm Durchmesser (s. Fig. 1) ist bei B mit einer Bohrung von 6 mm versehen und das Loch durch eine Müllersche Nickelmembran von $^1/_{20000}$ mm Dicke verschlossen. Die Bohrung selbst wurde verlängert und bei A durch den Halter der Kugel

1) H. Hencky, Z. S. f. J. Mathematik u. Physik **63**, 311, 1915.

nach außen geführt, damit nicht Druck- und Temperaturschwankungen der Luft eine Ausbiegung der Membran hervorbringen konnten. Zur Beobachtung der Membranausbiegung diente ein dünner Glasspiegel *Sp* von 2 mm Durchmesser der auf der Membran aufgeklebt war. Um den maximalen Ausschlag messen zu können, war der Spiegel in etwa 0,6 *a* vom Mittelpunkt der

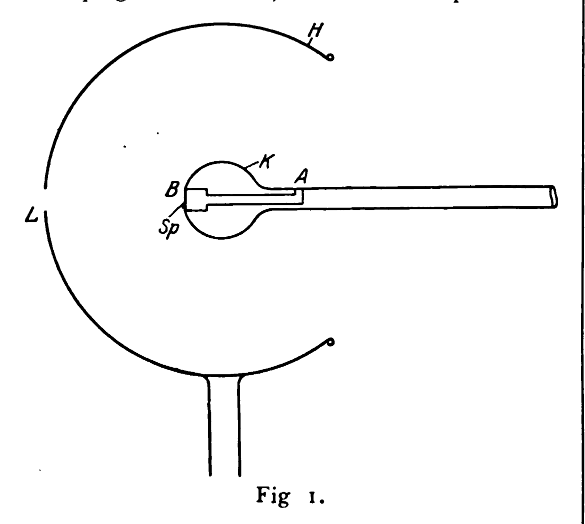


Fig 1.

Membran angebracht. Die Bewegung des Spiegels wurde mit Fernrohr und Skala beobachtet[1]).

Als Spannungsquelle diente eine 60 plattige Toeplersche Influenzmaschine, zu deren Polen ein Grayscher Spitzenregulator, eine große Leidener Flasche und eine Kugelfunkenstrecke parallel geschaltet waren. Zur Definition des Feldes und zum elektrostatischen Schutz war die Kugel *K* von einer geerdeten Hohlkugelkalotte *H* von 13 cm Radius umgeben. Die Hohlkugel hatte bei *L* eine Öffnung zur Beobachtung der Spiegelbewegung.

Tabelle I und Fig. 2 geben eine Messung wieder.

Fig. 2 zeigt die Abhängigkeit des Ausschlages von V^2. Die Abweichungen von der Geraden stammen wohl hauptsächlich aus der ungenauen

1) Ich wurde darauf aufmerksam gemacht, daß A. Klemm, Arch. f. Elektrotechn. **12**, 553, 1923 die Ausbiegung einer Metallmembrane in einem Plattenkondensator benutzt hat. Dabei war der Spiegel mit der Membrane durch eine Hebeübertragung verbunden.

Tabelle I.

Potential	Ausschlag
4700 Volt	0,4 mm
8100 ,,	0,8 ,,
11400 ,,	1,2 ,,
14500 ,,	3,0 ,,
20400 ,,	5,1 ,,
26000 ,,	8,8 ,,
30800 ,,	12,5 ,,
32400 ,,	15,5 ,,

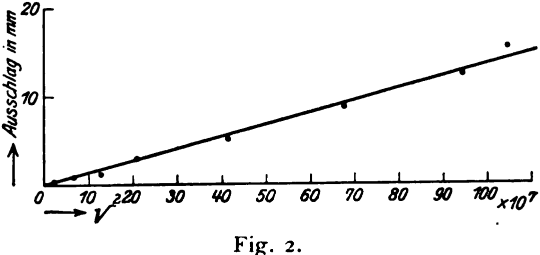


Fig. 2.

Messung der hier benutzten relativ niedrigen Spannungen mit der Funkenstrecke.

Wurde die Hohlkugel *H* entfernt, so daß sich die Kraftlinien des Feldes unregelmäßig verteilten und an den Geräten und Wänden des Laboratoriums endigten, so verlor sich die quadratische Abhängigkeit und ging in eine fast lineare über. Eine solche Messung mit stärkerer Membran zeigt Tabelle II.

Tabelle II.

Potential	Ausschlag
(4700 Volt	0,2 mm)
8100 ,,	0,5 ,,
11400 ,,	1,1 ,,
14500 ,,	1,5 ,,
17500 ,,	2,1 ,,
20400 ,,	2,5 ,,
23200 ,,	2,7 ,,
26000 ,,	3,0 ,,
28600 ,,	3,5 ,,
30800 ,,	3,7 ,,
32400 ,,	3,8 ,,
35900 ,,	4,0 ,,
39000 ,,	4,75 ,,

Dresden, Physikalisches Institut d. Techn. Hochschule, März 1928.

(Eingegangen 13. April 1928.)

BESPRECHUNGEN.

P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von H. Pollaczek-Geiringer. (Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" Bd. XXVIII.) Kl. 8°. 253 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. Geb. M. 11.—.

Der Verfasser hat eine Geschichte der Mathematik in philosophischer Absicht geschrieben. Aus ihrer Geschichte will er das Wesen der Mathematik



erkennen: „Man kann nicht hoffen", meint er, „die wesentlichen Züge wissenschaftlicher Erkenntnis zu erfassen, wenn man nicht weiß, wie diese Erkenntnis erworben wurde; man kann die Theorien der Gelehrten nicht beurteilen, ohne vorher die Gedankengänge verstanden zu haben, denen sie entsprungen sind, und die weiteren, denen sie ihren Ausbau verdanken" (S. 1). Was den Verfasser speziell interessiert, sind nicht die Detailtatsachen der Geschichte, sondern ihre Leitmotive. Er zitiert ein Wort von E. Picard: „Der Mann der Wissenschaft braucht, um sich aufrecht zu halten, bestimmte Überzeugungen; er braucht gewissermaßen ein wissenschaftliches credo". Dieses credo oder, wie Boutroux es nennt, das Wissenschaftsideal der Mathematiker sucht er zu ergründen.

Die Geschichte der Mathematik beginnt für ihn mit den Griechen: „Die Ägypter kannten wohl schon mathematische Tatsachen, sie verstanden Formeln zu handhaben, geometrische Figuren zu studieren; aber da sie, soweit wir das heute beurteilen können, utilitaristische und praktische Ziele verfolgten, scheinen sie keinen deutlichen Begriff von einer abstrakten Wissenschaft, kein wissenschaftliches Ideal gehabt zu haben" (S. 24). Im Gegensatz hierzu hatten die Griechen, wie Boutroux hervorhebt, „alle Brücken zwischen der spekulativen und der angewandten Wissenschaft abgebrochen. Diese großartige Intransigenz, die zunächst zu einer Blüte der Wissenschaft geführt hatte, indem sie sie vor jeder unlauteren Berührung bewahrte, wurde im Verlaufe der Entwicklung das Moment, das jeden Fortschritt der Wissenschaft aufhielt" (S. 57). Ihr „ästhetisierender Charakter" insbesondere wurde ihr zum Verhängnis.

Bei den Griechen war die Mathematik eine „kontemplative Wissenschaft", die sich auf Feststellungen beschränkt. „Mit der Ausbreitung der Algebra jedoch erfolgt eine Revolution. Die Wissenschaft, die vorher beobachtet hat, wird nun konstruktiv. Von den einfachen Elementen ausgehend, immer kompliziertere Verbindungen zusammenzustellen und aus allen Teilen so durch eigenen Fleiß das Gebäude der Wissenschaft aufzubauen, das schien von nun an die Aufgabe des Mathematikers" (S. 161). Es ist die „synthetische Auffassung der Mathematik", die — seit Descartes — die kontemplative Auffassung der Griechen verdrängt. Aber, wie Boutroux ausführt, „gerade die Fortschritte der algebraischen Mathematik mußten gewisse Schwierigkeiten heraufbeschwören und eine Reaktion herbeiführen. Der moderne Mathematiker ist erschreckt, weil er seine allzu große Schöpfergewalt erkennt: da er die Möglichkeit hat, eine Unendlichkeit von Theorien aufzubauen, sich nach unendlich vielen Richtungen zu wenden, weiß er nicht, was er wählen soll. Aber er ist andererseits auch dadurch in Verlegenheit, daß die Begriffe und Eigenschaften, die er studiert, seinen Bemühungen Widerstand entgegensetzen, sich ihm nur unvollkommen offenbaren; er fühlt, daß diese Begriffe nicht ganz und gar seine Schöpfung sind: er kann nicht mehr, gleich dem Algebraiker des 18. Jahrhunderts, die Wissenschaft als reines und einfaches Ergebnis seiner Konstruktionen ansehen" (S. 171).

Wir rühren hier an ein philosophisches Problem, das der Verfasser in dem Kapitel über „die Gegenständlichkeit der mathematischen Tatsachen" behandelt. Er erinnert zunächst an die Ansicht von Henri Poincaré, wonach „der größte Teil unserer Theorien letzten Endes durch Betrachtungen empirischen Ursprungs bestimmt ist". Doch ist dies — nach Ansicht von Boutroux — „nicht eine fundamentale Notwendigkeit, sondern bloß die Folge mehr zufälliger Motive. Um nämlich eine Mathematik zu schaffen, die auf das Studium des Physischen anwendbar ist, müssen wir unter den unendlich vielen Systemen theoretisch möglicher Postulate eine Auswahl treffen, und unsere Wahl ist geleitet durch die Erfahrung unserer Sinne; aber man kann deshalb nicht sagen, daß dieses Wählen als solches den Postulaten und Begriffen unserer Wissenschaft irgendwie den Charakter der Gegenständlichkeit aufdrückte" (S. 176). Dieser Charakter der Gegenständlichkeit ergibt sich vielmehr — nach Boutroux — auf folgende Weise: „Um uns des Widerstandes bewußt zu werden, den die mathematische Materie dem Willen des Gelehrten entgegensetzt, müssen wir die Existenz mathematischer Tatsachen voraussetzen, die von der wissenschaftlichen Konstruktion unabhängig sind; wir müssen den mathematischen Begriffen eine tatsächliche Gegenständlichkeit beilegen: eine Gegenständlichkeit, die wir innere (intrinsèque) nennen wollen, um anzudeuten, daß sie nicht zu verwechseln ist mit jener Objektivität, die sich auf die experimentelle Erkenntnis bezieht" (S. 181).

Man kann den Boutrouxschen Gegenständlichkeitsbegriff akzeptieren und wird doch die Unterscheidung von mathematischer und experimenteller Gegenständlichkeit ablehnen müssen. Worin besteht beispielsweise nach Boutroux die Gegenständlichkeit eines Dreiecks? Ich habe es selbst aus drei Seiten zusammengefügt, es ist gewissermaßen mein Geschöpf und doch bin ich nicht imstande, alle möglichen, dieses Dreieck betreffenden Fragen zu beantworten, ohne mir den Kopf zu zerbrechen oder, wie Boutroux sagt, einen gewissen „Widerstand" zu überwinden. Genau das Gleiche gilt aber von den physischen Dingen und Tatsachen. Wenn ich ein Experiment mache, so bin ich auch quasi der Schöpfer der von mir aufgebauten Versuchsanordnung und doch ist der Ablauf des Versuchs meinem Willen nicht unterworfen. Die Gegenständlichkeit der experimentellen Tatsachen ist, wie man sieht, von der gleichen Art wie die Gegenständlichkeit der mathematischen Tatsachen.

Die vorliegende deutsche Ausgabe ist von der Herausgeberin mit wertvollen Erläuterungen versehen worden. Daß die Übersetzung dem Original an Eleganz nicht nachsteht, wird man aus den mitgeteilten Proben unschwer erkennen.

Dr. Heinrich Löwy.

E. Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. 2. 4°. 1104 S. Mit 368 Abb. im Text und 3 Tafeln. Leipzig. J. A. Barth. 1928. M. 107.—, geb. M. 111.—.

Es ist in diesem zweiten abschließenden Band des Gehrckeschen Handbuches in 21 Kapiteln ein Material von fast erdrückender Ausdehnung besprochen, in dem sich zurechtzufinden nicht ganz leicht wäre, wenn nicht ein mit großer Gründlichkeit bearbeitetes Stichwörterverzeichnis (im Umfang von 40 dreispaltigen Seiten!) und ein Namenverzeichnis zu Hilfe kämen. Denn man findet in vielen Fällen Aufschluß über eine bestimmte Frage an einer ganzen Reihe von Stellen; so ist, um ein Beispiel zu nennen, die Feinstruktur der Spektrallinien behandelt in vier verschiedenen Kapiteln. Diese (scheinbare) Zersplitterung hat ihren Grund natürlich darin, daß sich manche Fragen heute eben nicht mehr abschließend nur von einer einzigen Seite her betrachten lassen und es ist sicher leichter, eine straffere Disposition als wünschenswert zu bezeichnen, als bestimmte Vorschläge zu bringen und es selbst besser zu machen.

Wenn auch die einzelnen Kapitel durchaus nicht gleichwertig sind, wenn man dieses oder jenes vermißt und sogar verschiedentlich augenscheinliche Versehen feststellen muß, würde man doch der außerordentlichen Mühe und Arbeit, die der Herausgeber und die Mitarbeiter in das Werk gesteckt haben, nicht gerecht werden durch eine Betonung der Mängel zuungunsten der Vorzüge. Denn die an ein Handbuch in erster Linie zu stellenden Forderungen — objektive, kritische und möglichst vollständige Darstellung des Stoffes — erfüllt die überwiegende Mehrzahl der Artikel dieses Bandes, und zwar recht vollkommen, zum Teil vorzüglich. Die Leistungen der vielen Mitarbeiter im einzelnen zu würdigen, ist hier nicht möglich. Ohne damit andere Abschnitte zurücksetzen zu wollen, sei hier etwa hingewiesen auf die Behandlung der Phosphoreszenz und Fluoreszenz, der Bandenspektren, der Röntgenspektren, des Zeemaneffekts, des Starkeffekts oder der selektiven Temperaturstrahlung. Aus dem Rahmen fallen eigentlich nur zwei heraus. In dem Abschnitt über Spektralanalyse hat sich Einsporn die Sache entschieden zu leicht gemacht. Es konnte hier natürlich eine auch nur einigermaßen vollständige Wiedergabe des gesamten Materials nicht in Frage kommen, es finden sich Ergänzungen des Themas in anderen Teilen des Handbuches und in dem Handbuch der geometrischen Optik, aber der Einspornsche Artikel ist in seiner unsystematischen Vermengung von Wesentlichem und Unwesentlichem wenig befriedigend. Der zweite Beitrag, an dem generell Kritik geübt werden kann, ist der von Mohorovičič über die Optik bewegter Körper. Ohne Zweifel enthält dieser Artikel Interessantes und Originelles und gibt namentlich in den Fußnoten viele anregende Literaturhinweise. Die Bearbeitung eines Gebietes, das die Gemüter so sehr bewegt hat, auf dem nicht nur Tatsachen, sondern auch philosophische Meinungen mitsprechen, einem ausgesprochen extrem der einen Richtung angehörenden Forscher anzuvertrauen, ist aber ein gefährlicher Versuch, dessen Erfolg auszuprobieren gerade ein Handbuch nicht der richtige Ort ist; apodiktische Werturteile fordern stets Widerspruch heraus.

Über den reichen Inhalt des Bandes möge die folgende Übersicht orientieren. 1. Chemische Wirkungen des Lichts, von K. F. Bonhoeffer (18 S.). 2. Die Bromsilberplatte, von W. Meidinger (38 S.). 3. Technische Reproduktionsverfahren, von O. Mente (30 S.). 4. Farbenphotographie, von E. Lehmann (12 S.). 5. Spektralanalyse, von E. Einsporn (84 S.). 6. Die Feinstruktur der Spektrallinien, von G. Hansen (45 S.). 7. Phosphoreszenz, Fluoreszenz und chemisches Reaktionsleuchten, von R. Tomaschek (128 S.). 8. Anregungsspannungen von Spektrallinien und Ionisierungsspannungen, von E. Einsporn (25 S.). 9. Seriengesetze der Linienspektren, von K. W. Meissner (34 S.). 10. Bandenspektra, von W. Mörikofer (38 S.). 11. Röntgenspektren, von O. Berg (88 S.). 12. Gamma-Strahlen, von W. Kohlhörster (40 S.). 13. Magnetische Zerlegung der Spektrallinien von P. Zeeman u. T. L. de Bruin (92 S.). 14. Starkeffekt, von W. Steubing (54 S.). 15. Atomtheorien von H. Cremer (72 S.). 16. Allgemeine Grundlagen der Temperaturstrahlung, von F. Schröder (26 S.). 17. Strahlung des schwarzen Körpers, von E. Gehrcke (32 S.). 18. Selektive Temperaturstrahlung, von F. Schröter (50 S.). Technische Lichtquellen, von F. Skaupy (10 S.). 20. Optik bewegter Körper, von S. Mohorovičič (97 S.). 21. Natur des Lichtes, von W. Noddack (19 S.). Der Druck und die Figuren, vor allem auch die Wiedergabe von photographischen Aufnahmen, sind vorzüglich. R. Seeliger.

A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne. Nach Ergänzung der englischen Ausgabe durch Prof. A. S. Eddington ins Deutsche übertragen von Dr. E. von der Pahlen. Gr. 8⁰. VIII u. 514 S. Mit 5 Abb. Berlin, J. Springer. 1928. M. 28.—, geb. M. 30.—.

Zu den meisterhaften Lehrbüchern von A. S. Eddington über das Sternsystem und die Relativitätstheorie ist 1926 ein neues über den inneren Aufbau der Sterne gekommen, das nun mit Ergänzungen versehen in deutscher Ausgabe vorliegt. Der Verf. stellt hier ein Gebiet dar, an dessen Entwicklung er selbst den stärksten Anteil hat, und auch das vorliegende Buch gibt nicht nur eine zusammenfassende Bearbeitung der bisherigen Ergebnisse von mustergültiger Geschlossenheit, sondern führt die Probleme zum Teil über den Stand der vorhergehenden Arbeiten hinaus.

Das Buch beginnt mit einem einleitenden Kapitel „Überblick über das Problem“, das die denkbar beste Orientierung über die behandelten Fragen gibt. Thermodynamik der Strahlung und Quantentheorie sind dann als Vorbereitung zur eigentlichen Aufgabe, dem theoretischen Aufbau des Sternes, kurz dargestellt. Das Buch knüpft zunächst an die Gedankengänge von Emdens „Gaskugeln“ an; allein aus den Überlegungen der klassischen Thermodynamik heraus werden (polytrope) Gaskugeln im Gleichgewichtszustand aufgebaut und mit der Wirklichkeit verglichen. Um zu einer Übereinstimmung mit dieser zu kommen, bedarf es jedoch einer wesentlichen Modifikation der ursprünglichen Theorie. An Stelle des konvektiven Gleichgewichts tritt das Strahlungsgleichgewicht. Die Energieübertragung von innen nach außen erfolgt allein auf dem Weg der Strahlung, und jedes Volumenelement emittiert ebensoviel Energie als es absorbiert. Die Einführung der Strahlung als wesentlichen Faktor beim Aufbau eines Sternes zwingt zugleich zur Einführung des Strahlungsdruckes, welcher der Gravitation entgegenwirkt. Da der Strahlungsdruck wiederum eine Funktion der Temperatur ist, so tritt diese zugleich mit Druck, Dichte und Gravitationspotential unmittelbar in das Problem ein. Ebenso erscheint nun der Absorptionskoeffizient als neue Größe in den Gleichungen für den Sternaufbau. Diese sind also wesentlich komplizierter als in der älteren Theorie. Betrachtet man aber einen aus einem idealen Gas aufgebauten Stern, nimmt also die Zustandsgleichung idealer Gase zu Hilfe, und nimmt noch eine Annahme über das Verhalten des Absorptionskoeffizienten hinzu, so gelingt es, die Temperatur wieder zu eliminieren und das Gleichungssystem auf einen speziellen Fall der polytropen Gaskugeln bei Emden zurückzuführen. Damit ist ein aus einem idealen Gas bestehender Stern erhalten, bei welchem in jedem Volumenelement Gleichgewicht des Energieaustausches durch Strahlung besteht, und bei welchem zugleich Gasdruck, Gravitation und Strahlungsdruck sich in mechanischem Gleichgewicht befinden.

Als wichtigste Folgerung der eingeführten Annahmen ergibt sich der Satz, daß die absolute Leuchtkraft eines solchen Sterns ausschließlich von seiner Masse abhängt. Diese „Massen-Helligkeitsbeziehung“ für Sterne im idealen Gaszustand ist der Nachprüfung durch die Beobachtung

zugänglich, auf die Eddington besonders ausführlich eingeht. Hierbei zeigt sich, daß nicht nur die bisher als ideale Gassterne angenommenen Riesen die theoretisch hergeleitete Beziehung erfüllen, sondern auch die Zwergsterne. Die Materie der Sterne von der Dichte des Wassers und darüber verhält sich also in den Sternen wie ein vollkommenes Gas. Von hier aus bahnt sich auch ein Weg zum Verständnis von so hohen Dichten, wie wir sie bei den weißen Zwergen mit erheblicher Wahrscheinlichkeit annehmen müssen.

Die folgenden Kapitel des Buches von Eddington behandeln speziellere astronomische Fragen: veränderliche Sterne oder schließlich die diffuse Materie im Raum. Von erheblichem physikalischem Interesse sind aber noch die Kapitel über den Absorptionskoeffizienten im Sterninnern und dessen Vergleich mit den Laboratoriumsversuchen und vor allem über die Quelle der Sternenergie. Die verschiedenen Möglichkeiten, die als Quelle für die durch Strahlung fortwährend verlorengehende Energie in Frage kommen, werden eingehend durchdiskutiert. Als Energievorrat kommt allein die subatomare Energie der gesamten Sternmaterie in Frage, wenn wir auch gegenwärtig noch nicht entscheiden können, ob die ausgestrahlte Energie durch die Umwandlung der Elemente frei wird, oder ob eine vollständige Vernichtung der Materie eintritt. Ein besonderes Kapitel beschäftigt sich schließlich noch mit den äußeren Schichten der Sterne und den spektralen Erscheinungen der Sternatmosphäre.

Was das Studium des neuen Werkes so besonders anziehend macht, ist nicht allein die Fülle der verarbeiteten Probleme, sondern vor allem auch die überaus durchsichtige und kluge Art der Darstellung. Wie überzeugend ist die Behandlung der Entropie (S. 36), mit welch feinem Humor ist die strittige Frage nach dem Wesen der weißen Zwerge erörtert (S. 207); wie tief sind die Bemerkungen über den Unterschied des mathematischen und des physikalischen Schaffens (S. 127). Nur ein Forscher von der Bedeutung Eddingtons konnte uns diese Darstellung eines der wichtigsten und weittragendsten Gebiete der modernen Astronomie geben. A. Kopff.

Astronomischer Kalender. Herausgegeben von der Universitäts-Sternwarte zu Wien. 47. Jahrgang. 8⁰. 142 S. Wien und Leipzig. Carl Gerold's Sohn. 1928. Geb. M. 6.—, Sch. 9.60.

Neben zahlreichen, besonders dem Liebhaberastronomen willkommenen Angaben enthält der 47. Jahrgang zwei Abhandlungen: Radiozeitzeichen von J. Fuchs und Neue Asteroiden und Kometen von H. Krumpholz. Man ist erstaunt, in dem ersten der beiden Aufsätze längere Ausführungen über den Einfluß zu finden, den die durch die Bewegung gegen den Äther verursachte Lorentz-Kontraktion der Erde auf die Pendeluhren hat; der Verf. fügt sogar eine Korrektionstabelle für den Uhrstand bei. Die Ergebnisse von L. Courvoisier sind experimentell noch so wenig geklärt und beruhen auf teilweise so fehlerhaften theoretischen Überlegungen, daß man mit deren Verbreitung (selbst in der vom Verf. gewählten einschränkenden Form) doch vorsichtiger sein sollte.

A. Kopff.

Schmidt, E., Wärmestrahlung technischer Oberflächen bei gewöhnlicher Temperatur. (Beiheft 20 zum Gesundheits-Ingenieur.) 23 S. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1927. Geh. M. 3.60.

Der Verfasser hat, veranlaßt durch die Bedeutung, welche der Wärmeübertragung durch Strahlung in der Heiztechnik bereits für gewöhnliche Temperaturen zukommt, für eine Reihe technisch wichtiger Körper (Metalle mit blanken, polierten, bearbeiteten und oxydierten Oberflächen, Anstriche, Papier, Gips, Holz, Ziegelsteine, Porzellan) kritische Strahlungsmessungen durchgeführt. Seine Versuchsanordnung, bei der die Versuchskörper in einem Raum von etwa 25⁰ C Lufttemperatur einem auf 10 gekühlten Hohlraum gegenübergestellt wurden und die Größe des Strahlungsaustausches zwischen dem Versuchskörper und den Wänden des gekühlten Hohlraums auf thermoelektrischem Wege gemessen wurde, hat teilweise für die Praxis überraschende Ergebnisse aufgedeckt. (Die Farbe eines Lackanstrichs ist auf die Ausstrahlung bei gewöhnlicher Temperatur von geringer Bedeutung; glasiertes Porzellan, Glas liefern im Gegensatz zu blanken polierten Metallen sehr hohe Strahlungswerte. Hauchdünne Ölschichten üben keinen wesentlichen Einfluß aus; Ölschichten von $^1/_5$ mm liefern jedoch schon das hohe Ausstrahlungsvermögen des Öls selbst. Eine über Anlauffarben hinausgehende Oxydierung oder ein Aufrauhen von Metallflächen führt zu starker Strahlungssteigerung.)

Vom physikalischen Gesichtspunkt interessanter und wichtiger sind die theoretischen und experimentellen Ergebnisse, welche der Verfasser hinsichtlich der Richtungsverteilung bei Metallstrahlung bekannt gibt. Es zeigt sich, daß das Lambertsche Cosinusgesetz hierfür nicht gültig ist, insofern bei Metallen die Strahlungsintensität in schräger Richtung größer ist als senkrecht zur Fläche, beispielsweise bei 75⁰ gegen die Senkrechte schon doppelt so hoch wie die normal gerichtete Strahlung wird und erst in unmittelbarer Nähe des streifenden Einfalls wieder auf kleinere Werte zurückgeht. Andere theoretische Untersuchungen betreffen die Berechnung des Einflusses von Profilierungen auf die Ausstrahlung, sowie die Entwicklung einer Beziehung zwischen der Strahlung elektrisch nicht leitender Körper und ihres mittleren Brechungsexponenten, der zufolge man bei elektrischen Nichtleitern stets hohe Strahlungszahlen zu erwarten hätte. C. Müller.

P. Bommersheim, „Beiträge zur Lehre von Ding und Gesetz". (Wissenschaftliche Grundfragen, 8.) 8⁰. VIII u. 108 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. M. 5.60.

Verf. nimmt auf Grund eines „objektiven Idealismus" an, daß die mathematischen Gesetze objektive Voraussetzungen der Natur sind. Mit dieser dogmatischen Annahme weicht man natürlich gerade dem wichtigsten Problem „Wie ist physikalische Erkenntnis überhaupt möglich" aus. Verf. beschäftigt sich mit einer Analyse der Begriffe: Ding, Gesetz, Funktion, Kausalität, Atom. Die Methode besteht im wesentlichen in dichotomischen Begriffsunterscheidungen, die aber auf rein heuristischer Basis beruhen, und daher philosophisch wohl wenig Entscheidendes zu geben vermögen. Ich weiß nicht, ob die überaus zahlreichen Begriffsunterscheidungen (die häufig den Anschein einer gewissen Künstlichkeit erwecken), dem Physiker etwas zu bieten vermögen, zumal die

Ausdrucksweise sich einer etwas schwerfälligen Schulsprache zu bedienen strebt. Immerhin ist die allgemeine Tendenz einer Verknüpfung der physikalischen Begriffsbildungen mit den allgemeinen philosophischen Kategorien an sich durchaus zu billigen und zu begrüßen. H. Dingler.

Tagesereignisse.

Ferienkurse in Jena 1.—15. August 1928. Das Gesamtprogramm umfaßt 65 teils sechs-, teils zwölfstündige Kurse.

Die naturwissenschaftliche Abteilung ist in diesem Jahre wieder sehr reichhaltig und enthält folgende Kurse, die in den Instituten der Universität stattfinden und mit Demonstrationen verbunden sind. 1. Anleitung zu Experimenten für den Schulunterricht in der anorganischen Chemie. Dr. Brintzinger (6 Std.). 2. Anleitung zu Experimenten für den Schulunterricht in der organischen Chemie. Dr. Maurer. (6 Std.) 3. Die Biologie im botanischen Schulunterricht mit Anleitung zu pflanzenphysiologischen Schulexperimenten. Prof. Dr. Detmer. (12 Std.) 4. Die moderne Zoologie im Schulunterricht. Prof. Dr. Franz. (12 Std.) 5. Zoologische Mikroskopier- und Präparierübungen. Prof. Dr. Franz. (24 Std.) Populäre Astronomie. Prof. Dr. Knopf. (12 Std.) Zeit- und Ortsbestimmung mit praktischen Übungen. Prof. Dr. Knopf. (24 Std.) Bau- und Funktion des Gehirns. Prof. Dr. Noll. (6 Std.) Geologische Einführung in die Erdphysik. Prof. Dr. Sieberg. (12 Std.) Grundbegriffe der Bakteriologie in ihrer Bedeutung für Wohnungs- und Schulhygiene. Dr. Lehmann. (12 Std.) Physiologie und Chemie der Nahrung, der Verdauungen und des Körperhaushalts. Dr. Schliephake. (12 Std.) — Ferner ist ein Abendvortrag von Prof. v. Skramlik über „Sinnestäuschungen" und ein Besuch des Planetariums vorgesehen.

Das ausführliche Programm der diesjährigen Ferienkurse in Jena ist bereits erschienen und durch das Sekretariat, Frl. Cl. Blomeyer, Jena, Carl-Zeiß-Platz 3, kostenlos zu beziehen.

Preisausschreiben über einen Apparat zur Schnellbestimmung des Wassergehalts von Braunkohlen. In der letzten Zeit geht man in Braunkohlenbrikettfabriken mehr und mehr dazu über, die getrocknete Brikettierkohle auf Korngrößenanteile und deren Wassergehalt zu untersuchen. Ist erst durch Versuche der Mengenanteil der einzelnen Körnungen in der Brikettierkohle als einigermaßen gleichbleibend festgestellt, so kann durch die Wassergehaltsbestimmung einer einzigen Korngröße mit ziemlicher Sicherheit auf den Wassergehalt der übrigen Kornanteile geschlossen werden. So läßt sich die Trocknung genau überwachen und es können Unregelmäßigkeiten abgestellt werden. Um jedoch auf Grund der gefundenen Werte schnellstens in den Trocknungsprozeß eingreifen zu können, ist eine rasche Wassergehaltsbestimmung sehr erwünscht. Da die bisherigen Verfahren zu lange Zeit beanspruchen, haben sich der Deutsche Braunkohlen-Industrie-Verein, das mitteldeutsche, ostelbische und rheinische Braunkohlen-Syndikat dazu entschlossen, ein Preisausschreiben über einen Apparat zur Schnellbestimmung des Wassergehalts von Braunkohlen herauszugeben, dessen Bedingungen im Inseratenteil dieser Zeitschrift auf Seite III bekanntgemacht werden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. F. London für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Göttingen Dr. Alwin Walther zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt, der Privatdozent für Chemie an der Universität München Dr. Robert Fricke zum a. o. Professor ebenda, der Privatdozent für Chemie an der Universität Würzburg Dr. Georg-Maria Schwab zum Konservator des Chemischen Laboratoriums des Staates in München, der ord. Professor an der Polytechnischen Lehranstalt in Kopenhagen Dr. H. Bohr zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, der Privatdozent für angewandte Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Ing. Max Schuler zum a. o. Professor ebenda, der a. o. Professor für Photochemie an der Universität Göttingen Dr. Alfred Coehn zum ord. Professor ebenda, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Breslau Dr. Fritz Arndt zum ord. Professor daselbst, der Direktor am Wernerwerk der Siemens-Halske A.-G. in Berlin-Siemensstadt Dr. Ing. Georg Keinath zum Honorarprofessor in der Fakultät für Maschinenwirtschaft (insbesondere für elektrische Meßtechnik und ihre Anwendung) an der Technischen Hochschule in Berlin-Charlottenburg, der ord. Professor der Chemie an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich Dr. Richard Kuhn zum Direktor des Chemischen Instituts am Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung in Heidelberg, der Direktor der Langbein-Pfanhauser Werke in Leipzig Dr. W. Pfanhauser zum Honorarprofessor für Elektrochemie an der Technischen Hochschule Braunschweig, die Privatdozenten an der deutschen Universität Prag Dr. Karl Ludwig Wagner (Physikalische Chemie) und Dr. Leo Wenzel (Geophysik mit besonderer Berücksichtigung der Meteorologie und Klimatologie) zu a. o. Professoren an der gleichen Hochschule, die a. o. Professoren an der deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Alfred Eckert (allgemeine und analytische Chemie) und Dr. Paul Funk (Mathematik) zu ord. Professoren ebenda, der a. o. Professor an der deutschen Universität Prag Dr. Ludwig Berwald zum ord. Professor der Mathematik an derselben Hochschule, der Privatdozent an der Universität Basel Dr. Alfred Schmid zum a. o. Professor für physikalische Chemie ebenda.

Berufen: Der ord. Professor für Physik, Geodäsie, Meteorologie und Klimatologie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Hohenheim und Dozent für Meteorologie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Albert Wigand zum ord. Professor für Meteorologie an der Universität Hamburg.

Ehrung: Fräulein Prof. Dr. Lise Meitner, wissenschaftliches Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Dahlem, hat gemeinsam mit der französischen Chemikerin Frau Prof. Ramart-Lucas von der „American Association to aid scientific research by women" den „Ellen-Richard-Research-Prize" zuerkannt bekommen. Der Preis beträgt 2000 Dollar."

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Heinrich Weber, der ord. Professor der Chemie an der Columbia University in New York Thoms B. Freas.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye,** Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 12. | Ausgegeben am 15. Juni 1928. Nr. 760. Printed in Germany. | 29. Jahrgang.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 12 | 15. Juni 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 14 am 10. Juli 1928

INHALT:

Friedrich Giesel.

Geb. 20. Mai 1852 — gest. 14. November 1927.

Von Otto Hahn.

Am 14. November 1927 starb in Braunschweig der Altmeister der deutschen Radiumforschung Friedrich Giesel im bald vollendeten 76. Lebensjahr. Ein tragisches Geschick wollte es, daß er an den Wirkungen der Substanz dahingehen mußte, deren erste technische Herstellung die Welt ihm zu verdanken hat und deren heilspendende Strahlen seither so vielen Kranken Hoffnung und Linderung gebracht haben. Nach Aussage seines langjährigen nahen Freundes und Hausarztes erfolgte der Tod Giesels durch ein Lungenkarzinom, das sich wahrscheinlich als Metastase eines Radiumkarzinoms am Zeigefinger entwickelt hatte.

Friedrich Oskar Giesel wurde am 20. Mai 1852 in Winzig (Schlesien) als Sohn eines Arztes geboren. Er studierte 1872—74 an der Kgl. Gewerbeakademie in Berlin und war 1875 Assistent an der Versuchsstation deutscher Spiritusfabrikanten und vorübergehend Chemiker der Hoffmannschen Stärkefabrik in Salzuflen. Seine Promotion erfolgte 1876 in Göttingen.

Von 1876—1877 war er Assistent bei Prof. C. Liebermann an der Berliner Gewerbeakademie. Das Ergebnis dieser Lehrjahre ist in einer Anzahl interessanter Mitteilungen aus der damaligen Zeit in Gemeinschaft mit seinem Lehrer niedergelegt. Durch diese Arbeiten wurden die Voraussetzungen dafür geschaffen, die Giesel 1878 zur Annahme einer Stelle bei der Chininfabrik Braunschweig geeignet machten, eine Stelle, die er bis in die letzte Zeit seines Lebens dauernd innehatte und mit besonderem Erfolge ausfüllte.

Auch als leitender Chemiker der Chininfabrik, die er in späteren Jahren als Prokurist

vertrat, hielt er seine wissenschaftlichen Beziehungen zu seinem Lehrer Liebermann dauernd aufrecht. Menschlich waren beide durch eine Freundschaft miteinander verbunden, die erst mit dem Tode von Liebermann ihr Ende fand.

An dem Ausbau des Chininbetriebes der Firma war Giesel in hervorragender Weise beteiligt; in ihm vereinte sich starkes wissenschaftliches Interesse mit einem seltenen experimentellen Geschick, das ihn in die Lage versetzte, schwierige technische Aufgaben erfolgreich zu lösen. Die partielle Synthese des Kokains, wie sie die Technik heute fast allgemein anwendet, ist in erster Linie Giesel zu verdanken.

Aber nicht diese Leistungen waren es, die Giesels Namen in kurzer Zeit der ganzen Welt bekannt machten.

Von Jugend auf hatte Giesel besondere Begeisterung für naturwissenschaftliche Dinge; neue Entdeckungen zogen ihn an und zwangen ihn förmlich, sich selbst mit ihnen zu beschäftigen. Wie konnte es da ausbleiben, daß die ersten Nachrichten aus Paris von der Wundersubstanz Radium ihn eng in ihren Bann zogen? 1898 veröffentlichte das Ehepaar Curie die Reindarstellung des Radiums. Zunächst wohl nur aus Liebe am Experimentieren und aus Erkenntnisdrang machte sich Giesel — neben seiner Hauptätigkeit als organischer Chemiker — daran, das Radium auch in Deutschland darzustellen. Die Abscheidung und Reindarstellung gelang ihm überraschend schnell und schon 1899 erschienen die ersten Mitteilungen Giesels über das Radium und das von Frau Curie entdeckte Polonium.

Nur die volle Hingabe eines durchaus originellen, mit vorzüglicher Beobachtungsgabe ausgerüsteten Gelehrten konnte die Summe der nun folgenden wichtigen Entdeckungen — sozusagen im Nebenberuf — erzielen. Ihm gebührt das große Verdienst, die ersten hochwertigen Radiumsalze auf den Markt gebracht und dadurch der freien Forschung einen großen Anstoß gegeben zu haben. Als wesentliche Verbesserung der Anreicherung des Radiums führte Giesel dabei die fraktionierte Kristallisation der Bromide ein, gegenüber der von Frau Curie benutzten Chloridmethode. Die Anreicherung führt bei den Bromiden wesentlich schneller zum Ziele, und noch heute wird nach dem Gieselschen Fraktionierungsverfahren mit Erfolg gearbeitet. Der Preis dieser ersten Radiumpräparate betrug weniger als ein Zehntel des heutigen.

Giesel beobachtete als erster die Wirkung der α-Strahlen auf die Sidotsche Blende, eine Wirkung, die sich später in Form der Szintillationserscheinungen als eines der mächtigsten Hilfsmittel zu neuen Entdeckungen erwiesen hat (Zählung der α-Strahlen, Nachweis der Atomzertrümmerung durch Rutherford u. a. m.). Auch technisch war diese von Giesel zuerst beobachtete Einwirkung der Radiumstrahlen auf die Sidotsche Blende von großer Bedeutung. Die Chininfabrik Braunschweig war die erste Fabrik, die die sog. radioaktiven Leuchtmassen in den Handel brachte. Ihre Verwendung hat sich in der Folge zu einem großen, vielverzweigten Industriegebiet entwickelt.

Giesel wies als erster die Ablenkung der β-Strahlen in einem starken Magnetfelde nach. Die modernen Untersuchungen der magnetischen β-Strahlspektren und ihre Verwendung zur Erforschung des Atomkerns basieren auf dieser Erkenntnis.

Mit dem Lanthan schied Giesel eine Substanz ab, die sich durch eine charakteristische, kurzlebige Emanation von den anderen Radioelementen unterschied. Giesel nannte die neue Substanz zuerst Emanationskörper aus Pechblende, später Emanium (1903).

In der Folgezeit zeigte sich die Identität des schon 1900 von Debierne aufgefundenen Actiniums mit dem Emanium Giesels, so daß der Name Emanium zugunsten des Actiniums aufgegeben werden mußte. Zugleich konnte aber nachgewiesen werden, daß Giesel als erster die reine Substanz in Händen gehabt hatte, während das ursprüngliche Actinium Debiernes ein Gemisch von Actinium mit Ionium und Thorium vorstellte, dem ursprüng-

lich auch die chemischen Eigenschaften des Thoriums zugesprochen worden waren.

Das Blei aus der Pechblende wurde von Giesel als radioaktiv erkannt und in seinem sog. β-Polonium hatte er das von Rutherford aus dem aktiven Niederschlag des Radiums isolierte RaE in Händen. Giesel verdanken wir die anfangs so rätselhafte Feststellung, daß die Temperatur einer starken Radiumsalzlösung dauernd höher ist als die der Umgebung. Verfärbungen von Mineralien, wie Steinsalz oder Flußspat wurden von ihm zuerst beobachtet. Er erkannte die gesundheitsschädlichen Wirkungen der Radiumstrahlen auf die Haut, beobachtete deren Fluoreszenzwirkung auf die Netzhaut des Auges, zeigte die Rotfärbung der Bunsenflamme durch Radiumsalze, die starke Zersetzung des Wassers durch Radiumstrahlen u. v. a. m.



Die Verleihung des Professortitels an Herrn Dr. Giesel, des Dr.-Ing. e. h. — Auszeichnungen, die dem nicht im offiziellen Hochschulbetrieb tätigen Chemiker nur selten zuteil werden — waren neben der allgemeinen Hochschätzung, der er sich in den Fachkreisen erfreute, ein äußeres Zeichen der Anerkennung seiner großen Verdienste um die deutsche Wissenschaft.

Der Krieg und die Nachkriegszeit hatte die wissenschaftliche Tätigkeit dieses rastlosen Forschers aufs schwerste eingeschränkt. Radium wird in Deutschland nicht mehr oder nur noch in kleinem Maßstabe hergestellt; das Ausgangsmaterial kommt ja in Deutschland nicht vor. Aber bis in die letzte Zeit hinein konnte man durch Professor Giesel Präparate erhalten, die sonst kaum irgendwo in der Welt zu haben waren. Vor allem sei hier das Actinium genannt, dem ja ein großer Teil seiner Forschungen gegolten hat.

So hat Giesel sowohl durch seine eigenen Forschungen als auch dadurch, daß er Fachgenossen der ganzen Welt jahrelang mit Präparaten versorgte, einen entscheidenden Anteil an der Entwicklung der Radiumforschung genommen; sein Name wird daher in der Geschichte dieser jungen Wissenschaft nicht vergessen werden.

Was die Persönlichkeit Giesels anbelangt, so gehörte er zu denen, die unabhängig von den Meinungen anderer ihre Ansicht von den Werten des Lebens sich selber bilden. Dies hing damit zusammen, daß er in allen Dingen wenig auf die Form gab und ihm alles auf die Sache ankam. Er selbst, ziemlich klein und hager von Figur, hielt nicht im geringsten auf sein Äußeres. Es war ihm lästig, irgendwie in der Öffentlichkeit auftreten zu müssen, oder gar Vorträge zu halten. Die Kunst des blendenden Vortrags war ihm nicht gegeben, und mußte er sprechen, so wirkte er nur durch den Inhalt, nicht durch die Form des Gebotenen. Dabei hörte er bei seinen vielseitigen Interessen an allem Neuen selbst sehr gern Vorträge und war ein eifriges Mitglied des Vereins für Naturwissenschaft in Braunschweig. Eine besondere Liebe hatte er für die Medizin, und über alle Fortschritte der ärztlichen Wissenschaft war er immer gut unterrichtet. Gar nicht ertragen konnte er es aber, wenn Ärzte über physikalische oder chemische Fragen, die sie nicht von Grund auf beherrschten, Arbeiten veröffentlichten und „Luftschlösser aufbauten".

Die engen Beziehungen zu seinem Lehrer Liebermann wurden schon erwähnt. Das Bild wäre aber nicht vollständig ohne des innigen Verhältnisses zu gedenken, das ihn mit Elster und Geitel verband. Besonders in der ersten stürmischen Entwicklung der Radiumforschung wurde alles Neue zwischen diesen drei Forschern besprochen, sicher zu dauerndem Vorteil für alle. Denn Giesels Begabung, die auf die rein beobachtbare, qualitative, experimentell chemische Seite der Erscheinungen gerichtet war, konnte aus der auch theoretisch tief begründeten stark nach der messenden Seite entwickelten physikalischen Forschungsrichtung der beiden Wolfenbütteler Gymnasialprofessoren die mannigfachsten Anregungen erhalten; und für Elster und Geitel war es ein glücklicher Umstand, alle Fragen der präparativen Chemie mit dem Braunschweiger Freunde erörtern zu können.

Groß war Giesels Hilfsbereitschaft, wenn es sich um Förderung naturwissenschaftlicher Arbeiten irgendwelcher Art handelte; da wurde dann im besten Sinne die Arbeit des anderen zu seiner eigenen. Doch konnte seine kindliche Fröhlichkeit im Verkehr auch gelegentlich in Verärgerung und entrüstete Ablehnung umschlagen, wenn er sich getäuscht oder zu Unrecht zurückgesetzt glaubte.

Der Krieg brachte schwere Erschütterungen für ihn. Seinen Sohn, an dem er außerordentlich hing, und der bei Kriegsausbruch sich auf einer Reise als Schiffsarzt befand, hat er in der Schlacht bei den Falklandsinseln verloren. Der Verlust ging ihm außerordentlich nahe, so daß er jahrelang eine rechte Lebensfrohheit nicht wieder fand. Außer diesem Sohn hatte Giesel noch zwei Töchter, beide verheiratet.

Ein außerordentliches Glück war ihm in Gestalt seiner Frau beschieden, die eine Schwester des Münchener Malers Schwormstedt ist, und die selbst gute Bilder malte. Durch seine Frau angeregt, hatte er große Freude an Gemälden und versuchte sich gelegentlich auch selbst mit Geschick in der eigenen Handhabung des Pinsels. Seine Frau lebte ganz mit ihm und für ihn, besuchte die Vorträge mit ihm und wußte alle seine zahlreichen Sonderheiten, die mit seiner ganzen Veranlagung zusammenhingen, harmonisch aufzulösen. Giesel selbst erkannte sehr wohl, welchen Schatz er an seiner Frau besaß und war ihr in inniger Liebe zugetan.

Die schwere Nachkriegs- und Inflationszeit war nicht dazu angetan, seine ursprünglich außerordentlich zähe Natur zu kräftigen. Die zerstörenden Wirkungen des Radiums traten, wie die Ärzte meinen, immer stärker hervor. Es kam eine lange Zeit des Siechtums, während der er von seiner Frau auf das rührendste gepflegt wurde. Aber der Fortschritt der Krankheit war nicht mehr aufzuhalten, und so kam der Tod für ihn schließlich als eine Erlösung.

Zusammenstellung der Veröffentlichungen von F. Giesel.

C. Liebermann und F. Giesel, Über die Constitution der Chrysamminsäure und über das Chrysazin. Chem. Ber. **8**, 1643—1649, 1875.

——, Über Chrysamminsäure und Chrysazin. Chem. Ber. **9**, 324—332, 1876.

——, Über die Reduktionsprodukte des Chinizarins. Chem. Ber. **10**, 606—611, 1877.

Plastilina. Chem. Ber. **11**, 310, 1878.

C. Liebermann und F. Giesel, Über Chinovin und Chinovasäure. Chem. Ber. **16**, 926—941, 1883.

——, Über eine neue technische Darstellungsart und teilweise Synthese des Cocains. Chem. Ber. **21**, 3196—3202, 1888.

Entdeckung des Cinnamylcocains. Pharm. Ztg. **34**, 516, 1889.

Über ein Nebenprodukt der technischen Cocainsynthese, Chem. Ber. **23**, 508—512, 926—929, 1891.

C. Liebermann und F. Giesel, Entdeckung des Tropacocains. Pharm. Ztg. **36**, 419, 1891.

Über künstliche Färbung von Kristallen der Haloidsalze der Alkalimetalle durch Einwirkung von Kalium- und Natrium-Dampf. Chem. Ber. **30**, 156—158, 1897.

C. Liebermann und F. Giesel, Notiz über Cuskhygrinhydrat. Chem. Ber. **30**, 1113—1115, 1897.

Einiges über das Verhalten des radioaktiven Baryts und über Polonium. Wiedemanns Ann. d. Phys. **69**, 91—94, 1899.

Ablenkung radioaktiver Strahlen durch magnetische Kräfte. Wiedemanns Ann. d. Phys. **69**, 834, 1899.

Radiumbariumsalze und deren Strahlen. Verh. d. D. Phys. Ges. **2**, 9, 1900.

Vortrag, Aufleuchten beim Annähern stärkerer Radiumpräparate an das Auge. Naturforscher-Versammlung München 1899.

Über Radium und Polonium. Physik. Zeitschr. **1**, 16, 43, 1899.

Über radioaktives Barium und Polonium. Chem. Ber. **33**, 1665—68, 1900.

Verfärbung von Gläsern, Aktivierung von Wismut. Verh. d. D. Phys. Ges. **2**, 9, 1900.

Über radioaktive Stoffe. Chem. Ber. **33**, 3569—71, 1900.

Über radioaktive Stoffe. Chem. Ber. **34**, 3772—76, 1901.

Über radioaktives Blei. Chem. Ber. **35**, 102—105, 1902.

F. Giesel, Über radioaktive Substanzen und ihre Strahlen. Stuttgart, 1902. Sammlung chem. und chemisch-technischer Vorträge. F. E. Ahrens. Bd. VII, Heft 1.

Vortrag auf der IX. Hauptversammlung d. Deutschen elektrochemischen Ges., Würzburg: Über Becquerelstrahlen und die radioaktiven Substanzen. Zeitschr. f. El.-Chem. **8**, 579—585, 1902.

Über Radium und radioaktive Stoffe. Chem. Ber. **35**, 3608—3611, 1902.

Über Radiumbromid und sein Flammenspektrum. Physik. Zeitschr. **3**, 578, 1902.

Über den Emanationskörper aus Pechblende und über Radium. Chem. Ber. **36**, 342—347, 1903.

Über Polonium. Chem. Ber. **36**, 728—729, 1903.

Über Polonium und die induzierende Eigenschaft des Radiums. Chem. Ber. 2368—2370, 1903.

Ein Demonstrationsversuch zum Nachweis ultraroter Strahlen. Physik. Zeitschr. **4**, 862, 1903.

Über den Emanationskörper (Emanium). Chem. Ber. **37**, 1696—1699, 1904.

Über Emanium. Chem. Ber. **37**, 3963—66, 1904.

Über Actinium-Emanium. Physik. Zeitschr. **5**, 822—823, 1904.

Zu der Arbeit von Hofmann, Gonder und Wölfel: Induzierte Radioaktivität. Ann. d. Phys. (4) **15**, 1048, 1904.

Untersuchungen über das Emanium (Actinium). Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **1**, 345—358, 1904.

Über das Vorkommen von Radium und radioaktiven Edelerden in Fangoschlamm und in Ackererde von Capri. Physik. Zeitschr. **6**, 305, 1905.

Über das Vorkommen von Radium und radioaktiven Edelerden in Fangoschlamm und in Ackererde von Capri. Chem. Ber. **38**, 132—133, 1905.

Über Emanium. Chem. Ber. **38**, 775—778, 1905.

Über einen einfachen Nachweis von Helium aus Radiumbromid. Chem. Ber. **38**, 2299—2300, 1905.

Über die „Thor-Aktivität“ des Monazits. Chem. Ber. **38**, 2334—2336, 1905.

Über β-Polonium. Chem. Ber. **39**, 780—782, 1906.

Über β-Polonium. Chem. Ber. **39**, 1014, 1906.

Über das Spektrum des Heliums aus Radiumbromid. Chem. Ber. **39**, 2344, 1906.

Ein Demonstrationsversuch zum Nachweis ultraroter Strahlen. Physik. Zeitschr. **7**, 35, 1906.

J. Stark und F. Giesel: Die Lichtemission von Luft und Helium unter dem Einfluß der α-Strahlen. Physik. Zeitschr. **8**, 580—583, 1907.

Über die ersten Zerfallsprodukte des Actiniums (Emaniums), über eine neue Emanation und über Bildung von Helium aus Actinium. Chem. Ber. **40**, 3011—3015, 1907.

Einiges über Polonium-Gewinnung und sein Verhalten. Chem. Ber. **41**, 1059—1062, 1908.

F. Giesel und J. Zenneck, Die Verwendung des Zinksulfids für die Braunsche Röhre. Physik. Zeitschr. **10**, 377—379, 1909.

Über Polarisationserscheinungen an flüssigen Kristallen der Cholesterinester. Physik. Zeitschr. **11**, 192, 1910.

(Eingegangen 15. April 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den Einfluß der sogenannten höheren Glieder in der Debye-Hückelschen Theorie der Lösungen starker Elektrolyte.

Von T. H. Gronwall, Victor K. La Mer und Karl Sandved.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

In den letzten Jahren sind verschiedene experimentelle Bestimmungen von Aktivitätskoeffizienten bekannt geworden, welche der Debye-Hückelschen Theorie in der von ihren Urhebern dargestellten Form widersprechen, indem der aus den experimentellen Aktivitätskoeffizienten berechnete Ionendurchmesser anstatt konstant und positiv zu sein, mit der Konzentration stark veränderlich ist und manchmal sogar negativ ausfällt[1]). Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, diesen Widerspruch zu beseitigen durch Berücksichtigung nicht nur der ersten Potenz des Potentials in der Reihenentwicklung der elektrischen Dichte, wie Debye und Hückel es tun, sondern auch der höheren Potenzen[2]). Mit anderen Worten wird hier mit der vollständigen Gleichung (4) unten gearbeitet anstatt der Debye-Hückelschen Gleichung (4a). Es stellt sich heraus, daß für kleine Konzentrationen — und für diese allein ist ja die ganze Debye-Hückelsche Theorie berechtigt — unsere Formeln mit den Beobachtungen gut übereinstimmen. In den wenigen Fällen, wo der Unterschied zwischen Formel und Beobachtung den Beobachtungsfehler ein wenig überschreitet, ist dies daraus zu erklären, daß wir die Formeln nur bis zu den Gliedern mit der fünften Potenz von $1/D$ ($D =$ Dielektrizitätskonstante) numerisch ausgewertet haben. Die Berücksichtigung des nächst höheren Gliedes, welche wir wegen des großen Rechnungsaufwandes unterlassen haben, würde voraussichtlich auch in diesen Fällen eine genügende Übereinstimmung herstellen. Wir möchten besonders hervorheben, daß unsere Resultate ganz auf dem Boden der Debye-Hückelschen Theorie stehen und zusätzliche Annahmen, wie z. B. die Assoziationshypothese Bjerrums[3]), überflüssig machen. Die Anlage der Arbeit ist aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtlich; der Vergleich von Theorie und Versuch in § 8 ist von dem Vorangehenden möglichst unabhängig dargestellt, so daß ein Leser, der die viele Mathematik nicht liebt und unsere Formel (107) auf guten Glauben zu nehmen gewillt ist, gleich mit diesem Paragraphen anfangen kann. Ein solcher Leser muß aber ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Formel (107) nur auf symmetrische Salze (zwei Ionen derselben Valenz) wie KCl und $ZnSO_4$ anwendbar ist; im unsymmetrischen Falle, wie bei $BaCl_2$ und K_2SO_4, treten noch weitere Glieder in der Formel hinzu [Gl. (34) anstatt (34a)], welche in den Tabellen von § 7 nicht enthalten sind. Wir werden in einer weiteren Abhandlung den unsymmetrischen Fall numerisch bearbeiten und die Resultate besonders auf die experimentellen Bestimmungen der Löslichkeitsbeeinflussung anwenden.

1) Siehe z. B. La Mer, King and Mason, J. Am. Chem. Soc. **49**, 313, 1927; **49**, 410, 1927. La Mer, Trans. Am. Elektrochem. Soc. **61**, 631, 1927.

2) H. Müller, diese Zeitschrift **28**, 324, 1927 u. **29**, 78, 1928, gibt eine graphische Lösung dieses Problems.

3) Bjerrum, Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fysisk. Medd. VII, No. 9, 1926.

Es ist uns eine angenehme Pflicht, den Behörden der Columbia University für die zur Ausführung dieser Arbeit gewährten Geldmittel, sowie den Stiftern des du Pont Fellowship und der Technischen Hochschule Drontheim, Norwegen, für Stipendien, welche dem einen von uns (K. S.) den Aufenthalt in den Vereinigten Staaten ermöglicht haben, unseren Dank auszusprechen.

§ 1. Stellung der Aufgabe.

Die grundlegende Gleichung der Debye-Hückelschen Theorie lautet[1])

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_i}{dr}\right) = -\frac{4\pi\varepsilon}{D}\sum_{j=1}^{s}\frac{N n_j z_j}{V} e^{-\frac{z_j \varepsilon \psi_i}{kT}} \tag{1}$$

und bestimmt, mit den Randbedingungen

$$\psi_i \to 0 \text{ für } r \to \infty,$$
$$\frac{d\psi_i}{dr} = -\frac{\varepsilon z_i}{D}\cdot\frac{1}{a_i^2} \text{ für } r = a_i, \tag{2}$$

das zu einem Ion der i-ten Sorte gehörige elektrostatische Potential ψ_i[2, 3]). Weil die Lösung als Ganzes elektrisch neutral ist, haben wir

$$\sum_{j=1}^{s} n_j z_j = 0. \tag{3}$$

Werden die rechts in (1) auftretenden Exponentialfunktionen nach Potenzen von ψ_i entwickelt, so kommt zufolge (3)

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_i}{dr}\right) - \varkappa^2 r^2 \psi_i = \varkappa^2 r^2 \Phi(\psi_i) = \varkappa^2 r^2 \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^{\nu-1} q_\nu \psi_i^\nu, \tag{4}$$

wo

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi N\varepsilon^2}{kTD}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j z_j^2}{V} \tag{5}$$

und

$$q_\nu = \frac{\sum_{j=1}^{s} n_j z_j^{\nu+1}}{\sum_{j=1}^{s} n_j z_j^2}. \tag{6}$$

Um ψ_i zu berechnen, vernachlässigen Debye und Hückel die höheren Potenzen von ψ_i in (4), d. h. ersetzen diese Gleichung durch

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_i}{dr}\right) - \varkappa^2 r^2 \psi_i = 0, \tag{4a}$$

und erhalten aus (4a) und (2)

$$\psi_i = \frac{\varepsilon z_i}{D(1+\varkappa a_i)}\cdot\frac{e^{\varkappa(a_i - r)}}{r}. \tag{7}$$

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, die Berechnung von ψ_i aus der ungekürzten Gleichung (4) sowohl analytisch als rechnerisch zu verfolgen, und die sich daraus ergebenden Werte der Aktivitätskoeffizienten mit den Debye-Hückelschen Näherungswerten zu vergleichen.

Zunächst soll in § 2 eine Frage erledigt werden, die ein gewisses theoretisches Interesse hat; das Resultat wird allerdings im weiteren Verlauf der Untersuchung nicht mehr verwendet.

---

1) P. Debye und E. Hückel, Physik. Zeitschr. **24**, 185, 1923, Gl. (21), wo n_i die Zahl der Ionen i-ter Sorte im Kubikzentimeter bedeutet, und folglich in unserer Bezeichnungsweise durch $\frac{Nn_i}{V}$ zu ersetzen ist.

2) Die Bezeichnungen sind: V = Volumen der Lösung, welches n_0 Mol des Lösungsmittels enthält, sowie n_i Mol der Ionen i-ter Sorte ($i = 1, 2, \ldots, s$) von Valenz z_i und „scheinbarem Durchmesser" a_i cm; D = Dielektrizitätskonstante der Lösung, welche von der absoluten Temperatur T und auch von den Molenbrüchen abhängen kann; N = Loschmidtsche Zahl, k = Boltzmannsche Konstante, ε = elektrisches Elementarquantum in elektrostatischen Einheiten.

3) Existenzbeweis der Lösungen dieser und allgemeinerer Randwertaufgaben bei T. H. Gronwall, Annals of Math. **28**, 355, 1927.



§ 2. Beweis, daß Punktladungen der Ionen mit den Gleichungen (1) und (2) unverträglich sind.

Schreiben wir

$$\psi_i = \overline{\psi}_i - \frac{\varepsilon z_i}{D} \cdot \frac{1}{r}, \tag{8}$$

so daß $\overline{\psi}_i$ für $r = a_i$ das Potential eines Ions gegen seine Ionenatmosphäre darstellt, so wird die gesamte elektrische Energie der Ionenlösung

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} N n_i z_i \varepsilon (\overline{\psi}_i)_{r=a_i} \tag{9}$$

und (7) ergibt[1]

$$U_e = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \frac{N n_i z_i^2 \varepsilon^2 \varkappa}{D(1 + \varkappa a_i)}.$$

Dieser Ausdruck bleibt offenbar endlich, wenn eins oder mehrere der a_i gleich Null gesetzt werden, d. h. wenn die entsprechenden Ionen als Punktladungen angenommen werden.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, daß dieses Resultat nicht mehr besteht, wenn zur Berechnung von ψ_i statt (4a) die ungekürzte Gleichung (1) benutzt wird, indem dann

$$U_e \to -\infty \text{ für } a_i \to 0. \tag{10}$$

Zum Beweise bezeichnen wir die rechte Seite von (1) mit $f(\psi_i)$; dann wird

$$f'(\psi_i) = \frac{4\pi\varepsilon^2}{D} \sum_{j=1}^{s} \frac{N n_j z_j^2}{VkT} e^{-\frac{z_j \varepsilon \psi_i}{kT}},$$

und der Ausdruck rechts ist offenbar immer positiv, so daß $f(\psi_i)$ mit ψ_i wächst; ferner ist $f(0) = 0$ wegen (3), und folglich

$$f(\psi_i) \gtreqless 0 \text{ je nachdem } \psi_i \gtreqless 0. \tag{11}$$

Wir schreiben jetzt (1) in der Form

$$\frac{d^2\psi_i}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi_i}{dr} = f(\psi_i);$$

für ein Extremum von ψ_i ist $\frac{d\psi_i}{dr} = 0$ und (11) zeigt, daß dann $\frac{d^2\psi_i}{dr^2}$ das Vorzeichen von ψ_i hat, so daß ein positives Extremum ein Minimum, ein negatives ein Maximum ist. Von zwei aufeinanderfolgenden Extremen ist das eine ein (positives) Minimum, das andere ein (negatives) Maximum, und folglich das Minimum größer als das Maximum. Dieser Widerspruch zeigt, daß höchstens ein Extremum auftritt. Nehmen wir jetzt $z_i > 0$ an, so nimmt nach der zweiten Gleichung (2) ψ_i bei $r = a_i$ anfänglich ab, ein etwaiges Extremum wäre also ein positives Minimum, was der ersten Gl. (2) widerspricht; demnach nimmt ψ_i von $r = a_i$ an monoton ab und ist stets positiv. Zufolge (8) können wir (1) und (2) auch so schreiben

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\overline{\psi}_i}{dr}\right) = f(\psi_i) = f\left(\overline{\psi}_i + \frac{\varepsilon z_i}{D} \cdot \frac{1}{r}\right), \tag{1a}$$

$$\overline{\psi}_i \to 0 \text{ für } r \to \infty,$$

$$\frac{d\overline{\psi}_i}{dr} = 0 \text{ für } r = a_i. \tag{2a}$$

Multiplizieren wir (1a) mit r^2 und integrieren von a_i bis r, so kommt, indem wir die Integrationsveränderliche mit s bezeichnen und die zweite Gleichung (2a) berücksichtigen

$$r^2 \frac{d\overline{\psi}_i}{dr} = \int_{a_i}^{r} s^2 f(\psi_i(s))\, ds.$$

Wegen $\psi_i > 0$ und (11) ist der Integrand positiv, so daß $\frac{d\overline{\psi}_i}{dr} > 0$; $\overline{\psi}_i$ wächst also mit r, und zwar zum

1) Debye und Hückel, l. c. 1, Gl. (23).

Grenzwert Null wegen (2a), so daß

$$\overline{\psi}_i(a_i) < \overline{\psi}_i(r) < 0 \text{ für } a_i < r. \tag{12}$$

Nun dividieren wir die vorangehende Gleichung durch r^2 und integrieren von r bis ∞; wegen (2a) erhalten wir, indem die Integrationsveränderliche mit t bezeichnet wird

$$-\overline{\psi}_i(r) = \int_r^\infty \frac{dt}{t^2} \int_{a_i}^t s^2 f(\psi_i(s))\, ds,$$

und durch Umkehrung der Integrationsfolge, nach einer bekannten Dirichletschen Formel,

$$-\overline{\psi}_i(r) = \int_r^\infty s^2 f(\psi_i(s))\, ds \int_s^\infty \frac{dt}{t^2} = \int_r^\infty s f(\psi_i(s))\, ds.$$

Wegen (3) ist mindestens ein z_i negativ, und es wächst also $f(\psi_i)$ wie eine Exponentialfunktion ins Unendliche für $\psi_i \to \infty$; da außerdem $f(0) = 0$ ist, so existiert eine positive Konstante c derart, daß

$$f(\psi_i) > c\psi_i^2 \text{ für } \psi_i > 0.$$

Folglich wird, wenn wir $r = a_i < 1$ annehmen

$$-\psi_i(a_i) > c\int_{a_i}^\infty s\,\psi_i(s)^2\, ds > c\int_{a_i}^1 s\,\psi_i(s)^2\, ds,$$

oder

$$-\overline{\psi}_i(a_i) > c\int_{a_i}^1 s\left[\overline{\psi}_i(s) + \frac{\varepsilon z_i}{D}\cdot\frac{1}{s}\right]^2 ds = c\int_{a_i}^1 \left[s\,\overline{\psi}_i(s^2) + \frac{2\varepsilon z_i}{D}\overline{\psi}_i(s) + \frac{\varepsilon^2 z_i^2}{D^2}\cdot\frac{1}{s}\right] ds.$$

Nun ist $\overline{\psi}_i(s)^2 > 0$ und $\overline{\psi}_i(s) > \overline{\psi}_i(a_i)$ wegen (12), so daß

$$-\overline{\psi}_i(a_i) > c\int_{a_i}^1 \left[\frac{2\varepsilon z_i}{D}\overline{\psi}_i(a_i) + \frac{\varepsilon^2 z_i^2}{D^2}\cdot\frac{1}{s}\right] ds = c\left[\frac{2\varepsilon z_i}{D}\overline{\psi}_i(a_i)(1 - a_i) + \frac{\varepsilon^2 z_i^2}{D^2}\log\frac{1}{a_i}\right],$$

oder

$$-\overline{\psi}_i(a_i) > \frac{c\varepsilon^2 z_i^2}{D^2}\cdot\frac{\log\frac{1}{a_i}}{1 + \frac{2c\varepsilon z_i}{D}(1 - a_i)}.$$

Wegen $z_i > 0$ wird also

$$\psi_i(a_i) \to -\infty \text{ für } a_i \to 0.$$

Der Fall $z_i < 0$ wird durch Vertauschung von $\overline{\psi}_i$ mit $-\overline{\psi}_i$ auf den vorhergehenden zurückgeführt, und folglich ist

$$\overline{\psi}_i(a_i) \to +\infty \text{ für } a_i \to 0 \text{ und } z_i < 0.$$

Diese beiden Resultate in (9) eingetragen ergeben dann sofort die zu beweisende Beziehung (10).

§ 3. Entwicklung des Potentials, der freien Energie und der Aktivitätskoeffizienten nach Potenzen von $\frac{1}{D}$.

Diese Entwicklungen werden am bequemsten erhalten, indem man mittels der Greenschen Funktion die Differentialgleichung (1) und die Randbedingungen (2) durch eine einzige Integralgleichung ersetzt.

Schreiben wir

$$\varrho = \varkappa r, \quad x_i = \varkappa a_i \tag{13}$$

und

$$L(\psi(\varrho)) = \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{d\psi(\varrho)}{d\varrho}\right) - \varrho^2\psi(\varrho), \tag{14}$$



so nehmen die Differentialgleichung (4) und die Randbedingungen (2) die Form

$$L(\psi_i(\varrho)) = \varrho^2 \Phi(\psi_i(\varrho)), \tag{15}$$

$$\psi_i(\varrho) \to 0 \text{ für } \varrho \to \infty,$$

$$\frac{d\psi_i(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{\varepsilon z_i}{D} \cdot \frac{1}{a_i x_i} \text{ für } \varrho = x_i. \tag{16}$$

Wir führen jetzt die Greensche Funktion $\zeta(u, \varrho)$ ein als Lösung der Differentialgleichung

$$L(\zeta(u)) = \frac{d}{du}\left(u^2 \frac{d\zeta}{du}\right) - u^2\zeta = 0, \tag{17}$$

mit den Bedingungen

$$\zeta \to 0 \text{ für } u \to \infty,$$

$$\zeta \text{ stetig bei } u = \varrho,$$

$$\varrho^2 \lim_{h \to 0} \left[\left(\frac{d\zeta}{du}\right)_{u=\varrho+h} - \left(\frac{d\zeta}{du}\right)_{u=\varrho-h}\right] = 1, \tag{18}$$

$$\frac{d\zeta}{du} = 0 \text{ für } u = x_i.$$

Die Gleichung (17) läßt sich auch schreiben

$$\frac{d^2(u\zeta)}{du^2} - u\zeta = 0,$$

und ihre allgemeine Lösung ist folglich

$$u\zeta = C_1 e^{u-\varrho} + C_2 e^{\varrho-u},$$

wo die Integrationskonstanten C_1 und C_2 von ϱ abhängen werden, und wegen der Unstetigkeit von $\frac{d\zeta}{du}$ bei $u = \varrho$ haben diese Konstanten verschiedene Werte für $u < \varrho$ und $u > \varrho$.

Unter Berücksichtigung der ersten Bedingung (18) haben wir demnach

$$\zeta = C_1 \frac{e^{u-\varrho}}{u} + C_2 \frac{e^{\varrho-u}}{u} \text{ für } u < \varrho,$$

$$\zeta = C \frac{e^{\varrho-u}}{u} \text{ für } u > \varrho,$$

und die drei letzten Bedingungen (18) werden

$$C_1 + C_2 = C,$$

$$-C(\varrho+1) - C_1(\varrho-1) + C_2(\varrho+1) = 1,$$

$$C_1(x_i - 1)e^{x_i-\varrho} - C_2(x_i+1)e^{\varrho-x_i} = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt nun

$$\begin{aligned} \zeta(u, \varrho) &= -\frac{1}{2\varrho u}\left(e^{u-\varrho} + \frac{x_i - 1}{x_i + 1} e^{2x_i - u - \varrho}\right) \text{ für } u < \varrho, \\ \zeta(u, \varrho) &= -\frac{1}{2\varrho u}\left(e^{\varrho-u} + \frac{x_i - 1}{x_i + 1} e^{2x_i - u - \varrho}\right) \text{ für } u > \varrho, \end{aligned} \tag{19}$$

so daß für $u = x_i$

$$\zeta(x_i, \varrho) = -\frac{1}{1 + x_i} \frac{e^{x_i - \varrho}}{\varrho}. \tag{20}$$

Die gesuchte Integralgleichung wird erhalten, indem die mittels (14) leicht zu bestätigende Identität

$$\zeta(u) L(\psi_i(u)) - \psi_i(u) L(\zeta(u)) = \frac{d}{du} u^2 \left(\zeta \frac{d\psi_i}{du} - \psi_i \frac{d\zeta}{du}\right)$$



von $u = x_i$ bis $u = \infty$ integriert wird, wobei wegen der Unstetigkeit von $\frac{d\zeta}{du}$ das Integrationsintervall rechts bei $u = \varrho$ unterteilt werden muß. Wir finden dann

$$\int_{x_i}^{\infty} [\zeta(u) L(\psi_i(u)) - \psi_i(u) L(\zeta(u))] du$$
$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \left[u^2 \left(\zeta \frac{d\psi_i}{du} - \psi_i \frac{d\zeta}{du} \right) \right]_{u=x_i}^{u=\varrho-h} + \left[u^2 \left(\zeta \frac{d\psi_i}{du} - \psi_i \frac{d\zeta}{du} \right) \right]_{u=\varrho+h}^{u=\infty} \right\}. \tag{21}$$

Wegen (15) und (17) wird das Integral links

$$\int_{x_i}^{\infty} \zeta(u) u^2 \Phi(\psi_i(u)) du,$$

und wegen (18) wird der Ausdruck rechts

$$-x_i^2 \zeta(x_i) \left(\frac{d\psi_i}{du} \right)_{u=x_i} + \psi_i(\varrho) + \left[u^2 \left(\zeta \frac{d\psi_i}{du} - \psi_i \frac{d\zeta}{du} \right) \right]_{u=\infty}.$$

Im vorhergehenden Paragraphen wurde gezeigt, daß $\psi_i(u)$ kein Extrem besitzt und folglich monoton gegen Null strebt für $u \to \infty$; zufolge (1) bleibt $\frac{d}{du}\left(u^2 \frac{d\psi_i}{du}\right)$ absolut kleiner als eine Konstante mal u^2, so daß $\left| u^2 \frac{d\psi_i}{du} \right|$ nicht schneller als u^3 ins Unendliche wachsen kann. Andererseits streben wegen (19) ζ und $\frac{d\zeta}{du}$ gegen Null wie e^{-u}, so daß das dritte Glied in dem Ausdruck oben verschwindet. Gleichung (21) wird demnach

$$\int_{x_i}^{\infty} \zeta(u) \Phi(\psi_i(u)) u^2 du = -x_i^2 \zeta(x_i) \left(\frac{d\psi_i}{du} \right)_{u=x_i} + \psi_i(\varrho),$$

und indem wir (20) und (16) benutzen, folgt die gesuchte Integralgleichung

$$\psi_i(\varrho) = \frac{\varepsilon z_i x_i}{D(1 + x_i)} \cdot \frac{e^{x_i - \varrho}}{a_i \varrho} + \int_{x_i}^{\infty} \zeta(u, \varrho) \Phi(\psi_i(u)) u^2 du. \tag{22}$$

Es werde jetzt für $\psi_i(\varrho)$ eine Reihenentwicklung nach fallenden Potenzen von D angesetzt, und zwar in der Form

$$\psi_i(\varrho) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m-1} z_i^m}{(D a_i)^m (-kT)^{m-1}} \psi_m(\varrho, x_i). \tag{23}$$

Wird diese Reihe in die Potenzreihe (4) für $\Phi(\psi_i)$ eingetragen, erhalten wir

$$\Phi(\psi_i) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\varepsilon}{-kT} \right)^{\nu-1} q_\nu \sum_{m_1, \ldots, m_\nu} \frac{\varepsilon^{2m_1-1} z_i^{m_1} \psi_{m_1}(\varrho, x_i)}{(D a_i)^{m_1} (-kT)^{m_1-1}} \cdots \frac{\varepsilon^{2m_\nu-1} z_i^{m_\nu} \psi_{m_\nu}(\varrho, x_i)}{(D a_i)^{m_\nu} (-kT)^{m_\nu-1}},$$

wo die innere Summe über alle ganzzahligen positiven $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ zu erstrecken ist.

Ziehen wir jetzt alle Summenglieder zusammen, in welchen $\frac{1}{D}$ in der m ten Potenz auftritt, d. h. wo

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu = m. \tag{24}$$

In jedem solchen Glied tritt ε auf in der Potenz

$$\nu - 1 + (2m_1 - 1) + (2m_2 - 1) + \cdots + (2m_\nu - 1),$$

was zufolge (24) gleich $2m - 1$ wird. Ähnlich sieht man, daß z_i und $\frac{1}{a_i}$ zur m-ten, $\frac{1}{-kT}$ zur $m - 1$-ten Potenz auftreten, so daß

$$\Phi(\psi_i) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m-1} z_i^m}{(Da_i)^m (-kT)^{m-1}} \Phi_m(\varrho, x_i), \tag{25}$$

wo

$$\Phi_m(\varrho, x_i) = \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu = m, \\ \nu \geq 2}} \frac{q_\nu}{\nu!} \psi_{m_1}(\varrho, x_i) \psi_{m_2}(\varrho, x_i) \cdots \psi_{m_\nu}(\varrho, x_i). \tag{26}$$

Tragen wir links in (22) die Reihe (23) ein, rechts aber die Reihe (25), so ergibt der Vergleich gleicher Potenzen von $\frac{1}{D}$, daß

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\varrho, x_i) &= \frac{x_i}{1 + x_i} \cdot \frac{e^{x_i - \varrho}}{\varrho}, \\ \psi_m(\varrho, x_i) &= \int_{x_i}^{\infty} \zeta(u, \varrho) \Phi_m(u, x_i) u^2 du \text{ für } m > 1 . \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Wegen $\nu \geqq 2$ folgt aus (24), daß jedes der in (26) auftretenden $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ kleiner als m ist, so daß (27) eine sukzessive Bestimmung der $\psi_m(\varrho, x_i)$ mit wachsendem m ergibt, und zwar hängt wegen (19) und (26) jedes $\psi_m(\varrho, x_i)$ außer von ϱ nur von x_i und den durch (6) gegebenen q_ν ab.

Die Konvergenzuntersuchung der durch (27) bestimmten Reihe (23) folgt im nächsten Paragraphen; vorläufig wollen wir bei den rein formellen Entwicklungen bleiben.

Zur späteren Verwendung schreiben wir die ersten Ausdrücke (26) hierher; sie sind, wenn zur Abkürzung $\Phi_m(\varrho, x_i) = \Phi_m$ und $\psi_m(\varrho, x_i) = \psi_m$ geschrieben wird,

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1}{2} q_2 \psi_1^2, \\ \Phi_3 &= q_2 \psi_1 \psi_2 + \frac{1}{6} q_3 \psi_1^3, \\ \Phi_4 &= \frac{1}{2} q_2 (\psi_2^2 + 2 \psi_1 \psi_3) + \frac{1}{2} q_3 \psi_1^2 \psi_2 + \frac{1}{24} q_4 \psi_1^4, \\ \Phi_5 &= q_2 (\psi_1 \psi_4 + \psi_2 \psi_3) + \frac{1}{2} q_3 (\psi_1^2 \psi_3 + \psi_1 \psi_2^2) + \frac{1}{6} q_4 \psi_1^3 \psi_2 + \frac{1}{120} q_5 \psi_1^5, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Eine besondere Beachtung verdient der symmetrische Fall, wo die n_i paarweise gleich, die zugehörigen z_i numerisch gleich aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, wie z. B. bei KCl und $MgSO_4$. Dann verschwinden in (6) alle q_ν mit geradem ν, und die erste Gleichung (28) gibt $\Phi_2 = 0$, woraus nach (27) $\psi_2(\varrho, x_i) = 0$ folgt. Aus (28) folgt nun $\Phi_4 = 0$, und (27) zeigt, daß $\psi_4(\varrho, x_i) = 0$. Durch vollständige Induktion sieht man nun, daß alle $\psi_m(\varrho, x_i)$ mit geradem m verschwinden, indem man beachtet, daß für ungerades ν und gerades m nicht alle $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ in (24) ungerade sein können, und daß folglich jedes Glied in (26) bei geradem m einen Faktor Null enthält.

Wir schreiten jetzt zur Berechnung des von den Coulombschen Kräften herrührenden Anteils F_e der freien Energie der Lösung, und bedienen uns dazu des Debyeschen Ladungsprozesses[1]). Das Potential an einem Ion i-ter Sorte erhält man aus (23), indem $\varrho = x_i$ gesetzt wird:

$$\psi_i(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m-1} z_i^m}{(Da_i)^m (-kT)^{m-1}} \psi_m(x_i, x_i). \tag{23a}$$

Wird jetzt ε durch $\lambda\varepsilon$ ersetzt, so folgt aus (5) und (13), daß x_i auch mit λ multipliziert wird, und der obige Ausdruck für das Potential nimmt die Form an

$$\psi_i^{(\lambda)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m-1} z_i^m \lambda^{2m-1}}{(Da_i)^m (-kT)^{m-1}} \psi_m(\lambda x_i, \lambda x_i)$$

unter der für den Ladungsprozeß wesentlichen Annahme, daß D sich mit λ nicht ändert.

1) P. Debye, Physik. Zeitschr. 25, 97, 1924.

Der Ladungsprozeß besteht nun darin, daß man λ von 0 bis 1 wachsen läßt; die hierzu aufzuwendende Arbeit ist für ein Ion i-ter Sorte (deren Ladung jetzt $\lambda \varepsilon z_i$ ist)

$$\int_0^1 \varepsilon z_i \psi_i^{(\lambda)} d\lambda = z_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m} z_i^m}{(Da_i)^m (-kT)^{m-1}} \int_0^1 \lambda^{2m-1} \psi_m(\lambda x_i, \lambda x_i)\, d\lambda$$
$$= z_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m} z_i^m}{(Da_i)^m (-kT)^{m-1}} \cdot \frac{1}{x_i^{2m}} \int_0^{x_i} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx,$$

wo die letzte Zeile durch die Substitution $\lambda x_i = x$ entsteht. Da die Zahl der Ionen i-ter Sorte $N n_i$ ist, so wird die gesamte Ladungsarbeit

$$W = \sum_{j=1}^{s} N n_j z_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m} z_j^m}{(Da_j)^m (-kT)^{m-1}} \cdot \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx.$$

In unendlich verdünnter Lösung ist bekanntlich das Potential an einem Ion i-ter Sorte $\frac{\varepsilon z_i}{D_0 a_i}$, wo D_0 die Dielektrizitätskonstante des reinen Lösungsmittels ist, und die entsprechende Ladungsarbeit wird

$$W_0 = \sum_{j=1}^{s} \frac{N n_j \varepsilon^2 z_j^2}{2 D_0 a_j}.$$

Jetzt wird folgender Kreisprozeß bei konstantem Druck und Temperatur durchgeführt: 1. mittels eines halbdurchlässigen Stempels wird die Lösung unendlich verdünnt, gewonnene Arbeit = Freie Energie der Lösung = F; 2. die Ionen werden in der unendlich verdünnten Lösung entladen, gewonnene Arbeit = W_0; 3. die jetzt ideale Lösung wird durch den Stempel auf die ursprüngliche Konzentration zurückgebracht, Arbeitsaufwand = F_{ideal}; 4. die Ionen werden wieder geladen, Arbeitsaufwand = W. Dann wird $F + W_0 - F_{\text{ideal}} - W = 0$, oder $F_e = F - F_{\text{ideal}} = W - W_0$. Werden die oben gewonnenen Ausdrücke für W und W_0 eingesetzt, so kommt

$$F_e = \sum_{j=1}^{s} N n_j z_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m} z_j^m}{(Da_j)^m (-kT)^{m-1}} \cdot \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx - \sum_{j=1}^{s} \frac{N n_j z_j^2 \varepsilon^2}{2 D_0 a_j}. \qquad (29)$$

Der Aktivitätskoeffizient f_0 des Lösungsmittels wird jetzt bestimmt durch

$$\log f_0 = \frac{1}{NkT} \frac{\partial F_e}{\partial n_0} = -\sum_{j=1}^{s} n_j z_j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{-kTDa_j} \right)^m \cdot$$
$$\cdot \left[-\frac{m}{D} \frac{\partial D}{\partial n_0} \cdot \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx + \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx \right].$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx = \frac{\partial x_j}{\partial n_0} \frac{d}{dx_j} \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx$$
$$= \frac{\partial x_j}{\partial n_0} \left[-\frac{2m}{x_j^{2m+1}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx + \frac{1}{x_j} \psi_m(x_j, x_j) \right];$$

ferner ist wegen (5) und (13) $x_j^2 DV$ von n_0 unabhängig, so daß

$$\frac{2}{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial n_0} + \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial n_0} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial n_0} = 0;$$

endlich ist, indem wir die Ionenkonzentrationen in Mol per Liter

$$c_i = \frac{10^3 n_i}{V} \qquad (30)$$

einführen,

$$\frac{\partial D}{\partial n_0} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial D}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial n_0} = -\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial D}{\partial c_i} \cdot \frac{c_i}{V} \frac{\partial V}{\partial n_0}.$$

Wird dies alles in die Formel für $\log f_0$ eingetragen, so kommt nach kurzer Rechnung

$$\log f_0 = 10^{-3} \frac{\partial V}{\partial n_0} \sum_{j=1}^{s} c_j z_j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{-kTDa_j} \right)^m \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i}{D} \frac{\partial D}{\partial c_i} \right) \psi_m(x_j, x_j) - \frac{m}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x, x)\, dx \right]. \tag{31}$$

Ähnlich lassen sich die Aktivitätskoeffizienten der Ionen berechnen; hier tritt aber der erschwerende Umstand ein, daß die $\psi_m(x, x)$ außer von x noch in sehr komplizierter Weise von den die n_i enthaltenden q_ν abhängen. Nur in dem Falle $s = 2$ wird zufolge (3) und (6)

$$q_\nu = \frac{z_1^\nu - z_2^\nu}{z_1 - z_2}$$

von n_1 (und n_2) unabhängig, und für diesen Fall wollen wir den Aktivitätskoeffizienten des Salzes berechnen. Es möge ein Mol des Salzes ν_1, bzw. ν_2 Mol des Ions erster bzw. zweiter Sorte enthalten, so daß

$$\nu_1 : \nu_2 = -z_2 : z_1. \tag{32}$$

Sind dann n Mol des Salzes in der Lösung vorhanden, so wird $n_1 = n\nu_1$, $n_2 = n\nu_2$ und (29) nimmt die Form an

$$\frac{F_e}{NkT} = -n \left[\sum_{j=1}^{2} \nu_j z_j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{-kTDa_j} \right)^m \cdot \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x, x)\, dx + \sum_{j=1}^{2} \frac{\nu_j \varepsilon^2 z_j^2}{2kTD_0 a_j} \right],$$

und für die Aktivitätskoeffizienten f des Salzes erhalten wir die Gleichung

$$(\nu_1 + \nu_2) \log f = \frac{\partial}{\partial n} \frac{F_e}{NkT} = -\sum_{j=1}^{2} \nu_j z_j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{-kTDa_j} \right)^m \cdot \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx$$
$$- \sum_{j=1}^{2} \frac{\nu_j \varepsilon^2 z_j^2}{2kTD_0 a_j} - n \sum_{j=1}^{2} \nu_j z_j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{-kTDa_j} \right)^m \cdot$$
$$\cdot \left[-\frac{m}{D} \frac{\partial D}{\partial n} \cdot \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x,x)\, dx \right].$$

Wegen (5) und (13) ist $\frac{x_j^2 DV}{n}$ von n unabhängig, so daß

$$\frac{2}{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial n} + \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial n} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{1}{n} = 0,$$

und ferner, wenn

$$c = \frac{10^3 n}{V} \tag{33}$$

die Konzentration des Salzes ist,

$$\frac{\partial D}{\partial n} = \frac{dD}{dc} \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{c}{n} \frac{dD}{dc} \left(1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right).$$

Wir erhalten nun nach kurzer Rechnung

$$(\nu_1 + \nu_2) \log f = -\sum_{j=1}^{2} \nu_i z_j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{-kTDa_j} \right)^m \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \left(1 - \frac{c}{D} \frac{dD}{dc} \right) \psi_m(x_j, x_j) \right.$$
$$\left. - \left(m - 1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \cdot \frac{1}{x_j^{2m}} \int_0^{x_j} x^{2m-1} \psi_m(x, x)\, dx \right] - \sum_{j=1}^{2} \frac{\nu_j \varepsilon^2 z_j^2}{2kTD_0 a_j}. \tag{34}$$

In dem symmetrischen Falle, wo $z_1 = -z_2 = z$ und $\nu_1 = \nu_2 = 1$ ist, wurde vorhin bewiesen, daß alle ψ_m mit geradem m verschwinden; wird außerdem angenommen, daß $a_1 = a_2 = a$ ist, so wird nach (13) $x_1 = x_2 = x$, und (34) gibt

$$\log f = z \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z}{kTDa} \right)^{2m+1} \left[\frac{1}{2} \left(1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \left(1 - \frac{c}{D} \frac{dD}{dc} \right) \psi_{2m+1}(x, x) \right.$$
$$\left. - \left(2m - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \cdot \frac{1}{x^{4m+2}} \int_0^{x} x^{4m+1} \psi_{2+1}(x, x)\, dx \right] - \frac{\varepsilon^2 z^2}{2kTD_0 a}. \tag{34a}$$

Nehmen wir zur weiteren Vereinfachung an, daß D von c unabhängig ist, sowie daß $10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n}$ vernachlässigt werden kann, erhalten wir aus (34a)

$$\log f = z \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z}{kTDa} \right)^{2m+1} \left[\frac{1}{2} \psi_{2m+1}(x, x) - \frac{2m}{x^{4m+2}} \int_0^{x} x^{4m+1} \psi_{2m+1}(x, x)\, dx \right] - \frac{\varepsilon^2 z^2}{2kTDa}. \tag{34b}$$

Im symmetrischen Falle mit gleichem Ionendurchmesser a ist eine andere Methode zur Berechnung von $\log f$ von Güntelberg[1]) für die Debyesche Approximation und von Müller[2]) für die vollständige Gleichung (1) angegeben worden. Sie besteht darin, daß die Aufladungsarbeit eines einzelnen Ions bei voller Ladung aller übrigen Ionen, um die entsprechende Arbeit bei unendlicher Verdünnung vermindert, gleich $kT \log f$ gesetzt wird. Es soll hier gezeigt werden, daß diese Methode bei Berücksichtigung der höheren Glieder unrichtig ist, indem der so erhaltene Ausdruck für $\log f$ nur in der Debyeschen Approximation ($m = 0$), nicht aber in den höheren Gliedern mit (34b) übereinstimmt. Ist nämlich in einem gegebenen Augenblick des Ladungsprozesses die Ladung des einzelnen Ions $\lambda \varepsilon z$, so genügt sein Potential $\psi(\varrho)$ immer noch der Gleichung (15), die zweite Grenzbedingung (16) ist aber durch

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = -\frac{\lambda \varepsilon z}{Dax} \quad \text{für } \varrho = x$$

zu ersetzen. Diese Bedingung erhält man aber auch aus (16), indem $\frac{1}{D}$ durch $\frac{\lambda}{D}$ ersetzt, ε aber ungeändert gelassen wird. Aus (23) folgt dann durch Substitution von $\frac{\lambda}{D}$ anstatt $\frac{1}{D}$ und für $\varrho = x$ (unter Berücksichtigung des Verschwindens aller $\psi_m(x, x)$ mit geradem m)

$$\frac{\psi(x)}{kT} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{kTDa} \right)^{2m+1} \varepsilon^{4m+1} \lambda^{2m+1} \psi_{2m+1}(x, x),$$

und folglich

$$\log f = \int_0^1 \frac{\psi(x)}{kT} d(\lambda \varepsilon z) - \frac{\varepsilon^2 z^2}{2kTDa} = z \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z}{kTDa} \right)^{2m+1} \cdot \frac{1}{2m+2} \psi_{2m+1}(x, x) - \frac{\varepsilon^2 z^2}{2kTDa}, \tag{34c}$$

was nur in dem Gliede mit $m = 0$ mit (34b) übereinstimmt.

---

1) S. 155 von N. Bjerrum, Zeitschr. phys. Chem. **119**, 145, 1926.
2) H. Müller, Physik. Zeitschr. **28**, 324, 1927. Siehe auch eine Korrektur, diese Zeitschr. **29**, 78, 1928.

§ 4. Konvergenzbeweise.

Um die Konvergenz der Reihen (23), (29), (31) und (34) zu untersuchen, wollen wir uns der Majorantenmethode bedienen, und brauchen dazu eine obere Schranke für den absoluten Betrag von $\zeta(u, \varrho)$. Wir schreiben zunächst (19) in der Form (wo x_i durch x ersetzt ist)

$$\begin{aligned} -\zeta(u,\varrho) &= \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{1}{2u}\left(e^{u-x}+\frac{x-1}{x+1}e^{x-u}\right) \text{ für } u<\varrho, \\ -\zeta(u,\varrho) &= \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{1}{2u}\left(e^{-u-x+2\varrho}+\frac{x-1}{x+1}e^{x-u}\right) \text{ für } u>\varrho. \end{aligned} \tag{19a}$$

Wegen $u \geqq x$ ist $e^{u-x} \geqq e^{x-u}$, und für $u \geqq \varrho \geqq x$ ist $-u-x+2\varrho \geqq x-u$, so daß $e^{-u-x+2\varrho} \geqq e^{x-u}$; ferner ist $\frac{x-1}{x+1} > -1$ für $x > 0$, und folglich sind beide Ausdrücke rechts in (19a) positiv und stellen die Werte von $|\zeta(u,\varrho)|$ dar. Für $u \geqq \varrho \geqq x$ ist $-u-x+2\varrho \leqq u-x$ und demnach $e^{-u-x+2\varrho} \leqq e^{u-x}$; es folgt also aus (19a) daß für alle Werte von u und ϱ

$$|\zeta(u,\varrho)| \leqq \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{1}{2u}\left(e^{u-x}+\frac{x-1}{x+1}e^{x-u}\right). \tag{35}$$

Schreiben wir (35) in der Form

$$|\zeta(u,\varrho)| \leqq \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}(u-x)+x\,\mathfrak{Cos}(u-x)}{u}$$

und beachten daß, für $u-x \geqq 0$, $\mathfrak{Sin}(u-x) \leqq (u-x)\,\mathfrak{Cos}(u-x)$ ist (wie die Vergleichung der Potenzreihenentwicklungen beider Seiten sofort zeigt), so bekommen wir

$$|\zeta(u,\varrho)| \leqq \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}(u-x)}{1+x},$$

oder endlich

$$|\zeta(u,\varrho)| \leqq \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{e^{u-x}}{1+x}. \tag{36}$$

Aus (23) und (4) erhalten wir, wenn z den größten absoluten Betrag aller z_i bezeichnet,

$$\frac{\varepsilon z}{kT}\psi_i(\varrho) = \frac{\varepsilon^2 z z_i}{kTDa_i}\cdot\frac{x_i}{1+x_i}\cdot\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}+\int_{x_i}^{\infty}\zeta(u,\varrho)\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}q_\nu}{\nu!\,z^{\nu-1}}\left(\frac{\varepsilon z\psi_i(u)}{kT}\right)^{\nu}\cdot u^2\,du. \tag{23a}$$

Schreiben wir (6) in der Form

$$q_\nu = \frac{\sum_{i=1}^{s} n_i z_i^2\cdot z_i^{\nu-1}}{\sum_{i=1}^{s} n_i z_i^2},$$

so folgt wegen $|z_i| \leqq z$, daß

$$|q_\nu| \leqq z^{\nu-1}.$$

Schreiben wir der Einfachheit halber a und x statt a_i und x_i, so zeigt (36), daß

$$\varphi(\varrho) = \frac{\varepsilon^2 z^2}{kTDa}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}+\int_x^{\infty}\frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{e^{u-x}}{1+x}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\varphi(u)^\nu\cdot u^2\,du \tag{37}$$

eine Majorante von (23a) darstellt, d. h. die rein formell, nach der Methode des vorigen Paragraphen, aus (37) sich ergebende Entwicklung von $\varphi(\varrho)$ nach Potenzen von $\frac{1}{D}$ hat Koeffizienten, welche nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten von $\frac{\varepsilon z}{kT}\psi_i(\varrho)$. Mit der Bezeichnung

$$\beta = \frac{\varepsilon^2 z^2}{kTDa} \tag{38}$$

wird (37)

$$\varphi(\varrho) = \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\left[\frac{\beta x}{1+x} + \int_x^\infty \frac{e^{u-x}}{1+x} \sum_{\nu=2}^\infty \frac{\varphi(u)^\nu}{\nu!} \cdot u^2 du\right], \tag{39}$$

und weil die Klammer von ϱ unabhängig ist, so muß die Lösung dieser Integralgleichung die Form

$$\varphi(\varrho) = \mu x \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho} \tag{40}$$

haben, wo μ von ϱ unabhängig ist. Dieser Ausdruck in (39) eingetragen, ergibt

$$\mu = \frac{\beta}{1+x} + \frac{1}{1+x}\sum_{\nu=2}^\infty \frac{\mu^\nu x^{\nu-1}}{\nu!}\int_x^\infty \frac{e^{(\nu-1)(x-u)}}{u^{\nu-2}} du. \tag{41}$$

Zufolge (40) und (38) wird die Entwicklung von φ (ϱ) nach Potenzen von $\frac{1}{D}$ erhalten, indem das durch (41) als Funktion von β bestimmte μ nach Potenzen von β entwickelt wird. Um eine untere Schranke für den Konvergenzradius dieser Potenzreihe zu erhalten, ersetzen wir die Reihe rechts in (41) durch eine Majorante, indem wir beachten, daß

$$\int_x^\infty \frac{e^{(\nu-1)(x-u)}}{u^{\nu-2}} du < \frac{1}{x^{\nu-2}}\int_x^\infty e^{x-u} du = \frac{1}{x^{\nu-2}}$$

ist. Bestimmen wir also λ aus

$$\lambda = \frac{\beta}{1+x} + \frac{x}{1+x}\sum_{\nu=2}^\infty \frac{\lambda^\nu}{\nu!}, \tag{41a}$$

d. h. aus

$$\lambda = \frac{\beta}{1+x} + \frac{x}{1+x}(e^\lambda - 1 - \lambda), \tag{41b}$$

so ist die Entwicklung von λ nach Potenzen von β majorant zu derjenigen von μ. Weil die Koeffizienten aller Potenzen von λ rechts in (41a) positiv sind, so liefert offenbar der formelle Ansatz von λ als Potenzreihe in β lauter positive Koeffizienten in dieser Reihe. Nach einem Satze von Vivanti[1]) ist dann der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich β_0, wo β_0 die kleinste positive singuläre Stelle von $\lambda = \lambda(\beta)$ als Funktion von β bedeutet. Weil die Koeffizienten in $\lambda(\beta)$ positiv sind, so wächst $\lambda(\beta)$ monoton wenn β von Null bis β_0 wächst; andererseits wird zufolge (41b) $\beta \to -\infty$ als $\lambda \to \infty$, so daß folglich $\lambda_0 = \lambda(\beta_0)$ endlich und positiv ist. Nun genügen aber λ_0 und β_0 (41b) sowie der Gleichung, welche daraus erhalten wird, indem $\frac{d\beta}{d\lambda} = 0$ gesetzt wird, d. h.

$$1 = \frac{x}{1+x}(e^\lambda - 1),$$

woraus

$$\lambda_0 = \log\frac{1+2x}{x},$$

und nach (41b)

$$\beta_0 = (1+2x)\lambda_0 - x(e^{\lambda_0} - 1),$$

oder

$$\beta_0 = (1+2x)\log\frac{1+2x}{x} - 1 - x. \tag{42}$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\beta_0}{dx} = 2\log\frac{1+2x}{x} - \frac{1}{x} - 1,$$

$$\frac{d^2\beta_0}{dx^2} = \frac{1}{x^2(1+2x)} > 0,$$

1) Siehe L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. 2 (Leipzig 1927), S. 280.

so daß $\frac{d\beta_0}{dx} < 0$ für $0 < x \leq \frac{1}{2}$, und folglich wächst β_0 monoton bis $+\infty$, wenn x von $\frac{1}{2}$ bis 0 abnimmt. Hiernach gibt es zu jedem β ein x_0 derart, daß die Potenzreihe $\lambda(\beta)$, und folglich die Potenzreihe für μ, für $0 \leq x \leq x_0$ in bezug auf x absolut und gleichmäßig konvergiert. Dasselbe gilt dann für $0 \leq x_i \leq x_0$ von der Reihe (23), so daß die bei der Ableitung von (29) vorgenommene Vertauschung von Integration und Summation berechtigt ist, und (29) absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Reihen rechts in (31) und (34) konvergieren dann auch absolut und gleichmäßig, und da ihre Glieder die Ableitungen nach n_0 bzw. n der Glieder von (29) sind, so stellen (31) und (34) die betreffenden Aktivitätskoeffizienten auch wirklich dar.

Weil die zu (41a) führenden Abschätzungen sehr roh sind, wollen wir von der numerischen Berechnung von x_0 im allgemeinen Falle absehen. Es soll dagegen, zwecks Verwendung in § 8, jetzt kurz angegeben werden, wie sich die Sache im symmetrischen Falle mit $s = 2$ gestaltet. Es ist dann $z_1 = -z_2 = z$, und in $\Phi(\psi)$ fallen alle geraden Potenzen von ψ aus. Die majorante Integralgleichung (39) ist demnach durch die folgende zu ersetzen

$$\varphi(\varrho) = \frac{e^{x-\varrho}}{\varrho}\left[\frac{\beta x}{1+x} + \int_x^\infty \frac{e^{u-x}}{1+x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi(u)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\cdot u^2\,du\right],$$

und die Substitution (40) ergibt statt (41)

$$\mu = \frac{\beta}{1+x} + \frac{1}{1+x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mu^{2\nu+1}x^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-1}}\,du. \tag{43}$$

Zur Aufstellung einer (41a) entsprechenden, aber schärferen Majorante führt die durch Teilintegration leicht zu bestätigende Gleichung

$$\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-1}}\,du = \frac{1}{2\nu-2}\cdot\frac{1}{x^{2\nu-2}} - \frac{2\nu}{2\nu-2}\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-2}}\,du,$$

wo $\nu > 1$ ist. Ferner haben wir

$$\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-2}}\,du > \int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-2}}\cdot\frac{x}{u}\,du = x\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-1}}\,du,$$

woraus in Verbindung mit der vorangehenden Gleichung

$$\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-1}}\,du < \frac{1}{2\nu-2}\cdot\frac{1}{x^{2\nu-2}} - \frac{2\nu x}{2\nu-2}\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-1}}\,du$$

und

$$\int_x^\infty \frac{e^{2\nu(x-u)}}{u^{2\nu-1}}\,du < \frac{1}{2\nu-2+2\nu x}\cdot\frac{1}{x^{2\nu-2}} \quad \text{für } \nu > 1$$

folgt. Für $\nu = 1$ ergibt die Schwarzsche Ungleichung

$$\int_x^\infty \frac{e^{2(x-u)}}{u}\,du < \left[\int_x^\infty e^{4(x-u)}\,du\cdot\int_x^\infty\frac{du}{u^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}},$$

und aus (43) erhalten wir die Majorante

$$\lambda = \frac{\beta}{1+x} + \frac{1}{1+x}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}\lambda^3}{12} + x^2\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\lambda^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!\,(2\nu-2+2\nu x)}\right]. \tag{44}$$

Diese Gleichung wird jetzt genau wie (41b) behandelt; das λ_0 wird aus $\frac{d\beta}{d\lambda} = 0$ oder

$$1 = \frac{1}{1+x}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}\lambda^2}{4} + x^2\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\lambda^{2\nu}}{(2\nu)!\,(2\nu-2+2\nu x)}\right] \tag{45}$$

gefunden, und das zugehörige β_0 sodann aus (44). Die Koeffizienten der Potenzen von λ rechts in (44) wachsen mit x, und hieraus folgt leicht daß $\frac{\beta_0}{1+x}$ mit x nicht wachsen kann. Aus dieser Bemerkung und der numerischen Berechnung von β_0 für geeignet gewählte Werte von x ergibt sich dann, daß für wäßrige Lösungen eines ein — einwertigen Salzes bei 25^0 C die Reihen (23), (29), (31) und (34) für $0 \leq x \leq 1$ absolut und gleichmäßig konvergieren wenn $a \geqq 2 \cdot 10^{-8}$ cm ist. Bei $a \geqq 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ gilt dasselbe für $0 \leq x \leq 0{,}5$ und bei $a \geqq 1 \cdot 10^{-8}$ für $0 \leq x \leq 0{,}3$. Das für $a \geqq 1 \cdot 10^{-8}$ angegebene Resultat erfordert allerdings noch schärfere Abschätzungen als die oben benutzten. Andererseits folgt in derselben Weise, daß für $a \geqq 1 \cdot 10^{-8}$ und $x \geqq 1$ absolute und gleichmäßige Konvergenz stattfindet. Die Lücke zwischen $x = 0{,}3$ und $x = 1$, wo die Konvergenz nicht bewiesen wurde, dürfte wohl durch noch genauere Abschätzungen auszufüllen sein.

§ 5. Näherungsausdrücke für Potential, freie Energie und Aktivitätskoefffizienten bei sehr kleinen Konzentrationen[1]).

Wenn die Konzentrationen aller Ionen sehr klein sind, wird wegen (5) auch $\varkappa$ sehr klein, und es sollen jetzt Ausdrücke ermittelt werden, welche, für genügend kleines $\varkappa$, $\psi_i(x)$ und $\log f$ bis auf einen Fehler von der Größenordnung $\varkappa^3 \left(\log \frac{1}{\varkappa}\right)^2$, sowie F_e und $\log f_0$ bis auf einen Fehler der Größenordnung $\varkappa^5 \left(\log \frac{1}{\varkappa}\right)^2$ darstellen. Um einige hierzu nötige Restabschätzungen in der einfachsten Weise auszuführen, empfiehlt es sich, D auch komplexe Werte annehmen zu lassen, und um Verwechslungen mit dem sonst immer benutzten reellen und positiven D zu verhüten, werden wir ein komplexes D mit y bezeichnen.

Wir bestimmen jetzt das nicht zu β aber zu $\beta_1 = 2\beta$ gehörige x_0 des vorigen Paragraphen; dann konvergieren, wenn D durch y ersetzt wird, die Reihen (23), (29), (31) und (34) absolut und gleichmäßig für $|y| \geqq \frac{D}{2}$ und $0 \leq x_i \leq x_0$, und es ist, wenn λ_1 die zu $\beta = \beta_1$, $x = x_0$ gehörige Lösung von (41a) ist, wegen (40) und der Majoranteneigenschaft von $\varphi(\varrho)$ in bezug auf $\frac{\varepsilon z \psi_i(\varrho)}{kT}$,

$$\frac{\varepsilon z}{kT} |\psi_i(\varrho)| \leq \lambda_1 x_i \frac{e^{x_i - \varrho}}{\varrho} \leq \lambda_1 \text{ für } \varrho \geqq x_i. \tag{46}$$

Aus (41a) folgt daß $\lambda_1 > \frac{\beta_1}{1+x_i}$, und folglich ist auch

$$\frac{\varepsilon z}{kT} \left| \frac{\varepsilon z_i x_i}{y a_i (1+x_i)} \frac{e^{x_i - \varrho}}{\varrho} \right| \leq \lambda_1 x_i \frac{e^{x_i - \varrho}}{\varrho} \leqq \lambda_1 \text{ für } \varrho \geqq x_i. \tag{47}$$

Wegen $|q_\nu| \leq z^{\nu-1}$ ist zufolge (4)

$$|\Phi(\psi_i(\varrho))| \leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\varepsilon z}{kT}\right)^{\nu-1} |\psi_i(\varrho)|^\nu = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon z}{kT} |\psi_i(\varrho)|^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2}{(\nu+2)!} \left| \frac{\varepsilon z}{kT} \psi_i(\varrho) \right|^\nu$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon z}{kT} |\psi_i(\varrho)|^2 e^{\left|\frac{\varepsilon z}{kT} \psi_i(\varrho)\right|},$$

so daß nach (46)

$$|\Phi(\psi_i(\varrho))| \leq \frac{1}{2} \frac{kT}{\varepsilon z} e^{\lambda_1} \lambda_1^2 x_i^2 \frac{e^{2(x_i - \varrho)}}{\varrho^2}. \tag{48}$$

Aus (22) erhalten wir, indem wir D durch y ersetzen und (36) und (48) beachten

$$\left| \psi_i(\varrho) - \frac{\varepsilon z_i x_i}{y a_i (1+x_i)} \frac{e^{x_i - \varrho}}{\varrho} \right| \leq \int_{x_i}^{\infty} |\zeta(u, \varrho)| \cdot |\Phi(\psi_i(u))| \, u^2 \, du \leq \frac{1}{2} \frac{kT}{\varepsilon z} \frac{e^{\lambda_1} \lambda_1^2 x_i^2}{1+x_i} \frac{e^{x_i - \varrho}}{\varrho} \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{x_i - u}}{u} du. \tag{49}$$

---

1) T. H. Gronwall, Proc. Nat. Acad. Sci. **13**, 198, 1927.

Es ist aber bekanntlich[1]), wenn C die Eulersche Konstante bezeichnet,

$$\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du = \log\frac{1}{x} - C - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{x^\nu}{\nu}, \tag{50}$$

woraus für $0 < x \leqq x_0 < 1$

$$0 < \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du < b_1 \log\frac{1}{x}, \tag{51}$$

wo b_1 (sowie die später auftretenden $b_2, b_3, \ldots$) eine Konstante ist, auf deren Zahlenwert es für unseren Zweck nicht ankommt. Aus (51) und (49) folgt nun, daß für $|y| \geqq \frac{D}{2}$, $0 \leqq x_i \leqq x_0$, $\varrho \geqq x_i$,

$$\left|\psi_i(\varrho) - \frac{\varepsilon z_i x_i}{y a_i(1+x_i)}\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}\right| \leqq b_2 x_i^2 \log\frac{1}{x_i}\cdot\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}. \tag{52}$$

Ersetzen wir hier wieder y durch D, so besagt diese Ungleichung, daß das Potential $\psi_i(\varrho)$ durch das erste Glied in (23), d. h. durch die Debyesche Approximation, bis auf einen Fehler von der Größenordnung $x_i^2 \log\frac{1}{x_i}$ dargestellt wird. Wir wollen jetzt die Annäherung an $\psi_i(\varrho)$ noch einen Schritt weiter treiben. Es seien ξ_1 und ξ_2 komplexe Größen, und $|\xi_1| \leqq \xi$, $|\xi_2| \leqq \xi$; mittels der Identität

$$\xi_1^\nu - \xi_2^\nu = (\xi_1 - \xi_2)\left(\xi_1^{\nu-1} + \xi_1^{\nu-2}\xi_2 + \cdots + \xi_1\xi_2^{\nu-2} + \xi_2^{\nu-1}\right)$$

folgt, daß

$$|\xi_1^\nu - \xi_2^\nu| \leqq |\xi_1 - \xi_2|\left(|\xi_1|^{\nu-1} + |\xi_1|^{\nu-2}|\xi_2| + \cdots + |\xi_2|^{\nu-1}\right) \leqq |\xi_1 - \xi_2|\cdot\nu\xi^{\nu-1},$$

so daß, zufolge (4) und $|q_\nu| \leqq z^{\nu-1}$

$$|\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)| \leqq |\xi_1 - \xi_2| \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\nu}{\nu!}\left(\frac{\varepsilon z \xi}{kT}\right)^{\nu-1} \leqq |\xi_1 - \xi_2|\cdot\frac{\varepsilon z\xi}{kT}e^{\frac{\varepsilon z\xi}{kT}}.$$

Setzen wir $\xi_1 = \psi_i(\varrho)$, $\xi_2 = \frac{\varepsilon z_i x_i}{y a_i(1+x_i)}\cdot\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}$, so können wir zufolge (46) und (47) $\xi = \lambda_1 x_i\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}$ nehmen, und unsere Ungleichung wird, wenn (52) herangezogen wird

$$\left|\Phi(\psi_i(\varrho)) - \Phi\left(\frac{\varepsilon z_i x_i}{y a_i(1+x_i)}\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}\right)\right| \leqq b_2 x_i^2 \log\frac{1}{x_i}\cdot\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}\cdot\lambda_1 x_i\frac{e^{x_i-\varrho}}{\varrho}\cdot e^{\lambda_1} \leqq b_3 x_i^3 \log\frac{1}{x_i}\cdot\frac{e^{2(x_i-\varrho)}}{\varrho^2}. \tag{53}$$

Schreiben wir jetzt

$$\overline{\psi}_i(x_i) = \frac{\varepsilon z_i}{y a_i(1+x_i)} + \int_{x_i}^{\infty}\zeta(u,x_i)\,\Phi\left(\frac{\varepsilon z_i x_i}{y a_i(1+x_i)}\frac{e^{x_i-u}}{u}\right)u^2\,du, \tag{54}$$

so wird zufolge (22), (20), (54) und (53)

$$|\psi_i(x_i) - \overline{\psi}_i(x_i)| \leqq \int_{x_i}^{\infty}|\zeta(u,x_i)|\left|\Phi(\psi_i(u)) - \Phi\left(\frac{\varepsilon z_i x_i}{y a_i(1+x_i)}\frac{e^{x_i-u}}{u}\right)\right|u^2\,du$$

$$\leqq \int_{x_i}^{\infty}\frac{1}{1+x_i}\frac{e^{x_i-u}}{u}\cdot b_3 x_i^3\log\frac{1}{x_i}\cdot\frac{e^{2(x_i-u)}}{u^2}\,u^2\,du = \frac{b_3 e^{3x_i}}{1+x_i}\cdot x_i^3\log\frac{1}{x_i}\int_{x_i}^{\infty}\frac{e^{-3u}}{u}\,du.$$

Aus (51) folgt

$$0 < \int_{x_i}^{\infty}\frac{e^{-3u}}{u}\,du < \int_{x_i}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du = b_1\log\frac{1}{x_i},$$

und die vorhergehende Ungleichung ergibt

$$|\psi_i(x_i) - \overline{\psi}_i(x_i)| < b_4 x_i^3\left(\log\frac{1}{x_i}\right)^2. \tag{55}$$

1) Siehe z. B. den Artikel über bestimmte Integrale von G. Brunel in Bd. 2, Teil 1 der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Zufolge (54), (20) und (4) ist aber

$$\psi_i(x_i) = \frac{\varepsilon z_i}{y a_i (1 + x_i)} - \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{q_\nu}{\nu!} \frac{\varepsilon^{2\nu-1} z_i^\nu}{(-kT)^{\nu-1} (y a_i)^\nu} \cdot \frac{x_i^\nu}{(1+x_i)^{\nu+1}} \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{(\nu+1)(x_i-u)}}{u^{\nu-1}} du. \tag{56}$$

Für $\nu = 2$ ist

$$\frac{x_i^\nu}{(1+x_i)^{\nu+1}} \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{(\nu+1)(x_i-u)}}{u^{\nu-1}} du = \frac{x_i^2 e^{3x_i}}{(1+x_i)^3} \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{-3u}}{u} du,$$

und

$$\frac{e^{3x_i}}{(1+x_i)^3} = 1 + \cdots,$$

wo die nicht ausgeschriebenen Glieder mit x_i verschwinden; ferner ist wegen (50)

$$\int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{-3u}}{u} du = \int_{3x_i}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \log \frac{1}{x_i} - \log 3 - C + \cdots,$$

und folglich

$$\left| \frac{x_i^2 e^{3x_i}}{(1+x_i)^3} \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{-3u}}{u} du - x_i^2 \log \frac{1}{x_i} + x_i^2 (\log 3 + C) \right| < b_5 x_i^3. \tag{57}$$

Für $\nu > 2$ folgt durch Teilintegration

$$\int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{(\nu+1)(x_i-u)}}{u^{\nu-1}} du = \frac{1}{\nu-2} \cdot \frac{1}{x_i^{\nu-2}} - \frac{\nu+1}{\nu-2} \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{(\nu+1)(x_i-u)}}{u^{\nu-2}} du,$$

und es ist zufolge (51)

$$0 < \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{(\nu+1)(x_i-u)}}{u^{\nu-2}} du < \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{x_i-u}}{u} du < b_6 \log \frac{1}{x_i};$$

ferner ist

$$0 < 1 - \frac{1}{(1+x_i)^{\nu+1}} = (\nu+2) \int_0^{x_i} \frac{dx}{(1+x)^{\nu+2}} < (\nu+2) \int_0^{x_i} dx = (\nu+2) x_i,$$

und demnach für $\nu > 2$

$$\left| \frac{x_i^\nu}{(1+x_i)^{\nu+1}} \int_{x_i}^{\infty} \frac{e^{(\nu+1)(x_i-u)}}{u^{\nu-1}} du - \frac{x_i^2}{\nu-2} \right| < b_7 x_i^3 \log \frac{1}{x_i}. \tag{58}$$

Es ergeben jetzt (55), (56), (57) und (58)

$$\begin{aligned} \psi_i(x_i) = {} & \frac{\varepsilon z_i}{y a_i} \left(1 - x_i + x_i^2\right) + \frac{q_2}{2!} \frac{\varepsilon^3 z_i^2}{kT (y a_i)^2} \left[x_i^2 \log \frac{1}{x_i} - x_i^2 (\log 3 + C) \right] \\ & + x_i^2 \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{(-1)^\nu q_\nu \varepsilon^{2\nu-1} z_i^\nu}{(\nu-2) \cdot \nu! (kT)^{\nu-1} (y a_i)^\nu} + \Theta \cdot b_8 x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i} \right)^2, \quad |\Theta| \leq 1. \end{aligned} \tag{59}$$

Ersetzen wir hier y durch D, so haben wir eine Darstellung des Potentials an einem Ion i-ter Sorte, bis auf einen Fehler von der Größenordnung $x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$ (oder, da $x_i = \varkappa a_i$ ist, von der Größenordnung $\varkappa^3 \left(\log \frac{1}{\varkappa}\right)^2$).

Um entsprechende Annäherungen an F_e, $\log f_0$ und $\log f$ zu erhalten, bemerken wir, daß nach (23) und dem Cauchyschen Satze

$$\frac{\varepsilon^{2m-1} z_i^m}{(-kT)^{m-1} a_i^m} \psi_m(x_i, x_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|y| = \frac{D}{2}} \psi_i(x_i) y^{m-1} dy \tag{60}$$

ist. Wegen $|\Theta| \leq 1$ ist

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|y|=\frac{D}{2}} \Theta\, y^{m-1}\, dy\right| \leq \left(\frac{D}{2}\right)^m,$$

so daß (59) und (60) die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$\frac{\varepsilon^{2m-1} z_i^m}{a_i^m (-kT)^{m-1}} \psi_m(x_i, x_i) = \frac{\varepsilon z_i}{a_i}(1 - x_i + x_i^2) + \Theta_1 \frac{D}{2} b_8 x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$$

für $m = 1$ mit $|\Theta_1| \leq 1$;

$$= \frac{q_2}{2} \frac{\varepsilon^3 z_i^2}{kTa_i^2}\left[x_i^2 \log \frac{1}{x_i} - x_i^2 (\log 3 + C)\right] + \Theta_2 \left(\frac{D}{2}\right)^2 b_8 x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$$

für $m = 2$ mit $|\Theta_2| \leq 1$; (61)

$$= \frac{(-1)^m q_m \varepsilon^{2m-1} z_i^m}{(m-2)\cdot m!\,(kT)^{m-1} a_i^m}\cdot x_i^2 + \Theta_m \left(\frac{D}{2}\right)^m b_8 x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$$

für $m > 2$ mit $|\Theta_m| \leq 1$.

Um die Integrale $\frac{1}{x_i^{2m}}\int\limits_0^{x_i} x^{2m-1}\psi_m(x,x)\,dx$ zu berechnen, gebrauchen wir die folgenden elementaren Formeln

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^x x(1 - x + x^2)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2,$$

$$\frac{1}{x^4}\int\limits_0^x x^5 \log \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{6}x^2 \log \frac{1}{x} + \frac{1}{36}x^2,$$

$$\frac{1}{x^{2m}}\int\limits_0^x x^{2m+1}\,dx = \frac{1}{2m+2}x^2,$$

$$\frac{1}{x^{2m}}\int\limits_0^x x^{2m+2}\left(\log \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{x^3}{2m+3}\left[\left(\log \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2}{2m+3}\log \frac{1}{x} + \frac{2}{(2m+3)^2}\right],$$

aus der letzten von welchen

$$\left|\frac{1}{x_i^{2m}}\int\limits_0^{x_i} x^{2m-1}\cdot \Theta_m b_8 x^3 \left(\log \frac{1}{x}\right)^2 dx\right| \leq \frac{1}{m} b_9 x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$$

folgt. Nun erhalten wir aus (61), wenn y durch D ersetzt wird,

$$\frac{\varepsilon^{2m-1} z_i^m}{(-kT)^{m-1}(Da_i)^m}\cdot \frac{1}{x_i^{2m}}\int\limits_0^{x_i} x^{2m-1}\psi_m(x,x)\,dx$$

$$= \frac{\varepsilon z_i}{Da_i}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x_i + \frac{1}{4}x_i^2\right) + \frac{\Theta_1^1}{2} b_9 x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2 \text{ für } m = 1 \text{ mit } |\Theta_1^1| \leq 1;$$

$$= \frac{q_2 \varepsilon^3 z_i^2 x_i^2}{2kT(Da_i)^2}\left|\frac{1}{6}\log \frac{1}{x_i} + \frac{1}{36} - \frac{\log 3 + C}{6}\right| + \frac{\Theta_2^1}{2^2}\cdot \frac{b_9}{2} x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$$

für $m = 2$ mit $|\Theta_2^1| \leq 1$;

$$= \frac{(-1)^m q_m \varepsilon^{2m-1} z_i^m x_i^2}{2(m-2)(m+1)!\,(kT)^{m-1}(Da_i)^m} + \frac{\Theta_m^1}{2^m}\frac{b_9}{m} x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$$

für $m > 2$ mit $|\Theta_m^1| \leq 1$.

Diese Ausdrücke werden jetzt in (29), (31) und (34) eingesetzt; weil $\sum \frac{1}{2^m}$ konvergent ist, so können die Restglieder bei der Summation nach m in ein einziges zusammengezogen werden, welches dann auch von der Größenordnung $x_i^3 \left(\log \frac{1}{x_i}\right)^2$, d. h. von der Größenordnung $\varkappa_3 \left(\log \frac{1}{\varkappa}\right)^2$ wird. Ferner sind n_i und c_i offenbar von der Größenordnung $\varkappa^2$, und wir erhalten die Näherungsformeln

$$\frac{F_e}{NkT} = \sum_{j=1}^{s} n_j z_j \left\{ \frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} x_j + \frac{1}{4} x_j^2 \right) + \frac{q_2}{2} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \right)^2 x_j^2 \left(\frac{1}{6} \log \frac{1}{x_j} + \frac{1}{36} - \frac{\log 3 + C}{6} \right) \right.$$
$$\left. + x_j^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m q_m}{2(m-2)(m+1)!} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \right)^m \right\} - \sum_{j=1}^{s} \frac{n_j \varepsilon^2 z_j^2}{2kTD_0 a_j}; \tag{62}$$

$$\log f_0 = 10^{-3} \frac{\partial V}{\partial n_0} \sum_{j=1}^{s} c_j z_j \left\{ \frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \left[\frac{1}{6} x_j - \frac{1}{4} x_j^2 + \frac{1}{2} (1 - x_j + x_j^2) \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i}{D} \frac{\partial D}{\partial c_i} \right] \right.$$
$$+ \frac{q_2}{2} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \right)^2 x_j^2 \left[-\frac{1}{6} \log \frac{1}{x_j} + \frac{1}{18} + \frac{\log 3 + C}{6} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{x_j} - \log 3 - C \right) \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i}{D} \frac{\partial D}{\partial c_i} \right]$$
$$\left. + x_j^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} q_m}{2(m-2)(m+1)!} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \right)^m \left[1 - (m+1) \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i}{D} \frac{\partial D}{\partial c_i} \right] \right\}, \tag{63}$$

beide Formeln mit einem Fehler von der Größenordnung $\varkappa^5 \left(\log \frac{1}{\varkappa}\right)^2$, sowie

$$(\nu_1 + \nu_2) \log f = \sum_{j=1}^{2} \nu_j z_j \left\{ \frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \left[\frac{1}{2} \left(1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \left(1 - \frac{c}{D} \frac{dD}{dc} \right) (1 - x_j + x_j^2) \right. \right.$$
$$\left. + 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} x_j + \frac{1}{4} x_j^2 \right) \right]$$
$$+ \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \right)^2 x_j^2 \left(1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{D} \frac{dD}{dc} \right) \left(\log \frac{1}{x_j} - \log 3 - C \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{6} \log \frac{1}{x_j} - \frac{1}{36} + \frac{\log 3 + C}{6} \right]$$
$$+ x_j^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m q_m}{2(m-2)(m+1)!} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{kTDa_j} \right)^m \left[(m+1) \left(1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \left(1 - \frac{c}{D} \frac{dD}{dc} \right) \right.$$
$$\left. \left. - \left(m - 1 - 10^{-3} c \frac{\partial V}{\partial n} \right) \right] \right\}$$
$$- \sum_{j=1}^{2} \frac{\nu_j z_j^2}{2kTD_0 a_j}, \tag{64}$$

mit einem Fehler von der Größenordnung $\varkappa^3 \left(\log \frac{1}{\varkappa}\right)^2$. Die Formeln (63) und (64) können erheblich vereinfacht werden, wenn man annimmt, daß D nach Potenzen von den c_i entwickelt werden kann. Dann wird nämlich, bis auf Glieder zweiter Ordnung in $c_1, \ldots, c_s$

$$D = D_0 (1 - \delta_1 c_1 - \delta_2 c_2 - \cdots - \delta_s c_s), \tag{65}$$

wo die δ konstant sind, und folglich, bis auf Glieder zweiter Ordnung in den c

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_0} (1 + \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \cdots + \delta_s c_s),$$

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{c_i}{D} \frac{\partial D}{\partial c_i} = - \sum_{i=1}^{s} \delta_i c_i,$$

sowie für jedes $m \geqq 2$

$$\frac{x_j^2}{D^m} = \frac{x_j^2}{D_0^m}$$

bis auf Glieder von der Größenordnung $x_j^2 c_i$, d. h. der Größenordnung $\varkappa^4$. Wird dies alles in (63) eingetragen und werden Glieder der Ordnung $\varkappa^5 \left(\log \frac{1}{\varkappa}\right)^2$ abgeworfen, so kommt nach kurzer Rechnung

$$\log f_0 = 10^{-3} \frac{\partial V}{\partial n_0} \sum_{j=1}^{s} c_j z_j \left\{ \frac{\varepsilon^2 z_j}{k T D_0 a_j} \left(\frac{1}{6} x_j - \frac{1}{4} x_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \delta_i c_i \right) \right. \tag{66}$$

$$\left. + \frac{q_2}{2} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{k T D_0 a_j} \right)^2 x_j^2 \left(-\frac{1}{6} \log \frac{1}{x_j} + \frac{1}{18} + \frac{\log 3 + C}{6} \right) + x_j^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} q_m}{2(m-2)(m+1)!} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{k T D_0 a_j} \right)^m \right\}.$$

Für $s = 2$ wird ähnlich, bis auf Glieder zweiter Ordnung in c,

$$D = D_0 (1 - \delta c) \tag{67}$$

und (64) vereinfacht sich zu

$$(\nu_1 + \nu_2) \log f = \sum_{j=1}^{2} \nu_j z_j \left\{ \frac{\varepsilon^2 z_j}{k T D_0 a_j} \left(\delta c - \frac{1}{2} x_j + \frac{1}{2} x_j^2 \right) \right. \tag{68}$$

$$\left. + \frac{q_2}{2} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{k T D_0 a_j} \right)^2 x_j^2 \left(\frac{1}{3} \log \frac{1}{x_j} - \frac{1}{36} - \frac{\log 3 + C}{3} \right) + x_j^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m q_m}{(m-2)(m+1)!} \left(\frac{\varepsilon^2 z_j}{k T D_0 a_j} \right)^m \right\}.$$

Im symmetrischen Falle ($z_1 = -z_2 = z$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$) mit $a_1 = a_2 = a$ und $x_1 = x_2 = a\varkappa$ wird (68), weil alle q_m mit geradem m verschwinden,

$$\log f = \frac{\varepsilon^2 z^2}{k T D_0} \left(\frac{\delta c}{a} - \frac{1}{2} \varkappa + \frac{1}{2} a \varkappa^2 \right) - a^2 \varkappa^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+2)!} \left(\frac{\varepsilon^2 z^2}{k T D_0 a} \right)^{2m+1}. \tag{69}$$

Aus (66) ist ersichtlich, daß, bis auf einen Fehler der Größenordnung $\varkappa^4 \log \frac{1}{\varkappa}$, $\log f_0$ mit der Debyeschen Approximation übereinstimmt. Die Debyesche Grenzformel

$$\lim_{\varkappa \to 0} \frac{\log f_0}{\left(\sum_{j=1}^{s} c_j z_j^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3} \frac{\partial V}{\partial n_0} (4 \pi N)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varepsilon^2}{k T D_0} \right)^{\frac{3}{2}}$$

bleibt demnach unverändert bestehen, wenn die höheren Glieder in der Differentialgleichung des Potentials berücksichtigt werden.

Berechnet man aus den experimentellen Werten von $\log f$ den zugehörigen Ionendurchmesser, und beschränkt sich dabei auf die Debyesche Approximation, so tritt bekanntlich die Schwierigkeit auf, daß unter Umständen der Ionendurchmesser negativ ausfällt[1]). Diese Schwierigkeit verschwindet, wenn man die höheren Glieder berücksichtigt. Es soll nämlich jetzt, unter Beschränkung auf den symmetrischen Fall $s = 2$ mit gleichen Ionendurchmessern $a_1 = a_2 = a$, gezeigt werden, wie der zu dem vollständigen Ausdruck für $\log f$ gehörige Ionendurchmesser a aus dem mittels der Debyeschen Approximation berechneten Ionendurchmesser a_0 ermittelt werden kann. Es wird sich dabei herausstellen, daß a immer positiv ist, gleichgültig ob a_0 positiv oder negativ ist. Unter Zugrundelegung der Debyeschen Approximation fällt die unendliche Reihe in (69) weg, und wir erhalten, indem a durch a_0 ersetzt wird,

$$\log f = \frac{\varepsilon^2 z^2}{k T D_0} \left(\frac{\delta c}{a_0} - \frac{1}{2} \varkappa + \frac{1}{2} a_0 \varkappa^2 \right). \tag{69a}$$

Zufolge (33) und (5) wird

$$c = \frac{10^3 n}{V} = \frac{10^3 k T D_0}{8 \pi N \varepsilon^2 z^2} \varkappa^2 ;$$

1) Zahlenbeispiele in § 8.

tragen wir dieses in (69) und (69a) ein, so ergibt der Vergleich der Koeffizienten von $\varkappa^2$, daß

$$\frac{\varepsilon^2 z^2}{kTD_0}\left[\frac{1}{2}a + \frac{10^3 kTD_0}{8\pi N\varepsilon^2 z^2}\delta\cdot\frac{1}{a}\right] - a^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+2)!}\left(\frac{\varepsilon^2 z^2}{kTD_0 a}\right)^{2m+1}$$
$$= \frac{\varepsilon^2 z^2}{kTD_0}\left[\frac{1}{2}a_0 + \frac{10^3 kTD_0}{8\pi N\varepsilon^2 z^2}\delta\cdot\frac{1}{a_0}\right].$$

Schreiben wir

$$\frac{kTD_0}{\varepsilon^2}\cdot\frac{a}{z^2} = \xi,\quad \frac{kTD_0}{\varepsilon^2}\cdot\frac{a_0}{z^2} = \xi_0, \tag{70}$$

so nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an

$$\varphi(\xi) + \frac{10^3}{4\pi N}\left(\frac{kTD_0}{\varepsilon^2 z^2}\right)^3\delta\cdot\frac{1}{\xi} = \xi_0 + \frac{10^3}{4\pi N}\left(\frac{kTD_0}{\varepsilon^2 z^2}\right)^3\delta\cdot\frac{1}{\xi_0}, \tag{71}$$

wo

$$\varphi(\xi) = \xi - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m-1)(2m+2)!}\cdot\frac{1}{\xi^{2m-1}}. \tag{72}$$

Für Wasser bei 25^0 ist angenähert

$$\frac{kTD_0}{\varepsilon^2 z^2} = \frac{10^8}{7z^2},\quad \frac{10^3}{4\pi N}\left(\frac{kTD_0}{\varepsilon^2 z^2}\right)^3\delta = 0{,}38\,\frac{\delta}{z^6},$$

und δ ist $< \frac{1}{12}$. Es ist folglich

$$\frac{d}{d\xi}\left[\varphi(\xi) + \frac{10^3}{4\pi N}\left(\frac{kTD_0}{\varepsilon^2 z^2}\right)^3\delta\cdot\frac{1}{\xi}\right] = 1 + \left[\frac{1}{12} - \frac{10^3}{4\pi N}\left(\frac{kTD_0}{\varepsilon^2 z^2}\right)^3\delta\right]\cdot\frac{1}{\xi^2} + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{2}{(2m+2)!}\cdot\frac{1}{\xi^{2m}}$$

immer positiv, da jedes einzelne Glied rechts positiv ist. Wenn ξ von 0 bis $+\infty$ wächst, so wächst demnach die linke Seite in (71) monoton von $-\infty$ bis $+\infty$. Für jeden von Null verschiedenen Wert von ξ_0, sei er positiv oder negativ, hat folglich die Gleichung (71) eine, und nur eine, positive Wurzel ξ, und mittels (70) entspricht also jedem positiven oder negativen a_0 ein positives a. Wegen der Kleinheit von $\frac{10^3}{4\pi N}\left(\frac{kTD_0}{\varepsilon^2 z^2}\right)^3\delta$ können wir übrigens, mit einer für alle praktischen Zwecke ausreichenden Genauigkeit, die Gleichung (71) durch

$$\varphi(\xi) = \xi_0 \tag{71a}$$

ersetzen.

§ 6. Berechnung der Glieder der drei niedrigsten Ordnungen in den Entwicklungen von § 3 für den symmetrischen Fall.

Wie in § 3 bewiesen wurde, verschwinden im symmetrischen Fall alle Glieder mit geradem m in den Reihenentwicklungen (23), (23a), (29), (31) und (34). Wir wollen jetzt Formeln aufstellen, welche zur numerischen Ausrechnung der Glieder mit $m = 1$, 3 und 5 verwendet werden können. Es handelt sich also darum, die Ausdrücke

$$\psi_m(x,x)\ \text{ und }\ \frac{1}{x^{2m}}\int_0^x x^{2m-1}\psi_m(x,x)\,dx$$

für $m = 1$, 3 und 5 zu ermitteln. Weil jetzt $s = 2$, $z_1 = -z_2 = z$ ist, so schreiben wir

$$\psi_m(x,x) = z^{m-1}X_m(x) \tag{73}$$

und

$$Y_m(x) = \frac{1}{x^{2m}}\int_0^x x^{2m-1}X_m(x)\,dx. \tag{74}$$

Erstens sei $m = 1$; dann folgt sofort aus (73) und (27)

$$X_1(x) = \frac{1}{1+x},$$



und (74) ergibt

$$Y_1(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{x}{1+x}\,dx = \frac{1}{x^2}[x - \log(1+x)], \tag{76}$$

Zur Berechnung von $y_1(x)$ für kleine Werte von x ersetzen wir $\log(1+x)$ durch seine Potenzreihenentwicklung und erhalten

$$Y_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} x^n. \tag{77}$$

Zweitens sei $m = 3$. Dann kommt aus (27) und der zweiten Gleichung (28) wegen $q_2 = 0$, $q_3 = z^2$,

$$\frac{1}{z^2}\psi_3(\varrho, x) = \frac{1}{6}\int_x^{\infty} \zeta(u, \varrho)\left(\frac{x}{1+x}\,\frac{e^{x-u}}{u}\right)^3 u^2\,du,$$

und indem wir $\zeta(u, \varrho)$ aus (19) eintragen,

$$\frac{1}{z^2}\psi_3(\varrho, x) = -\frac{1}{12\varrho}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\left\{\int_x^{\varrho}\left(e^{u-\varrho} + \frac{x-1}{x+1}e^{2x-u-\varrho}\right)\frac{e^{3(x-u)}}{u^2}\,du\right.$$

$$\left. + \int_{\varrho}^{\infty}\left(e^{\varrho-u} + \frac{x-1}{x+1}e^{2x-u-\varrho}\right)\frac{e^{3(x-u)}}{u^2}\,du\right\}.$$

Hier ersetzen wir $\int_x^{\varrho}$ durch $\int_x^{\infty} - \int_{\varrho}^{\infty}$ und erhalten

$$\frac{1}{z^2}\psi_3(\varrho, x) = -\frac{1}{12\varrho}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\left\{\int_x^{\infty}\frac{e^{3x-\varrho-2u}}{u^2}\,du + \frac{x-1}{x+1}\int_x^{\infty}\frac{e^{5x-\varrho-4u}}{u^2}\,du + \int_{\varrho}^{\infty}\frac{e^{3x+\varrho-4u} - e^{3x-\varrho-2u}}{u^2}\,du\right\}. \tag{78}$$

Jetzt führen wir eine Funktion $E(x)$ ein, die folgendermaßen definiert ist:

$$E(x) = \int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du. \tag{79}$$

Von dieser Funktion, deren Reihenentwicklung uns schon in (50) begegnet ist, liegen Tafeln vor[1]), und wir suchen jetzt (78) durch die E-Funktion auszudrücken. Zunächst einige Hilfsformeln. Aus (79) folgt

$$\frac{dE(x)}{dx} = -\frac{e^{-x}}{x} \tag{80}$$

und wenn in (79) x und u durch αx und αu ersetzt werden, wo α eine beliebige positive Konstante ist,

$$E(\alpha x) = \int_x^{\infty}\frac{e^{-\alpha u}}{u}\,du. \tag{81}$$

Durch Teilintegration erhalten wir

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{-\alpha u}}{u^2}\,du = -\left[\frac{e^{-\alpha u}}{u}\right]_x^{\infty} - \alpha\int_x^{\infty}\frac{e^{-\alpha u}}{u}\,du,$$

oder nach (81)

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{-\alpha u}}{u^2}\,du = \frac{e^{-\alpha x}}{x} - \alpha E(\alpha x). \tag{82}$$

1) J. W. L. Glaisher, Phil. Trans. Roy. Soc. **160**, 367, 1870, Tafeln IV und VIII. Unser $E(x)$ ist gleich $-Ei(-x)$ in Glaishers Bezeichnungsweise. Ein Auszug aus diesen Tafeln findet sich in Jahnke und Emde, Funktionentafeln (Leipzig, Teubner, 1909).



Durch Reduktion von (78) mittels (82) kommt nach kurzer Rechnung

$$\frac{1}{z^2}\psi_3(\varrho, x) = -\frac{1}{6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\left[\frac{1}{1+x}\frac{e^{x-\varrho}}{\varrho} - \frac{e^{3x-\varrho}}{\varrho}E(2x)\right.$$
$$\left. + 2 \cdot \frac{1-x}{1+x}\frac{e^{5x-\varrho}}{\varrho}E(4x) - \frac{2e^{3x+\varrho}}{\varrho}E(4\varrho) + \frac{e^{3x-\varrho}}{\varrho}E(2\varrho)\right]. \tag{83}$$

Setzen wir nun $\varrho = x$, so erhalten wir aus (73) und (83)

$$-X_3(x) = \frac{1}{6}\frac{x^2}{(1+x)^4}[1 - 4xe^{4x}E(4x)]. \tag{84}$$

Diese Formel wäre etwas schneller direkt aus (20) abzuleiten; der oben gegebene Beweis ist aber vorzuziehen, weil wir (83) später gebrauchen werden.

Aus (84) berechnet man $X_3(x)$ mittels der Tafel von $E(x)$; für kleine Werte von x, wo die Interpolation in der Tafel schlecht ist, benutzt man besser die Reihe (50) für $E(x)$.

Aus (74) und (84) erhalten wir

$$-Y_3(x) = \frac{1}{6x^6}\int_0^x \frac{x^7}{(1+x)^4}[1 - 4xe^{4x}E(4x)]\,dx, \tag{85}$$

so daß $Y_3(0) = 0$, und zeigen zunächst, daß

$$-Y_3(x) = \frac{f_1(x) - e^{4x}E(4x)f_2(x)}{6(1+x)^4}, \tag{86}$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihen sind. Setzt man nämlich (86) in (85) ein multipliziert mit $6x^6$ und differenziert nach x, so kommt zufolge (80)

$$\frac{x^7}{(1+x)^4}[1 - 4xe^{4x}E(4x)] = \frac{4}{(1+x)^5}[e^{4x}E(4x)x^6 f_2(x) - x^6 f_1(x)]$$
$$+ \frac{1}{(1+x)^4}\left[\frac{d}{dx}x^6 f_1(x) + x^5 f_2(x) - e^{4x}E(4x)\left(\frac{d}{dx}x^6 f_2(x) + 4x^6 f_2(x)\right)\right].$$

Werden hier beiderseits die mit $e^{4x}E(4x)$ multiplizierten Glieder gleichgesetzt, sowie auch die von diesem Faktor freien Glieder, so erhalten wir

$$(1+x)\frac{d}{dx}x^6 f_2(x) + 4x^7 f_2(x) = 4x^8(1+x),$$
$$(1+x)\frac{d}{dx}x^6 f_1(x) - 4x^6 f_1(x) + (1+x)x^5 f_2(x) = x^7(1+x). \tag{87}$$

Schreiben wir jetzt

$$f_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n,\quad f_2(x) = \sum_{n=3}^{\infty} b_n x^n, \tag{88}$$

setzen wir in (87) ein und vergleichen die Koeffizienten von x^{n+5}, so erhalten wir die Rekursionsformeln

$$(n+6)b_n + (n+5)b_{n-1} + 4b_{n-2} = \begin{cases} 4, & n = 3 \\ 4, & n = 4 \\ 0, & n > 4, \end{cases} \tag{89}$$

$$(n+6)a_n + (n+1)a_{n-1} + b_n + b_{n-1} = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ 1, & n = 3 \\ 0, & n > 3. \end{cases} \tag{90}$$

Wegen $b_2 = b_1 = 0$ bekommen wir aus (89)

$$b_3 = \frac{4}{3^2},\quad b_4 = 0,\quad b_5 = -\frac{16}{3^2 \cdot 11},\quad b_6 = \frac{4}{3^3},\quad b_7 = -\frac{112}{3^2 \cdot 11 \cdot 13},$$
$$b_8 = \frac{80}{3^3 \cdot 7 \cdot 11},\quad b_9 = -\frac{736}{3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13},\quad b_{10} = \frac{62}{3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}\cdots, \tag{91}$$

und hiernach aus (90) wegen $a_1 = 0$

$$a_2 = \frac{1}{2^3}, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3^4}, \quad a_4 = -\frac{77}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5}, \quad a_5 = \frac{1327}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^2},$$

$$a_6 = -\frac{8849}{2^3\, 3^4 \cdot 5 \cdot 11^2}, \quad a_7 = \frac{76097}{3^4 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 13^2}, \quad a_8 = -\frac{659957}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2},$$

$$a_9 = -\frac{559093}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}, \quad a_{10} = \frac{6322123}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2} \cdots, \tag{92}$$

weil (87) lineare Differentialgleichungen sind, konvergieren die Reihen (88) für $|x| < 1$. Für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ konvergieren sie sehr schnell, so daß (86) in diesem Intervall zur Berechnung von $Y_3(x)$ gut brauchbar ist. Für $x > \frac{1}{2}$ berechnet man am besten $Y_3(x)$ (sowie allgemein $Y_m(x)$) durch numerische Integration der aus (74) sich ergebenden Differentialgleichung

$$\frac{d\, Y_m(x)}{dx} = \frac{X_m(x) - 2m\, Y_m(x)}{x}. \tag{74a}$$

Wir kommen jetzt zu dem Fall $m = 5$. Dann wird die vierte Gleichung (28), da wir uns immer im symmetrischen Falle befinden,

$$\Phi_5(u, x) = \frac{1}{2} z^2 \psi_1(u, x)^2 \psi_3(u, x) + \frac{1}{120} z^4 \psi_1(u, x)^5.$$

Setzen wir in (27) $m = 5$ und $\varrho = x$, so finden wir unter Benutzung von (20) und (74)

$$X_5(x) = -\frac{1}{120} \int_x^\infty \left[\psi_1(u, x)^5 + 60\, \psi_1(u, x)^2 \cdot \frac{\psi_3(u, x)}{z^2} \right] \frac{e^{x-u}}{1+x} u\, du,$$

und wenn hierin die erste Gleichung (27) sowie (83) eingetragen werden

$$X_5(x) = \frac{x^5}{120(1+x)^6} \int_x^\infty \Big[-\frac{e^{6(x-u)}}{u^4} + \frac{10}{1+x} \frac{e^{4(x-u)}}{u^2}$$
$$- 10 \frac{e^{6x-4u}}{u^2} E(2x) + 20 \cdot \frac{1-x}{1+x} \frac{e^{8x-4u}}{u^2} E(4x) - 20 \frac{e^{6x-2u} E(4u)}{u^2} + 10 \frac{e^{6x-4u} E(2u)}{u^2} \Big] du. \tag{93}$$

Zur Reduktion von (93) brauchen wir die folgenden, ähnlich wie (82) durch Teilintegration abzuleitenden Formeln, wo α und β positive Konstanten sind,

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u}}{u^4} du = e^{-\alpha x} \left(\frac{1}{3x^3} - \frac{\alpha}{6x^2} + \frac{\alpha^2}{6x} \right) - \frac{\alpha^3}{6} E(\alpha x), \tag{94}$$

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u} E(\beta u)}{u^2} du = -\frac{e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} + \frac{e^{-\alpha x} E(\beta x)}{x} + (\alpha+\beta) E((\alpha+\beta)x) - \alpha \int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u} E(\beta u)}{u} du. \tag{95}$$

Man verifiziert sie natürlich am einfachsten durch die Bemerkung, daß die Ausdrücke links und rechts dieselbe Ableitung haben und für $x \to \infty$ verschwinden. Vermöge (82), (94) und (95) nimmt (93) die Form an:

$$X_5(x) = \frac{x^5}{120(1+x)^6} \Big\{ -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{14}{x} - \frac{10}{1+x} - 24 e^{6x} E(6x) - \frac{80}{1+x} e^{4x} E(4x)$$
$$- 80 \cdot \frac{1-x}{1+x} e^{8x} E(4x)^2 + 40 e^{6x} \left[E(2x) E(4x) - \int_x^\infty \frac{e^{-4u} E(2u)}{u} du + \int_x^\infty \frac{e^{-2u} E(4u)}{u} du \right] \Big\}.$$

Mittels der wie vorhin zu beweisenden Formel

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u} E(\beta u)}{u} du + \int_x^\infty \frac{e^{-\beta u} E(\alpha u)}{u} du = E(\alpha x) E(\beta x) \tag{96}$$

reduzieren wir endlich den obigen Ausdruck auf

$$X_5(x) = \frac{x^5}{120(1+x)^6}\left\{-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{14}{x}-\frac{10}{1+x}-24e^{6x}E(6x)\right.$$
$$-\frac{80}{1+x}e^{4x}E(4x)-80\frac{1-x}{1+x}e^{8x}E(4x)^2$$
$$\left.+80e^{6x}\int_x^\infty \frac{e^{-2u}E(4u)}{u}\,du\right\}. \qquad (97)$$

Es bleibt nur noch übrig, das in (97) auftretende Integral zu berechnen. Zufolge (81) ist

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u}\cdot E(\beta u)\,du = \int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u}\,du\int_u^\infty \frac{e^{-\beta v}}{v}\,dv,$$

woraus durch Umkehrung der Integrationsfolge

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u}\cdot E(\beta u)\,du = \int_x^\infty \frac{e^{-\beta v}}{v}\,dv\int_x^v \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u}\,du. \qquad (98)$$

Die Exponentialreihe ergibt

$$\frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\beta^\nu-\alpha^\nu)}{\nu!}u^{\nu-1}$$

und durch Integration

$$\int_x^v \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u}\,du = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\beta^\nu-\alpha^\nu)}{\nu\cdot\nu!}(v^\nu-x^\nu).$$

Aus (50) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}\alpha^\nu x^\nu}{\nu\cdot\nu!} = E(\alpha x)+\log x+\log\alpha+C,$$

so daß die vorhergehende Formel auch

$$\int_x^v \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u}\,du = E(\alpha x)-E(\beta x)-\log\frac{\beta}{\alpha}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\beta^\nu-\alpha^\nu)v^\nu}{\nu\cdot\nu!}$$

geschrieben werden kann, und dieses in (98) eingetragen, ergibt

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{u}E(\beta u)\,du = E(\beta x)\left[E(\alpha x)-E(\beta x)-\log\frac{\beta}{\alpha}\right]$$
$$+\int_x^\infty e^{-\beta v}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\beta^\nu-\alpha^\nu)v^{\nu-1}}{\nu\cdot\nu!}\,dv. \qquad (99)$$

Werden hier Integration und Summation vertauscht, so zeigt die durch Differentiation leicht zu bestätigende Formel

$$\int_x^\infty e^{-\beta v}v^{\nu-1}\,dv = \frac{(\nu-1)!\,e^{-\beta x}}{\beta^\nu}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(\beta x)^n}{n!}$$

daß, unter der Bedingung[1] $\alpha < \beta$,

$$\int_x^\infty e^{-\beta v}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\beta^\nu-\alpha^\nu)v^{\nu-1}}{\nu\cdot\nu!}\,dv = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu\right]e^{-\beta x}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(\beta x)^n}{n!}. \qquad (100)$$

1) Diese Bedingung ergibt sich wie folgt: die Reihe unter dem Integralzeichen in (100) ist alternierend, so daß ihr Wert zwischen den Teilsummen gerader und ungerader Gliederzahl liegt. Das Integral liegt also zwischen den entsprechenden Teilsummen rechts, und wird folglich gleich der unendlichen Summe wenn diese konvergiert, was offenbar $\alpha < \beta$ erfordert.

Durch Umkehrung der Summationsfolge finden wir

$$\int_x^\infty e^{-\beta v} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}(\beta^\nu - \alpha^\nu) v^{\nu-1}}{\nu \cdot \nu!} dv = e^{-\beta x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\beta x)^n, \tag{101}$$

wo

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu\right]. \tag{102}$$

Wird (101) in (99) eingetragen, und dazu die aus (96) für $\alpha = \beta$ folgende Gleichung

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\beta u} E(\beta u)}{u} du = \frac{1}{2} E(\beta x)^2$$

addiert, so erhalten wir endlich für $\alpha < \beta$

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\alpha u} E(\beta u)}{u} du = E(\beta x)\left[E(\alpha x) - \frac{1}{2} E(\beta x) - \log \frac{\beta}{\alpha}\right] + e^{-\beta x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\beta x)^n. \tag{103}$$

Wegen (102) konvergiert die Reihe in (103) für jedes x, und zwar schneller als die Exponentialreihe, so daß (103) zur numerischen Rechnung gut geeignet ist.

Aus (74) und (97) erhalten wir

$$\begin{aligned} Y_5(x) = \frac{1}{120 x^{10}} \int_0^x \frac{1}{(1+x)^6} \Big[&-\frac{1}{3} x^{11} + x^{12} + 14 x^{13} - \frac{10 x^{14}}{1+x} - 24 x^{14} e^{6x} E(6x) \\ &- \frac{80 x^{14}}{1+x} e^{4x} E(4x) - \frac{80 x^{14}(1-x)}{1+x} e^{8x} E(4x)^2 + 80 x^{14} e^{6x} \int_x^\infty \frac{e^{-2u} E(4u)}{u} du \Big] dx. \end{aligned} \tag{104}$$

Wir befolgen jetzt denselben Weg wie bei $Y_3(x)$ und schreiben

$$\begin{aligned} Y_5(x) = \frac{1}{120(1+x)^7} \Big\{ &f_1(x) + f_2(x) e^{4x} E(4x) + f_3(x) e^{8x} E(4x)^2 \\ &+ f_4(x) e^{6x} \Big[\int_x^\infty \frac{e^{-2u} E(4u)}{u} du - \frac{3}{10} E(6x) \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{105}$$

Genau wie bei $Y_3(x)$ ergeben sich aus (104) und (105) lineare Differentialgleichungen für die Funktionen f, welche durch die folgenden Potenzreihen

$$f_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \quad f_2(x) = \sum_{n=5}^{\infty} b_n x^n, \quad f_3(x) = \sum_{n=5}^{\infty} c_n x^n, \quad f_4(x) = \sum_{n=5}^{\infty} d_n x^n \tag{106}$$

zu lösen sind. Die aus jenen Differentialgleichungen entstehenden Rekursionsformeln sind

$$(n+10) d_n + (n+8) d_{n-1} + 6 d_{n-2} = 80,\ n=5;\quad 160,\ n=6;\quad 80,\ n=7;\quad 0,\ n>7;$$

$$(n+10)(c_n + c_{n-1}) + 8 c_{n-2} = -80,\ n=5;\quad 0,\ n=6;\quad 80,\ n=7;\quad 0,\ n>7;$$

$$(n+10) b_n + (n+6) b_{n-1} - 2c_n - 2c_{n-1} - d_n - d_{n-1} = -80,\ n=5;\quad = -80,\ n=6;\quad 0,\ n>6;$$

$$(n+10) a_n + (n+2) a_{n-1} - c_n - c_{n-1} + \frac{3}{10}(d_n + d_{n-1})$$

$$= -\frac{1}{3},\ n=2;\quad \frac{1}{3},\ n=3;\quad \frac{47}{3},\ n=4;\quad 19,\ n=5;$$

$$= 4,\ n=6;\quad 0,\ n>6.$$

Der Raumersparnis halber wollen wir die hieraus berechneten Anfangskoeffizienten nicht hinschreiben. Die Reihen konvergieren schnell bis $x = \frac{1}{2}$; von da an wird, wie bei $Y_3(x)$, die Differentialgleichung (74a) numerisch integriert.

Für große Werte von x (etwa von $x = 2$ an), kann man sich auch der asymptotischen Entwicklungen der X_m und Y_m bedienen, wobei allerdings zur Erzielung hinreichender Genauigkeit eine sehr scharfe Abschätzung des Restgliedes nötig ist. Diese auf Kettenbruchentwicklung beruhende Abschätzung ist etwas umständlich und soll hier nicht weiter behandelt werden[1]).

§ 7. Numerische Tabellen zu § 6.

Tabelle I gibt die durch (72) definierte Funktion $\varphi(\xi)$ und dient mit den Gleichungen (70) und (71a) zur Verwandlung des aus der Debye-Hückelschen ersten Approximation berechneten Ionendurchmessers a_0 in den durch Berücksichtigung aller höheren Glieder bei verschwindend kleiner Konzentration sich ergebenden Durchmesser a.

Tabellen II bis IV dienen zur Berechnung der drei ersten Glieder in den Reihenentwicklungen im symmetrischen Fall von Potential, freier Energie und Aktivitätskoeffizienten. Das hierzu auch erforderliche $X_1(x) = \frac{1}{1+x}$ ist aus den üblichen Reziprokentabellen zu entnehmen. Zur bequemeren Berechnung des Aktivitätskoeffizienten nach Gl. (34b) dient die Tabelle V. Der Verlauf der Funktionen ist in Fig. 1 veranschaulicht, wo der Ordinatenmaßstab für $-\frac{1}{1+x}$ links, für die zwei übrigen Funktionen rechts steht.

Tabelle I.

(Gleichung (72)).

ξ	$\varphi(\xi)$	ξ	$\varphi(\xi)$	ξ	$\varphi(\xi)$	ξ	$\varphi(\xi)$
0,10	— 4,21139	0,40	+ 0,17618	0,70	+ 0,57819	1,00	+ 0,91572
0,11	— 2,66055	0,41	+ 0,19242	0,71	+ 0,58999	1,01	+ 0,92658
0,12	— 1,85517	0,42	+ 0,20830	0,72	+ 0,60173	1,02	+ 0,93742
0,13	— 1,38346	0,43	+ 0,22386	0,73	+ 0,61342	1,03	+ 0,94824
0,14	— 1,08051	0,44	+ 0,23911	0,74	+ 0,62506	1,04	+ 0,95904
0,15	— 0,87154	0,45	+ 0,25410	0,75	+ 0,63665	1,05	+ 0,96983
0,16	— 0,71895	0,46	+ 0,26883	0,76	+ 0,64820	1,06	+ 0,98060
0,17	— 0,60227	0,47	+ 0,28333	0,77	+ 0,65971	1,07	+ 0,99136
0,18	— 0,50979	0,48	+ 0,29761	0,78	+ 0,67118	1,08	+ 1,00210
0,19	— 0,43410	0,49	+ 0,31170	0,79	+ 0,68260	1,09	+ 1,01283
0,20	— 0,37058	0,50	+ 0,32561	0,80	+ 0,69399	1,10	+ 1,02354
0,21	— 0,31612	0,51	+ 0,33933	0,81	+ 0,70535	1,11	+ 1,03424
0,22	— 0,26855	0,52	+ 0,35290	0,82	+ 0,71667	1,12	+ 1,04492
0,23	— 0,22643	0,53	+ 0,36631	0,83	+ 0,72795	1,13	+ 1,05560
0,24	— 0,18857	0,54	+ 0,37958	0,84	+ 0,73921	1,14	+ 1,06627
0,25	— 0,15417	0,55	+ 0,39272	0,85	+ 0,75043	1,15	+ 1,07692
0,26	— 0,12262	0,56	+ 0,40574	0,86	+ 0,76163	1,16	+ 1,08756
0,27	— 0,09341	0,57	+ 0,41864	0,87	+ 0,77279	1,17	+ 1,09819
0,28	— 0,06619	0,58	+ 0,43142	0 88	+ 0,78393	1,18	+ 1,10881
0,29	— 0,04065	0,59	+ 0,44411	0,89	+ 0,79504	1,19	+ 1,11942
0,30	— 0,01654	0,60	+ 0,45670	0,90	+ 0,80612	1,20	+ 1,13002
0,31	+ 0,00633	0,61	+ 0,46919	0,91	+ 0,81718	1,21	+ 1,14060
0,32	+ 0,02813	0,62	+ 0,48160	0,92	+ 0,82822	1,22	+ 1,15118
0,33	+ 0,04898	0,63	+ 0,49392	0,93	+ 0,83923	1,23	+ 1,16175
0,34	+ 0,06900	0,64	+ 0,50617	0,94	+ 0,85022	1,24	+ 1,17231
0,35	+ 0,08829	0,65	+ 0,51834	0,95	+ 0,86119	1,25	+ 1,18286
0,36	+ 0,10693	0,66	+ 0,53044	0,96	+ 0,87214	1,26	+ 1,19340
0,37	+ 0,12498	0,67	+ 0,54247	0,97	+ 0,88306	1,27	+ 1,20393
0,38	+ 0,14250	0,68	+ 0,55444	0,98	+ 0,89397	1,28	+ 1,21445
0,39	+ 0,15956	0,69	+ 0,56634	0,99	+ 0,90486	1,29	+ 1,22496
						1,30	+ 1,23547

1) Siehe eine demnächst in Annals of Math. erscheinende Arbeit von T. H. Gronwall.

Tabelle II.

$Y_1(x)$. (Gleichung (76)).

x	$Y_1(x)$	x	$Y_1(x)$	x	$Y_1(x)$	x	$Y_1(x)$
0,00	0,50000	0,55	0,36941	1,10	0,29592	1,65	0,24810
0,01	0,49669	0,56	0,36771	1,11	0,29487	1,66	0,24738
0,02	0,49343	0,57	0,36603	1,12	0,29383	1,67	0,24666
0,03	0,49022	0,58	0,36437	1,13	0,29280	1,68	0,24595
0,04	0,48705	0,59	0,36273	1,14	0,29178	1,69	0,24525
0,05	0,48393	0,60	0,36110	1,15	0,29076	1,70	0,24455
0,06	0,48086	0,61	0,35949	1,16	0,28975	1,71	0,24385
0,07	0,47783	0,62	0,35789	1,17	0,28875	1,72	0,24316
0,08	0,47484	0,63	0,35631	1,18	0,28776	1,73	0,24247
0,09	0,47189	0,64	0,35475	1,19	0,28677	1,74	0,24179
0,10	0,46898	0,65	0,35319	1,20	0,28579	1,75	0,24111
0,11	0,46611	0,66	0,35166	1,21	0,28482	1,76	0,24043
0,12	0,46329	0,67	0,35014	1,22	0,28386	1,77	0,23976
0,13	0,46050	0,68	0,34863	1,23	0,28290	1,78	0,23910
0,14	0,45774	0,69	0,34714	1,24	0,28195	1,79	0,23843
0,15	0,45502	0,70	0,34566	1,25	0,28100	1,80	0,23777
0,16	0,45234	0,71	0,34419	1,26	0,28007	1,81	0,23712
0,17	0,44970	0,72	0,34274	1,27	0,27914	1,82	0,23646
0,18	0,44709	0,73	0,34130	1,28	0,27821	1,83	0,23582
0,19	0,44451	0,74	0,33987	1,29	0,27730	1,84	0,23517
0,20	0,44196	0,75	0,33846	1,30	0,27639	1,85	0,23453
0,21	0,43945	0,76	0,33706	1,31	0,27548	1,86	0,23389
0,22	0,43697	0,77	0,33567	1,32	0,27458	1,87	0,23326
0,23	0,43451	0,78	0,33430	1,33	0,27369	1,88	0,23263
0,24	0,43209	0,79	0,33293	1,34	0,27281	1,89	0,23200
0,25	0;42970	0,80	0,33158	1,35	0,27193	1,90	0,23138
0,26	0,42734	0,81	0,33024	1,36	0,27105	1,91	0,23076
0,27	0,42501	0,82	0,32892	1,37	0,27018	1,92	0,23015
0,28	0,42270	0,83	0,32760	1,38	0,26932	1,93	0,22954
0,29	0,42043	0,84	0,32630	1,39	0,26847	1,94	0,22893
0,30	0,41817	o 85	0,32500	1,40	0,26762	1,95	0,22832
0,31	0,41595	0,86	0,32372	1,41	0,26677	1,96	0,22772
0,32	0,41375	0,87	0,32245	1,42	0,26594	1,97	0,22712
0,33	0,41158	0,88	0,32119	1,43	0,26510	1,98	0,22653
0,34	0,40943	0,89	0,31994	1,44	0,26428	1,99	0,22594
0,35	0,40731	0,90	0,31870	1,45	0,26345	2,00	0,22535
0,36	0,40521	0,91	0,31747	1,46	0,26264	2,10	0,21964
0,37	0,40314	0,92	0,31625	1,47	0,26183	2,20	0,21423
0,38	0,40108	0,93	0,31504	1,48	0,26102	2,30	0,20909
0,39	0,39905	0,94	0,31384	1,49	0,26022	2,40	0,20421
0,40	0,39705	0,95	0,31265	1,50	0,25943	2,50	0,19956
0,41	0,39506	0,96	0,31148	1,51	0,25864	2,60	0,19513
0,42	0,39310	0,97	0,31031	1,52	0,25785	2,70	0,19090
0,43	0,39116	0,98	0,30915	1,53	0,25707	2,80	0,18686
0,44	0,38924	0,99	0,30799	1,54	0,25630	2,90	0,18300
0,45	0,38734	1,00	0,30685	1,55	0,25553	3,00	0,17930
0,46	0,38546	1,01	0,30572	1,56	0,25476		
0,47	0,38360	1,02	0,30460	1,57	0,25400	3,50	0,16293
0,48	0,38176	1,03	0,30348	1,58	0,25325		
0,49	0,37994	1,04	0,30238	1,59	0,25250	4,00	0,14941
0,50	0,37814	1,05	0,30128	1,60	0,25175	4,50	0,13804
0,51	0,37636	1,06	0,30019	1,61	0,25101		
0,52	0,37459	0,07	0,29911	1,62	0,25028	5,00	0,12833
0,53	0,37285	1,08	0,29804	1,63	0,24955		
0,54	0,37112	1,09	0,29697	1,64	0,24882		

Tabelle III.

10 $^3X_3(x)$ und 10 $^3Y_3(x)$. (Gleichungen (84) und (85)).

x	10 $^3X_3(x)$	10 $^3Y_3(x)$	x	10 $^3X_3(x)$	10 $^3Y_3(x)$
0,00	0,00000	0,00000	0,60	— 2,26680	— 0,37561
0,005	— 0,00381	— 0,00049	0,62	— 2,25515	— 0,37583
0,01	— 0,01423	— 0,00180	0,64	— 2,24133	— 0,37562
0,02	— 0,05077	— 0,00650	0,66	— 2,22561	— 0,37505
0,03	— 0,10335	— 0,01335	0,68	— 2,20819	— 0,37413
0,04	— 0,16764	— 0,02184			
0,05	— 0,24041	— 0,03155	0,70	— 2,18927	— 0,37290
0,06	— 0,31920	— 0,04219	0,72	— 2,16904	— 0,37139
0,07	— 0,40207	— 0,05350	0,74	— 2,14767	— 0,36962
0,08	— 0,48747	— 0,06529	0,76	— 2,12530	— 0,36761
0,09	— 0,57419	— 0,07739	0,78	— 2,10208	— 0,36539
0,10	— 0,66124	— 0,08966	0,80	— 2,07812	— 0,36298
0,11	— 0,74783	— 0,10200	0,82	— 2,05356	— 0,36040
0,12	— 0,83335	— 0,11433	0,84	— 2,02848	— 0,35767
0,13	— 0,91730	— 0,12655	0,86	— 2,00298	— 0,35481
0,14	— 0,99928	— 0,13862	0,88	— 1,97715	— 0,35183
0,15	— 1,07898	— 0,15048	0,90	— 1,95105	— 0,34874
0,16	— 1,15619	— 0,16209	0,92	— 1,92478	— 0,34555
0,17	— 1,23071	— 0,17342	0,94	— 1,89837	— 0,34228
0,18	— 1,30242	— 0,18445	0,96	— 1,87189	— 0,33894
0,19	— 1,37125	— 0,19516	0,98	— 1,84540	— 0,33554
0,20	— 1,43713	— 0,20553	1,00	— 1,81893	— 0,33209
0,21	— 1,50004	— 0,21555	1,05	— 1,75314	— 0,32330
0,22	— 1,55998	— 0,22522	1,10	— 1,68827	— 0,31435
0,23	— 1,61698	— 0,23453	1,15	— 1,62473	— 0,30534
0,24	— 1,67105	— 0,24347	1,20	— 1,56282	— 0,29635
0,25	— 1,72225	— 0,25205	1,25	— 1,50271	— 0,28742
0,26	— 1,77063	— 0,26027	1.30	— 1,44456	— 0,27861
0,27	— 1,81626	— 0,26813	1,35	— 1,38844	— 0,26996
0,28	— 1,85920	— 0,27564	1,40	— 1,33440	— 0,26149
0,29	— 1,89953	— 0,28280	1,45	— 1,28246	— 0,25322
0,30	— 1,93732	— 0,28962	1,50	— 1,23258	— 0,24516
0,31	— 1,97266	— 0,29611	1,55	— 1,18479	— 0,23733
0,32	— 2,00562	— 0,30227	1,60	— 1,13898	— 0,22973
0,33	— 2,03629	— 0,30811	1,65	— 1,09514	— 0,22237
0,34	— 2,06475	— 0,31364	1,70	— 1,05321	— 0,21524
0,35	— 2,09109	— 0,31887	1.75	— 1,01309	— 0,20835
0,36	— 2,11538	— 0,32381	1,80	— 0,97474	— 0,20170
0,37	— 2,13770	— 0,32846	1,85	— 0,93809	— 0,19527
0,38	— 2,15814	— 0,33284	1,90	— 0,90306	— 0,18907
0,39	— 2,17677	— 0,33695	1,95	— 0,86960	— 0,18309
0,40	— 2,19366	— 0,34080	2,00	— 0,83755	— 0,17732
0,42	— 2,22256	— 0,34775	2,10	— 0,77784	— 0,16650
0,44	— 2,24539	— 0,35377	2,20	— 0,72321	— 0,15633
0,46	— 2,26268	— 0,35893	2,30	— 0,67320	— 0,14693
0,48	— 2,27495	— 0,36328	2,40	— 0,62750	— 0,13820
0,50	— 2,28266	— 0,36689	2,50	— 0,58564	— 0,13010
0,52	— 2,28623	— 0,36981	2,60	— 0,54727	— 0,12258
0,54	— 2.28608	— 0.37209	2,70	— 0,51204	— 0,11560
0,56	— 2,28257	— 0.37379	2,80	— 0,47967	— 0,10912
0,58	— 2,27604	— 0.37495	2,90	— 0,44989	— 0,10309
			3,00	— 0,42238	— 0,09748



Tabelle IV.

$10^5 X_5(x)$ und $10^5 Y_5(x)$. (Gleichungen (97) und (104)).

x	$10^5 X_5(x)$	$10^5 Y_5(x)$	x	$10^5 X_5(x)$	$10^5 Y_5(x)$
0,00	0,00000	0,00000			
0,005	— 0,00659	— 0,00055	0,35	— 0,77954	— 0,09744
0,01	— 0,02532	— 0,00212	0,36	— 0,71394	— 0,09181
0,02	— 0,09200	— 0,00778	0,37	— 0,64820	— 0,08608
0,03	— 0,18776	— 0,01601	0,38	— 0,58260	— 0,08029
0,04	— 0,30240	— 0,02599	0,39	— 0,51735	— 0,07446
0,05	— 0,42778	— 0,03706	0,40	— 0,4527	— 0,0686
0,06	— 0,55741	— 0,04869	0,42	— 0,3256	— 0,0570
0,07	— 0,68629	— 0,06044	0,44	— 0,2027	— 0,0454
0,08	— 0,81060	— 0,07198	0,46	— 0,0848	— 0,0341
0,09	— 0,92752	— 0,08306	0,48	+ 0,0275	— 0,0231
0,10	— 1,03504	— 0,09347	0,50	+ 0,1336	— 0,0126
0,11	— 1,13179	— 0,10308	0,52	+ 0,2334	— 0,0024
0,12	— 1,21695	— 0,11180	0,54	+ 0,3265	+ 0,0072
0,13	— 1,29008	— 0,11956	0,56	+ 0,4130	+ 0,0164
0,14	— 1,35109	— 0,12633	0,58	+ 0,4930	+ 0,0250
0,15	— 1,40013	— 0,13210	0,60	+ 0,5666	+ 0,0331
0,16	— 1,43753	— 0,13688	0,62	+ 0,6338	+ 0,0407
0,17	— 1,46379	— 0,14070	0,64	+ 0,6951	+ 0,0478
0,18	— 1,47949	— 0,14358	0,66	+ 0,7505	+ 0,0543
0,19	— 1,48528	— 0,14557	0,68	+ 0,8004	+ 0,0604
0,20	— 1,48186	— 0,14671	0,70	+ 0,8451	+ 0,0659
0,21	— 1,46995	— 0,14706	0,72	+ 0,8847	+ 0,0710
0,22	— 1,45028	— 0,14667	0,74	+ 0,9197	+ 0,0756
0,23	— 1,42356	— 0,14559	0,76	+ 0,9503	+ 0,0798
0,24	— 1,39050	— 0,14388	0,78	+ 0,9768	+ 0,0836
0,25	— 1,35178	— 0,14159	0,80	+ 0,9994	+ 0,0870
0,26	— 1,30805	— 0,13877	0,82	+ 1,0186	+ 0,0901
0,27	— 1,25993	— 0,13548	0,84	+ 1,0344	+ 0,0928
0,28	— 1,20800	— 0,13176	0,86	+ 1,0472	+ 0,0952
0,29	— 1,15282	— 0,12766	0,88	+ 1,0572	+ 0,0972
0,30	— 1,09489	— 0,12323	0,90	+ 1,0645	+ 0,0990
0,31	— 1,03470	— 0,11850	0,92	+ 1,0694	+ 0,1006
0,32	— 0,97268	— 0,11353	0,94	+ 1,0722	+ 0,1018
0,33	— 0,90925	— 0,10833	0,96	+ 1,0730	+ 0,1029
0,34	— 0,84474	— 0,10296	0,98	+ 1,0720	+ 0,1037
			1,00	+ 1,0695	+ 0,1043

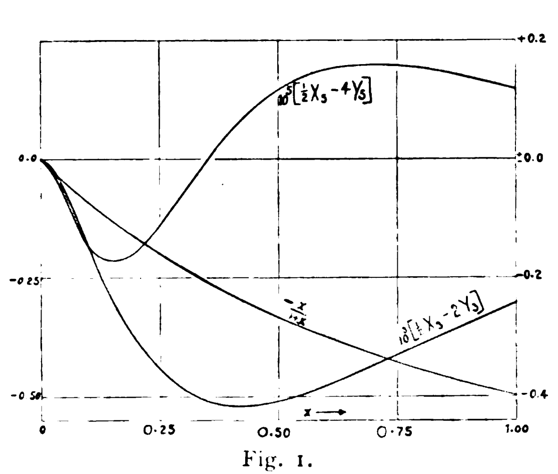


Fig. 1.

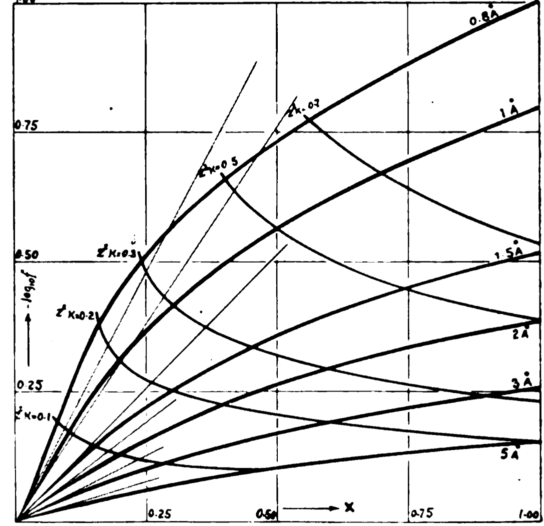


Fig. 2.

Tabelle V. $10^3\left[\frac{1}{2}X_3(x) - 2\,Y_3(x)\right]$ und $10^5\left[\frac{1}{2}X_5(x) - 4\,Y_5(x)\right]$.

x	$10^3\left[\frac{1}{2}X_3 - 2\,Y_3\right]$	$10^5\left[\frac{1}{2}X_5 - 4\,Y_5\right]$
0,00	0,00000	0,00000
0,005	— 0,00092	— 0,00107
0,01	— 0,00351	— 0,00416
0,02	— 0,01239	— 0,01487
0,03	— 0,02497	— 0,02985
0,04	— 0,04014	— 0,04725
0,05	— 0,05711	— 0,06564
0,06	— 0,07522	— 0,08394
0,07	— 0,09403	— 0,10138
0,08	— 0,11316	— 0,11737
0,09	— 0,13231	— 0,13153
0,10	— 0,15130	— 0,14363
0,11	— 0,16992	— 0,15356
0,12	— 0,18802	— 0,16126
0,13	— 0,20555	— 0,16680
0,14	— 0,22240	— 0,17023
0,15	— 0,23853	— 0,17166
0,16	— 0,25391	— 0,17123
0,17	— 0,26851	— 0,16910
0,18	— 0,28231	— 0,16543
0,19	— 0,29530	— 0,16037
0,20	— 0,30750	— 0,15409
0,21	— 0,31892	— 0,14674
0,22	— 0,32955	— 0,13847
0,23	— 0,33943	— 0,12942
0,24	— 0,34859	— 0,11973
0,25	— 0,35703	— 0,10953
0,26	— 0,36478	— 0,09895
0,27	— 0,37187	— 0,08804
0,28	— 0,37832	— 0,07696
0,29	— 0,38416	— 0,06577
0,30	— 0,38942	— 0,05453
0,31	— 0,39411	— 0,04335
0,32	— 0,39827	— 0,03222
0,33	— 0,40193	— 0,02131
0,34	— 0,40510	— 0,01053
0,35	— 0,40780	— 0,00001
0,36	— 0,41007	+ 0,01027
0,37	— 0,41193	+ 0,02022
0,38	— 0,41339	+ 0,02986
0,39	— 0,41448	+ 0,03917
0,40	— 0,41525	+ 0,0481
0,42	— 0,41578	+ 0,0650
0,44	— 0,41515	+ 0,0803
0,45	— 0,41446	
0,46	— 0,41348	+ 0,0941
0,48	— 0,41092	+ 0,1063
0,50	— 0,40755	+ 0,1171
0,52	— 0,40350	+ 0,1264
0,54	— 0,39886	+ 0,1343
0,55	— 0,39683	+ 0,1378
0,56	— 0,39370	+ 0,1410
0,58	— 0,38812	+ 0,1464
0,60	— 0,38218	+ 0,1507
0,62	— 0,37591	+ 0,1540
0,64	— 0,36943	+ 0,1565
0,65	— 0,36606	+ 0,1573
0,66	— 0,36270	+ 0,1580
0,68	— 0,35583	+ 0,1588
0,70	— 0,34883	+ 0,1589
0,72	— 0,34174	+ 0,1584
0,74	— 0,33459	+ 0,1574
0,75	— 0,33101	+ 0,1566
0,76	— 0,32743	+ 0,1558
0,78	— 0,32026	+ 0,1539
0,80	— 0,31313	+ 0,1516
0,82	— 0,30598	+ 0,1489
0,84	— 0,29890	+ 0,1461
0,85	— 0,29537	+ 0,1445
0,86	— 0,29187	+ 0,1429
0,88	— 0,28491	+ 0,1397
0,90	— 0,27805	+ 0,1361
0,92	— 0,27129	+ 0,1325
0,94	— 0,26462	+ 0,1288
0,95	— 0,26133	+ 0,1270
0,96	— 0,25807	+ 0,1251
0,98	— 0,25162	+ 0,1213
1,00	— 0,24529	+ 0,1176
1,05	— 0,22997	
1,10	— 0,21544	
1,15	— 0,20169	
1,20	— 0,18871	
1,25	— 0,17652	
1,30	— 0,16506	
1,35	— 0,15430	
1,40	— 0,14422	
1,45	— 0,13479	
1,50	— 0,12596	
1,55	— 0,11774	
1,60	— 0,11003	
1,65	— 0,10283	
1,70	— 0,09613	
1,75	— 0,08985	
1,80	— 0,08397	
1,85	— 0,07851	
1,90	— 0,07339	
1,95	— 0,06862	
2,00	— 0,06414	
2,10	— 0,05592	
2,20	— 0,04895	
2,30	— 0,04274	
2,40	— 0,03735	
2,50	— 0,03262	
2,60	— 0,02848	
2,80	— 0,02160	
3,00	— 0,01623	

§ 8. Vergleich der Theorie mit den experimentellen Daten.

Um diesen Paragraphen von dem theoretischen Teil möglichst unabhängig lesbar zu machen, wiederholen wir zunächst die hier zu gebrauchenden Bezeichnungen. Es sei eine Lösung eines $(z, -z)$-wertigen Salzes (wie KCl mit $z = 1$ oder $ZnSO_4$ mit $z = 2$) vorgelegt von der Konzentration c Mol per Liter; ferner seien D die Dielektrizitätskonstante des reinen Lösungsmittels (für Wasser bei t Grad Celsius $D = 88{,}23 - 0{,}4044\, t + 0{,}00135\, t^2$ nach Drude[1]), $T = 273{,}1 + t$ die absolute Temperatur, $N = 6{,}061 \cdot 10^{23}$ die Loschmidtsche Zahl, $k = 1{,}372 \cdot 10^{-16}$ die Boltzmannsche Konstante, $\varepsilon = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ das elektrische Elementarquantum, und a der für beide Ionensorten als gleich angenommene Ionendurchmesser in Zentimeter. Dann läßt sich zufolge (73), (74) und (75) der Ausdruck (34 b) für den natürlichen Logarithmus des Aktivitätskoeffizienten f des Salzes schreiben:

$$\log f = -\frac{\varepsilon^2 z^2}{kTDa} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^2 z^2}{kTDa}\right)^{2m+1} \left[\frac{1}{2} X_{2m+1}(x) - 2m\, Y_{2m+1}(x)\right],$$

wo

$$x = \varkappa a,$$

und zufolge (5) und (33)

$$\varkappa^2 = \frac{8\pi N \varepsilon^2 z^2 c}{10^3 kTD}.$$

Für wäßrige Lösungen bei 25° werden diese drei Formeln, indem wir die unendliche Reihe in dem Ausdruck für $\log f$ bei dem zweiten Gliede abbrechen, und von dem natürlichen zum Briggsschen Logarithmus übergehen:

$$\begin{aligned} -\log_{10} f = {} & 1{,}53636 \frac{z^2}{10^8 a} \cdot \frac{x}{1+x} \\ & - 0{,}15382 \left(\frac{z^2}{10^8 a}\right)^3 \cdot 10^3 \left[\frac{1}{2} X_3(x) - 2 Y_3(x)\right] \qquad (107) \\ & - 0{,}07700 \left(\frac{z^2}{10^8 a}\right)^5 \cdot 10^5 \left[\frac{1}{2} X_5(x) - 4 Y_5(x)\right], \end{aligned}$$

$$x = 10^{-8}\varkappa \cdot 10^8 a, \qquad (108)$$

$$10^{-8}\varkappa = 0{,}3283\, z \sqrt{c}. \qquad (109)$$

Das erste Glied rechts in (107) ist die wohlbekannte Debyesche Approximation, und die in den weiteren zwei Gliedern auftretenden Funktionen von x sind aus Tabelle V des vorangehenden Paragraphen zu entnehmen. Von der in § 6 entwickelten mathematischen Form dieser Funktionen brauchen wir hier nichts zu wissen.

Es geht aus (107) hervor, daß $-\log_{10} f$ eine Funktion der zwei Veränderlichen x und $\frac{10^8 a}{z^2}$ ist. Um diesen Sachverhalt graphisch darzustellen, tragen wir, für gegebene runde Werte von $\frac{10^8 a}{z^2}$, $-\log_{10} f$ als Funktion von x auf. Die so erhaltenen Kurven nennen wir die f-Kurven; einige von ihnen sind in Fig. 2 dargestellt. Schreibt man (108) in der Form

$$x = 10^{-8}\varkappa z^2 \cdot \frac{10^8 a}{z^2},$$

so bestimmt diese Gleichung, bei festgehaltenem $10^{-8}\varkappa z^2$, auf jeder der zu den verschiedenen Werten von $\frac{10^8 a}{z^2}$ gehörigen f-Kurven einen Punkt, und diese Punkte werden durch eine Kurve verbunden, welche wir als die zu dem vorgegebenen Wert von $10^{-8}\varkappa z^2$ gehörige Kappakurve bezeichnen. Verschiedene dieser Kappakurven sind in Fig. 2 eingezeichnet. Wegen (109) ist

$$10^{-8}\varkappa z^2 = 0{,}3283\, z^3 \sqrt{c}; \qquad (110)$$

1) P. Drude, Ann. d. Phys. **59**, 61, 1896. Seit dem Erscheinen der Drudeschen Arbeit sind verschiedene experimentelle Bestimmungen der Dielektrizitätskonstante des Wassers ausgeführt worden, die aber untereinander und mit der Drudeschen Formel nicht allzu genau übereinstimmen. Unter diesen Umständen schien es uns am besten, an dem zu Rechnungen nach den Debye-Hückelschen Formeln allgemein üblichen Drudeschen Ausdruck festzuhalten.

schreitet man daher bei gegebener Valenz und Konzentration an der durch (110) bestimmten Kappakurve entlang, so kann man mittels der f-Kurven bei gegebenem $\frac{a}{z^2}$ den Wert von $-\log_{10} f$, sowie umgekehrt bei gegebenem $-\log_{10} f$ den zugehörigen Wert von a ohne jede Rechnung ablesen[1]). Die zweite Anwendungsart ist die wichtigere. denn liest man bei verschiedenen Konzentrationen die zu den experimentellen Aktivitätskoeffizienten gehörigen Werte von $\frac{a}{z^2}$ ab, so müssen diese, falls unsere Theorie richtig ist, konstant sein (selbstverständlich innerhalb der durch die experimentelle Fehlergrenze von $-\log_{10} f$ bedingten, aus dem Diagramm gleichfalls abzulesenden Fehlergrenze der $\frac{a}{z^2}$). Oberhalb einer Konzentration von etwa 0,01 Mol per Liter (unter Umständen liegt diese Grenze höher, bis 0,1 Mol) zeigen die derart bestimmten $\frac{a}{z^2}$ einen deutlichen Gang mit der Konzentration, was darauf hinweist, daß hier andere Umstände hinzutreten müssen, wie Veränderlichkeit von D mit der Konzentration, Bildung komplexer Ionen usw.[2]).

Aus Tabelle V ist ersichtlich, daß für genügend kleine Konzentrationen die zwei letzten Glieder in (107) positiv sind, so daß $-\log_{10} f$ für diese Konzentrationen größer als die Debyesche Approximation ist, und die prozentuale Abweichung von dieser ist um so größer, je kleiner $\frac{a}{z^2}$ ist. Wird dagegen $\frac{a}{z^2}$ groß, sagen wir $10^8 \frac{a}{z^2} > 5$, so wird die Abweichung von der Debyeschen Approximation so klein, daß sie vernachlässigt werden kann. Wie in § 5 bewiesen wurde, sind für kleine x-Werte alle Glieder in (107) mit Ausnahme des ersten klein von der Größenordnung x^2, so daß die Tangente einer f-Kurve für $x = 0$ mit der Nullpunktstangente der Debyeschen Approximation zusammenfällt und eine Steigung von $1{,}53636 \frac{z^2}{10^8 a}$ hat. Aus der Betrachtung des Vorzeichens des Koeffizienten von x^2 in (69) ist leicht zu beweisen, daß für genügend kleine $\frac{a}{z^2}$ die f-Kurven einen Wendepunkt in der Nähe von $x = 0$ besitzen. Wenn $\frac{a}{z^2}$ wächst, rückt der Wendepunkt immer weiter nach links, bis er für $\frac{10^8 a}{z^2} = 2{,}18$ mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt[3]). Ist also $\frac{a}{z^2}$ genügend klein, so wird wegen des Vorhandenseins des Wendepunktes die f-Kurve in der Nähe von $x = 0$ sehr flach, und man kann die den Konzentrationen von 0,001 Mol bis 0,01 Mol per Liter entsprechenden Punkte der f-Kurve annähernd durch eine Gerade verbinden, die dann offenbar eine größere Steigung als die Nullpunktstangente besitzt. Diese Konstruktion haben mehrere Autoren mit ihren experimentellen Daten ausgeführt, und die so erhaltene Gerade fälschlich für die Nullpunktstangente gehalten, woraus dann unberechtigterweise der Schluß gezogen wurde, daß die Steigung der Nullpunktstangente der experimentellen f-Kurve größer sei, als durch die Debye-Hückelsche Theorie gefordert wird.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir dazu über, die Formel (107) an experimentellen Daten zu prüfen, und wählen hierzu die sehr genauen Experimente von Bray[4]), der die elektromotorische Kraft der Zelle

$$HgZn \mid ZnSO_4 \mid PbSO_4 \mid PbHg$$

bei 25° gemessen hat. Die elektromotorische Kraft E in Millivolt ist dann, weil Zn zweiwertig ist,

$$E = E_0 - 59{,}15 \log_{10} cf, \tag{111}$$

wo c die Konzentration von $ZnSO_4$ und E_0 eine durch Extrapolation bestimmte Konstante ist.

1) Hierzu muß allerdings das Netz der f- und Kappakurven in ganz großem Maßstabe auf Millimeterpapier gezeichnet werden. Wir benutzten bis $x = 0{,}2$ einen Maßstab von 1 cm = 0,004 Einheiten in x und 0,005 in $-\log_{10} f$ und weiter bis $x = 1{,}0$, 1 cm = 0,02 in x und 0,01 in $-\log_{10} f$.

2) Vgl. hierzu die Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Debyeschen Gleichung (1) bei R. H. Fowler, Proc. Cambridge Phil. Soc. **22**, 861, 1925, insbesondere S. 868 und 883 ff.

3) Wird $\frac{10^8 a}{z^2} > 2{,}18$, so wird der x-Wert des Wendepunktes negativ, so daß dieser keine physikalische Bedeutung hat.

4) U. B. Bray, Journ. Am. Chem. Soc. **49**, 2372, 1927.



Tabelle VI.

$ZnSO_4$, Bray[1]).

Nr.	Mol $ZnSO_4$ per 1000 g H_2O	$E + 59{,}15 \log_{10} c$ beob.	$E_0 = 413{,}02$ $10^8 a_0$ (Debye)	$10^8 a$ (Gl. 107)	$E_0 = 412{,}36$ $10^8 a_0$ (Debye)	$10^8 a$ (Gl. 107)
1	0,0006580	419,24	— 1,00	6,0	— 6,72	4,08
2	0,0006699	419,49	— 2,73	5,0	— 8,04	3,92
3	0,0006866	419,60	— 2,91	5,0	— 8,08	3,88
4	0,0007016	419,49	— 1,39	5,3	— 6,72	4,08
5	0,001505	422,83	— 2,23	4,52	— 4,60	4,00
6	0,001648	423,21	— 1,89	4,56	— 4,12	4,04
7	0,003322	427,13	— 0,88	4,32	— 2,04	4,04
8	0,005064	429,96	+ 0,03	4,28	— 0,80	4,06
9	0,009096	434,47	+ 0,96	4,20	+ 0,44	3,96

In dieser Tabelle gibt die zweite Reihe die Gewichtskonzentration m in Mol per 1000 g Wasser (bei den hier vorkommenden kleinen Konzentrationen kann unbedenklich $c = m$ gesetzt werden) und die dritte Reihe den beobachteten Wert von E in Millivolt, um $59{,}15 \log_{10} c$ vermehrt. Die Überschrift $E_0 = 413{,}02$ der vierten und fünften Reihe stellt den von Bray durch Extrapolation gewonnenen Wert von E_0 dar. Die vierte Reihe enthält für die einzelnen Konzentrationen den mittels des aus (111) sich ergebenden experimentellen Aktivitätskoeffizienten

$$-\log_{10} f\,(\text{beob.}) = \frac{E\,(\text{beob.}) - E_0}{59{,}15} + \log_{10} c \qquad (112)$$

aus der Debyeschen Approximation

$$-\log_{10} f = 1{,}53636 \frac{z^2}{10^8 a} \cdot \frac{x}{1+x}$$

$$= 1{,}53636 z^2 \cdot \frac{10^{-8} \varkappa}{1 + 10^{-8} \varkappa \cdot 10^8 a_0}$$

errechneten Wert von $10^8 a_0$. Die fünfte Reihe gibt entsprechend den mittels (112) aus der Gleichung (107), unter Zuhilfenahme der vorhin beschriebenen Tafel der f- und Kappakurven, errechneten Wert von $10^8 a$. Wie man sieht, ist der aus der Debyeschen Approximation sich ergebende Ionendurchmesser a_0 oft negativ und schwankt stark mit der Konzentration. Der Ionendurchmesser a in der fünften Reihe, welcher der Gleichung (107) entspricht, ist zwar immer positiv, wie er sein soll, aber ist noch bei weitem nicht konstant. Dieses schreiben wir der Ungenauigkeit der Brayschen Extrapolation von E_0 zu. Nehmen wir nämlich statt dessen $E_0 = 412{,}36$ (wie wir zu diesem Werte gelangt sind, soll unten erörtert werden) und wiederholen die Berechnung von a_0 und a, so zeigt die letzte Reihe von Tabelle VI, daß $10^8 a$ für alle neun Konzentrationen von dem Werte 4,00 nur wenig abweicht. Daß diese Abweichungen innerhalb der durch die Beobachtungsfehler bedingten Schranken liegen, wird sich deutlich aus Tabelle VII unten ergeben. Wir möchten hier aber gleich hervorheben, daß Bray noch zwölf weitere Bestimmungen von E gibt, welche von $m = 0{,}01712$ bis 3,419 reichen, und wird für diese die Rechnung der letzten Reihe in Tabelle VI weitergeführt, so kommen Werte von $10^8 a$ heraus, welche von 3,84 bis auf etwa 3,0 heruntergehen. Bei $m = 0{,}01712$ wird aber $x = 0{,}34$ (mit $10^8 a = 4{,}00$), und dieses x ist so groß, daß jene Konzentration im Sinne der Debye-Hückelschen Theorie schon als ziemlich hoch bezeichnet werden muß, und es treten hier, wie schon oben bemerkt wurde, neue Komplikationen auf, wie Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Konzentration usw.

Es bleibt noch zu zeigen, wie der Wert $E_0 = 412{,}36$ Millivolt erhalten wurde. Ein theoretisch richtiges Verfahren zur Extrapolation von E_0 ist folgendes: wie in § 5 bewiesen wurde, gibt (107) für kleine Konzentrationen, bis auf einen Fehler von der Größenordnung von x^2, $-\log_{10} f = 1{,}53636 \frac{z^2}{10^8 a} x$. Setzt man dieses in (111) ein, so kommt unter Benutzung von (108) und (109)

$$E + 59{,}15 \log_{10} c = E_0 + 238{,}68 \sqrt{c} + \cdots,$$

wo die nicht ausgeschriebenen Glieder rechts von der Größenordnung von c sind. Trägt man demnach $E + 59{,}15 \log_{10} c$ als Funktion von $\sqrt{c}$ auf, so muß die Extrapolation derart vorgenommen

1) Journ. Am. Chem. Soc. **49**, 2372, 1927.

werden, daß die Kurve die Ordinatenachse in dem gesuchten Punkte E_0 mit einer Tangentensteigung von 238,68 trifft. In der praktischen Ausführung ist aber dieses Verfahren sehr ungenau, weil es den bei den kleinsten Konzentrationen gemessenen E-Werten, die ja wahrscheinlich mit den größten experimentellen Fehlern behaftet sind, ein zu hohes Gewicht beilegt. Ein Verfahren, das von diesem Einwande nicht betroffen wird, ist aber das folgende: Man nehme einen Wert von a an, berechne $-\log_{10} f$ nach (107) und rechne dann nach (111)

$$E_0 = E\,(\text{beob.}) + 59{,}15\,(\log_{10} c\,(\text{beob.}) + \log_{10} f\,(\text{ber.}))$$

für die gegebenen Konzentrationen aus. Man wiederhole diese Rechnung mit verschiedenen Werten von a, bis sich E_0 als innerhalb der Beobachtungsfehler konstant ergibt. Diese Rechnung ist für die Daten der Tabelle VI mit $10^8 a = 3{,}2$, 4,0 und 4,8 in Tabelle VII wiedergegeben, wobei der bequemeren Vergleichung halber jedes E_0 als Mittelwert der neun berechneten Werte plus Abweichung vom Mittel geschrieben wurde.

Tabelle VII.

Zur Extrapolation von E_0 in Tabelle VI.

Nr.	E_0 berechnet		
	$10^8 a = 3{,}2$	$10^8 a = 4{,}0$	$10^8 a = 4{,}8$
1	410,26 + 1,02	412,36 — 0,10	413,43 — 0,67
2	410,26 + 1,22	412,36 + 0,08	413,43 — 0,48
3	410,26 + 1,21	412,36 + 0,11	413,43 — 0,43
4	410,26 + 1,04	412,36 — 0,08	413,43 — 0,61
5	410,26 + 0,33	412,36 + 0,01	413,43 — 0,14
6	410,26 + 0,08	412,36 — 0,07	413,43 — 0,16
7	410,26 — 0,91	412,36 — 0,04	413,43 + 0,39
8	410,26 — 1,68	412,36 — 0,08	413,43 + 0,68
9	410,26 — 2,33	412,36 + 0,18	413,43 + 1,41

Es ist aus dieser Tabelle ersichtlich, daß bei $10^8 a = 4{,}0$ die Abweichungen des E_0 vom Mittelwert 412,36 alle, mit etwaiger Ausnahme von Nr. 9, innerhalb der Fehlergrenze der experimentellen Bestimmung von E liegen. Es ist demnach 412,36 ein annehmbarer Wert von E_0, und dieses Extrapolationsverfahren dürfte bei allen ähnlichen Messungen dem zuerst beschriebenen durchaus vorzuziehen sein.

Wir gehen jetzt zu dem Aktivitätskoeffizienten des Lösungsmittels über, und nehmen dabei wie oben bei dem Aktivitätskoeffizienten des Salzes an, daß die Dielektrizitätskonstante von der Konzentration unabhängig ist. Spezialisieren wir Gl. (31) auf den Fall eines symmetrischen Salzes mit gleichen Ionendurchmessern, so kommt zufolge (73), (74), (75) und (76)

$$\log f_0 = 10^{-3}\frac{\partial V}{\partial n_0}\cdot 2c\left\{\frac{\varepsilon^2 z^2}{kTDa}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2}\log(1+x)\right]\right.$$
$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon^2 z^2}{kTDa}\right)^{2m+1}\left[\frac{1}{2}X_{2m+1}(x) - (2m+1)\,Y_{2m+1}(x)\right]\right\}.$$

Bei der theoretischen Behandlung der Gefrierpunktserniedrigung kommt es aber nur auf dem von Debye und Hückel[1]) mit Θ bezeichneten Unterschied zwischen Eins und dem osmotischen Koeffizienten an, und zwar ist

$$\Theta = \frac{\log f_0}{10^{-3}\dfrac{\partial V}{\partial n_0}\cdot 2c}.$$

Aus der vorangehenden Formel folgt, wenn die auf 0° sich beziehenden Zahlenwerte von T und D eingetragen und die unendliche Reihe mit dem zweiten Gliede abgebrochen wird,

$$\Theta = 3{,}44716\,\frac{z^2}{10^8 a}\left[\frac{2}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2}\log(1+x)\right]$$
$$- 0{,}16384\left(\frac{z^2}{10^8 a}\right)^3\cdot 10^3\,[X_3(x) - 6\,Y_3(x)] \qquad (113)$$
$$- 0{,}07790\left(\frac{z^2}{10^8 a}\right)^5\cdot 10^5\,[X_5(x) - 10\,Y_5(x)].$$

1) l. c.[1]), Gl. (46[1]).

Gleichung (108) bleibt selbstverständlich bestehen, während (109) bei 0^0 durch

$$10^{-8}\varkappa = 0{,}3241\, z\sqrt{c} \tag{114}$$

zu ersetzen ist. In der Debyeschen Approximation tritt in (113) nur das erste Glied rechts auf, und wenn der zugehörige Ionendurchmesser wie vorher mit a_0 bezeichnet wird, so läßt sich wegen $x = 10^{-8}\varkappa \cdot 10^8 a_0$ die Debyesche Formel für Θ in der Form

$$\Theta = 3{,}44716 \cdot 10^{-8}\varkappa \left[\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x(1+x)} - \frac{2}{x^3}\log(1+x)\right] \tag{113a}$$

schreiben. Die Klammer rechts ist in der Debye-Hückelschen Bezeichnungsweise[1]) gleich $\frac{1}{3}\sigma(x)$.

In den Tabellen VIII bis XI haben wir eine Reihe von Gefrierpunktsbeobachtungen zusammengestellt, bei welchen die Debyesche Approximation für den Ionendurchmesser Werte ergibt, welche mit der Konzentration stark veränderlich und oft negativ sind. Die erste Reihe der Tabellen gibt die Gewichtskonzentration m in Mol per 1000 g Wasser, und die zweite Reihe die beobachtete Gefrierpunktserniedrigung $\Delta_{\text{beob.}}$. Aus dieser wird das zugehörige $\Theta_{\text{beob.}}$ in bekannter Weise berechnet, in (113a) eingetragen und diese Gleichung nach x aufgelöst, woraus sich mittels $10^8 a_0 = \frac{x}{10^{-8}\varkappa}$ der Ionendurchmesser a_0 in Debyescher Annäherung ergibt (dritte Reihe der Tabellen). Die vierte Reihe enthält das Resultat $10^8 a$ der entsprechenden Rechnung unter Anwendung von Gl. (113) anstatt (113a). Die recht starke Veränderlichkeit von $10^8 a$ mit der Konzentration ist wohl auf Experimentalfehler in $\Delta_{\text{beob.}}$ zurückzuführen, denn nehmen wir einen plausiblen Wert von $10^8 a$ an (derselbe ist jedesmal in der Überschrift der Tabelle angegeben), berechnen mit diesem nach (113) ein $\Theta_{\text{ber.}}$ und darauf das zugehörige $\Delta_{\text{ber.}}$, so zeigt die letzte Reihe der Tabellen, daß der Unterschied $\Delta_{\text{beob.}} - \Delta_{\text{ber.}}$ fast überall innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler in $\Delta_{\text{beob.}}$ liegt. Die Beobachtungen bei höheren Konzentrationen, bei welchen aus den mehrmals erwähnten Gründen Übereinstimmung mit der Theorie nicht zu erwarten ist, sind in den Tabellen nicht aufgeführt worden.

Tabelle VIII.

$NaIO_3$, Hall und Harkins[2]). $10^8 a = 1{,}25$.

m	Δ beob.	$10^8 a_0$ Debye	$10^8 a$ Gl. (113)	$\Delta_{\text{beob.}} - \Delta_{\text{ber.}}$ mit $10^8 a = 1.25$
0,00212	0,00770	— 11,70	0,7	— 0,00004
0,00499	0,01785	— 9,08	0,7	— 0,00018
0,00929	0,03310	— 2,74	0,98	— 0,00011
0,01502	0,05300	— 1,59	1,09	— 0,00006
0,02868	0,0997	— 0,29	1,32	+ 0,0001
0,06329	0,2129	— 0,08	1,25	± 0,0000
0,1010	0,3317	+ 0,13	1,23	+ 0,0002

Tabelle IX.

KNO_3, Adams[3]). $10^8 a = 1{,}40$.

m	Δ beob.	$10^8 a_0$ Debye	$10^8 a$ Gl. (113)	Δ beob. — Δ ber. mit $10^8 a = 1{,}40$
0,00443	0,0161	+ 0,54	1,87	± 0,0000
0,01565	0,0558	+ 2,10	2,70	+ 0,0003
0,03874	0,1343	+ 0,91	1 70	+ 0,0007
0,05766	0,1960	+ 0,41	1.43	+ 0,0001
0,12270	0,4017	+ 0,56	1 37	— 0,0002

1) l. c.[1]), Gl. (33).
2) Hall und Harkins, Journ. Am. Chem. Soc. **38**, 2658, 1916.
3) L. H. Adams, Journ. Am. Chem. Soc. **37**, 492, 1915.

Tabelle X.

$ZnSO_4$, Hausrath[1]). $10^8 a = 3{,}60$.

m	Δ beob.	$10^8 a_0$ Debye	$10^8 a_0$ Gl. (113)	Δ beob. — Δ ber. mit $10^8 a = 3{,}60$
0,0003988	0,001387	— 3,60	4,68	+ 0,00001
0,001081	0,003500	— 7,83	3,34	— 0,00003
0,005160	0,01499	— 2,46	3,78	+ 0,00004
0,01391	0,03701	+ 1,99	3,50	— 0,00016

Tabelle XI.

$MgSO_4$, Hall und Harkins[2]). $10^8 a = 3{,}70$.

m	Δ beob.	$10^8 a_0$ Debye	$10^8 a$ Gl. (113)	Δ beob. — Δ ber. mit $10^8 a = 3{,}70$
0,003201	0,01000	+ 1,10	4,60	+ 0,0002
0,00535	0,01595	+ 1,42	4,18	+ 0,0003
0,00746	0,02165	+ 2,04	4,12	+ 0,0005
0,01310	0,03615	+ 2,77	3,92	+ 0,0005
0,02668	0,06730	+ 2,98	3.70	± 0,0000

In einer demnächst in Journ. Am. Chem. Soc. erscheinenden Arbeit werden wir weiteres Beobachtungsmaterial durchrechnen, sowie auch ein Verfahren, mit den zugehörigen Zahlentabellen, angeben, welches die Ausführung der in diesem Paragraphen beschriebenen Rechnungen ganz bedeutend erleichtert. In einer Fortsetzung der vorliegenden Arbeit werden wir die Anwendung der Theorie auf unsymmetrische Salze wie K_2SO_4 und $BaCl_2$ erläutern und insbesondere eine Anzahl von experimentellen Bestimmungen von Löslichkeitsbeeinflussung durchrechnen. Hierzu ist nötig, Tabellen von einigen weiteren den X_m und Y_m ähnlichen Funktionen zu berechnen, welche in den Formeln des symmetrischen Falles alle mit einem Koeffizienten gleich Null multipliziert auftreten.

Zusammenfassung.

1. Für die Poissonsche Gleichung, welche der Debye-Hückelschen Theorie zugrunde liegt und das elektrostatische Potential ψ eines Ions bestimmt, wird ein analytisches Integrationsverfahren entwickelt, welches den vollständigen statistischen Ausdruck der elektrischen Dichte als Funktion von ψ berücksichtigt anstatt, wie die Debye-Hückelsche Näherungsrechnung, die Dichte durch ihr erstes, in ψ lineare Glied zu ersetzen.

2. Die freie Energie sowie die Aktivitätskoeffizienten werden hieraus in der Form von unendlichen Reihen erhalten, welche nach Potenzen von $\frac{1}{D}$ fortschreiten, wo D die Dielektrizitätskonstante ist.

3. Im Falle sehr kleiner Konzentrationen ergeben sich hieraus asymptotische Ausdrücke, aus welchen hervorgeht, daß das Debyesche Grenzgesetz nicht nur bei Zugrundelegung der Debyeschen Approximation sondern ganz allgemein gilt.

4. Für den symmetrischen Fall (Ionen von paarweise gleicher Valenz) werden die in den Koeffizienten der unter 2. erwähnten Reihen bis zu den Gliedern in $\frac{1}{D^5}$ einschließlich auftretenden Funktionen analytisch untersucht und ihre Zahlenwerte in Tabellenform dargestellt.

5. Unsere Formeln werden mit den Versuchsergebnissen verglichen, wobei sich selbst in den Fällen von kleinen Ionendurchmessern, wo die Debyesche Annäherung versagt, eine sehr gute Übereinstimmung ergibt.

1) Hausrath, Ann. d. Phys. **9**, 546, 1902.
2) Hall und Harkins, Journ. Am. Chem. Soc. **38**, 2672, 1916.

Mitteilung Nr. 567 der Chemischen Laboratorien, Columbia University, New York, N. Y.

(Eingegangen 5. April 1928.)



Die „Axialität" der Lichtemission und verwandte Fragen.

Von R. v. Hirsch und R. Döpel.

Im vorigen Jahre ist unter dem Titel „Die Axialität der Lichtemission und Atomstruktur" eine Broschüre von J. Stark erschienen, deren experimentelle Teile auf Versuchen beruhen, die wir zu dritt gemeinsam angestellt hatten. Wie in der Vorrede jener Schrift betont, ist hieraus eine Veröffentlichung unter dem Namen J. Stark allein geworden, weil wir uns über eine allen Teilen genehme Darstellung der Ergebnisse nicht haben einigen können; wir beide glaubten in einer Reihe wesentlicher Punkte die Sicherheit und Genauigkeit der Versuche erheblich geringer einschätzen zu müssen und konnten uns deshalb die daraus gezogenen Schlüsse nicht in vollem Umfang zu eigen machen.

Inzwischen haben wir über dieselben Fragen, die uns ja schon früher beschäftigt hatten[1]), weitergearbeitet und dabei Gelegenheit gehabt, das Beobachtungsmaterial so zu vermehren und zu verbessern, daß wir unsere früheren Zweifel nicht nur bestätigt fanden, sondern eine Reihe nachweisbarer Fehlerquellen aufdeckten, welche die Ergebnisse wesentlich beeinflussen. Diese Arbeit ist nicht abgeschlossen und bedarf zu ihrer Durchführung noch erheblicher Zeit; wir halten es deshalb für angezeigt, einige Punkte schon jetzt vorwegzunehmen. Hierbei wird sich auch die Gelegenheit ergeben, auf die einschlägigen Arbeiten von E. Rupp einzugehen.

Der Einteilung der Starkschen Schrift folgend besprechen wir zuerst die Abklingversuche.

1. Hier hat Herr Stark aus dem Verlauf der Schwärzungskurven weitgehende Schlüsse gezogen, die geeignet wären, unsere Vorstellung über den elementaren Strahlungsvorgang wesentlich zu beeinflussen[1]). Sie beruhen auf dem ungleichmäßigem Verlauf des Intensitätsabfalls, der in der Nähe des Schlitzendes[2]) ein deutlich steileres Stück enthält, wie in Fig. 1 sichtbar ist. Diese Figur entstammt der ersten noch mit dem Münchener Photometer vorgenommenen Registrierung der Aufnahme Nr. 388b und stimmt mit der okularen Messung des Herrn Stark (Fig. 7 der Broschüre) ebenso wie mit der Hamburger Registrierung (Axialität Taf. V) wesentlich überein. Die Stelle des steileren Abfalls liegt am Ende des Schlitzes, dessen genaue Lage allerdings schwer festzustellen ist. Hierzu bemerkt Herr Stark (S. 72): „Da die Achse des Objektivs, welches die Kanalstrahllamelle in die Spaltebene des Spektrographen abbildete, nicht genau parallel der Lamelle war, zeigte das spektrographische Lamellenbild an der Grenze von Schlitz und Abklingraum eine kleine Stufe an seinen Rändern; diese ist auch bei H_β in der Fig. 12 auf Taf. I sichtbar." Wir haben nun bei späterer Gelegenheit den Versuch wiederholt und durch genauere Einstellung des Spektrographen die Visierung parallel der Lamelle verbessert. Die so erhaltenen Bilder zeigen die Stufe in der Registrierkurve nicht mehr; Fig. 2 gibt eine solche Schwärzungskurve wieder, wie wir sie an vier verschiedenen Aufnahmen ohne größere Unterschiede erhalten haben. Von der Stufe ist nichts mehr zu sehen; wir halten daher die in der Aufnahme Nr. 388b enthaltene Anomalie für einen reinen Versuchsfehler und alle darauf beruhenden Schlüsse für hinfällig.

2. Die soeben erwähnten Aufnahmen waren

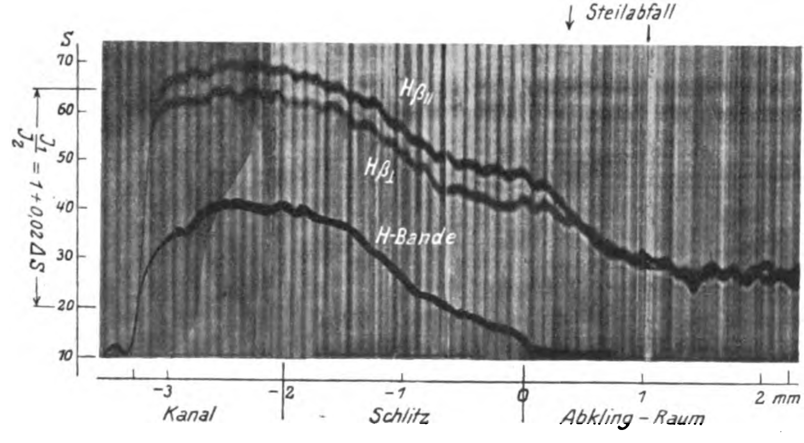


Fig. 1.

1) Ann. d. Phys. **82**, 16, 1927.

1) Axialität S. 39. J. Stark, Physik. Zeitschr. **28**, 424, 1927.

2) Versuchsanordnung s. Axialität S. 55.

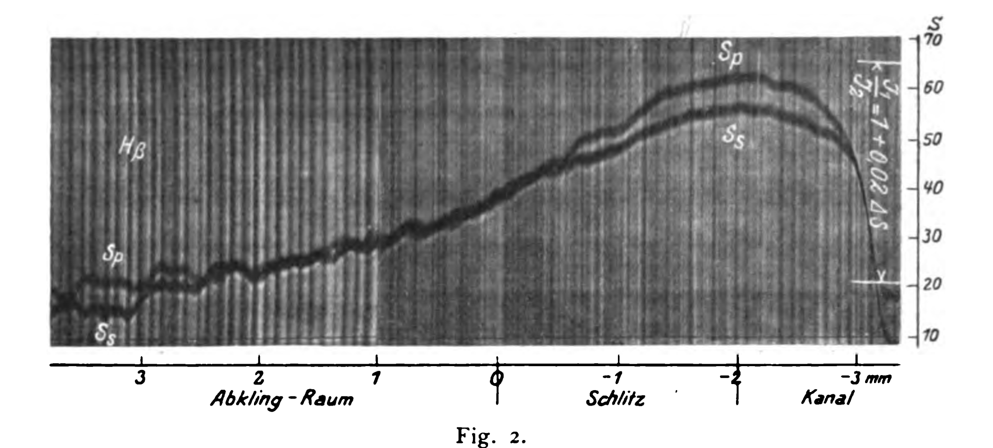


Fig. 2.

gemacht worden, um den von K. L. Hertel[1]) beschriebenen und von E. Rupp[2]) wiederholten Versuch einer Beeinflussung der abklingenden Polarisation durch ein elektrisches Querfeld zu untersuchen. Wir haben von einem solchen Effekt bei Feldern bis 1000 Volt/cm keine Spur erhalten, die Kurven mit und ohne Feld zeigten keinen merklichen Unterschied. Dies besagt aber nichts gegen die Realität des Effekts, denn in unseren sämtlichen Versuchen klingt die Polarisation so rasch ab, daß der Strahl beim Eintritt ins Feld, 1 mm unterhalb des Schlitzendes nicht mehr polarisiert ist. Hierauf ist wohl das Ausbleiben jeden Effekts zurückzuführen. Warum allerdings die Geschwindigkeit des Polarisationsabfalls bei den verschiedenen Beobachtern so große Unterschiede zeigt, ist nicht geklärt und deutet auf eine Fehlerquelle unbekannter Art hin.

3. Die eben genannten Versuche von E. Rupp enthalten aber eine Beobachtung, die uns für diesen ganzen Fragenkomplex wesentlich und gleichzeitig schwer erklärlich erscheint. Im Gegensatz zu K. Hertel, der die Polarisationen durch Zerlegung der beiden senkrecht aufeinander schwingenden Lichtkomponenten und Vergleich der getrennten Bilder bestimmt, verwendet Herr Rupp einen Babinetkompensator in der etwas ungewöhnlichen Stellung im divergenten Licht und bestimmt Polarisationsänderungen durch Messung der Streifenverschiebung. Er zieht hieraus mit Recht den Schluß, daß die Polarisationsänderungen im Feld als Phasenänderungen aufzufassen sind. Nach Figur 10a Taf. XV ist eine solche Streifenverschiebung aber auch ohne Feld gemessen, so daß man schließen muß, daß das Verschwinden der Polarisation auch in diesem Fall auf demselben Grund beruht; wie eine Phasenverschiebung in Abwesenheit jedes äußeren Feldes[1]) zustandekommen soll, ist uns ein Rätsel. Hierzu kommt die erstaunliche Schärfe des Streifensystems; die geringe, in der Abklingung rasch verschwindende Polarisation (Herr Rupp erhält hier $\frac{J_p}{J_s} = 1{,}20$) ist bisher allgemein so aufgefaßt worden, daß sich dem in der Hauptsache unpolarisierten Licht ein geringer Anteil linear polarisierter Intensität überlagert, dessen Vektor seine Orientierung in der Abklingung aus unbekannten Gründen rasch verliert. Wenn diese Auffassung richtig ist, so müßte das Streifensystem, dessen Schärfe bekanntlich den Polarisationsgrad wiedergibt, von Anfang an undeutlicher sein, der Effekt ohne Feld müßte nicht in einer Verschiebung, sondern einer zunehmenden Verwaschung der Streifen bestehen, wovon nichts zu sehen ist. Wir haben mit dem Babinetkompensator nicht gearbeitet, aber bei Untersuchung des polarisierten Kanalstrahls mit der Savartschen Platte niemals annähernd so scharfe Streifen erhalten. Da rein optisch zwischen Phasenverschiebung und Verschwinden einer Polarisation ein großer Unterschied ist, bedarf diese Frage der Aufklärung.

4. Wir wenden uns nunmehr zu den Polarisationsmessungen an Helium bzw. den von J. Stark[2]) und E. Rupp[3]) veröffentlichten Zahlen. Da die Tatsache der polarisierten Emission des Kanalstrahls an Wasserstoff seit langem feststeht, sehen wir den Zweck einer Untersuchung an einem anderen linienreicheren Stoff vor allem in der Gewinnung vergleichbarer Werte; die Fehler der Messung müssen also wesentlich kleiner sein als die Unterschiede des Effekts an den verglichenen Linien. Daß diese Bedingung

1) K. L. Hertel, Phys. Rev. **29**, 848, 1927.
2) E. Rupp, Ann. d. Phys. **85**, 515, 1928.

1) Eine Einwirkung des erdmagnetischen Feldes kommt nach H. Rupp nicht in Betracht; s. Ann. **81**, S. 617, 1926.
2) Axialität S. 82ff.
3) E. Rupp, Ann. d. Phys. **81**, 615, 1926.

bei den genannten Beobachtern erfüllt war, bezweifeln wir. Die Werte von Rupp entstammen dem abklingenden Strahl, der nach seiner damaligen Ansicht besonders stark polarisiert sein sollte[1]) und nach seinen jetzigen Ergebnissen seine Polarisation so rasch verliert, daß er für die Gewinnung vergleichbarer Werte höchst ungeeignet ist. Außerdem ist die Apparatpolarisation ungenügend korrigiert, wie schon Stark[2]) bemerkt hat. Die jetzt veröffentlichte Schwärzungskurve[3]) ändert hieran nichts; denn sie zeigt zwar, daß die Quarzlinse die Polarisation des Dreiprismenspektrographen in der Nähe von 4300 Å kompensiert hat, diesseits und jenseits dieser Wellenlänge bleiben aber Restpolarisationen übrig, die gegenüber der Kleinheit der untersuchten Effekte sehr wohl von Einfluß sind. Da die Kurve nicht bis ins grüne Gebiet reicht, wo mehrere gemessene Linien liegen (4922, 5016, 5048), außerdem der Intensitätsmaßstab fehlt, so läßt sich die Größe des Fehlers zwar nicht ablesen, die ungleichen Linienhöhen bei 4070 sind aber aus der Kurve ersichtlich. Bei der Anordnung des Herrn Stark (Glimmerplättchen) lief die Apparatpolarisation von —20 Proz. bei 3889 bis + 30 Proz. bei 5876. Wenn der Ausgleich mit der Quarzlinse auch besser ist, so genügt er doch nicht, um ohne zahlenmäßige Berücksichtigung der Apparatpolarisation messen zu können.

Bei den von Herrn Stark veröffentlichten Zahlen ist dieser Fehler korrigiert; daß die Sicherheit der Messung aber auch hier zu wünschen übrig läßt, ist durch die zahlreichen Bemerkungen „ungenau" zugegeben. Leider haben seither vorgenommene Nachprüfungen ergeben, daß diese Ungenauigkeit so weit geht, daß z. B. die Linie *He* 3889, für die Herr Stark als ruhendes Intensitätsverhältnis 0,98, als bewegtes 0,75 angibt, also Überwiegen der senkrecht zum Strahl schwingenden Komponente, in Wirklichkeit parallel zum Strahl polarisiert ist, und zwar im Betrag von 15—20 Proz. Ein so großer Fehler konnte nur entstehen, weil der Wert 0,75 einer einzigen unterexponierten Aufnahme entnommen wurde; auf ihm aber beruht ganz wesentlich der Schluß, daß die Hauptserienlinien des Helium umgekehrt polarisiert sind wie die Linien der diffusen Nebenserien. Eine so große „Ungenauigkeit" nimmt den Versuchen den besten Teil ihrer Beweiskraft.

5. Axialität der Intensität. Unter diesem Namen versteht Herr Stark die von ihm im Jahre 1910 gefundene Erscheinung[4]), daß der bewegte Kanalstrahl nach vorne (in Richtung seiner Bewegung) und nach hinten (in entgegengesetzter Richtung) mit verschiedener Intensität strahlt. Dasselbe Ergebnis erhielt H. Rausch von Traubenberg[1]) nach einer abgeänderten Methode. Daß beide Resultate, welche mehr den Charakter eines Rohversuchs als einer Messung tragen, einer Nachprüfung bedurften, betont Herr Stark mit den Worten[2]): „Jemand, der den beschriebenen Versuch nicht selbst sorgfältig durchgeführt hat, mag aus dem angegebenen Grunde die Wirklichkeit des Ergebnisses an den *Hg*-Linien bezweifeln." Ebenso springen die Vorzüge der neuen von Herrn Stark ausgedachten Methode der Winkelspiegel[3]) in die Augen. Eine erhöhte Sicherheit kann dieselbe aber auch nur dann geben, wenn sich die Messungen deutlich aus den Versuchsfehlern herausheben. Als „Axialität" ist jetzt das Verhältnis $\frac{J_{45}}{J_{135}}$ der unter 45^0 bzw. 135^0 gegen die Strahlrichtung ausgesandten Lichtmengen verstanden, und dieses weicht bei den Messungen, die Herr Stark veröffentlicht hat, zum allergrößten Teil um weniger als 10 Proz. von der Einheit ab. Die sichere Feststellung so kleiner Effekte erfordert infolge der unvermeidlichen Fehler der photographischen Methode (Plattenkorn, Schleierzacken) eine genügende Wiederholung der Aufnahmen und eine sehr unparteiische Photometrierung, die das Hartmannsche Photometer auch dem geübtesten Auge nicht immer liefert; diese Bedingung war in der besprochenen Versuchsreihe nur sehr unvollkommen erfüllt.

Außerdem ist aber seither unsere Aufmerksamkeit auf einige besondere, diesem Experiment anhaftende Fehlerquellen gelenkt worden, die wir noch besprechen müssen:

6. Überdeckungen: Es ist allgemein anerkannt, daß, wenn die Schwärzungskurven benachbarter Linien so nahe aneinander rücken, daß die eine Linie nur noch als kleiner Buckel in der Erhebung der anderen sichtbar ist, ein Intensitätsvergleich kaum mehr möglich ist. Wenn also Herr Stark neben der bewegten *He*-Linie 3889 noch die vielleicht als Verbreiterung kenntliche ruhende Komponente nach einem uns sonst unbekannten Verfahren mißt, obwohl die Registrierkurve nicht einmal eine Andeutung eines solchen Buckels zeigt[4]), so können wir ihm hier nicht folgen. Es hat sich aber gezeigt, daß sogar die anscheinend ziemlich weit entfernte Vergleichslinie N_2 3914 auf die bewegte Linie 3889

1) E. Rupp, Physik. Zeitschr. **27**, 796, 1926.
2) Axialität, Anmerkung S. 62.
3) Ann. d. Phys. **85**, Tafel XIV, 1928.
4) J. Stark, Physik. Zeitschr. **11**, 179, 1910.

1) R. v. Tr. Physik. Zeitschr. **25**, 606, 1924.
2) Axialität S. 86.
3) Axialität S. 87ff.
4) S. Axialität, Tafeln VII u. X.

störend einwirkt. Wir geben in Fig. 3 eine Registrierung der Aufnahme U 9, der gleichen, der das Bild auf Taf. X „Axialität" entstammt, die auch noch mit dem Münchner Photometer ausgeführt war und sich von der von Herrn Stark veröffentlichten Kurve nicht wesentlich unterscheidet. Man sieht auf derselben, daß die Schwärzungskurven der aufeinander kopierten Intensitäten J_{45} und J_{135} zwischen der zu messenden Linie 3889 und der Vergleichsbande 3914, die nach Violett abschattiert, nicht bis auf den Schleier

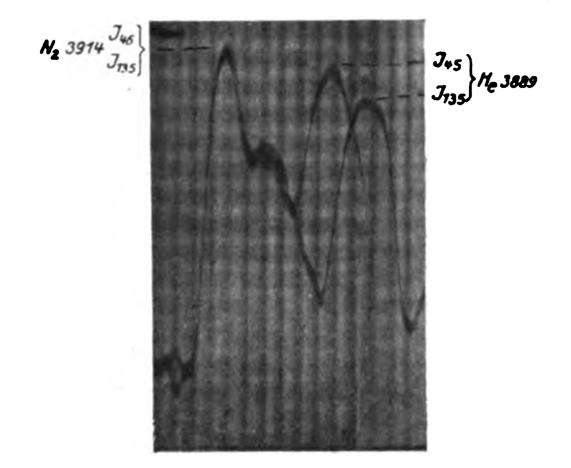


Fig. 3.

herabgeht. Da nun die rotverschobene Dopplerkomponente von 3889, J_{135}, der Bande genähert, die violettverschobene J_{45} von ihr abgerückt ist, so entsteht eine Begünstigung der ersteren Intensität. Wechselt man die Vergleichslinie und entfernt man den Stickstoff aus der Strahlung, so bleibt nach unseren seither ausgeführten eingehenden Messungen von der etwa 30 Proz. negativen Axialität ($J_{135} > J_{45}$) noch etwa 10 Proz. übrig. Der Überdeckungsfehler ist also für $^2/_3$ der gesamten zuerst gefundenen Axialität verantwortlich.

7. Die gleiche Messung enthält aber noch einen weiteren Fehler: Das von Herrn Geheimrat Wien freundlichst geliehene Prisma der Universität München, mit dem alle diese Versuche gemacht sind, ist ein älteres etwas gelbliches Glasstück, welches das äußere Violett stark absorbiert; die Linie 3889 ist auf allen Spektrogrammen die letzte sichtbare Linie. Da nun bei der Axialitätsmessung an der bewegten Linie die beiden zu vergleichenden Dopplerkomponenten um etwa 7 Å auseinanderliegen, so kann ein scharfer Abfall in der Durchlässigkeit des Prismas einen merklichen Fehler verursachen. Wir haben deshalb durch unsere gesamte Optik das kontinuierliche Spektrum einer Glühlampe photographiert und geben die Registrierkurve des violetten Endes in Fig. 4 wieder. Der scharfe Abfall, in welchem die Linie 3889 liegt, ist deutlich sichtbar. Da die Glühlampe als „grauer Strahler" von 1800—2000 Grad angesehen werden kann[1], berechnet sich ihr wirklicher Intensitätsabfall auf etwa 3 Proz. für das erwähnte Dopplerintervall von 7 Å, während man aus der Schwärzungskurve etwa 15 Proz.

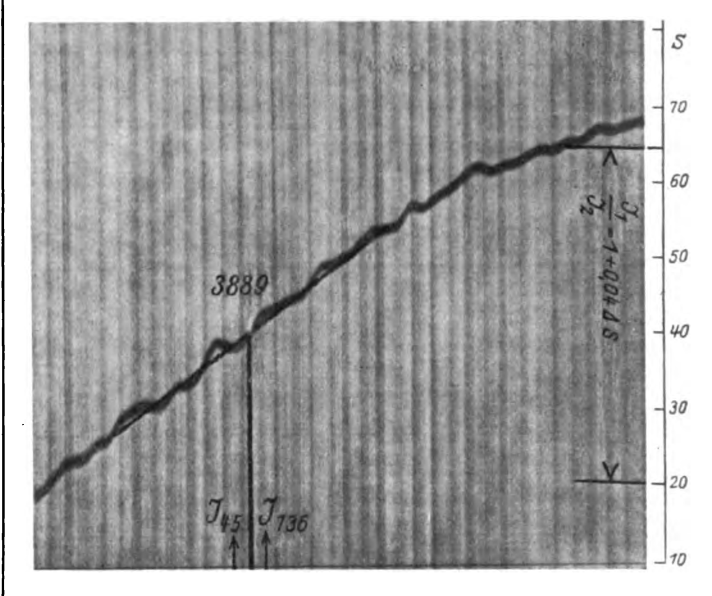


Fig. 4.

abliest. Es liegt also bei der von Herrn Stark veröffentlichten Messung, die dasselbe Prisma benutzte, nochmals ein Fehler von mindestens 10 Proz., welcher auch den nach 6. verbleibenden Rest der negativen Axialität der Linie aufzehrt. Wir sind zur Zeit noch nicht in der Lage, den

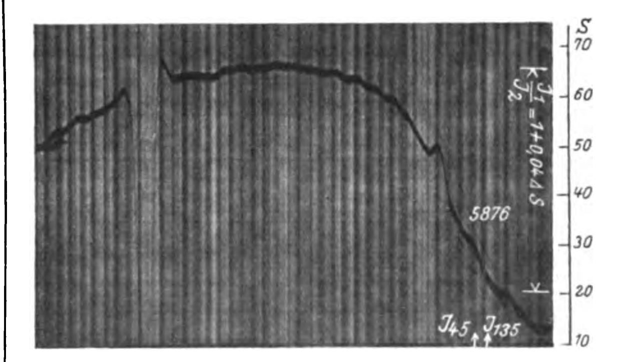


Fig. 5.

richtigen Wert endgültig anzugeben, müssen aber betonen, daß durch Aufdeckung dieser Fehler der deutlichste und größte Fall der von Herrn Stark veröffentlichten Axialitäten sich als Irrtum erweist.

1) Ann. d. Physik **27**, S. 659, 1915.

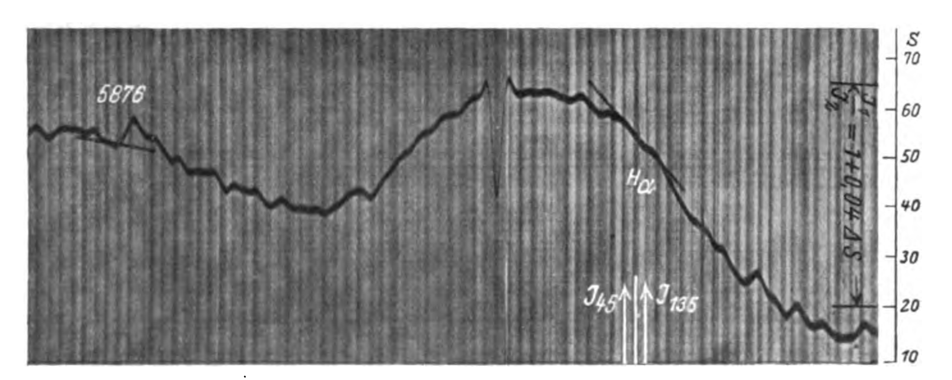


Fig. 6.

8. Ein dem vorigen nahe verwandter Fehler, bei den bisherigen Veröffentlichungen allerdings eine geringere Rolle spielt, liegt in der stellenweise sehr starken Veränderlichkeit der photographischen Empfindlichkeit mit der Farbe. Fig. 5 zeigt wieder eine Registrierung des kontinuierlichen Spektrums einer Glühlampe, diesmal den langwelligen Teil auf einer Flavinplatte; Fig. 6 dasselbe nach Sensibilisierung der gleichen Plattensorte mit Pinacyanol. Hier ist es die stark veränderliche Empfindlichkeit, welche aus dem gleichmäßigen Intensitätsabfall von Rot nach Blau, wie ihn der schwarze (oder auch der graue) Körper zeigt, die von tiefen Tälern durchzogene Schwärzungskurve hervorbringt. Man sieht, daß die Flavinplatte bei *He* 5876, die Pinacyanolplatte bei H_α einen Abfall für das Dopplerintervall unseres Versuchs zeigt, der in beiden Fällen etwa 3 mm beträgt, was einem Intensitätsabfall um 12 Proz. entspricht, der ausschließlich auf die photographische Platte zurückgeht und bei einer Messung der Axialität an diesen Linien Fehler von entscheidender Größe hervorbringt; man sieht auch, daß die Sensibilisierung den Abfall bei 5876 stark gemildert hat, so daß diese Fehlerquelle durch rein photographische Mittel zu beseitigen ist.

9. Herr Stark hat auch das Intensitätsverhältnis S_{90}/J_{45} zur Messung herangezogen und auch hier Abweichungen von der Einheit festgestellt. Diese Messung ist zunächst nur als eine andere Form der Polarisationsbestimmung aufzufassen; denn da jede Schwingungskomponente sich transversal fortpflanzt, so folgt, wenn der einfache Polarisationstypus des linearen Oszillators vorliegt, z. B. aus einer Polarisation 1,50 (H_β in Helium nach Herrn Stark) für J_{90}/J_0 ein Wert 1,25 und für J_{90}/J_{45} 1,125. Infolge Axialität oder sonstiger unbekannter Effekte können hiervon Abweichungen eintreten. Erst wenn man diese erfassen kann, liegt etwas Neues vor. Es handelt sich also im obigen Beispiel um die zahlenmäßige Ermittelung einer kleinen Abweichung von der Zahl 1,125, die zur Zeit die Leistungsfähigkeit des Experiments schon bei ruhenden Linien überschreitet. Vollends unmöglich aber wird dieselbe an bewegten Linien, wo eine verbreiterte Dopplerkomponente mit der nicht verbreiterten Mittelkomponente verglichen werden soll. Denn eine Verbreiterung im Dopplereffekt ist immer vorhanden und bei Registrierung auch im Gebiet kleinster Dispersion unseres Spektrographen nachweisbar. Diese Schwierigkeit macht die an sich heikle Messung noch unsicherer; wir halten deshalb diese Form des Versuchs überhaupt für ungeeignet.

Aus vorstehender Kritik soll nicht der allgemeine Schluß gezogen werden, daß die besprochenen Effekte nicht reell seien, was wir zur Zeit nicht entscheiden können; wohl aber behaupten wir, daß die bisherigen Versuche zu ungenau sind, um die Natur der Erscheinung auch nur qualitativ zu klären. Es handelt sich bei den bisher untersuchten Linien um Effekte, die nur durch eingehende Diskussion der Fehlerquellen und Erreichung einer anzugebenden Meßgenauigkeit sichergestellt werden können. Erst in dieser Durchbildung wird der Versuch die normale Sicherheit des physikalischen Experiments beanspruchen können.

(Eingegangen 11. April 1928.)

Nachtrag zur Arbeit: Beziehungen zwischen Wärmeübergang und Reibung[1]).

Von A. Sellerio.

1. Prof. ten Bosch macht mich darauf aufmerksam, daß die von mir als (IV) bezeichnete

1) A. Sellerio, Physik. Zeitschr. **29**, 55, 1928. Es sei gelegentlich bemerkt, daß die vorletzte Formel auf Seite 57, erste Spalte offenbar $H = \frac{R \cdot c_p (T_1 - T_m)}{u_m - u_1}$ heißen soll.



Formel aus einer von ihm aufgestellten Gleichung (Z. V. D. I. 1926. S. 912 oder „Wärmeübertragung" Berlin 1926) ohne weiteres abgeleitet werden kann.

2. In seiner brieflichen Mitteilung bemerkt er, daß die Unsicherheit betreffend des Verhältnisses u_1/u_m nicht so bedeutend sein soll, da die bis jetzt bekannten Versuche 0,33 — 0,34, bzw. 0,35 und 0,38 (Schätzung) ergeben haben. Nach obigen Zahlen, weicht u_1/u_m nicht sehr vom $^1/_3$ ab; so daß, in dieser Annahme, Formel (IV) direkt ausgewertet werden kann, da sie die Form annimmt

$$h \simeq \frac{\lambda \cdot \mu c_p}{8} u_m \cdot \frac{3}{2 + \frac{c_p \eta}{\chi}}, \qquad (IV')$$

in welcher alles bekannt ist. Immerhin sind weitere, umfangreiche Versuche auf diesem Gebiete sehr erwünscht.

3. Betreffend der Beziehungen zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand, sei ferner auf die grundlegende Arbeit von L. Prandtl (Physik. Zeitschr. **11**, 1072, 1910), sowie auf die bekannten, von ihm erwähnten Versuche Nusselts hingewiesen.

Formel (IV), die ich aus derjenigen von Taylor abgeleitet habe, kann ebenso schnell aus den Formeln (7a), (17), der Prandtlschen Arbeit durch Einführung der Reibungszahl λ abgeleitet werden.

Palermo, Istituto di fisica tecnica R. Scuola d'Ingegneria.

(Eingegangen 1. Juni 1928.)

BESPRECHUNGEN.

M. Shibusawa, A Description of the Damages done by the Great Earthquake of Sept. 1, 1923 to the Electrical Installations in Japan. Japanese Electrotechn. Comm. Nr. 21, Marunouchi, Tokyo, April 1925. 66 S. mit zahlreichen Abb.

Der Verf. beschreibt die Schäden, welche die elektrotechnischen Einrichtungen in Japan bei dem großen Beben erlitten. Einige Angaben sind von allgemeinem Interesse, so die bei dem Beben festgestellten Beschleunigungen des Erdbodens, welche stellenweise die Hälfte der Schwerbeschleunigung erreichten, sodann die Tatsache, daß selbst in den am stärksten erschütterten Gebieten sowohl die Wasserleitung-Tunnels wie die Bahntunnels höchstens an den Ausgangsöffnungen beschädigt wurden, im Innern dagegen nur vereinzelt ganz unbedeutende Risse erlitten. Es zeigt dies wieder, daß die Bodenbewegungen (abgesehen vielleicht von den Bruchflächen selbst) unterhalb der Erdoberfläche schnell abnehmen, und daß die übliche Darstellung der Isoseisten (= Flächen gleicher Erdbebenwirkungen) durch kugelähnliche Flächen um den Herd falsch ist. Die Isoseisten schmiegen sich vielmehr ganz eng an die Erdoberfläche an, ohne den Herd zu umschließen. An der Herdfläche selbst ist natürlich die Bewegung ebenfalls größer. Gutenberg.

G. Mahler, Physikalische Formelsammlung. (Sammlung Göschen Nr. 136.) 5., völlig umgearb. Aufl. v. K. Mahler. kl. 8⁰. 162 S. Mit 71 Fig. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1927. Geb. M. 1.50.

Das Büchlein ist gedacht als ein Mittel, um sich rasch das Wichtigste aus einem physikalischen Kapitel wieder ins Gedächtnis rufen zu können. Gegenüber früheren Auflagen ist bemerkenswert, daß die neuere Entwicklung in der Weise berücksichtigt wurde, daß eine Anzahl neuer Kapitel (Strömungslehre, optische und elektrische Strahlung, Induktion, Theorie der Materie) eingefügt wurde. E. Nies.

R. Lang, Experimentalphysik I. Mechanik der festen, flüssigen und ganzen Körper. (Sammlung Göschen Nr. 611.) 3. Aufl. kl. 8⁰. 146 S. Mit 125 Fig. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1926. Geb. M. 1.50.

Das Büchlein enthält auf gedrängtem Raum in geschickter Darstellung das Wesentliche aus der Mechanik in der Reihenfolge: Idealisierte Materie, wirkliche Materie. Gegenüber früheren Auflagen finden sich als neu Ausführungen über Foucaults Pendel, Kreiselkompaß, moderne Luftpumpen, Magnuseffekt. E. Nies.

W. Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes. 8⁰. VIII u. 232 S. Halle (Saale), W. Knapp. 1924. Geh. M. 12.—, geb. M. 13.50.

Die vorliegende zweite Auflage stellt im wesentlichen einen unveränderten Abdruck der ersten dar. Vgl. die Besprechung in dieser Zeitschrift **21**, 336, 1920.

In einem kurzen Anhang nimmt der Verfasser zu einer Reihe inzwischen erschienener Veröffentlichungen und zu einzelnen Fragen Stellung. Einer Empfehlung bedarf diese klassische Monographie nicht, da sie sich wohl in den Händen aller befindet, die von irgendeiner Seite her mit der Anwendung der Thermodynamik auf physikalisch-chemische Probleme sich beschäftigen. H. v. Halban.

E. Wicke, Konforme Abbildungen. (Mathematisch-physikalische Bibliothek 73). 8⁰. 59 S. Mit 38 Fig. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner 1927. Kart. M. 1.20.

Das Bändchen behandelt die allereinfachsten konformen Abbildungen, wobei an Vorkenntnissen nur die Differential- und Integralrechnung der Schule vorausgesetzt ist. Trotzdem bringt der Verfasser auf den wenigen Seiten eine Fülle anregenden Stoffes. E. Hilb.

R. Mayer, Beiträge zur Dynamik des Himmels und andere Aufsätze. Herausgegeben von B. Hell. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 223.) 8°. 104 S. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft. 1927. M. 4.80.

Neben der im Titel angegebenen größeren Abhandlung von Robert Mayer, welche einen ersten Versuch darstellt, den Wärmesatz auf kosmische Verhältnisse (Entstehung der Sonnenwärme, Ebbe und Flut, innere Wärme der Erde) anzuwenden, kommen noch kleinere Aufsätze und Vorträge zum Abdruck: Über notwendige Konsequenzen und Inkonsequenzen der Wärmemechanik. Über Erdbeben. Über Ernährung. Über Auslösung. Die Auswahl gibt ein vortreffliches Bild der vielseitigen Gedanken von Robert Mayer, dem Naturforscher, Arzt und Philosophen. Freilich werden auch hier,, wie so oft in der Geschichte der menschlichen Geistesentwicklung, die Grenzen eines großen Prinzips weiter gesteckt, als es sich dann in der Folgezeit als durchführbar erwiesen hat. A. Kopff.

Tagesereignisse.

10. Hauptversammlung d. Deutschen Gesellschaft f. Metallkunde am 23.—26. Juni 1928 in Dortmund.

Tagesordnung:

Sonntag, den 24. Juni

Vorträge: **Gase in Metallen**

a) **Aufnahme von Gasen durch Metalle (Physikal.-chem. Grundlagen).** Von Prof. Dr. A. Sieverts, Jena.
b) **Die technologische Bedeutung der Gase in den Metallen.** Von Dr.-Ing. E. H. Schulz, Dortmund.
c) **Neuzeitliche Verfahren zur Untersuchung der Gase in Metallen.** Von Dr.-Ing. W. Hessenbruch, Bochum.
d) **Über schädliche und nützliche Wirkungen der Gase im Stahl.** Von Dr.-Ing. F. Rapatz, Büderich, Kr. Neuß.
e) **Sonderfragen auf dem Gebiet der Nichteisenmetalle** (Aluminiumlegierungen, Kupfer, Messing, Bronze. Blei). Von J. Czochralski, Frankfurt a. M.
f) **Technische Eigenschaften der im Vakuum geschmolzenen Metalle.** Von Dr. W. Rohn, Hanau a. M.

Montag, den 25. Juni

Dr. E. Schmid, Berlin-Dahlem:
Bedeutung der mechanischen Zwillingsbildung für Plastizität und Verfestigung

Dr. G. Masing, Berlin-Siemensstadt:
Beobachtungen über die Gleitvorgänge im Zink und Kadmium beim Walzen

Prof. Dr. M. v. Schwarz, München:
Die Anwendung des Polarisations-Mikroskopes bei der Untersuchung von Kupferlegierungen

Dr.-Ing. M. Haas, Aachen:
Neuere dilatometrische Untersuchungen

Dr. W. Köster, Dortmund:
Interkristalline Korrosion des Nickels

Prof. Dr. W. Guertler, Berlin:
Untersuchungen der Säurefestigkeit des Systems Chrom-Eisen-Nickel

Prof. Dr. Fr. Sauerwald, Breslau:
Einige neue Versuche zur Herstellung synthetischer Körper aus Metallpulvern

Dr E. Scheil, Dortmund:
Beitrag zur Transkristallisation des Aluminiums

Prof. Dr. W. Guertler, Berlin:
Kernbildung und Kristallisationsgeschwindigkeit bei der Aluminiumvergütung

Dr.-Ing. G. Sachs, Berlin-Dahlem:
Festigkeitseigenschaften von Kristallen einer vergütbaren Aluminiumlegierung

Prof. Dr. W. Fraenkel, Frankfurt a. M.:
Neue Untersuchungen an vergütbaren Aluminiumlegierungen

Dr.-Ing. C. Haase, Berlin-Siemensstadt:
Verhalten von Mangan im Aluminium

Dr. G. Masing, Berlin-Siemensstadt:
Röntgenometrische Verfolgung des Vergütungsvorganges in Beryllium-Kupferlegierungen

Dr. O. Dahl, Berlin-Siemensstadt:
Volumenänderungen beim Vergüten von Beryllium-Kupferlegierungen

Dienstag, den 26. Juni

Besichtigungen: Hüttenwerk Vereinigte Stahlwerke A.-G. Dortmunder Union, Dortmund — Eisen- und Stahlwerk Hoesch A.-G., Dortmund — Forschungsinstitut der Vereinigten Stahlwerke A.-G., Dortmund — Kupfer- und Messingwerk C. Heckmann A.-G., Duisburg.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent für Chemie an der Universität Münster Dr. Wilhelm Glund zum a. o. Professor ebenda, die Privatdozenten an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Friedrich Merkel (Kälte-Technik) und Dr. August Klughardt (Physik) zu a. o. Professoren ebenda, der Professor für physikalische Chemie der Universität Sheffield F. G. Tryhorn zum Professor der Chemie am University College in Hull, Dr. Glasstone zum Professor der physikalischen Chemie an der Universität Sheffield.

Ehrung: Dem Verlagsbuchhändler Theodor Steinkopff in Dresden, Schatzmeister der Kolloid Gesellschaft wurde von der Technischen Hochschule Dresden die Würde eines Dr. Ing. e. h. verliehen.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt a. M. Geh. Regierungsrat Dr. Arthur Schoenflies, der frühere ord. Professor der technischen Physik an der Universität Innsbruck Dr. Ottokar Tumlirz, der ord. Professor der angewandten medizinischen Chemie an der Universität Wien Dr. Emil Fromm, der Professor der Chemie Robert Lepetit in Mailand.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 13. | Ausgegeben am 1. Juli 1928. Nr. 761. Printed in Germany. | 29. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Besprechungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 13 — 1. Juli 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 15 am 25. Juli 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante starker Elektrolyte[1]).

Von P. Debye und H. Falkenhagen[2]).

Wir haben kürzlich[3]) die Vermutung ausgesprochen, daß bei starken Elektrolyten eine Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante experimentell[4]) auftreten müßte. Theoretisch ergab sich diese Erscheinung als Folge einer endlichen Relaxationszeit der Ionenatmosphäre. Wir hatten in unserer ersten Notiz hierüber weiter darauf hingewiesen, daß zwei wesentliche Verbesserungen, die wir zunächst des einfachen Verständnisses halber beiseite ließen, an unseren Rechnungen angebracht werden müßten, um die Frage nach der Abhängigkeit der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante von der Frequenz des elektrischen Wechselfeldes quantitativ zu klären. Einmal unterliegen nämlich die Ionen in der Lösung Brownschen Bewegungsschwankungen, die sie neben ihrer geradlinigen Bewegung, die parallel dem äußeren elektrischen Felde verläuft, ausführen, und zweitens hat man auf die elektrophoretische Wirkung zu achten, die ebenfalls für die Gesetze der Leitfähigkeit von Bedeutung ist. In dieser Notiz wollen wir auf die beiden notwendigen Ergänzungen ausführlich eingehen. Wir stellen zunächst der Übersicht halber eine Disposition unserer Abhandlung voran.

Inhaltsübersicht.

1) Vorgetragen in der Sitzung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 2. Juni in Dresden.

2) Fellow of the International Education Board.

3) P. Debye und H. Falkenhagen, Physik. Zeitschr. **29**, 121—132, 1928 (im Text mit DF I bezeichnet).

4) Anzeichen einer Wirkung der Stoßdauer auf die Größe der Leitfähigkeit im Sinne unseres Effektes fand M. Wien (Ann. d. Phys. **83**, 340/41, 1927).



I. § 1. Die allgemeinen Grundgleichungen nichtstationärer Vorgänge in starken Elektrolyten.

Es handelt sich zunächst darum, zu untersuchen, wie die Brownsche Bewegung der Ionen den Dispersionseffekt beeinflußt. Wenn z. B. eine äußere elektrische Feldstärke auf den Elektrolyten einwirkt, so bewegen sich die Ionen nicht parallel dem Feld, sondern unterliegen noch Bewegungsschwankungen, die im wesentlichen auf der Wärmebewegung der Moleküle des Lösungsmittels beruhen. Wir müssen nun im folgenden diese ungeordnete Bewegung der Ionen mit berücksichtigen und wollen zunächst die ganz allgemeinen Grundgleichungen hierfür aufstellen[1]).

In dem starken Elektrolyten seien Ionen vorhanden der Sorten $1 \ldots\ldots i \ldots\ldots s$ mit den jeweiligen Ladungen $e_1 \ldots\ldots e_i \ldots\ldots e_s$. Im cm³ seien im Zeitmittel entsprechend an Ionen $n_1 \ldots\ldots n_i \ldots\ldots n_s$ vorhanden. Wir denken uns (vgl. Fig. 1) zwei im Raume festliegende Volumenelemente

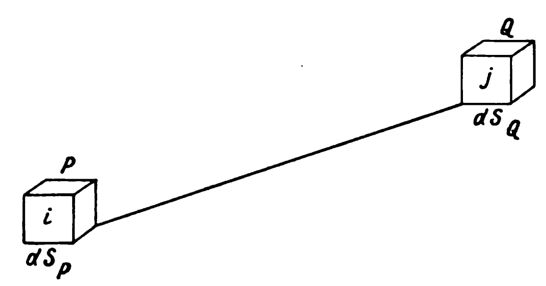


Fig. 1.

an den Stellen P und Q, die wir dS_P bzw. dS_Q nennen wollen. Die Koordinaten von P seien x_P, y_P, z_P, die von Q seien x_Q, y_Q, z_Q. Diese beiden Volumenelemente dS_P und dS_Q wollen wir nun während einer Zeit τ betrachten, die groß ist gegenüber der Zeitdauer einer Einzelschwankung eines Ions infolge der Brownschen Bewegung. Wir merken uns bis zur Zeit τ die Zeitintervalle, während derer sich in dS_P ein Ion der Sorte i oder in dS_Q ein Ion der Sorte j befinden. Es wird natürlich gelegentlich vorkommen, daß mehrere Ionen der Sorte i bzw. j in dS_P bzw. dS_Q gleichzeitig auftreten. Wenn wir die Größe dieser Volumenelemente sehr klein wählen, wird dieser Fall relativ sehr selten auftreten, so daß wir auf ihn ruhig verzichten dürfen. Die Summe dieser jeweiligen Zeitintervalle nennen wir t_i bzw. t_j. Dabei ist, da τ hinreichend groß ist

$$\frac{t_i}{\tau} = n_i dS_P \qquad \frac{t_j}{\tau} = n_j dS_Q. \tag{1}$$

Ferner bilden wir die Summe aller Zeitintervalle, während welcher sich gleichzeitig in dS_P ein Ion der Sorte i und in dS_Q ein Ion der Sorte j befinden. Die Summe dieser Intervalle innerhalb der Zeit τ nennen wir t_{iP}^{jQ}. Wenn im Zeitmittel die Zahl der Ionen der Sorte j im cm³, die in der Umgebung eines i-Ions liegen, mit n_{iP}^{jQ} bezeichnet wird und die Konzentration (Zahl der betreffenden

1) Für den stationären Fall hat Onsager die Formeln für die Leitfähigkeit berechnet. (Vgl. L. Onsager, Physik. Zeitschr. 28, 277, 1927.) Dieser Paragraph enthält teilweise eine nur äußerlich abgeänderte Darstellung seiner Ausführungen.



Ionen pro cm³) der i-Ionen in der Umgebung eines j-Ions mit n_{jQ}^{iP}, so gilt

$$\frac{t_{iP}^{jQ}}{t_i} = n_{iP}^{jQ} dS_Q \qquad \frac{t_{jQ}^{iP}}{t_j} = n_{jQ}^{iP} dS_P. \tag{2}$$

Die Zeiten t_{iP}^{jQ} und t_{jQ}^{iP} müssen nun übereinstimmen bei festgegebener Lage der Volumenelemente dS_P und dS_Q, folglich gilt

$$t_{iP}^{jQ} = t_{jQ}^{iP}. \tag{2'}$$

Aus (2, 2') im Verein mit (1) ergibt sich die Beziehung

$$t_{iP}^{jQ} = n_i n_{iP}^{jQ} \cdot \tau dS_P dS_Q = n_j n_{jQ}^{iP} \tau dS_P dS_Q,$$

d. h.

$$n_i n_{iP}^{jQ} = n_j n_{jQ}^{iP}. \tag{3}$$

Für die Größe $n_i\, n_{iP}^{jQ}$ führen wir nun die Abkürzung

$$n_i n_{iP}^{jQ} = n_j n_{jQ}^{iP} = w_{iP}^{jQ} = w_{jQ}^{iP} \tag{3'}$$

ein. w_{iP}^{jQ} bedeutet eine Verteilungsfunktion für die Häufigkeit derjenigen Konfigurationen, bei denen sich gleichzeitig in dS_P ein Ion der Sorte i und in dS_Q ein Ion der Sorte j befinden. Kennt man die Wahrscheinlichkeitsfunktion w_{iP}^{jQ} so kann man bei bekanntem $dS_P dS_Q$ sofort angeben, während welcher Zeitdauer (t_{iP}^{jQ}) innerhalb der Beobachtungszeit τ sich gleichzeitig in dS_P i-Ionen und in dS_Q j-Ionen befinden. Innerhalb der Zeit τ denken wir uns eine außerordentlich große Zahl von Kombinationen von Volumenelementen dS_P und dS_Q. Diese Zahl wollen wir mit N bezeichnen[1]). Notieren wir uns die Zeitintervalle, während welcher sich in dS_P ein Ion der Sorte i und gleichzeitig in dS_Q ein Ion der Sorte j befinden, — diese Zeit nannten wir ja t_{iP}^{jQ} — und merken wir uns die entsprechende Zahl N_{iP}^{jQ} der Doppelelemente, dS_P; dS_Q, so ist

$$\frac{N_{iP}^{jQ}}{N} = \frac{t_{iP}^{jQ}}{\tau} = w_{iP}^{jQ} dS_P dS_Q. \tag{4}$$

Die vorher beschriebenen Beobachtungen mögen während einer kleinen Zeit τ folgend auf den Zeitmoment t ausgeführt worden sein. Wir machen jetzt ebensolche Beobachtungen in einem Zeitintervall τ folgend auf den Zeitmoment $t + \Delta t$. Wir finden nun an Stelle von N_{iP}^{jQ}-Kombinationen eine Zahl $N_{iP}^{jQ} + \Delta N_{iP}^{jQ}$. Diese Zahl bedeutet die Anzahl Doppelelemente, die während τ so gefüllt sind, daß in dS_P ein i-Ion und in dS_Q ein j-Ion vorhanden sind, wobei diese Beobachtung nach der Zeit $t + \Delta t$ ausgeführt worden ist. Die Verteilungsfunktion w_{iP}^{jQ} erfährt demnach für alle nichtstationären Vorgänge eine zeitliche Änderung. Diese Änderung ΔN_{iP}^{jQ} können wir aber in folgender Weise berechnen. Während sich ein i-Ion in dS_P aufhält, kann ein j-Ion in dS_Q hineinwandern. Diese Entstehungsart komme im Laufe der Zeit τ : A_{io}^{ij} mal vor. Oder es kann während des Aufenthalts eines j-Ions in dS_Q ein i-Ion in dS_P hineinwandern. Diese zweite Entstehungsart komme während der Zeit τ : A_{oj}^{ij} mal vor. Wir setzen

$$A_{oj}^{ij} + A_{io}^{ij} = Z_+.$$

Oder aber es kann, während sich ein i-Ion in dS_P aufhält, ein j-Ion aus dS_Q hinauswandern oder auch während des Aufenthalts eines j-Ions in dS_Q ein i-Ion aus dS_P hinauswandern. Die erste Entstehungsart trete im Laufe der Zeit τ : A_{ij}^{io} mal auf, die zweite A_{ij}^{oj} mal. Wir setzen

$$A_{ij}^{oj} + A_{ij}^{io} = Z_-.$$

Folglich ist

$$\frac{\Delta N_{iP}^{jQ}}{N} = \frac{Z_+ - Z_-}{\tau} \Delta t$$

1) Die in I benutzte Zahl N hat nichts zu tun mit N in IV. In IV bedeutet N die Loschmidtsche Zahl pro Mol.

oder wenn wir

$$Z_+ - Z_- = Z$$

setzen, gilt

$$\frac{\Delta N_{iP}^{jQ}}{N} = \frac{Z}{\tau} \Delta t.$$

Gemäß (4) ist folglich

$$\frac{\partial w_{iP}^{jQ}}{\partial t} dS_P dS_Q = \frac{Z}{\tau}. \tag{5}$$

Wir brauchen jetzt bloß noch Z auszurechnen. Zu dem Zweck führen wir die mittlere Geschwindigkeit der j-Ionen in der Umgebung eines i-Ions ein. Wir nennen diese Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{iP}^{jQ}$. Der Überschuß an j-Ionen, die pro Zeiteinheit in ein Volumenelement dS_Q mehr hinein- als hinauswandern, ist

$$-\operatorname{div}_Q\left(n_{iP}^{jQ} \mathfrak{v}_{iP}^{jQ}\right) dS_Q.$$

Der Index Q bedeutet, daß die partiellen Differentialquotienten, welche für die Divergenzbildung maßgebend sind, jeweils nach den Koordinaten x_Q, y_Q, z_Q zu nehmen sind.

Multiplizieren wir diese Größe mit der Summe aller Zeitintervalle t_i, welche im Zeitintervall τ vorkommen und während derer sich in dS_P wirklich ein i-Ion aufhält, so ergibt sich

$$-t_i \operatorname{div}_Q\left(n_{iP}^{jQ} \mathfrak{v}_{iP}^{jQ}\right) dS_Q.$$

Dieser Überschuß an j-Ionen in der Umgebung eines i-Ions während der Zeit τ muß aber gerade gleich $A_{io}^{ij} - A_{ij}^{io}$ sein. Folglich gilt

$$A_{io}^{ij} - A_{ij}^{io} = -t_i dS_Q \operatorname{div}_Q\left(n_{iP}^{jQ} \mathfrak{v}_{iP}^{jQ}\right).$$

Entsprechend folgt für den Überschuß an i-Ionen in dS_P bei gleichzeitigem Aufenthalt eines j-Ions in dS_Q während der Zeit τ

$$A_{oj}^{ij} - A_{ij}^{oj} = -t_j \operatorname{div}_P\left(n_{jQ}^{iP} \mathfrak{v}_{jQ}^{iP}\right) dS_P$$

Folglich wird

$$Z = -t_i \operatorname{div}_Q\left(n_{iP}^{jQ} \mathfrak{v}_{iP}^{jQ}\right) dS_Q - t_j \operatorname{div}_P\left(n_{jQ}^{iP} \mathfrak{v}_{jQ}^{iP}\right) dS_P$$

oder

$$\frac{Z}{\tau} = -\left[n_i \operatorname{div}_Q\left(n_{iP}^{jQ} \mathfrak{v}_{iP}^{jQ}\right) + n_j \operatorname{div}_Q\left(n_{jQ}^{iP} \mathfrak{v}_{jQ}^{iP}\right)\right] dS_P dS_Q.$$

Im Verein mit (5) ergibt sich also

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{iP}^{jQ}}{\partial t} &= -\left[n_i \operatorname{div}_Q\left(n_{iP}^{jQ} \mathfrak{v}_{iP}^{jQ}\right) + n_j \operatorname{div}_P\left(n_{jQ}^{iP} \mathfrak{v}_{jQ}^{iP}\right)\right] \\ &= -\left[\operatorname{div}_Q\left(w_{iP}^{jQ} \mathfrak{v}_{iP}^{jQ}\right) + \operatorname{div}_P\left(w_{jQ}^{iP} \mathfrak{v}_{jQ}^{iP}\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Indizes P bzw. Q, mit welcher div versehen ist, weisen darauf hin, daß die jeweiligen partiellen Differentialquotienten nach x_P, y_P, z_P bzw. x_Q, y_Q, z_Q zu bilden sind. Nach (3') ist $w_{iP}^{jQ} = w_{jQ}^{iP}$. Wir wollen jetzt die Gleichung (6), die für nichtstationäre Vorgänge gilt, auf den Fall der Leitfähigkeit anwenden. Zu dem Zweck brauchen wir nur zu bedenken, daß als Ursache der Geschwindigkeit der Ionen 1. elektrische Kräfte und 2. die Wärmebewegung in Frage kommen. Von den Strömungen in der Flüssigkeit können wir mit Debye und Hückel absehen, wenn wir den Fall sehr verdünnter Lösungen zugrunde legen. Legt man die verallgemeinerten Gleichungen der Brownschen Bewegung zugrunde, und nennt man $\mathfrak{K}_{iP}^{jQ}$ die äußere Kraft, die auf das j-Ion in dS_Q wirksam ist, wobei sich dieses in der Umgebung eines i-Ions befindet, k die Boltzmannsche Konstante, T die absolute Temperatur und ϱ_j die Reibungsgröße der Ionen der Sorte j, so wird die mittlere Geschwindigkeit des j-Ions infolge der Wärmebewegung $\frac{-kT}{\varrho_j w_{iP}^{jQ}} \operatorname{grad}_Q w_{iP}^{jQ}$; die Geschwindigkeit des j-Ions infolge der Einwirkung der Kraft ist $\frac{\mathfrak{K}_{iP}^{jQ}}{\varrho_j}$. Folglich ist die Gesamtgeschwin-

digkeit des j-Ions

$$\mathfrak{v}_{iP}^{jQ} = \left[\mathfrak{K}_{iP}^{jQ} - \frac{kT}{w_{iP}^{jQ}} \operatorname{grad}_Q w_{iP}^{jQ}\right] \frac{1}{\varrho_j} \tag{7}$$

Ebenso gilt

$$\mathfrak{v}_{jQ}^{iP} = \left[\mathfrak{K}_{jQ}^{iP} - \frac{kT}{w_{jQ}^{iP}} \operatorname{grad}_P w_{jQ}^{iP}\right] \frac{1}{\varrho_i} \tag{7'}$$

Unsere Gleichung (6) geht also über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{iP}^{jQ}}{\partial t} = &- \frac{1}{\varrho_j} \operatorname{div}_Q\left[w_{iP}^{jQ}\mathfrak{K}_{iP}^{jQ} - kT \operatorname{grad}_Q w_{iP}^{jQ}\right] \\ &- \frac{1}{\varrho_i} \operatorname{div}_P\left[w_{jQ}^{iP}\mathfrak{K}_{jQ}^{iP} - kT \operatorname{grad}_P w_{jQ}^{iP}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Für den Fall der Leitfähigkeit wird, wenn wir die äußere elektrische Feldstärke mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen,

$$\mathfrak{K}_{iP}^{jQ} = - e_j \operatorname{grad}_Q \psi_{iP}^{Q} + e_j \mathfrak{E} \qquad \mathfrak{K}_{jQ}^{iP} = - e_i \operatorname{grad}_P \psi_{jQ}^{P} + e_i \mathfrak{E}. \tag{9}$$

Hierin bedeutet ψ_{iP}^{Q} das Potential, welches von der Ionenatmosphäre der i-Ionen herrührt, an der Stelle des j-Ions. Ebenso ist ψ_{jQ}^{P} das Potential, welches von der Ionenatmosphäre des j-Ions herrührt an der Stelle des i-Ions. Diese beiden Potentiale müssen den Poissonschen Gleichungen genügen

$$\operatorname{div}_Q \operatorname{grad}_Q \psi_{iP}^{Q} = - \frac{4\pi}{D} \sum_j n_{iP}^{jQ} e_j = - \frac{4\pi}{n_i D} \sum_j w_{iP}^{jQ} e_j \tag{10}$$

$$\operatorname{div}_P \operatorname{grad}_P \psi_{jQ}^{P} = - \frac{4\pi}{D} \sum_i n_{jQ}^{iP} e_i = - \frac{4\pi}{n_j D} \sum_i w_{jQ}^{iP} e_i. \tag{10'}$$

Wählen wir den Spezialfall des Gleichgewichts, betrachten wir also einen homogenen stromlosen Elektrolyten, so gilt nach (7)

$$- w_{iP}^{jQ} e_j \operatorname{grad}_Q \psi_{iP}^{Q} - kT \operatorname{grad}_Q w_{iP}^{jQ} = 0.$$

D. h. in diesem Fall wird die Verteilungsfunktion[1])

$$w_{iP}^{jQ} = n_i n_j e^{-\frac{e_j \psi_{iP}^{Q}}{kT}}. \tag{11}$$

Ebenso folgt

$$w_{jQ}^{iP} = n_i n_j e^{-\frac{e_i \psi_{jQ}^{P}}{kT}}. \tag{11'}$$

Setzen wir

$$\psi_{iP}^{Q} = e_i g(r) \tag{11''}$$

$$\psi_{jQ}^{P} = e_j g(r), \tag{11'''}$$

worin $g(r)$ nur von der Entfernung r des i-Ions vom j-Ions abhängt, so entsteht nach (10) und (10') für $g(r)$ die Differentialgleichung, wenn entsprechend dem ursprünglichen Verfahren von Debye und Hückel die Exponentialfunktion durch ihre Entwicklung ersetzt wird:

$$\Delta g(r) = g(r) \frac{4\pi}{DkT} \sum n_j e_j^2 = \varkappa^2 g(r). \tag{11''''}$$

Man gelangt damit in diesem stationären Fall, also auch unter Berücksichtigung der Brownschen Bewegung zu der Differentialgleichung, wie sie Debye und Hückel für den Fall des ruhenden Ions benutzt haben. Sie gilt nur für sehr verdünnte Lösungen. Dann ist auch (3') erfüllt. Setzt man

1) Die multiplikative Konstante $n_i n_j$ ist so bestimmt, daß in großer Entfernung vom zentralen Ion die gewöhnliche regellose, der vorgegebenen Dichte entsprechende Verteilung resultiert.

(9) in (8) ein, so entsteht

$$\frac{\partial w_{iP}^{jQ}}{\partial t} = \frac{1}{\varrho_j} \operatorname{div}_Q \left[e_j w_{iP}^{jQ} \operatorname{grad}_Q \psi_{iP}^{Q} + kT \operatorname{grad}_Q w_{iP}^{jQ} - e_j \mathfrak{E} w_{iP}^{jQ} \right]$$
$$+ \frac{1}{\varrho_i} \operatorname{div}_P \left[e_i w_{jQ}^{iP} \operatorname{grad}_P \psi_{jQ}^{P} + kT \operatorname{grad}_P w_{jQ}^{iP} - e_i \mathfrak{E} w_{jQ}^{iP} \right]. \tag{12}$$

Wir wollen jetzt die Abweichungen von der stationären Verteilung, wie sie durch die Beziehungen (11), (11′), (11″), (11‴), (11⁗) charakterisiert ist, näher untersuchen. Da (vgl. 3)

$$w_{iP}^{jQ} = w_{jQ}^{iP}$$

ist, setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise:

$$w_{iP}^{jQ} = w_{jQ}^{iP} = w_{ij} \tag{13}$$

Ferner bestimme f_{ij} die Abweichungen von der vollkommen regellosen Anordnung der Ionen; d. h wir schreiben

$$w_{ij} = n_i n_j + f_{ij} \tag{14}$$

Folglich geht unsere Differentialgleichung für f_{ij} über in

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{\varrho_j} \left[-\frac{n_i n_j e_j}{n_i D} 4\pi \sum_p f_{ip} e_p + kT \Delta_Q f_{ij} - e_j \mathfrak{E} \operatorname{div}_Q f_{ij} \right]$$
$$+ \frac{1}{\varrho_i} \left[-\frac{n_i n_j e_i}{n_j D} 4\pi \sum_p f_{pj} e_p + kT \Delta_P f_{ij} - e_i \mathfrak{E} \operatorname{div}_P f_{ij} \right] \tag{15}$$

oder

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{\varrho_j} \left[kT \Delta_Q f_{ij} - \frac{4\pi n_j e_j}{D} \sum_p f_{ip} e_p - e_j \mathfrak{E} \operatorname{div}_Q f_{ij} \right]$$
$$+ \frac{1}{\varrho_i} \left[kT \Delta_P f_{ij} - \frac{4\pi n_i e_i}{D} \sum_p f_{pj} e_p - e_i \mathfrak{E} \operatorname{div}_P f_{ij} \right]. \tag{15'}$$

Wir setzen weiter die uns interessierende Verteilungsfunktion f_{ij} bei Einführung der relativen Koordinaten x, y, z:

$$f_{ij} = F_{ij}(x, y, z). \tag{16}$$

Darin ist

$$x = x_Q - x_P, \qquad y = y_Q - y_P, \qquad z = z_Q - z_P. \tag{17}$$

Folglich wird

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_Q} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_P} = -\frac{\partial F_{ij}}{\partial x} \cdots$$
$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x_Q^2} = \frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial x^2}. \quad \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x_P^2} = \frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial x^2} \cdots \tag{18}$$

Weiter wirke die äußere elektrische Feldstärke parallel x und $\mathfrak{E}_x$ werde mit X bezeichnet. Dann lautet die partielle Differentialgleichung für F_{ij}

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = kT \left(\frac{1}{\varrho_i} + \frac{1}{\varrho_j} \right) \Delta F_{ij} + \left(\frac{e_i}{\varrho_i} - \frac{e_j}{\varrho_j} \right) X \frac{\partial F_{ij}}{\partial x}$$
$$- \frac{4\pi}{D} \left(\frac{n_i e_i}{\varrho_i} \sum_p e_p F_{pj} + \frac{n_j e_j}{\varrho_j} \sum_p e_p F_{ip} \right). \tag{19}$$

Diese Gleichungen (19) sind die allgemeinen Grundgleichungen, die den Leitfähigkeitsproblemen auch im nichtstationären Falle zugrunde liegen. Wir wollen jetzt die Gleichungen (19) auf den Fall spezialisieren, wo wir es nur mit zwei verschiedenen Sorten von Ionen zu tun haben. Dieser Fall wird den folgenden Erörterungen stets zugrunde liegen. Wenn wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit von einfachen Elektrolyten sprechen, so meinen wir stets solche, die zwei Sorten von Ionen enthalten, also z. B. KCl, $MgCl_2$ usf.

II. Dispersion der Kraftwirkung für starke Elektrolyte.

§ 2. Die Grundgleichungen für den Fall zweier Sorten von Ionen.

Der Elektrolyt möge nur zwei Sorten von Ionen enthalten. Es treten dann die vier Funktionen F_{11}, F_{22}, F_{12}, F_{21} auf. Diese vier Funktionen haben den vier Gleichungen zu genügen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{11}}{\partial t} &= \frac{2kT}{\varrho_1}\Delta F_{11} - \frac{4\pi}{D}\frac{n_1 e_1}{\varrho_1}(e_1 F_{11} + e_2 F_{21}) - \frac{4\pi}{D}\frac{n_1 e_1}{\varrho_1}(e_1 F_{11} + e_2 F_{12}) \\
\frac{\partial F_{22}}{\partial t} &= \frac{2kT}{\varrho_2}\Delta F_{22} - \frac{4\pi}{D}\frac{n_2 e_2}{\varrho_2}(e_1 F_{12} + e_2 F_{22}) - \frac{4\pi}{D}\frac{n_2 e_2}{\varrho_2}(e_1 F_{21} + e_2 F_{22}) \\
\frac{\partial F_{12}}{\partial t} &= kT\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\Delta F_{12} + \left(\frac{e_1}{\varrho_1} - \frac{e_2}{\varrho_2}\right) X \frac{\partial F_{12}}{\partial x} \\
&\quad - \frac{4\pi}{D}\left[\frac{n_1 e_1}{\varrho_1}(e_1 F_{12} + e_2 F_{22}) + \frac{n_2 e_2}{\varrho_2}(e_1 F_{11} + e_2 F_{12})\right] \\
\frac{\partial F_{21}}{\partial t} &= kT\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\Delta F_{21} + \left(\frac{e_2}{\varrho_2} - \frac{e_1}{\varrho_1}\right) X \frac{\partial F_{21}}{\partial x} \\
&\quad - \frac{4\pi}{D}\left[\frac{n_2 e_2}{\varrho_2}(e_1 F_{11} + e_2 F_{21}) + \frac{n_1 e_1}{\varrho_1}(e_1 F_{21} + e_2 F_{22})\right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Wir wollen nun annehmen, das X sehr klein ist und periodische Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω ausführt. Es gilt also

$$\begin{aligned} X &= E e^{i\omega t} \\ F_{ij} &= F_{ij}{}^0 + g_{ij} \end{aligned} \tag{21}$$

dabei ist g_{ij} klein gegenüber $F_{ij}{}^0$, eine Annahme, die innerhalb des Gültigkeitsbereiches des Ohmschen Gesetzes also für kleine Feldstärken E richtig ist. Gemäß (11, 11' ...) bestimmt sich $F_{ij}{}^0$ zu:

$$F_{ij}{}^0 = n_i n_j\left(1 - \frac{e_i e_j}{DkT}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) \tag{22}$$

Die Abweichungen g_{ij} der Verteilungsfunktion werden ebenfalls harmonische Schwingungen mit derselben Kreisfrequenz ω ausführen. Wir setzen also an

$$g_{ij} = G_{ij} e^{i\omega t}$$

Unter Einführung dieser Bezeichnungen in (20) entstehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\varrho_1}kT\Delta G_{11} - i\omega G_{11} - \frac{4\pi n_1 e_1}{D\varrho_1}(e_1 G_{11} + e_2 G_{21}) - \frac{4\pi n_1 e_1}{D\varrho_1}(e_1 G_{11} + e_2 G_{12}) = 0 \\
&\frac{2}{\varrho_2}kT\Delta G_{22} - i\omega G_{22} - \frac{4\pi n_2 e_2}{D\varrho_2}(e_1 G_{12} + e_2 G_{22}) - \frac{4\pi n_2 e_2}{D\varrho_2}(e_1 G_{21} + e_2 G_{22}) = 0 \\
&\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)kT\Delta G_{12} - i\omega G_{12} - \frac{4\pi n_1 e_1}{D\varrho_1}(e_1 G_{12} + e_2 G_{22}) - \frac{4\pi n_2 e_2}{D\varrho_2}(e_1 G_{11} + e_2 G_{12}) = -\left(\frac{e_1}{\varrho_1} - \frac{e_2}{\varrho_2}\right)E\frac{\partial F_{12}{}^0}{\partial x} \\
&\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)kT\Delta G_{21} - i\omega G_{21} - \frac{4\pi n_2 e_2}{D\varrho_2}(e_1 G_{11} + e_2 G_{21}) - \frac{4\pi n_1 e_1}{D\varrho_1}(e_1 G_{21} + e_2 G_{22}) = \left(\frac{e_1}{\varrho_1} - \frac{e_2}{\varrho_2}\right)E\frac{\partial F_{21}{}^0}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Es handelt sich nun darum, von diesen Gleichungen Lösungen anzugeben, die für unser Problem der Dispersion maßgebend sind. Solange die Feldstärken E nicht zu hoch sind, also weit unter 100 000 Volt pro cm liegen, gilt das Ohmsche Gesetz. Für diesen Fall gelten die Beziehungen[1])

$$G_{12} = -G_{21} \text{ woraus } G_{11} = G_{22} = 0 \text{ folgt.} \tag{24}$$

Diese Bedingungen (24) für die Verteilungsfunktion sind in dem stationären Fall der Leitfähigkeitsfrage schon von Onsager benutzt worden. Sie bedeuten physikalisch nichts anderes als daß die Ionenatmosphären der beiden Sorten von Ionen durch das Feld in der dissymmetrischen Weise verändert werden, wie sie zuerst von Debye und Hückel abgeleitet wurde. Dieser Umstand vereinfacht unsere Fragestellung ganz wesentlich. Unsere Differentialgleichungen (23) gehen dann über in die

1) Man kann sich durch eine Untersuchung des ganzen Komplexes der Lösungen leicht überzeugen, daß die angegebenen speziellen Beziehungen (24) die geeignete Lösung für unseren Fall darstellen.

einzige Gleichung, die das Problem der Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante einfacher Elektrolyte beherrscht:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)kT\Delta G_{12}-i\omega G_{12}-\frac{4\pi}{D}\left(\frac{n_1e_1^2}{\varrho_1}+\frac{n_2e_2^2}{\varrho_2}\right)G_{12}=-\left(\frac{e_1}{\varrho_1}-\frac{e_2}{\varrho_2}\right)E\frac{\partial F_{12}^0}{\partial x}. \tag{25}$$

Zur weiteren Behandlung dieser Differentialgleichung (25) führen wir die Relaxationszeit Θ der Ionenatmosphäre z. B. um das Ion 1 oder auch um das Ion 2 vermöge der Beziehung ein:

$$\Theta=\frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\frac{1}{kT\varkappa^{*2}} \tag{26}$$

wobei gilt

$$\varkappa^{*2}=q\varkappa^2 \tag{27}$$

und

$$q=\frac{\frac{e_1}{\varrho_1}-\frac{e_2}{\varrho_2}}{(e_1-e_2)\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)}. \tag{28}$$

Ferner ist zur Abkürzung gesetzt die komplexe Größe[1]):

$$K^2=\varkappa^{*2}(1+i\omega\Theta) \tag{29}$$

Unter Einführung von (29) geht die Differentialgleichung (25) über in:

$$\Delta G_{12}-K^2G_{12}=-\frac{e_1\varrho_2-e_2\varrho_1}{\varrho_1+\varrho_2}\frac{E}{kT}\frac{\partial F_{12}^0}{\partial x}. \tag{30}$$

Es ist zweckmäßig, das zusätzliche Potential ψ_1' um das Ion 1, wobei nach (10) (11, 11' ...) (21) u. (22)

$$G_{12}e^{i\omega t}=-\frac{D}{4\pi}\frac{n_1}{e_2}\Delta\psi_1' \tag{31}$$

ist, einzuführen, welches infolge der wirksamen elektrischen Feldstärke dem Potential, das ohne Feld vorhanden ist, überlagert ist. Dieses Potential ψ_1' hat nach (30) und (31) der partiellen Differentialgleichung zu genügen

$$\Delta\Delta\psi_1'-K^2\Delta\psi_1'=\Omega\varkappa^{*2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}e^{i\omega t} \tag{32}$$

Hierbei gilt die Abkürzung

$$\Omega=E\frac{e_1e_2}{DkT}. \tag{33}$$

Ferner ist die Gleichung (22)

$$F_{12}^0=n_1n_2-\frac{n_1n_2}{DkT}\frac{e_1e_2e^{-\varkappa r}}{r}$$

zur Ableitung von (32) benutzt worden. Unsere Differentialgleichung (32) ist auf dieselbe Form gebracht wie die, welche Onsager seiner Arbeit über die Leitfähigkeit starker Elektrolyte zugrunde gelegt hat. Nur ist in unserem nichtstationären Falle K^2 komplex. Wir werden sehen, daß dadurch eine Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante hervorgerufen wird.

§ 3. Berechnung des asymmetrischen Potentials des schwingenden Ions.

Wir müssen jetzt das zusätzliche Potential an der Stelle des Ions bilden. Zunächst bemerken wir noch, daß, da nach (24) und (31)

$$n_1e_1\psi_1'+n_2e_2\psi_2'=0$$

ist,

$$\psi_1'=\psi_2' \tag{34}$$

ist (da $n_1e_1=-n_2e_2$ ist). D. h., das zusätzliche Potential, welches auf einer Abänderung der symmetrischen Ionenatmosphäre des einen Ions beruht, ist im zeitlichen Mittel gleich dem, das sich

1) Man beachte, daß bei den hier behandelten einfachen Elektrolyten die Beziehung gilt:

$$n_1e_1+n_2e_2=0.$$

auf die Ionenwolke des anderen Ions bezieht. Als partikuläre Lösung der Gleichung (32) können wir sofort angeben

$$\frac{q\Omega}{\varkappa^2 - K^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\varkappa r}}{r} e^{i\omega t}.$$

Wir müssen nun noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta(\Delta\psi' - K^2\psi') = 0$$

zu der partikulären Lösung addieren. Als allgemeine Lösung von (32) resultiert folglich

$$\psi_1' = \left[\frac{q\Omega}{\varkappa^2 - K^2} \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) + A' \frac{d\left(\frac{e^{-Kr}}{r}\right)}{dr} + \frac{B'}{r^2}\right] e^{i\omega t} \cos\vartheta \tag{35}$$

ϑ bedeutet den Winkel zwischen der Feldrichtung und dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$. Das Potential des schwingenden Ions darf nun an der Stelle des Ions nicht unendlich werden. Ebenfalls darf an dieser Stelle keine unendliche Ladungsdichte auftreten. Entwickelt man in der Weise:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa^2}{2} - \frac{\varkappa^3 r}{3} + \cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-Kr}}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} + \frac{K^2}{2} - \frac{K^3 r}{3} + \cdots\cdots$$

so bestehen für die Konstanten A' und B' die Gleichungen

$$-\frac{q\Omega}{\varkappa^2 - K^2} - A' + B' = 0 \qquad \frac{q\Omega}{\varkappa^2 - K^2}\varkappa^2 + A'K^2 = 0$$

Hieraus bestimmen sich die Konstanten A' und B' zu

$$A' = -\frac{q\Omega}{\varkappa^2 - K^2}\frac{\varkappa^2}{K^2} \qquad B' = A' + \frac{q\Omega}{\varkappa^2 - K^2} \tag{36}$$

Die Entwicklung des zusätzlichen Potentials in der Nähe des Ions lautet infolgedessen

$$\psi_1' = \left(-\frac{q\Omega}{\varkappa^2 - K^2}\frac{\varkappa^3 r}{3} - \frac{A'K^3}{3} r \cdots\cdots\right) e^{i\omega t}\cos\vartheta = \frac{-\Omega q \varkappa^2}{3(\varkappa + K)} r e^{i\omega t}\cos\vartheta. \tag{37}$$

§ 4. Berechnung der Kraftwirkung auf das schwingende Ion („Asolutwert der Kraft", und „Phase" in Abhängigkeit von der Frequenz).

Für die Feldstärke im Nullpunkt, d. h. an der Stelle des Ions 1 errechnet sich der Ausdruck gemäß (37):

$$\frac{\Omega q \varkappa^2}{3(\varkappa + K)} \cdot e^{i\omega t}$$

Setzen wir nach (27) und (29)

$$K = \varkappa\sqrt{q}\sqrt{1 + i\omega\Theta} \tag{38}$$

so läßt sich die Feldstärke an der Stelle des Ions schreiben

$$\frac{e_1 e_2}{3DkT} \frac{q\varkappa E e^{i\omega t}}{1 + \sqrt{q}\sqrt{1 + i\omega\Theta}} \tag{39}$$

Nun ist im Grenzfall

$$\varrho_1 v_1 = e_1 E. \tag{40}$$

Daher wird die Kraft auf das Ion 1 in genügender Näherung

$$\frac{e_1 e_2}{3DkT} \frac{\varkappa \varrho_1 v_1 q e^{i\omega t}}{1 + \sqrt{q}\sqrt{1 + i\omega\Theta}}$$

oder

$$\frac{e_1 e_2}{3DkT}\sqrt{q}\,\varrho_1 v_1 \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{i\omega t}, \tag{41}$$

wobei

$$\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{1 + i\omega\Theta} = a + ib \tag{42}$$

eingeführt ist. Die uns interessierende Kraft ist gegeben durch:

$$-K^* e^{i(\omega t + \Delta)} = K^* e^{i(\omega t + \Delta + \pi)} \tag{43}$$

worin der Absolutwert der Kraft K^* durch:

$$K^* = \frac{|e_1 e_2|}{3DkT} \frac{\varkappa \varrho_1 v_1 \sqrt{q}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{44}$$

und die Phase Δ durch

$$\operatorname{tg} \Delta = -\frac{b}{a} \tag{45}$$

bestimmt ist. $\pi + \Delta$ bedeutet die Phasendifferenz der Kraft auf das schwingende Ion gegenüber seiner Geschwindigkeit. Für jeden speziellen einfachen Elektrolyten lassen sich nach (44) und (45) der Absolutwert der Kraft K^* und die Phase Δ als Funktion von $\omega\Theta$ berechnen. Zu dem Zweck ist nur nötig, die Größen q, $\varkappa$ und Θ zu berechnen (vgl. z. B. Tabelle III auf Seite 416); damit ergeben sich nach (44) und (45) K^* und Δ als Funktion der Frequenz ω oder der Wellenlänge des elektrischen Wechselfeldes[1]). Der Absolutwert der Kraft wird für den stationären Fall

$$\frac{|e_1 e_2|}{3DkT} \varkappa \varrho_1 v_1 \frac{q}{1 + \sqrt{q}}, \tag{46}$$

was mit Onsager übereinstimmt.

Wir wollen jetzt den in unserer früheren Arbeit ebenfalls behandelten Fall des KCl quantitativ untersuchen und sehen, wie groß die Änderungen gegenüber der qualitativen Behandlung von früher (vgl. DF I) sind.

§ 5. Beispiel des KCl. („Absolutwert der Kraft" und „Phase" als Funktion von $\omega\Theta$; Θ = Relaxationszeit, ω = Kreisfrequenz).

KCl ist ein binärer Elektrolyt ($e_1 = -e_2 = e$). Für alle binären Elektrolyte ist nach (28)

$$q = 0{,}5.$$

Für die Relaxationszeit Θ ergibt sich vermöge (26), da das K-Ion und das Cl-Ion die gleiche Beweglichkeit besitzen, folglich $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ ist,

$$\Theta = \frac{\varrho}{kT\varkappa^2} = \frac{0{,}553}{\gamma} \cdot 10^{-10}\,\text{sec} \qquad (\gamma = \text{Konzentration in Mol pro Liter})$$

also genau derselbe Ausdruck, den wir unserer ersten Mitteilung zugrunde gelegt hatten (vgl. Formel (22) in DF I). Dabei ist die Temperatur zu 18° C angenommen und als Lösungsmittel Wasser gewählt. Für den Absolutwert der Kraft im stationären Falle ($\omega = 0$) entsteht allgemein für binäre Elektrolyte der Wert

$$\frac{e^2 \varkappa}{6DkT} (2 - \sqrt{2})\, E \tag{46'}$$

Wir bilden jetzt das Verhältnis des Absolutwertes der Kraft auf das schwingende Ion zu dem auf das stationär bewegte Ion (46'), welches wir δ nennen wollen. Desgleichen berechnen wir die Phase Δ als Funktion von $\omega\Theta$. In folgender Tabelle I sind δ und Δ für eine Reihe von Werten von $\omega\Theta$ angegeben. Die Zahlen der dritten und fünften Kolonne entstehen, wenn man von der Brownschen Bewegung absieht; wir haben sie früher (DF I Tabelle II) berechnet und in Tabelle I eingeklammert. Man erkennt, daß die Werte von δ und Δ nur wenig verschieden sind von den früher berechneten. Der Abfall von δ ist etwas geringer als früher. Wieder ist δ für sehr kleine $\omega\Theta$ von 1 kaum verschieden. Die Kurve δ hat für sehr kleine Werte von $\omega\Theta$ zunächst parabolische Gestalt mit horizontaler Tangente bei $\omega\Theta = 0$ und nimmt für sehr große Werte von $\omega\Theta$ proportional zu $\frac{1}{\omega\Theta}$ ab. Wir haben in Fig. 2 δ als Funktion von $\omega\Theta$, wie es auf Grund der quantitativen Theorie folgt, stark ausgezogen, während bei Vernachlässigung der Brownschen Bewegung die gestrichelt gezeichnete Kurve entsteht. In Fig. 3 ist die Phase Δ als Funktion von $\omega\Theta$ gezeichnet (stark ausgezogene Kurve). Die gestrichelte Kurve bezieht sich wieder auf die Werte ohne Berücksichtigung der Brownschen Bewegung, die mit (Δ) bezeichnet sind. Für sehr kleine Werte von $\omega\Theta$ steigt die negative Phase Δ linear an; für sehr große Werte von $\omega\Theta$ nähert sie sich dem Werte -45^0. Der Absolutwert der Kraft

1) Wir bemerken noch, daß für kompliziertere Elektrolyte, für welche $q \neq 0{,}5$ ist, die Kurven für δ und Δ nicht stark von den in Fig. 2 und 3 ausgezogenen Kurven abweichen.



Fig. 2.

Fig. 3.

für den stationären Fall fällt nach (46′) kleiner aus als der, der ohne Brownsche Bewegung entsteht. Das Verhältnis beider ist für binäre Elektrolyte:

$$2 - \sqrt{2} = 0{,}586 .$$

Tabelle I.

$\omega\Theta$	δ	(δ)	Δ	(Δ)	$\omega\Theta$	δ	(δ)	Δ	(Δ)
0	1,00	(1,00)	0°	(0°)	7,0	0,628	(0,573)	— 27° 4′	(— 30°07′)
0,1	1,00	(0,999)	— 1°11′	(— 1°26′)	8,0	0,601	(0,547)	— 28°	(— 30°55′)
0,2	0,998	(0,998)	— 2°22′	(— 2°50′)	9,0	0,579	(0,524)	— 28°46′	(— 31°40′)
0,5	0,983	(0,980)	— 5°41′	(— 6°50′)	10,0	0,558	(0,507)	— 29°30′	(— 32°19′)
1,0	0,945	(0,930)	— 10°16′	(— 12°15′)	12,0	0,524	(0,469)	— 30°42′	(— 33°30′)
2,0	0,863	(0,832)	— 16°18′	(— 19°05′)	15,0	0,482	(0,431)	— 32° 2′	(— 34°41′)
3,0	0,793	(0,755)	— 20°	(— 23°02′)	18,0	0,450	(0,398)	— 32°49′	(— 35°25′)
4,0	0,741	(0,690)	— 22°29′	(— 25°44′)	20,0	0,433	(0,380)	— 33°32′	(— 35°57′)
5,0	0,696	(0,645)	— 24°21′	(— 27°31′)	∞	0	0	— 45°	(— 45°)
6,0	0,658	(0,608)	— 25°50′	(— 28°54′)					

Die Zahlen der Tabelle sind genauer als 1 Proz.

III. Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante.

Es handelt sich jetzt darum, den Leitungs- und Verschiebungsstrom auszurechnen. Zu dem Zweck müssen wir die Geschwindigkeit $v_1 e^{i\omega t}$ des einen Ions und die Geschwindigkeit $v_2 e^{i\omega t}$ des anderen Ions berechnen. Wir wollen jetzt die elektrophoretische Kraft mitberücksichtigen und die Annahme machen, daß sie frequenzunabhängig ist[1]). Sie rührt her von den Änderungen der Stokesschen Reibungskraft, die zufolge der Anwesenheit der Ionen auftreten. Da dieser elektrophoretischen Kraft das Potential um das ruhende Ion zugrunde liegt, so können wir den von Debye und Hückel angegebenen Wert für sie übernehmen, was für kleine Geschwindigkeiten erlaubt ist. Die von der äußeren Feldstärke herrührende Kraft, die Stokessche Kraft, die elektrophoretische Kraft und die Relaxationskraft müssen sich nun das Gleichgewicht halten. Sonach bestehen die Beziehungen (η = Koeffizient der inneren Reibung)[2])

$$\left.\begin{aligned} e_1 E - \varrho_1 v_1 + \frac{e_1 e_2}{3DkT} \frac{\varrho_1 v_1 \sqrt{q}}{\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{1 + i\omega\Theta}} - \frac{e_1 E \varkappa \varrho_1}{6\pi\eta} = 0 \\ e_2 E - \varrho_2 v_2 + \frac{e_1 e_2}{3DkT} \frac{\varrho_2 v_2 \sqrt{q}}{\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{1 + i\omega\Theta}} - \frac{e_2 E \varkappa \varrho_2}{6\pi\eta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Hieraus berechnen sich die Geschwindigkeiten $v_1 e^{i\omega t}$ bzw. $v_2 e^{i\omega t}$ zu

$$v_j e^{i\omega t} = E\left[e_j \omega_j + \frac{e_1 e_2}{3DkT} \varkappa e_j \omega_j \chi(q, \omega\Theta) - \frac{e_j \varkappa}{6\pi\eta}\right] e^{i\omega t} \tag{48}$$

worin $j = 1$ bzw. $j = 2$ je nach der Sorte des Ions zu setzen ist und die Beziehungen bestehen

$$\chi(q, \omega\Theta) = \frac{\sqrt{q}\left[\sqrt{1 + i\omega\Theta} - \frac{1}{\sqrt{q}}\right]}{1 + i\omega\Theta - \frac{1}{q}} \tag{49}$$

$$\omega_j = \frac{1}{\varrho_j} \tag{49'}$$

χ ist also mit dem frequenzabhängigen Teil der Leitfähigkeit verknüpft und hängt nur von q und dem Produkt $\omega\Theta$ ab. Für die Stromdichte $\mathfrak{i}$ folgt gemäß (48)

$$\mathfrak{i} = \sum n_j e_j v_j e^{i\omega t} = E e^{i\omega t}\left[\sum_j n_j e_j^2 \omega_j + \frac{e_1 e_2}{3DkT} \varkappa \sum_j n_j e_j^2 \omega_j \chi(q, \omega\Theta) - \sum_j \frac{n_j e_j^2 \varkappa}{6\pi\eta}\right]. \tag{50}$$

Phänomenologisch ist nach Maxwell die gesamte Stromdichte J gleich der Summe von Leitungs- und Verschiebungsstrom. Folglich gilt

$$J = \lambda \mathfrak{E} + \frac{D'}{4\pi} \dot{\mathfrak{E}} = \lambda E e^{i\omega t} + \frac{i\omega}{4\pi} D' E e^{i\omega t} \tag{51}$$

und

$$J = \frac{D}{4\pi} i\omega E e^{i\omega t} + \left[\sum n_j e_j^2 \omega_j + \frac{e_1 e_2}{3DkT} \varkappa \sum n_j e_j^2 \omega_j \chi - \sum \frac{n_j e_j^2 \varkappa}{6\pi\eta}\right] E e^{i\omega t}. \tag{51'}$$

D bedeutet die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels. Der reelle Teil der rechten Seite der Gleichung (51') ergibt die Leitfähigkeit λ zu

$$\lambda = \sum n_j e_j^2 \omega_j + \frac{e_1 e_2}{3DkT} \varkappa \sum n_j e_j^2 \omega_j \times \text{Reeller Teil von } \chi - \sum \frac{n_j e_j^2 \varkappa}{6\pi\eta}, \tag{52}$$

1) Diese Annahme ist vielleicht nicht ganz sicher. Wir halten sie aber für wahrscheinlich zutreffend und erhoffen von den auszuführenden Versuchen die weitere Klärung bezüglich dieses Punktes. Ist die Annahme nicht zutreffend, so wird dadurch der Effekt nur noch vergrößert.

2) Der Wert für die elektrophoretische Kraft ist der Arbeit von Debye und Hückel (Physik. Zeitschr. **24**, 305ff., 1923) entnommen worden.

während der imaginäre Teil von (51') mit dem Dielektrizitätskonstantenüberschuß verknüpft ist gemäß:

$$D' - D = \frac{4\pi}{\omega} \frac{e_1 e_2}{3DkT} \varkappa \sum n_j e_j^2 \omega_j \times \text{Imaginärer Teil von } \chi. \tag{53}$$

Die Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante wird bedingt durch das Auftreten von χ. Wir müssen nun die allgemeinen Formeln für die Leitfähigkeit und den Dielektrizitätskonstantenüberschuß durch Bildung des reellen bzw. imaginären Teils von χ bilden.

§ 6. Allgemeine Formeln für die Leitfähigkeit.

Für die Leitfähigkeit λ läßt sich zufolge (52) schreiben

$$\lambda = \lambda_\infty + \frac{e_1 e_2}{3DkT} \varkappa \lambda_\infty \times \text{Reeller Teil von } \chi - \sum \frac{n_j e_j^2}{6\pi\eta} \varkappa, \tag{54}$$

dabei ist

$$\sum n_j e_j^2 \omega_j = \lambda_\infty \text{ gesetzt.} \tag{55}$$

Wir führen nun für den auf der Relaxationskraft der Ionenatmosphäre herrührenden Anteil der Leitfähigkeit die Abkürzung

$$\frac{|e_1 e_2|}{3DkT} \varkappa \lambda_\infty \times \text{Reeller Teil von } \chi = \lambda_\mathrm{I} \tag{56}$$

und für den elektrophoretischen Anteil die Abkürzung

$$\sum \frac{n_j e_j^2 \varkappa}{6\pi\eta} = \lambda_\mathrm{II} \tag{57}$$

ein. Folglich gilt

$$\lambda = \lambda_\infty - \lambda_\mathrm{I} - \lambda_\mathrm{II}. \tag{58}$$

Wir betrachten jetzt das Verhältnis der Leitfähigkeitsverminderung bei der Frequenz ω und der Leitfähigkeitsverminderung bei der Frequenz 0, soweit sie von der Relaxationskraft herrühren. Wir bilden also den Quotient:

$$\frac{\lambda_{\mathrm{I}\,\omega}}{\lambda_{\mathrm{I}\,0}} = \frac{(\text{Reeller Teil von } \chi)_\omega}{(\text{Reeller Teil von } \chi)_{\omega=0}}. \tag{59}$$

Nach (49) ist

$$(\text{Reeller Teil von } \chi)_{\omega=0} = \frac{q}{1 + \sqrt{q}}. \tag{60}$$

Setzt man

$$\sqrt{1 + i\omega\Theta} = \overline{R} + i\overline{Q} \tag{61}$$

wobei gilt

$$\overline{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \omega^2\Theta^2} + 1} \qquad \overline{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \omega^2\Theta^2} - 1} \tag{61'}$$

so ist

$$\text{Reeller Teil von } \chi = \frac{\sqrt{q}}{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 + \omega^2\Theta^2} \left[\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(\overline{R} - \frac{1}{\sqrt{q}}\right) + \omega\Theta\overline{Q}\right] \tag{62}$$

Die Formel (54) im Verein mit Formel (62) ist für die Leitfähigkeit λ als Funktion von $\omega\Theta$ maßgebend. Wir wollen jetzt die molekulare Leitfähigkeit Λ vermöge der Definition

$$\Lambda = \frac{1000}{\gamma} \lambda \tag{63}$$

einführen. γ bedeutet hierin die molekulare Konzentration des gelösten Salzes. Für die molekulare Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung ist entsprechend:

$$\Lambda_\infty = \frac{1000}{\gamma} \lambda_\infty \tag{64}$$

Folglich hat man zu schreiben:

$$\Lambda = \Lambda_\infty - \Lambda_\mathrm{I} - \Lambda_\mathrm{II} \tag{65}$$

worin

$$\Lambda_I = \frac{e_1 e_2}{3DkT} \varkappa \Lambda_\infty \times \text{Reeller Teil von } \chi \tag{66}$$

$$\Lambda_{II} = \sum \frac{n_j e_j^2 \varkappa}{6\pi\eta} \frac{1000}{\gamma} \tag{67}$$

ist. In der Praxis drückt man die molekulare Leitfähigkeit in praktischen Einheiten aus ($Ohm^{-1}\,cm^2$), d. h. man legt die Ausdrücke zugrunde:

$$\overline{\Lambda} = \frac{\Lambda}{9 \cdot 10^{11}} \cdots \tag{68}$$

Unsere Formeln für die Leitfähigkeit lauten folglich in praktischen Einheiten

$$\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_\infty - \overline{\Lambda}_I - \overline{\Lambda}_{II} \tag{69}$$

worin sich $\overline{\Lambda}_I$ bzw. $\overline{\Lambda}_{II}$ bestimmen zu:

$$\overline{\Lambda}_I = \frac{|e_1 e_2|}{3DkT} \varkappa \overline{\Lambda}_\infty \times \text{Reeller Teil von } \chi \tag{70}$$

$$\overline{\Lambda}_{II} = \sum \frac{n_j e_j^2 \varkappa}{6\pi\eta} \frac{1000}{\gamma} \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \tag{71}$$

Diese Formeln (70, 71) legen wir für die Diskussion spezieller Beispiele in IV zugrunde.

§ 7. Allgemeine Formeln für den Dielektrizitätskonstantenüberschuß.

Für den Dielektrizitätskonstantenüberschuß fanden wir (vgl. 53):

$$D' - D = \frac{4\pi}{\omega} \frac{e_1 e_2 \varkappa}{3DkT} \sum n_j e_j^2 \omega_j \times \text{Imagin. Teil von } \chi \tag{72}$$

oder

$$D' - D = \frac{4\pi}{\omega} \frac{e_1 e_2 \varkappa}{3DkT} \lambda_\infty \times \text{Imagin. Teil von } \chi. \tag{73}$$

Bilden wir den imaginären Teil von χ, so ergibt sich hierfür

$$\text{Imaginärer Teil von } \chi = \frac{\sqrt{q}}{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 + \omega^2 \Theta^2} \left[\overline{Q}\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \omega\,\Theta\left(\overline{R} - \frac{1}{\sqrt{q}}\right)\right]. \tag{74}$$

Die Formel, die den Dielektrizitätskonstantenüberschuß angibt, ist somit:

$$D' - D = \frac{4\pi e_1 e_2}{3DkT} \frac{\Theta\sqrt{q}}{\omega\,\Theta\left[\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 + \omega^2 \Theta^2\right]} \left[\overline{Q}\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \omega\,\Theta\left(\overline{R} - \frac{1}{\sqrt{q}}\right)\right]. \tag{75}$$

Für irgendein spezielles Beispiel kann man sich leicht vermöge (75) $D' - D$ als Funktion von $\omega\Theta$ berechnen. Man erhält dann Kurven, die der in unserer ersten Arbeit angegebenen (vgl. DFI Fig. 5) ähnlich verlaufen. Da aber (vgl. Schlußbemerkung von DFI) dieser Erscheinungskomplex experimentell bis jetzt noch keineswegs geklärt ist, wollen wir von einer speziellen Diskussion der Formeln (75) an dieser Stelle absehen. Wir wenden uns jetzt der Diskussion der Dispersion der Leitfähigkeit für spezielle Beispiele zu und wollen die verschiedenen Einflüsse auf unseren Effekt untersuchen.

IV. Diskussion spezieller Beispiele.

§ 8. q-Werte, $\varkappa$-Werte, Relaxationszeiten Θ und Beweglichkeiten für die in IV gewählten Beispiele.

In diesem letzten Teil unserer Notiz wählen wir als Beispiele die Elektrolyte: HCl, KCl, $MgCl_2$, $CdSO_4$, $LaCl_3$ und $K_4Fe(CN)_6$. Zunächst definieren wir die Beweglichkeiten, wie sie hier benutzt werden[1]). Wenn ein Molekül in Ionen der Zahl $\nu_1 \ldots\ldots \nu_s$ mit den Wertigkeiten $z_1 \ldots\ldots\ldots z_s$ und

1) Es ist sonst üblich $\frac{L_i}{z_i}$ als Beweglichkeiten zu bezeichnen.

den Reibungsgrößen $\varrho_1 \ldots \ldots \varrho_s$ zerfällt, so können wir die molekulare Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung auch schreiben

$$\bar{\Lambda}_\infty = \sum \nu_i \bar{L}_i \qquad (75')$$

worin

$$\bar{L}_i = \frac{N\varepsilon^2}{9 \cdot 10^{11}} \frac{z_i^2}{\varrho_i} \qquad (76)$$

$(N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$

$\varepsilon = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ e. s. e.) ist.

Die Größen $\bar{L}_i$ nennen wir Beweglichkeiten. Vermöge der Werte für N und ε folgt

$$\bar{L}_i = \frac{15{,}34}{\varrho_i} z_i^2 \cdot 10^{-8}. \qquad (77)$$

Es ist nun zweckmäßig, da die Beweglichkeiten vom Experiment her bekannt sind, in die in unseren Formeln für die Leitfähigkeit vorkommenden Größen die Beweglichkeiten $\bar{L}_i$ einzuführen. Tut man das, so entstehen für ϱ_i, q und Θ die Formeln:

$$\varrho_i = \frac{15{,}34 \cdot z_i^2}{\bar{L}_i} 10^{-8} \qquad (78)$$

$$q = \frac{\bar{L}_1 z_2 + \bar{L}_2 z_1}{(z_1 + z_2)(\bar{L}_1 z_2^2 + \bar{L}_2 z_1^2)} z_1 \cdot z_2 \qquad (79)$$

$$\Theta = \frac{z_1^2 z_2^2}{(z_2^2 \bar{L}_1 + z_1^2 \bar{L}_2)} \frac{15{,}34 \cdot 10^{-8}}{k T q \varkappa^2}. \qquad (80)$$

Die Größen ϱ_i und q hängen nur ab von den Wertigkeiten und den Beweglichkeiten; letztere sind sehr temperaturempfindlich, weil die innere Reibung des Lösungsmittels stark von der Temperatur abhängt. Die Relaxationszeit hingegen enthält außer den Wertigkeiten und den Beweglichkeiten noch die für die Elektrolyttheorie bedeutungsvolle Größe $\varkappa^2$. Diese ihrerseits ist bestimmt durch die Dielektrizitätskonstante, die Konzentration, die Wertigkeiten, die Art des Elektrolyten und die Temperatur. Die Änderung von $\varkappa^2$ mit der Temperatur ist relativ gering. Wir können $\varkappa^2$ in der Form schreiben

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi}{DkT} \frac{\varepsilon^2 N \gamma}{1000} \sum \nu_i z_i^2. \qquad (81)$$

Wählt man als Lösungsmittel Wasser, so wird:

$$\varkappa^2 = 0{,}05342 \cdot 10^{16} \cdot \gamma \sum \nu_i z_i^2 \text{ (bei } t = 18^0\text{C)}$$

$$\varkappa^2 = 0{,}05385 \cdot 10^{16} \gamma \sum \nu_i z_i^2 \text{ (bei } t = 25^0\text{C)}.$$

Ist uns die Elektrolytart gegeben, sind ferner Lösungsmittel und Temperatur bekannt, so lassen sich nach (79), (80) und (81) die für die Dispersion der Leitfähigkeit maßgebenden Größen q, Θ und $\varkappa^2$ leicht berechnen für eine bestimmte Konzentration γ des Elektrolyten. In Tabelle II sind zunächst die Wertigkeiten, die Beweglichkeiten und die benutzten Temperaturen des Lösungsmittels zusammengestellt.

Tabelle II.

	z_i	$\bar{L}_i$	t		z_i	$\bar{L}_i$	t
H	1	315	18° C	SO_4 . .	2	136,6	18° C
K	1	65	18° C	Cd . . .	2	92	18° C
Cl	1	65	18° C	La . . .	3	50	18° C
Mg . . .	2	92	18° C	$Fe(CN)_6$.	4	380	25° C

Zu Tabelle II ist noch folgende Bemerkung am Platze. Als Beweglichkeiten sind von uns Werte benutzt, die mit den sonst in der Literatur angegebenen bis auf etwa 1 Proz. übereinstimmen. Da der von uns behandelte Dispersionseffekt eine Änderung der molekularen Leitfähigkeit hervorruft, welche relativ zu der im Falle der unendlichen Verdünnung klein ist, sind die benutzten Beweglichkeiten für das Dispersionsphänomen genügend genau. Der Wert der molekularen Leitfähigkeit

bei unendlicher Verdünnung für $K_4Fe(CN)_6$ ist nach Messungen von Burrows[1]) für eine Temperatur $t = 25^0$ C: 680. Bedenkt man, daß die Beweglichkeit von K für $t = 25^0$ C gleich 75 ist, so ergibt sich für die Beweglichkeit von $Fe(CN)_6$ der in der Tabelle II angegebene Wert. In Tabelle III haben wir die charakteristischen Größen $\varkappa^2$, q und $\Theta\gamma$ angegeben. Der Übersicht halber ist noch die Dicke der Ionenwolke $\frac{1}{\varkappa}$ für die verschiedenen Konzentrationen der Tabelle III sofort zu entnehmen.

Tabelle III.

	$\frac{1}{\varkappa} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot 10^8$	$\varkappa^2$	q	$\Theta\gamma$
HCl.	3,06	$0{,}107 \cdot 10^{16} \cdot \gamma$	0,5	$0{,}189 \cdot 10^{-10}$
KCl.	3,06	$0{,}107 \cdot 10^{16} \cdot \gamma$	0,5	$0{,}553 \cdot 10^{-10}$
$MgCl_2$	1,77	$0{,}321 \cdot 10^{16} \cdot \gamma$	0,421	$0{,}324 \cdot 10^{-10}$
$CdSO_4$.	1,53	$0{,}428 \cdot 10^{16} \cdot \gamma$	0,5	$0{,}315 \cdot 10^{-10}$
$LaCl_3$	1,25	$0{,}642 \cdot 10^{16} \cdot \gamma$	0,454	$0{,}162 \cdot 10^{-10}$
$K_4Fe(CN)_6$	0,96	$1{,}08 \cdot 10^{16} \cdot \gamma$	0,344	$0{,}102 \cdot 10^{-10}$

Man erkennt aus Tabelle III, daß die q-Werte geringen Schwankungen unterworfen sind. Wesentlich stärker ändern sich die Relaxationszeiten Θ und die $\varkappa^2$. Die Dicke der Ionenwolke $\frac{1}{\varkappa}$ in Zentimeter bzw. die Relaxationszeiten Θ in Sekunden entnimmt man der Tabelle III für irgendeine Konzentration γ leicht. Da die Dicke der Ionenwolke bzw. die Relaxationszeit für eine bestimmte Konzentration für die in Tabelle III benutzten Elektrolyte ziemlich verschieden ausfällt, muß der Dispersionseffekt für die gewählten Beispiele ebenfalls die Besonderheit jedes Elektrolyten aufweisen. Wir wollen jetzt die verschiedenen charakteristischen Einflüsse auf das Dispersionsphänomen untersuchen. Dabei achten wir auf $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{Io}}$ als wesentliche Größe, die gleich ist: $\frac{\overline{\Lambda}_{I\omega}}{\overline{\Lambda}_{Io}}$. Auf die Werte von $\overline{\Lambda}_{Io}$ kommen wir in § 12 ausführlich zurück.

§ 9. Einfluß der Konzentration auf den Dispersionseffekt der Leitfähigkeit.

Wir wählen als Beispiel KCl. Das Lösungsmittel sei Wasser, dessen Dielektrizitätskonstante für die zugrunde gelegte Temperatur von 18^0 C: $D = 81{,}3$ beträgt. Als Konzentration wählen wir: $\gamma = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}001$, $\gamma = 0{,}0001$. Die entsprechenden Relaxationszeiten entnehmen wir der Tabelle III zu $\Theta = 0{,}553 \cdot 10^{-8}$ sec; $\Theta = 0{,}553 \cdot 10^{-7}$ sec; $\Theta = 0{,}553 \cdot 10^{-6}$ sec. Für die entsprechenden $\varkappa^2$-Werte finden wir nach Tabelle III

$$\varkappa^2 = 0{,}107 \cdot 10^{-14}; \quad \varkappa^2 = 0{,}107 \cdot 10^{-13}; \quad \varkappa^2 = 0{,}107 \cdot 10^{-12}.$$

Ferner ist, da wir es mit einem symmetrischen Elektrolyt zu tun haben, $q = 0{,}5$. Damit ist alles bekannt, um die Größe $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{Io}}$ als Funktion von $\omega\Theta$ bzw. der Wellenlänge l (in Meter) zu berechnen. Die folgende Tabelle IV liefert eine Übersicht des Dispersionseffektes. Hierin ist $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I\omega}}$ für eine Reihe von Wellenlängen angegeben. (Bis auf 2 Proz. genau.)

Für die Wellenlänge 0,2 m ist der von der Relaxationskraft herrührende Anteil der Leitfähigkeitsverminderung schon relativ gering. Bei dieser Wellenlänge muß die Leitfähigkeit des Elektrolyten gegenüber dem stationären Werte gewachsen sein. Fig. 4 illustriert den Einfluß der Konzentration auf den Dispersionseffekt. Als Ordinate ist $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{Io}}$ aufgetragen und als Abszisse ist die Wellenlänge l in Meter in logarithmischer Skala angegeben. Man liest aus der Fig. 4 ab, daß z. B. dem Werte

$$\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{Io}} = 0{,}5$$

1) G. J. Burrows, Journ. Chem. Soc. 123, 2026, 1923.

Tabelle IV.

Werte von $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I_0}}$.

l in m	$\gamma = 0{,}01$	$\gamma = 0{,}001$	$\gamma = 0{,}0001$	l in m	$\gamma = 0{,}01$	$\gamma = 0{,}001$	$\gamma = 0{,}0001$
0	0	0	0	40	0,995	0,774	0,320
0,2	0,230	0,075	0,023	60	1	0,850	0,385
0,4	0,320	0,105	0,033	80	1	0,897	0,435
0,6	0,385	0,130	0,040	100	1	0,925	0,470
0,8	0,435	0,147	0,048	200	1	0,977	0,625
1,0	0,470	0,164	0,053	400	1	0,995	0,774
2	0,625	0,230	0,075	600	1	1	0,850
4	0,774	0,320	0,105	800	1	1	0,897
6	0,850	0,385	0,130	1000	1	1	0,925
8	0,897	0,435	0,147	2000	1	1	0,977
10	0,925	0,470	0,164	4000	1	1	0,995
20	0,977	0,625	0,230	6000	1	1	1

die Wellenlängen

$$l: 1{,}16 \text{ m bzw. } 11{,}6 \text{ m bzw. } 116 \text{ m}$$

entsprechend den Konzentrationen

$$\gamma = 0{,}01 \; ; \quad \gamma = 0{,}001 \; ; \quad \gamma = 0{,}0001$$

zugeordnet sind. Für diese Wellenlängen ist also bereits bei den zugeordneten Konzentrationen die Dispersionserscheinung zur Hälfte bemerkbar geworden. Verringert man die Konzentration

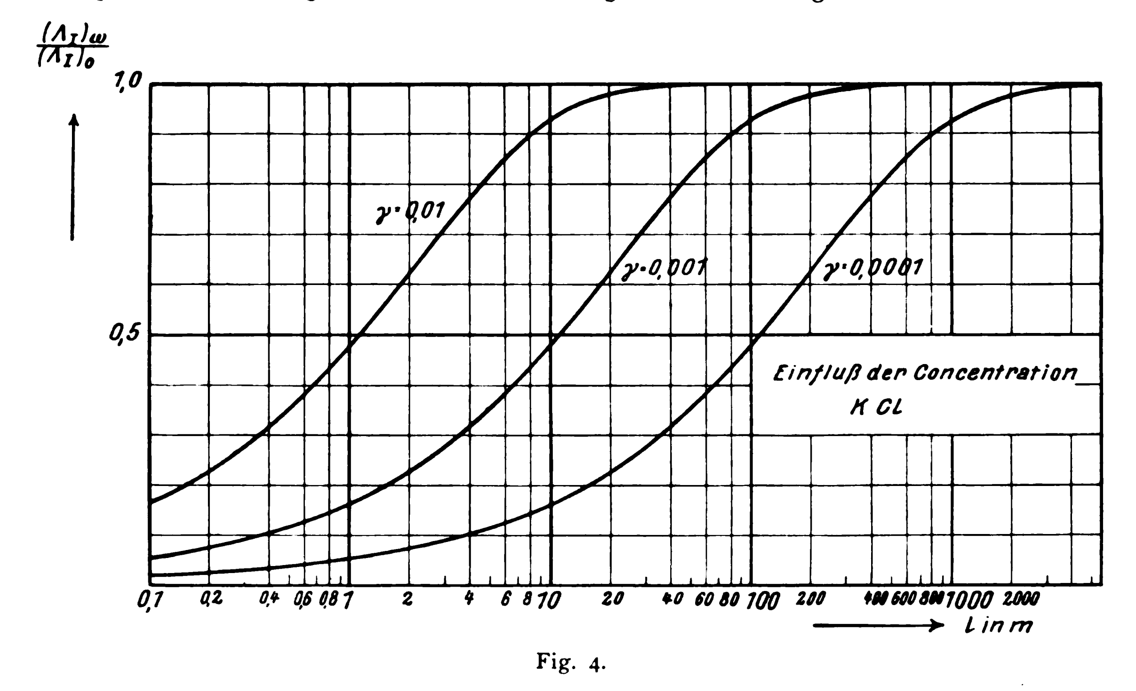


Fig. 4.

auf $\frac{1}{U}$ so entspricht demselben Werte $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I_0}}$ die Wellenlänge $l' = l\,U$. Es liegt einfach daran, daß die Relaxationszeiten jeweils entsprechend vergrößert sind. Würden wir $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I_0}}$ als Funktion von $\omega\Theta$ aufgetragen haben, so würde für kleine Werte von $\omega\Theta$ die Kurve parabolisch verlaufen, mit horizontaler Tangente bei $\omega\Theta = 0$. Für sehr große $\omega\Theta$ würde sie proportional $\frac{1}{\omega\Theta}$ gegen Null abnehmen, wie man ja auf Grund der Formeln (62, 66) ohne weiteres erkennt (vgl. auch DFI S. 130).

§ 10. Einfluß der Beweglichkeit.

Um den Einfluß der verschiedenen Beweglichkeiten $\overline{L}_i$ oder der damit vermöge (78) verknüpften ϱ_i-Werte zu untersuchen, haben wir als Beispiel HCl und KCl gewählt. Die Temperatur ist wieder 18° C, und als Lösungsmittel werde Wasser gewählt; folglich ist die Dielektrizitätskonstante $D = 81{,}3$. Die Beweglichkeiten sind Tabelle II zu entnehmen. Für die molekularen Leitfähigkeiten ergeben sich hieraus die Werte

$$\overline{\Lambda}_{\mathrm{HCl}} = 380; \qquad \overline{\Lambda}_{\mathrm{KCl}} = 130\,.$$

Die zugehörigen Relaxationszeiten in sec folgen nach Tabelle III zu:

$$\Theta_{\mathrm{HCl}} = \frac{0{,}189 \cdot 10^{-10}}{\gamma}; \qquad \Theta_{\mathrm{KCl}} = \frac{0{,}553 \cdot 10^{-10}}{\gamma}.$$

Die Dicken der Ionenwolke um das H-Ion bzw. K-Ion sind nach (81) einander gleich. Wir wählen als Konzentration $\gamma = 0{,}001$. Nach (66) finden sich die Werte von $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}}$ als Funktion der Wellenlänge l. Das Resultat der Rechnung ist aus Fig. 5 zu ersehen, worin $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}}$ als Funktion der Wellenlänge l aufgetragen ist. Wieder ist für die Wellenlänge, die in Meter zu rechnen ist, logarithmischer

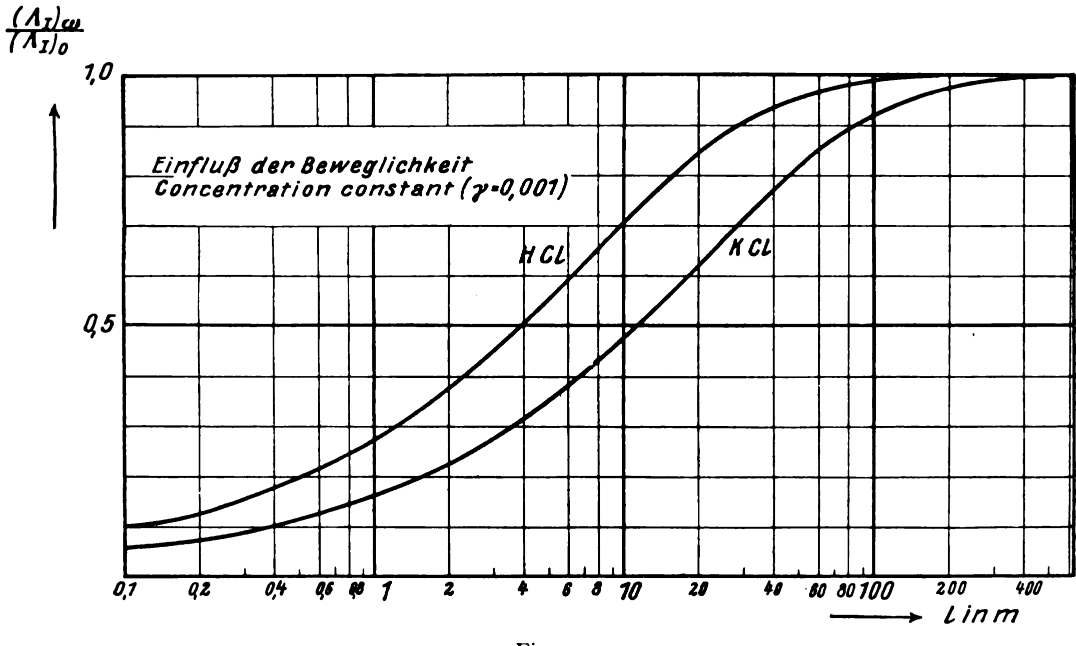


Fig. 5.

Maßstab gewählt. Der Einfluß der verschiedenen Beweglichkeiten der beiden Ionenarten macht sich deutlich geltend. So gehören z. B. zu $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}} \backsim 0{,}5$ für KCl die Wellenlänge 11,6 m und für HCl die Wellenlänge 4 m, wofür die Ursache wiederum in der geringeren Relaxationszeit für HCl zu suchen ist.

§ 11. Einfluß der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und der Temperatur.

Wir nehmen als Beispiel KCl in Wasser und Methylalkohol. Die Temperatur sei diesmal 25° C. Die entsprechenden Dielektrizitätskonstanten sind

$$D_{\mathrm{H_2O}} = 78{,}8 \qquad D_{\mathrm{Methylalkohol}} = 30.$$

Die molekularen Leitfähigkeiten bei unendlicher Verdünnung sind in diesem Falle

$$\Lambda_{\infty\,(\mathrm{H_2O})} = 150 \qquad \Lambda_{\infty\,(\mathrm{Methylalkohol})} = 108$$

Die Reibungsgrößen des K-Ions folgen nach (78) zu

$$\varrho \text{ (in } H_2O) = 0{,}205 \cdot 10^{-8}$$
$$\varrho \text{ (in Methylalkohol)} = 0{,}284 \cdot 10^{-8}.$$

Der Wert für die Beweglichkeiten in Methylalkohol ist Untersuchungen von Hartley[1]) und Raikes entnommen. Die entsprechenden $\varkappa^2$-Werte und Relaxationszeiten werden damit:

$$\varkappa^2 \text{ (in } H_2O) = 0{,}1077 \cdot \gamma \cdot 10^{16}$$
$$\varkappa^2 \text{ (in } CH_3OH) = 0{,}2828 \cdot \gamma \cdot 10^{16}$$
$$\Theta \text{ (in } H_2O) = \frac{0{,}466}{\gamma} \cdot 10^{-10} \text{ sec}$$
$$\Theta \text{ (in } CH_3OH) = \frac{0{,}245}{\gamma} \cdot 10^{-10} \text{ sec}$$

Dem letzteren Umstande ist es wieder zuzuschreiben, daß der Unterschied der Dielektrizitätskonstante unseren Effekt auch in verschiedenartiger Weise beeinflußt. Fig. 6 gibt $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}}$ als Funktion die Wellen-

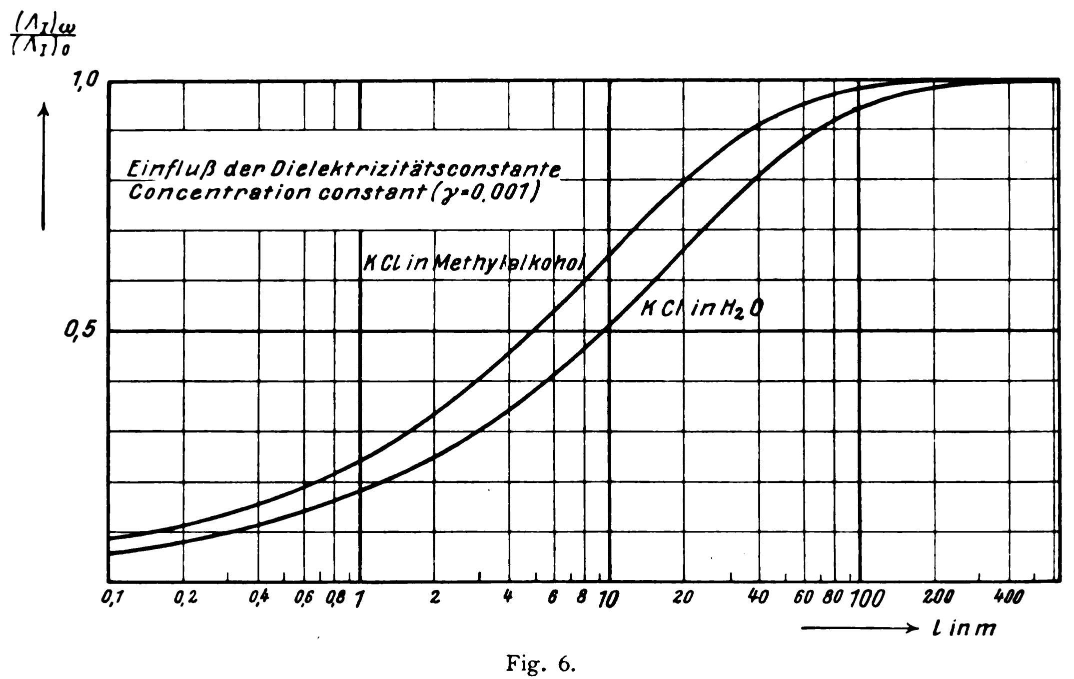


Fig. 6.

länge wieder. Als molekulare Konzentration ist $\gamma = 0{,}001$ angenommen. Zu $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}} = 0{,}5$ gehört im Falle des Wassers die Wellenlänge $l = 9{,}8$ m und im Falle des Methylalkohols die Wellenlänge $l = 5{,}1$ m.

Ferner erkennt man auch den Einfluß der Temperatur, da die Beweglichkeiten bei 25^0 C schon ziemlich größer sind als bei 18^0 C. Zu einer höheren Temperatur gehört eine kleinere Relaxationszeit (vgl. (80) und (81)), wenn die übrigen Größen, die für die Relaxationszeit maßgebend sind, konstant gehalten werden. $\varkappa^2$ ist nur wenig mit der Temperatur veränderlich. So entspricht z. B. dem Werte $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}} \sim 0{,}5$ im Falle des KCl eine Wellenlänge $l = 11{,}6$ m bei einer Temperatur $t = 18^0$ C, während demselben Werte des Verhältnisses der Leitfähigkeiten bei einer Temperatur $t = 25^0$ C eine Wellenlänge $l = 9{,}8$ m entspricht. Trotz des geringen Temperaturunterschiedes ist doch schon eine Veränderung der Dispersionskurve zu verspüren. Ein sehr wesentlicher Einfluß ist der der Wertigkeit, worauf wir jetzt eingehen wollen.

1) Siehe H. Hartley und H. R. Raikes, Transactions Faraday Soc., S. 393—396, April 1927.

§ 12. Einfluß der Wertigkeit und Leitfähigkeitsdefekte für die gewählten Beispiele im Falle der Frequenz $\omega = 0$.

Während wir bisher stets symmetrische Elektrolyte betrachtet haben, wollen wir nun auch kompliziertere Elektrolyte zugrunde legen und zusehen, wie die Wertigkeit die Dispersion der Leitfähigkeit beeinflußt. Wir untersuchen Beispiele für eins-zweiwertige, zwei-zweiwertige, eins-dreiwertige und eins-vierwertige Elektrolyte. Als Lösungsmittel liege Wasser vor. Zunächst erkennt man, daß gemäß (79) für nichtsymmetrische Elektrolyte $q \neq 0,5$ ist, und zwar Werte annimmt, die zwischen 0 und 1 gelegen sein können und meistens kleiner sind als 0,5 (vgl. Tabelle III auf Seite 416). Die Konzentrationen seien für die gewählten Beispiele dieselben; wir wählen als Konzentration $\gamma = 0,0001$. Die Relaxationszeiten sind für unsere Beispiele ziemlich voneinander verschieden (vgl. Tabelle III). Die der Tabelle III zugrunde gelegten Temperaturen mögen auch hier be-

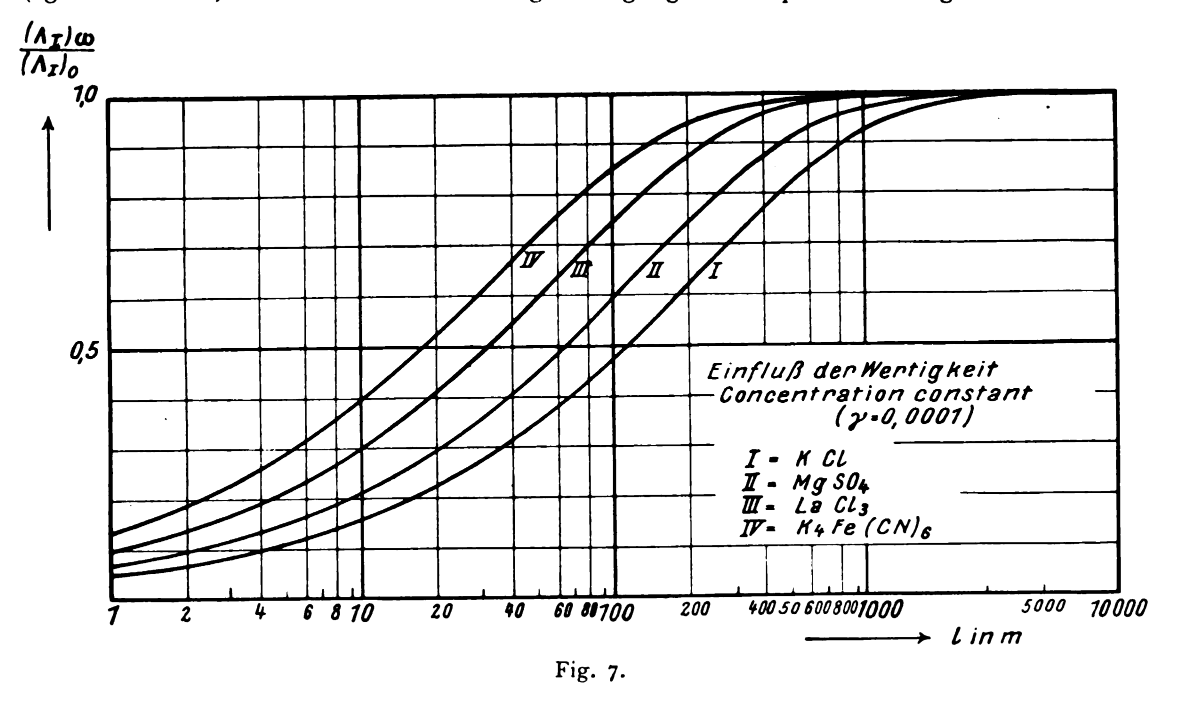


Fig. 7.

nutzt werden. Die Verschiedenheit der Relaxationszeiten bedingt in erster Linie eine wesentliche Abhängigkeit des Dispersionseffektes von der Wertigkeit. Weniger von Einfluß ist die Verschiedenheit der q-Werte. Wir haben in Fig. 7 $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}}$ als Funktion der Wellenlänge für die Elektrolyte KCl (eins-einswertig), $MgSO_4$ (zwei-zweiwertig), $LaCl_3$ (eins-dreiwertig) und $K_4Fe(CN)_6$ (eins-vierwertig[1]) gezeichnet. Wieder ist die Wellenlänge l in logarithmischem Maßstabe aufgetragen und in Meter ausgedrückt. Mit wachsender Wertigkeit rücken die Kurven immer mehr nach links. Der Dispersionseffekt macht sich damit bei immer kürzeren Wellenlängen bemerkbar. Man liest an den Kurven der Fig. 7 ab, daß zu $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}} = 0,5$ entsprechend der eben genannten Reihenfolge KCl ...., $K_4Fe(CN)_6$ die Wellenlängen gehören

$$l: 116\text{ m}; \quad 66\text{ m}; \quad 30,5\text{ m}; \quad 17,6\text{ m}.$$

Der Übergang zu anderen Konzentrationen ist nach § 9 ohne weiteres gegeben. Will man z. B. wissen, für welche Wellenlänge $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}} = 0,5$ ist bei einer Konzentration $\gamma = 0,001$, so findet man für die Wellenlänge entsprechend der eben hervorgehobenen Reihenfolge die Werte

$$11,6\text{ m}; \quad 6,6\text{ m}; \quad 3,05\text{ m}; \quad 1,76\text{ m}.$$

1) Die Dispersionskurve für $MgCl_2$ fällt fast mit der für $MgSO_4$ zusammen, so daß wir sie in Fig. 7 nicht aufgenommen haben.



Die folgende Tabelle V gibt eine Übersicht über einige Werte von $\frac{\overline{\Lambda}_{I\omega}}{\overline{\Lambda}_{I0}}$ für verschiedene Wellenlängen und die angenommenen Elektrolyte. Da $\overline{\Lambda}_{I0}$ für diese Elektrolyte bekannt ist (vgl. Tabelle VI), können wir das ganze Verhalten der Leitfähigkeit als Funktion der Wellenlänge ohne weiteres übersehen. Wir wollen jetzt für unsere Beispiele auf diese Werte, die dem stationären Verhalten der Leitfähigkeit entsprechen, genauer eingehen.

Tabelle V.

Werte von $\frac{\Lambda_{I\omega}}{\Lambda_{I0}}$ für verschiedene Wellenlängen l.

l in m	KCl	$MgSO_4$	$LaCl_3$	$K_4Fe(CN)_6$
1	0,055	0,070	0,10	0,138
2	0,073	0,098	0,14	0,190
5	0,115	0,154	0,22	0,295
10	0,163	0,216	0,305	0,40
20	0,23	0,30	0,42	0,53
50	0,355	0,455	0,60	0,73
100	0,48	0,60	0,75	0,86
200	0,63	0,75	0,88	0,95
500	0,82	0,91	0,97	0,99
1000	0,93	0,97	0,997	0,997
2000	0,98	0,994	1	1
5000	1	1	1	1
10000	1	1	1	1

Die Werte von V sind genauer als 2 Proz.

In der folgenden Tabelle VI haben wir die Werte $\overline{\Lambda}_{I0}$ für die gewählten Beispiele für Wasser als Lösungsmittel angegeben. Ferner sind in dieser Tabelle die Werte für die molekulare Leitfähigkeit $\overline{\Lambda}_\infty$ und die elektrophoretischen Anteile $\overline{\Lambda}_{II}$ mit aufgeführt, so daß die Leitfähigkeit in diesem stationären Falle sofort für jede Konzentration gemäß der Formel

$$\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_\infty - \overline{\Lambda}_{I0} - \overline{\Lambda}_{II}$$

berechnet werden kann. Dabei ist noch zu bemerken, daß die für Ferrozyankalium angegebenen Werte sich auf die Temperatur 25^0 C beziehen. Sie sind mit Hilfe der Werte

$$\varkappa = 0{,}3282 \cdot 10^8 \sqrt{\gamma}\sqrt{10}$$
$$\eta = 0{,}00895$$

berechnet.

Tabelle VI.

	$\overline{\Lambda}_\infty$	$\overline{\Lambda}_{II}$	$\overline{\Lambda}_{I0}$
KCl	130	$50{,}5\sqrt{\gamma}$	$0{,}224\,\overline{\Lambda}_\infty\sqrt{\gamma} = 29{,}1\sqrt{\gamma}$
$MgSO_4$ . . .	229	$404\sqrt{\gamma}$	$1{,}79\,\overline{\Lambda}_\infty\sqrt{\gamma} = 410\sqrt{\gamma}$
$LaCl_3$	245	$742{,}6\sqrt{\gamma}$	$1{,}52\,\overline{\Lambda}_\infty\sqrt{\gamma} = 373\sqrt{\gamma}$
$K_4Fe(CN)_6$ . .	680	$1890\sqrt{\gamma}$	$2{,}12\,\overline{\Lambda}_\infty\sqrt{\gamma} = 1430\sqrt{\gamma}$

Für eine Konzentration $\gamma = 0{,}0001$ ergeben sich die $\overline{\Lambda}_{II}$-, $\overline{\Lambda}_{I0}$-Werte, welche in Tabelle VII angegeben sind.

Tabelle VII.

	$\overline{\Lambda}_\infty$	$\overline{\Lambda}_{II}$	$\overline{\Lambda}_{I0}$
KCl	130	0,505	0,29
$MgSO_4$	229	4,04	4,1
$LaCl_3$	245	7,43	3,73
$K_4Fe(CN)_6$ . . .	680	18,9	14,3

Im Verein mit (66) können wir das gesamte Verhalten der angeführten Elektrolyte mit bezug auf ihre Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Wellenlänge übersehen. Wählen wir etwa als Beispiel die Wellenlänge $l = 20$ m. Die Konzentration $\gamma = 0{,}0001$. Die Werte $\frac{\overline{\Lambda}_{I\omega}}{\overline{\Lambda}_{Io}}$ können wir Fig. 6 entnehmen. Mit Hilfe der Werte der Tabelle VI entstehen daraus die Werte für $\overline{\Lambda}_{I\omega}$. In der folgenden Tabelle VIII sind für die vier gewählten Elektrolyte die sich so ergebenden Werte von $\frac{\overline{\Lambda}_{I\omega}}{\overline{\Lambda}_{Io}}$ und $\overline{\Lambda}_{I\omega}$ für die genannte Wellenlänge $l = 20$ m und die Konzentration $\gamma = 0{,}0001$ angegeben.

Tabelle VIII.

	$\frac{\overline{\Lambda}_{I\omega}}{\overline{\Lambda}_{Io}}$	$\overline{\Lambda}_{I\omega}$
KCl	0,23	0,00515 $\overline{\Lambda}_\infty = 0{,}067$
$MgSO_4$ . .	0,30	0,00537 $\overline{\Lambda}_\infty = 1{,}23$
$LaCl_3$ . . .	0,45	0,00685 $\overline{\Lambda}_\infty = 1{,}68$
$K_4Fe(CN)_6$	0,53	0,0111 $\overline{\Lambda}_\infty = 7{,}54$

Die entsprechende Vermehrung der molekularen Leitfähigkeit $\overline{\Lambda}$ vom stationären Wert ausgerechnet, ist in Prozenten der molekularen Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung für unsere Beispiele aus Tabelle IX ersichtlich.

Tabelle IX.

KCl . . .	0,17 Proz.	$LaCl_3$ . . .	0,84 Proz.
$MgSO_4$ . .	1,25 „	$K_4Fe(CN)_6$.	1 „

Wird die Konzentration $\gamma = 0{,}001$, so rückt der Wert der Wellenlänge, welcher den in Tabelle VIII aufgeführten Änderungen entspricht, nach 2 m. Die sich ergebenden Änderungen für die molekulare Leitfähigkeit sind in Prozenten von $\overline{\Lambda}_\infty$ in Tabelle X zusammengestellt.

Tabelle X.

KCl	0,54 Proz.	$LaCl_3$	2,65 Proz.
$MgSO_4$	3,95 „	$K_4Fe(CN)_6$	3,16 „

Für die experimentelle Untersuchung ist es von Interesse, daß für jede bestimmte Wellenlänge ein Wert der Konzentration γ existiert, für welchen die entsprechende Vermehrung der molekularen Leitfähigkeit am größten wird. Dieses ersieht man ohne weiteres nach (66) und (62). So liegt z. B. für Ferrozyankalium bei einer Wellenlänge $l = 20$ m diese Konzentration zwischen $\gamma = 0{,}0001$ und $\gamma = 0{,}01$.

Die Größe des Dispersionseffektes erläutert man am einfachsten, wenn man die Differenz der molekularen Leitfähigkeit Λ_ω gegenüber ihrem Werte für unendliche Verdünnung in Prozenten derjenigen Differenz, die für stationäre Ströme gemessen werden kann, ausdrückt. (Vgl. Fig. 8 und 9.) Für diese ist als Konzentration $\gamma = 0{,}001$ gewählt worden. Wir betrachten zunächst das Beispiel des $CdSO_4$, für welches Fig. 8 gilt. Die molekulare Leitfähigkeit wurde nach Tabelle VI zu $\overline{\Lambda}_\infty = 229$ angenommen. Λ_{II} beträgt: 12,8 (in Proz. von Λ_∞ : 5,6 Proz.). Λ_{Io} ist: 12,9 (in Proz. von Λ_∞ : 5,7 Proz.). Die gesamte Verminderung der Leitfähigkeit beträgt folglich 11,3 Proz. $\Lambda_{I\omega}$ rührt von der Relaxationskraft her und nimmt mit abnehmender Wellenlänge ab; so beträgt z. B. $\Lambda_{I\omega}$ bei etwa $l = 6{,}5$ m nur noch die Hälfte. In Prozenten von Λ_∞ ausgedrückt, ist die molekulare Leitfähigkeit bei dieser Wellenlänge um 2,83 Proz. gewachsen.

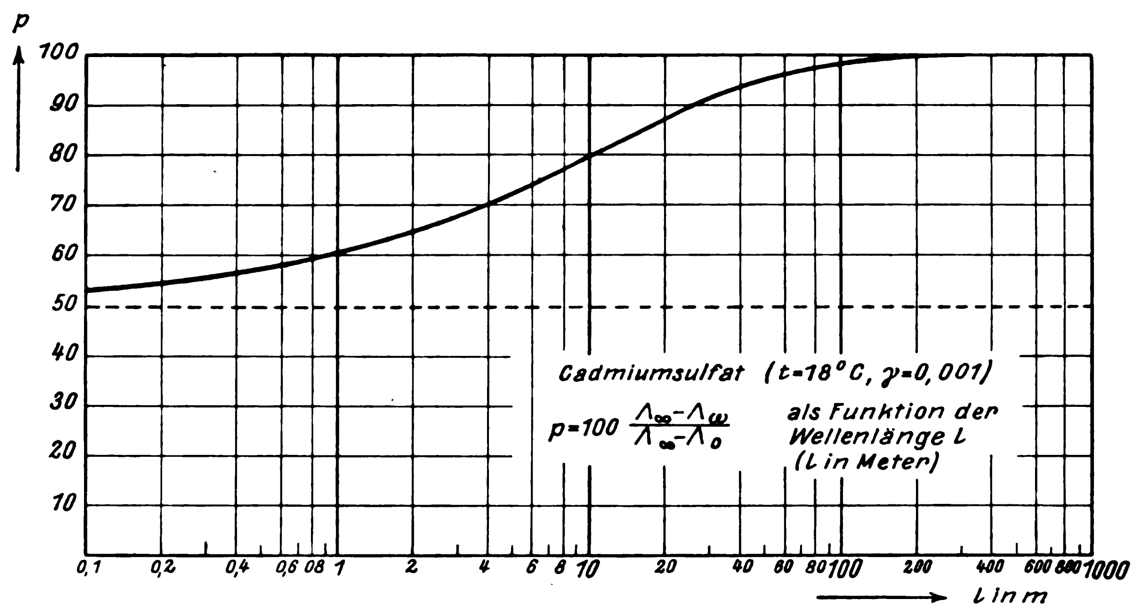


Fig. 8.

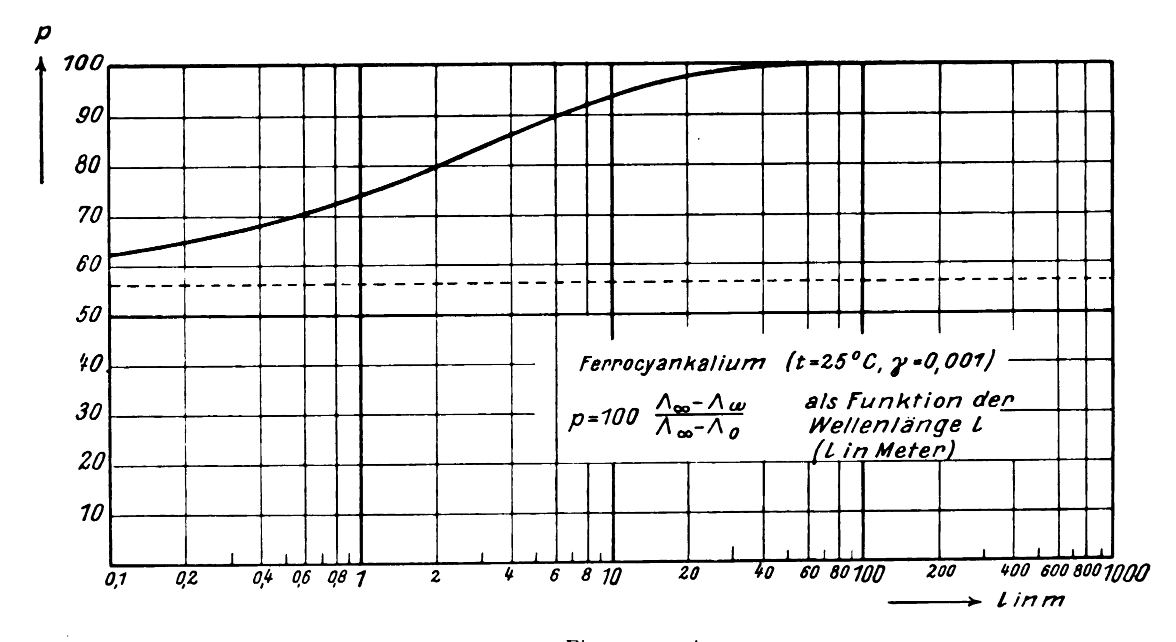


Fig. 9.

Wir besprechen jetzt kurz das Beispiel des Ferrozyankaliums, welches der Fig. 9 entspricht. Nach Tabelle II ist die molekulare Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung bei $t = 25^0$ C $\bar{\Lambda}_\infty = 680$. Ferner ist

$$\bar{\Lambda}_{I0} = 2{,}12 \sqrt{\gamma}\, \bar{\Lambda}_\infty = 47{,}5 \text{ (in Proz. von } \bar{\Lambda}_\infty : 7 \text{ Proz.)}$$

$$\bar{\Lambda}_{II} = 1890 \sqrt{\gamma} = 59{,}8 \text{ (in Proz. von } \bar{\Lambda}_\infty : 8{,}8 \text{ Proz.).}$$

Die Gesamtverminderung der molekularen Leitfähigkeit wieder in Prozenten von $\bar{\Lambda}_\infty$ ergibt sich zu 15,8 Proz. Für die Wellenlänge $l = 1{,}63$ m, für welche $\frac{\bar{\Lambda}_{I\omega}}{\bar{\Lambda}_{I0}}$ auf die Hälfte gesunken ist, ist eine Vermehrung der molekularen Leitfähigkeit um 3,5 Proz. eingetreten.

§ 13. Die allgemeinen Formeln und die Interpolationstabelle zur Berechnung der Grenzleitfähigkeit jedes beliebigen Beispiels eines einfachen Elektrolyten.

Wir wollen jetzt noch zum Schluß ein einfaches Verfahren besprechen, welches gestattet, das Dispersionsphänomen der Leitfähigkeit für jeden beliebigen Elektrolyten, der zwei Arten von Ionen enthält, rasch zu übersehen. Lösungsmittel, Temperatur, Elektrolyt und Konzentration seien irgendwie fest gewählt. Vermöge (79), (80) und (81) sind, da die Beweglichkeiten der Ionen experimentell bekannt sind, q, $\varkappa^2$ und Θ bestimmt. Sie seien hier noch einmal der Übersicht halber mit aufgeführt:

$$q = \frac{\bar{L}_1 z_2 + \bar{L}_2 z_1}{(z_1 + z_2)(\bar{L}_1 z_2^2 + \bar{L}_2 z_1^2)} z_1 \cdot z_2$$

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi}{DkT} \frac{\varepsilon^2 N \gamma}{1000} \sum \nu_i z_i^2 \left\{ = 0{,}05342 \cdot 10^{16} \cdot \gamma \sum \nu_i z_i^2 \text{ für Wasser von } 18^0 \text{ C} \right\}$$

$$\Theta = \frac{z_1^2 z_2^2}{z_2^2 \bar{L}_1 + z_1^2 \bar{L}_2} \frac{15{,}34 \cdot 10^{-8}}{kTq\varkappa^2}.$$

Nun hängt $\frac{\bar{\Lambda}_{I\omega}}{\bar{\Lambda}_{Io}}$ nach (62) nur von q und $\omega\Theta$ noch ab. Stellt man sich also eine Interpolationstabelle XI für verschiedene Werte von q her, die Werten von $\omega\Theta$ solche von $\frac{\bar{\Lambda}_{I\omega}}{\bar{\Lambda}_{Io}}$ zuordnet, so kennt man vermöge der Beziehung (82) die Wellenlänge.

$$l = \frac{18{,}85 \cdot 10^{10}}{\omega\Theta} \Theta \qquad (l \text{ ergibt sich nach dieser Formel in Meter.}) \qquad (82)$$

Tabelle XI.

$\omega\Theta$	$q = 1{,}0$	$q = 0{,}75$	$q = 0{,}5$	$q = 0{,}45$	$q = 0{,}40$	$q = 0{,}35$	$q = 0{,}30$
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
0,2	0,995	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
0,35	0,985	0,987	0,989	0,990	0,990	0,990	0,991
0,5	0,972	0,976	0,980	0,981	0,981	0,981	0,982
0,75	0,943	0,948	0,956	0,959	0,962	0,965	0,968
1	0,910	0,919	0,930	0,934	0,938	0,942	0,946
1,25	0,876	0,888	0,904	0,909	0,913	0,918	0,922
1,5	0,844	0,859	0,876	0,882	0,888	0,894	0,900
2	0,785	0,804	0,826	0,833	0,841	0,848	0,856
2,5	0,736	0,755	0,783	0,791	0,799	0,808	0,817
3	0,692	0,715	0,745	0,753	0,763	0,773	0,785
4	0,624	0,649	0,682	0,691	0,701	0,713	0,727
6	0,531	0,557	0,593	0,603	0,614	0,628	0,643
8	0,469	0,494	0,531	0,540	0,553	0,565	0,582
10	0,425	0,449	0,486	0,496	0,507	0,520	0,537
15	0,353	0,374	0,409	0,417	0,428	0,442	0,458
20	0,308	0,328	0,360	0,368	0,378	0,390	0,406
25	0,277	0,296	0,326	0,334	0,344	0,354	0,369
30	0,254	0,272	0,299	0,307	0,317	0,327	0,342
35	0,235	0,252	0,279	0,286	0,295	0,305	0,318
40	0,221	0,237	0,261	0,267	0,277	0,287	0,299
45	0,204	0,223	0,247	0,254	0,263	0,272	0,288
50	0,198	0,213	0,235	0,242	0,250	0,259	0,271
75	0,162	0,174	0,193	0,199	0,206	0,214	0,223
100	0,1405	0,151	0,168	0,173	0,179	0,186	0,195
150	0,1148	0,1236	0,138	0,142	0,147	0,153	0,160
200	0,0996	0,1072	0,1195	0,1232	0,1278	0,1328	0,1394
300	0,0815	0,0877	0,0983	0,1011	0,1046	0,1088	0,1145
500	0,0631	0,0680	0,0759	0,0783	0,0812	0,0844	0,0888
700	0,0534	0,0574	0,0643	0,0663	0,0688	0,0717	0,0751
1000	0,0446	0,0481	0,0538	0,0555	0,0576	0,0599	0,0629
5000	0,0200	0,0215	0,0241	0,0249	0,0258	0,0269	0,0282
10000	$0{,}0141_4$	$0{,}0152_3$	0,01706	0,01755	0,01824	0,0190	0,0199

Die Werte der Tabelle XI sind genauer als 1 Proz.

$\frac{\overline{\Lambda}_{I\omega}}{\overline{\Lambda}_{I0}}$ als Funktion der Wellenlänge für jedes beliebige Beispiel. Ist z. B. $q = 0{,}33$, so hat man zwischen der 7. und 8. Rubrik der Tabelle XI zu interpolieren, und nach (82) die den Werten $\omega\Theta$ zugeordneten Wellenlängen auszurechnen. (60) und (70) bzw. (71) ergeben die molekulare Leitfähigkeitsverminderung infolge der Relaxationskraft $\overline{\Lambda}_{I0}$ bzw. die Verminderung infolge der elektrophoretischen Wirkung für den stationären Fall. Damit ist aber alles bekannt, was zur vollständigen Erfassung des Dispersionseffektes ausreicht.

Zusammenfassung.

Die Folge der zwischen den Ionen wirksamen Coulombschen Kräfte ist das Auftreten einer gewissen Regelmäßigkeit in der Verteilung der Ionen, die sich als Ionenatmosphäre bemerkbar macht. Diese Auffassung ist nicht nur mit Hinsicht auf die thermodynamischen Eigenschaften, sondern auch auf die irreversiblen Vorgänge der Elektrizitätsleitung von Bedeutung geworden. In der vorliegenden Arbeit ist das Verhalten dieser Ionenwolke gegenüber einem äußeren elektrischen Wechselfelde auch unter Berücksichtigung der Brownschen Bewegungsschwankungen der Ionen untersucht worden und damit ein quantitatives Grenzgesetz der Dispersion der Leitfähigkeit starker Elektrolyte gefunden worden. Es zeigte sich, was auch bereits für die Auffassung des stationären Falles von Bedeutung war, daß zwei Größen der Ionenwolke für die Leitfähigkeitsfragen wesentlich sind: nämlich einmal ihre Dicke $\frac{1}{\varkappa}$, und zweitens ihre Relaxationszeit, welche die Dichteverteilung der Wolke zu ihrem Entstehen oder Vergehen benötigt. Die Dicke der Ionenatmosphäre ist von der Größenordnung $\frac{10^{-8}}{\sqrt{\gamma}}$ cm (vgl. Tabelle III), worin γ die Konzentration in Mol pro Liter angibt; entfernt man plötzlich ein Ion, so ist für den zeitlichen Übergang der um das Ion zentrierten Regelmäßigkeit in der Anordnung zu der regellosen Orientierung eine endliche Relaxationszeit charakteristisch. Diese ist von der Größenordnung $\frac{10^{-10}}{\gamma}$ sec (vgl. Tabelle III). Dicke und Relaxationszeit sind bestimmend für die Differenz der molekularen Leitfähigkeit bei kleinen Konzentrationen gegenüber ihrem Werte für unendliche Verdünnung. Auch bei vollständiger Dissoziation tritt infolge der bis auf größere Entfernungen wirksamen elektrostatischen Bindung der Ionen aneinander eine bremsende Kraft auf die Ionen auf. Sie beruht einmal auf der Relaxationskraft und zweitens auf der elektrophoretischen Kraft. Die Relaxationskraft ergibt sich als Folge der Relaxationszeit. Würde eine solche nicht existieren, so würde auch die Relaxationskraft verschwinden. Bewegt sich nämlich ein Ion unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes, so wird ein Unterschuß an Ladungsdichte der Wolke vor und ein Überschuß an Ladungsdichte hinter dem Ion auftreten. Diese dissymmetrische Ladungsverteilung erzeugt eine bremsende Kraft „die Relaxationskraft", die der Ionengeschwindigkeit proportional ist für kleine Werte derselben. Die elektrophoretische Kraft wird durch Zusatzbewegungen des Lösungsmittels hervorgerufen, welche eine Vermehrung der Stokesschen Reibungskraft bedingen. Beide Kräfte sind der Dicke der Ionenwolke umgekehrt proportional, rufen also eine Verminderung der molekularen Leitfähigkeit im Sinne des Kohlrauschschen Gesetzes hervor. Versuche von M. Wien über den Einfluß sehr hoher Feldstärken (Größenordnung 100 000 Volt/cm) auf die Leitfähigkeit, bei denen Geschwindigkeiten von etwa 1 m pro Sek. auftreten und bei denen Abweichungen vom Ohmschen Gesetz beobachtet wurden, lassen sich auf Grund des entworfenen Bildes verstehen. Bei starken Feldern kommt, wie man leicht abschätzt, die Ionenwolke überhaupt nicht mehr zustande; hierfür muß also die Leitfähigkeit bis zu dem Werte, der der unendlichen Verdünnung entspricht, ansteigen[1]), vorausgesetzt, daß die Annahme der vollständigen Dissoziation zutrifft. Die Untersuchung des Wienschen Effektes oder auch der hier diskutierten Dispersion ergibt also die Möglichkeit, den Effekt der gegenseitigen Bindung durch Coulombsche Kräfte experimentell zu eliminieren[2]). Damit scheint uns eine neue Methode gegeben, über den wirklichen Dissoziationsgrad der Elektrolyte Aufschluß zu erlangen. Wir wollen in einer demnächst erscheinenden Notiz hierauf ausführlicher

1) Wie Herr Geheimrat M. Wien uns freundlichst mitteilte, scheinen seine neuesten Versuche diese von ihm schon 1927 ausgesprochene Vermutung zu bestätigen.

2) Es scheint uns von prinzipieller Bedeutung, die durch obige Andeutungen gekennzeichneten Dissoziationsgrade zu vergleichen mit den unter Mitheranziehung des Massenwirkungsgesetzes abgeleiteten, wie sie von W. Nernst gefunden werden. (Vgl. W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie 428, 1927, Orthmann, Ergebn. d. Naturw. **6**, 1927; Naudé, Zeitschr. f. Elektrochemie 532, 1927; W. Nernst, Berl. Akad. Ber. **2**. 4, 1928.)

eingehen, und uns für den Spezialfall des KCl überlegen, in welcher Weise die Vermehrung der molekularen Leitfähigkeit als Funktion der Feldstärke bis zu ganz hohen Feldern theoretisch erfaßt werden kann. Wenn auch die Hydrodynamik dieses Vorgangs unverhältnismäßig komplizierter und noch keineswegs gelöst ist, so ist es doch möglich, die Wiensche Kurve in ihrer ganzen Erstreckung theoretisch zu reproduzieren.

Die Wienschen Versuche legten es nahe, die Existenz eines anderen bisher noch nicht beobachteten Effektes zu vermuten, der von uns in dieser Arbeit ausführlich untersucht worden ist. Wirkt nämlich ein elektrisches Wechselfeld auf die Ionen der Lösung ein, so zeigt die Ionenwolke in jedem Augenblick diejenige Dissymmetrie der Ladungsverteilung, die der momentanen Geschwindigkeit des Ions entspricht. Wird aber die Zeitdauer einer Schwingung des Ions vergleichbar mit der Relaxationszeit oder sogar geringer, so kann sich die dissymmetrische Ladungsverteilung in der Ionenwolke nicht mehr voll ausbilden. Infolgedessen fehlt für ganz hohe Frequenzen die Relaxationskraft, und die molekulare Leitfähigkeit steigt, wie man ja anschaulich ohne weiteres übersieht. Die allgemeine Theorie dieser Dispersionserscheinung der Leitfähigkeit ist hier für den Fall verdünnter Lösungen auch unter Berücksichtigung der Brownschen Bewegungsschwankungen der Ionen ausgearbeitet worden. Der Einfluß der Konzentration, der Beweglichkeit der Ionen, der Dielektrizitätskonstante, der Temperatur und der Wertigkeit wurde ausführlich untersucht. Die auftretende Vermehrung der molekularen Leitfähigkeit entspricht dem Anteil, der von der Relaxationskraft herrührt und kann daher ziemlich beträchtlich werden. Experimentell war der von uns vermutete Dispersionseffekt der Leitfähigkeit starker Elektrolyte bei der Abfassung dieser Notiz noch nicht nachgewiesen. Anzeichen für ihn fand M. Wien[1]). Neuerdings hat ferner Sack im hiesigen Laboratorium zeigen können, daß zwei Lösungen eine von KCl und eine von $MgSO_4$, die bei kleiner Frequenz gleiche Leitfähigkeit haben, einen verschiedenen Widerstand zeigen, wenn sie mit hoher Frequenz (Wellenlänge 18 m) gemessen werden. Die Leitfähigkeitsdifferenz war in dem vorausgesagten Sinne und von der erwarteten Größenordnung. Sack wird über diese immerhin noch vorläufigen Versuche demnächst selbst berichten.

1) M. Wien, Ann. d. Physik **38**, 340/41, 1927.

(Eingegangen 15. Mai 1928.)

Das elektrische Moment des Paraazoxyanisols.

Von J. Errera (Brüssel).

Das Paraazoxyanisol ist zwischen 399° und 417° K ein typischer Vertreter des mesomorphen Zustandes von der nematischen Type[1]).

Die Anisotropie des Mediums kann den Molekülen selber zugeschrieben werden, jedoch neigen heutzutage einige Autoren zu der Ansicht, daß das Paraazoxyanisol im nematischen Zustande kristalline Aggregate von Stäbchenform enthält (die wir im folgenden Stäbchen nennen wollen), die ungefähr 10^4—10^5 Moleküle enthalten, und die die Anisotropie verursachen sollen. Wie kam man nun zu dieser Zahl 10^4—10^5 Moleküle? Ornstein[2]) berechnete auf Grund der Messungen von Kast[3]) über den Einfluß eines magnetischen Feldes auf die D.K., daß das magnetische Moment der Stäbchen $9{,}43 \cdot 10^{-27}$ beträgt, entsprechend ungefähr 10^4 Bohrschen Magnetonen. Anderseits berechnet Freedericks[4]) aus den Messungen von Foex und Royer[5]), daß die Stäbchen, die diamagnetisch und stark anisotrop sein sollen, ungefähr 10^5 Moleküle enthalten. Ihre Dimensionen würden dieselben bleiben bei jeder Temperatur ihres Existenzbereiches[1]).

Bei Einwirkung eines magnetischen Feldes auf das Paraazoxyanisol im nematischen Zustande variiert die D.K. mit der Intensität des magnetischen Feldes und mit dem Winkel zwischen den elektrischen und magnetischen Kraftlinien. Die größte beobachtete Änderung der D.K. bei der Sättigung beträgt nach Kast 0,119 für eine D.K. von 5,41 und nach Jezewski[2]) 0,151 für 5,31. Diese gut übereinstimmenden Zahlen zeigen eine schwache Änderung der D.K., welche nach Ornstein der Differenz der D.K. nach den beiden Axenrichtungen der Stäbchen entsprechen würde. Die Theorien, die diese Erscheinungen erfassen wollen, müssen beachten: 1. die Kräfte des magnetischen Feldes; 2. die orientierenden Kräfte des inneren Feldes; 3. die Wärmebewegung und 4. die Adhäsionskräfte der flüssigen Kristalle der Kondensatorplatten gegenüber, die, im Langmuirschen Sinne, orientierende Kräfte der Oberfläche sind.

1) G. Friedel, Annales de Physique **18**, 273, 1922.
2) L. S. Ornstein, Ann. der Phys. **74**, 454, 1924.
3) W. Kast, Ann. d. Phys. **83**, 391, 1927.
4) V. Freedericks, Zeitschr. f. Phys. **42**, 533, 1927.
5) G. Foex u. L. Royer, C. R. **180**, 1912, 1925.

1) L. S. Ornstein, Ann. d. Phys. **74**, 454, 1924.
2) M. Jezewski, Zeitschr. f. Phys. **40**, 157, 1926.

Gegen die Hypothese der Existenz von Stäbchen wurden neuerdings durch Zocher[1]) und Ebert[2]) wichtige Einwände erhoben. Zocher machte z. B. darauf aufmerksam, daß solche Aggregate mit Konstanten magnetischen Moments unseren Erfahrungen über den Zusammenhang von Magnetisierbarkeit und chemischer Konstitution organischer Stoffe widersprechen. Auch ist die Annahme solcher Aggregate mit der Existenz von großen, optisch-homogenen anisotropen Schmelzen unvereinbar.

Andere Autoren benutzen nicht zur Erklärung der Anisotropie die Stäbchenhypothese:

Nach der Theorie von Born[3]) sollen die Paraazoxyanisol-Moleküle ein erhöhtes elektrisches Moment besitzen, welches die Orientierung der Moleküle verursacht; Ebert und v. Hartel[4]) haben den Höchstwert des elektrischen Momentes des Paraazoxyanisols gemessen und fanden einen Wert, der bedeutend unter dem von der Theorie Borns geforderten Mindestwerte bleibt.

Die Hypothese von Vorländer[5]) und Oseen[6]) schreibt die Anisotropie hauptsächlich der langgestreckten Form der Moleküle zu; es ist dies auch die Hypothese, die in den neueren Arbeiten von Ebert und von Hartel und von Zocher angenommen wird.

Unsere Versuche beschäftigten sich mit der Frage, ob die eventuell vorhandenen Stäbchen des Paraazoxyanisols ein elektrisches Moment besitzen und wir haben zugleich das elektrische Moment der Moleküle bestimmen können[7]).

Die Tatsache, daß die Paraazoxyanisol-Moleküle ein elektrisches Moment besitzen, bedeutet noch nicht, daß die Stäbchen auch eines haben würden. Je nach der Anordnung der Moleküle im Stäbchen kann das Moment erhöht oder erniedrigt, oder, was für den ersten Blick am unwahrscheinlichsten erscheint, ungeändert sein, was auch gegen ihre Existenz sprechen würde.

1. a) Wir haben die D.K. des Paraazoxyanisols bei verschiedenen Temperaturen zwischen 116 und 129⁰ C in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Die Frequenz variierte dabei von 1 Million bis zu 400. Bei konstanter Temperatur bleibt die D.K. für verschiedene Frequenzen fast konstant (s. Tab. I).

1) H. Zocher, Physik. Zeitschr. **28**, 790, 1927.
2) Siehe gleiche Spalte Note 4.
3) M. Born, Ann. d. Phys. **55**, 222, 1918.
4) L. Ebert u. H. von Hartel, Physik. Zeitschr. **28**, 786, 1927.
5) D. Vorländer, Zeitschr. f. Phys. Chem. **105**, 211, 1923.
6) C. W. Oseen, zitiert in der Arbeit von Ebert (Note 3) S. 787.
7) Diese Arbeit wurde noch vor Erscheinen der Mitteilung von Ebert und von Hartel begonnen.

Tabelle I.

Die D.K. des Paraazoxyanisols in Abhängigkeit von der Frequenz. Temperatur: 129⁰ C.

ν	D. K.
670,000	5,3
330,000	5,3
52,000	5,3
12,000	5,4
6,000	5,4
2,340	5,4
680	5,4
380	5,4

Dieses Resultat zeigt, daß kein Dipolmoment von Stäbchen vorhanden ist, denn falls es Stäbchen mit eigenem Moment gäbe, so sollten sie in Anbetracht ihrer Dimensionen (entsprechend den Aggregaten von 10^4—10^5 Molekülen) und der Viskosität des Mediums, schon für Frequenzen oberhalb 500 an der Polarisation des Mediums mitwirken und eine Erhöhung der D.K. verursachen. Vergleicht man die Zahlen der Tab. I mit an kolloidalen Lösungen von Vanadinpentoxyd[1]) erhaltenen, so findet man, daß das V_2O_2, dessen Teilchen Stäbchenform haben und die ein hohes Dipolmoment besitzen, — schon für Frequenzen von der Größenordnung 500,000 und in einer Konzentration von 0,06 g/L eine Erhöhung der D.K. des Lösungsmittels zeigt. — Bei der Frequenz 3800 wird die D.K. auf 570 erhöht, gegenüber 80 bei der Frequenz 1 Million.

b) Bei Messungen oberhalb der Klärtemperatur der nematischen Phase, findet man die D.K. gleich derjenigen in der nematischen Phase, selbst für Frequenzen von der Größenordnung 500. Falls Stäbchen mit permanentem Dipolmoment vorhanden wären, so würde man bei 136⁰ C, d. i. die Temperatur, bei der die Anisotropie zu erscheinen beginnt, eine plötzliche Zunahme der D.K. beobachten. Die folgende Tabelle II zeigt davon keine Spur:

Bemerkenswert ist der kleine Temperaturkoeffizient, der bei Medien, die permanente Dipole besitzen, im allgemeinen größer ist. Wasser zeigt z. B. für einen Intervall von 30⁰ eine Änderung der D.K. von 83,71 bei 10,6⁰ C zu 71,6 bei 41,7⁰ C[2]).

Es ergibt sich aus diesen Versuchsreihen, daß die Gesamtpolarisation, selbst bei niedrigen Frequenzen gemessen, bei Überschreiten der Klärtemperatur, dieselbe bleibt, was gegen die Assoziation der Moleküle zu Stäbchen spricht.

1) J. Errera, Kolloid-Zeitschr. **31**, 59, 1922; **32**, 157 u. 373, 1923.
2) Die Dichtemessungen von Jaeger, Zeitschr. anorgan. Chemie **101**, 152, 1917.

Tabelle II.

Einfluß der Temperatur auf die D.K.[1]) — Meßfrequenz: 680.

t	D. K. (ε)	$P \cdot T = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M.T.}{d.}$
151°	5,2	56,500
145°	5,2	
136°	5,3	54,200
122,8°	5,3	52,000
119°	5,4	51,500
117°	5,4	51,200
110°	5,4 (fl. überkühlt)	49,800
116,6°	12,6	
116,4°	11,5	
115,8°	7,2	
111,2°	3,8	
20°1,5	3,3	

2. Die Paraazoxyanisol-Moleküle haben ein erhöhtes Dipolmoment. In der Tat, die D.K. des festen Paraazoxyanisols beträgt 3,2 bei 20° C und bei einer Frequenz von 500,000, wogegen die D.K. des flüssigen 5,3 ist. Diese Zahlen sind allgemein kennzeichnend für Körper, die permanente Dipole haben; unterhalb des Schmelzpunktes und für hohe Frequenzen ist die D.K. des festen Körpers kleiner, als die der Flüssigkeit; die nichtpolaren Körper zeigen dagegen eine kleine Erhöhung der D.K. beim Festwerden[2]).

Da die Polarisation des Paraazoxyanisols bei der Klärtemperatur keine Diskontinuität zeigt, so haben wir das Produkt von Gesamtpolarisation —mal abs. Temperatur (PT) in Anhängigkeit von der abs. Temperatur auftragen können. Wenn das flüssige Paraazoxyanisol nicht assoziiert wäre, so würde man aus der Lage des Schnittpunktes dieser Kurve mit der Ordinate das elektrische Moment der Moleküle berechnen können[3]), wie dies z. B. beim Äther, welcher ebenfalls polar ist, der Fall ist. In diesem Falle wäre die Gesamtpolarisation (P) im flüssigen Zustande dieselbe wie in der Gasphase oder im Zustande einer unendlichen Verdünnung in einem nicht polaren Lösungsmittel. Wir nennen diese Polarisation P_∞. Die in der Tabelle II enthaltenen Werte zeigen, daß diese Methode nicht geeignet ist; wenn man die Kurve zeichnet, so zeigt der negative Schnittpunkt mit der Ordinate, daß das Medium assoziiert ist und daß wir mit Werten von P und nicht P_∞ zu tun haben, für welche allein die Debyesche Theorie gültig ist. Wir müssen also zur Berechnung des elektrischen Momentes der Moleküle einen anderen Weg wählen.

1) L. Kockel, Annalen d. Phys. **77**, 417, 1925.
2) J. Errera, Polarisation diélectrique, Presses Univ. Paris 1928.
3) P. Debye, Handbuch der Radiologie, VI, S. 622.

Ebert und v. Hartel[1]) verwendeten die zweite Debyesche Methode[2]), indem sie Messungen der D.K. und der Dichte von Paraazoxyanisol-Lösungen in Benzol vornahmen, und berechneten daraus die Gesamtpolarisation für unendliche Verdünnung und für die Assoziation Null (P_∞). Um den Anteil der Gesamtpolarisation, der den nicht assoziierten permanenten Dipolen ($P_{p\infty}$) zugeschrieben werden kann, berechnen zu können, substrahieren sie von P_∞ in erster Annäherung, wie sie selbst bemerken, die elektronische Polarisation P_E anstatt der Summe dieser Polarisation P_E plus die durch die Atome verursachte P_A, also $P_E + P_A$. Man könnte diesen Wert von $P_E + P_A$ bestimmen durch Messung des Brechungsvermögens der Flüssigkeit für eine infrarote Frequenz, deren Schwingungszeit kleiner ist als die Relaxationszeit der permanenten Dipole und größer als die letzte Absorption der Atome. Wir haben einen angenäherten Wert von $P_E + P_A$ bestimmt durch Messung der Gesamtpolarisation im festen Zustande, weil unterhalb des Schmelzpunktes und bei hohen Frequenzen; die permanenten Dipole können dabei zur Polarisation nicht beitragen.

Wir finden auf diese Weise für das feste Paraazoxyanisol einen Wert von $P_E + P_A = 82$ (die D.K. des festen Paraazoxyanisols ist 3,2 und die entsprechende Dichte 1,33). Beim Gebrauche des von Ebert und v. Hartel angegebenen P_∞-Wertes finden wir für $P_{p\infty} = P_\infty - (P_E + P_A) = 190 - 82 = 108$, woraus sich für das elektrische Moment der Wert $\mu = 2,3 \cdot 10^{-18}$ ergibt. Der Assoziationsgrad der permanenten Dipole ist $\frac{P_{p\infty} - P_p}{P_{p\infty}} = \frac{108 - 50}{108} = 0,54$.

Die D.K. während des Erstarrens.

Da das Paraazoxyanisol permanente Dipole besitzt, so ist es von Interesse, die Änderung seiner D.K. beim Erstarren zu verfolgen. Tab. II zeigt diese Werte.

Es scheint, daß das Paraazoxyanisol im Momente des Erstarrens sich so verhält, als ob es im molekularen Zustande wäre, da seine bei niedrigen Frequenzen gemessene D.K. ganz plötzlich mehr als den doppelten Wert der Flüssigkeit annimmt, um nachher auf den Wert des festen Paraazoxyanisols herabzusinken. Bei hohen Frequenzen ($\nu = 300,000$) gemessen, existiert diese Erhöhung der D.K. nicht und die D.K. der Flüssigkeit geht kontinuierlich in diejenige des Festen über. Diese Erscheinung ist sowohl beim Erstarren, als auch beim Schmelzen zu beobach-

1) Siehe Note 4, S. 427.
2) Siehe Note 2, S. 428, 1. Spalte.

ten. Für andere Beispiele und Erklärungsmöglichkeiten verweisen wir auf eine frühere Mitteilung[1]).

Zusammenfassung: Vom Standpunkte seines elektrischen Momentes kann die optische Anisotropie des Paraazoxyanisols nicht stäbchenförmigen Molekülaggregaten zugeschrieben werden, sondern den Molekülen selber. Für das elektrische Moment der Moleküle ergibt sich $\mu = 2{,}3 \cdot 10^{-18}$.

Zum Schlusse sei Herrn Dr. L. Ebert bestens gedankt für seine liebenswürdige briefliche Mitteilung, in welcher er mich auf seinen mit Herrn Dr. Zocher gemeinsamen Standpunkt aufmerksam gemacht hat.

1) J. Errera, Transaction Faraday Soc. **24**, 162, 1928.

(Eingegangen 27. April 1928.)

Vorläufige Mitteilung über die Theorie des Kontaktdetektors.

Von Fritz Regler.

In der folgenden Arbeit soll gezeigt werden, daß es möglich ist, alle an Kontaktdetektoren beobachteten Erscheinungen unter Verwendung bekannter Tatsachen und Theorien zu erklären und dadurch diese in der Praxis so einfachen Gleichrichter auch theoretisch zu begründen. Vom Verfasser wurden die guten Detektoren von den schlechten als wesensverschieden getrennt und eine zwangslose Erklärung sämtlicher Erscheinungen herbeigeführt.

Um eine Theorie über die Wirkungsweise eines Kontaktdetektors aufstellen zu können, ist es nötig, sämtliche auf diesem Gebiete gemachten Versuche und Erfahrungen zu sammeln. Ein Teil der Erfahrungen wurde vom Verfasser selbst auf Grund von Experimenten gesammelt, ein anderer Teil der Literatur entnommen. Wir wollen diese durch das Experiment erhärteten Erscheinungen jeweils mit Hilfe der neuen Theorie zu erklären versuchen.

Man unterscheidet im wesentlichen zwei Arten von Detektoren, gute und schlechte. Zu den guten zählen im allgemeinen Kombinationen von Kristallen bzw. kristallinischen Körpern in Verbindung mit ebensolchen Stoffen oder in Verbindung mit Metallen. Zu den schlechten zählen Metalle gegen Metalle. Die gesamten Erscheinungen an beiden Detektorarten lassen sich auf zwei physikalisch längst bekannte Grundprinzipien zurückführen, und zwar einmal auf den piezoelektrischen Effekt oder, wie wir ihn in Hinkunft stets nennen wollen, auf die Elektrostriktion, das andere Mal auf die verschiedene Austrittsarbeit der Elektronen aus verschiedenen Substanzen, bzw. verschieden behandelten und verschieden geformten Substanzen. Alle jene Detektoren, denen praktische Bedeutung zukommt, beruhen auf der Elektrostriktion. Die Folge dieser Behauptung ist, daß eine unipolare Leitfähigkeit zwischen chemisch und physikalisch reinen Metallen im Vakuum oder in einem neutralen Gase gar nicht, bzw. nur in geringem Maße vorhanden sein darf und daß eine stärkere unipolare Leitfähigkeit nur bei oxydierter Oberfläche der Metalle eintreten darf. Tatsächlich bemerkte Goddard[1]), daß bei reinen Metallen im Vakuum der Gleichrichtereffekt entweder ganz ausbleibt oder bis auf zwei bis drei Prozent zurückgeht. Füllte er dann den Vakuumrezipienten mit Wasserstoff, Stickstoff oder einem anderen neutralen Gase, so zeigte sich keine Veränderung oder Besserung des Effektes. Hingegen erreichte der Effekt wieder seinen ursprünglichen Wert, wenn der Rezipient mit Sauerstoff gefüllt wurde. Auf die unipolare Leitfähigkeit des Bleiglanzes aber hatte das Evakuieren keinen verschlechternden Einfluß. Diese Tatsache läßt darauf schließen, daß nicht das Fehlen der Luft oder des Sauerstoffes für die Detektorwirkung nachteilig ist, sondern daß unter dem Einfluß des Sauerstoffes sich eine dünne Oxydschicht auf dem Metall bildet, die unter Umständen oder sogar meistens aus Mikrokristallen besteht, so daß die Detektorwirkung auch hier wieder auf einer Kristallkombination beruht. Jedenfalls aber darf man auch die Gleichrichterwirkung reiner Metalle, wenn sie auch nur sehr schwach vorhanden ist, nicht unbesprochen lassen, zumal ja auch Platindraht-Platinplatte als Detektor bekannt sind, bei denen wohl außer einer sehr starken Gasabsorption keinerlei chemische Veränderungen angenommen werden können.

Für die Erklärung dieser Erscheinung maßgebend ist die Tatsache, daß bei Erwärmung der Kontaktstelle ein Thermostrom entsteht. Legt man nun der Entstehung des Thermostromes die von Drude, Riecke usw. gefundene Theorie zugrunde, nach welcher der Thermostrom durch die ungleichen Druckverhältnisse der Elektronen in den sich berührenden Metallen entsteht, so ist ohne weiteres klar, daß diese ungleichen Druckverhältnisse auch dem Elektronentransport in den zwei verschiedenen Richtungen verschiedene Widerstände entgegensetzen müssen. Nun wird aber gerade die Substanz mit dem geringen Elektronendruck durch das Übertreten der Elektronen

1) Goddard, Physical Rev. **34**, 149, 1912.



bei Erwärmung elektronenreicher, d. h. negativ gegen die andere geladen. Bei Anlegen einer Spannung aber muß die Seite mit dem geringeren Elektronendruck positiv werden, um Elektronen aus der anderen herausziehen zu können. Wird die andere Seite positiv, so werden wegen des entgegenwirkenden Druckes nur viel weniger Elektronen in sie eindringen können, wodurch die Leitung unipolar wird. Da aber bei unerwärmter Kontaktstelle die Spannung, die dem Elektronenüberdruck das Gleichgewicht hält, nur einige Hundertstel Volt beträgt, so kann auch die prozentuelle Überlegenheit der einen Stromrichtung gegen die andere nur sehr klein sein, eine Tatsache, die durch das Experiment ihre volle Bestätigung findet. Auch bei gleichen Materialien kann eine solche Verschiedenheit des Elektronendruckes auftreten, da der Elektronendruck bei gleicher Temperatur unter anderem von der mittleren freien Weglänge der Elektronen abhängt und diese wieder in innigem Zusammenhang mit der Bearbeitung des Materials steht. So kann z. B. die freie Weglänge in einem gezogenen Draht ganz andere Werte annehmen, als in einer gehämmerten Platte, eine Tatsache, die durch die Strukturuntersuchungen verschieden bearbeiteter Metalle mittels Röntgenstrahlen und in der Verschiedenheit ihrer spezifischen Widerstände genugsam bekannt ist.

Von noch größerem Einfluß auf die Gleichrichterwirkung als die Verschiedenheit der Anzahl der freien Elektronen und die Verschiedenheit ihrer mittleren Weglängen in den einzelnen Materialien erscheint aber die Form der Materialien, eine theoretische Folgerung aus unserer Theorie, die durch die Arbeit von G. G. Reißaus[1]) bestätigt wird, auf welche wir im folgenden noch zurückkommen werden. Nach dieser Arbeit wurde nämlich experimentell bestätigt, daß der Elektronenstrom immer von der Spitze zur Fläche wandert. Daß an Spitzen hohe Elektronendrucke auftreten, ist aber aus der Röntgenpraxis genugsam bekannt, da ja scharfe Spitzen und Schneiden sogar im Hochvakuum einer Coolidgeröhre soviel Elektronen emittieren, daß sie die Glühkathode ersetzen können. Dieser starke Elektronendruck an der Spitze eines der beiden Detektormaterialien ist aber die Ursache der unipolaren Leitung. Es kann sich aber auch hier wieder nur um die Gleichrichtung sehr schwacher Ströme handeln, da sonst zwischen sich berührenden Spitzen und Flächen höhere Spannungen bestehen müßten, die bis jetzt wohl noch niemals beobachtet werden konnten.

Wenden wir uns aber von der Detektorwirkung reiner Metalle im Vakuum wieder jener in Luft zu, so haben wir es eigentlich, nach dem vorher Gesagten, mit einer Kombination Kristall-Kristall, bzw. Kristall-Metall zu tun, der wir unsere Aufmerksamkeit schenken wollen und wobei es uns einerlei ist, ob die Kristallschicht durch Oxydation der Metalle entsteht oder ob wir reine Kristalle vor uns haben. Diesen Betrachtungen muß vorausgeschickt werden, daß es dem Verfasser gelungen ist, unter Verwendung zweier Carborundumkristalle Nutzwechselstrom von 110 Volt Spannung und 50 per/sec gleichzurichten. Dabei betrug die mit einem Drehspuleninstrument gemessene gleichgerichtete Komponente des Wechselstroms $^1/_2$ A. Ferner gelang es ihm unter Verwendung derselben Kristallkombination, bzw. unter Verwendung von Carborundum gegen eine Platte aus rostfreiem Stahl, Kupfer usw., 50 Per. Wechselströme von 5000 Volt Spannung gleichzurichten, wobei die gleichgerichtete Komponente 100 M.-A. betrug. Die Angaben des Instrumentes wurden mittels des Kupfervoltameters exakt nachgeprüft. Bei der Gleichrichtung dieser hochgespannten Ströme bemerkte der Verfasser an den Berührungsstellen der Kristalle ein starkes, intermittierendes Glimmlicht, das nicht zwischen den starkgepreßten Kristallen entstand, sondern die Kristallflächen in der Nähe der Berührungsfläche überzog. Diese beiden Tatsachen führten den Verfasser auf die Theorie der Gleichrichtung durch Elektrostriktion.

Die Gleichrichtung von hochgespannten Strömen bzw. von solchen von der Größenordnung eines halben Ampere mittels einer Kristallkombination elektronisch nach der vorher beschriebenen Theorie zu erklären, schien dem Verfasser aussichtslos. Nimmt man hingegen an, daß sich die Kristalle unter der einen Komponente des Wechselstromes dehnen, unter der anderen aber zusammenziehen, so erscheint es ohne weiteres verständlich, daß dadurch auch der Kontakt unter den den großen Kristall aufbauenden Mikrokristallen fester bzw. loser wird, wodurch auch der verschiedene Widerstand der Detektoren in den verschiedenen Stromrichtungen erklärt scheint. Das an den Kristallen dabei beobachtete Leuchten beruht auf sekundären Piezospannungen. Bei einer Zusammenziehung der Kristalle in der Richtung der Stromlinien muß allerdings eine Dehnung in der senkrechten Richtung (wir wollen künftig immer der Einfachheit wegen von der senkrechten Richtung sprechen, wenn der Winkel auch tatsächlich von der Kristallform abhängt und auch andere Werte haben kann) dazu auftreten, so daß in dieser Richtung der Kontakt fester wird (Fig. 1). Doch haben die Kristalle bekanntlich in den verschiedenen Richtungen verschiedene Widerstände, eine Tatsache,

1) Reißaus, Physik. Zeitschr. 28, 223, 1928.



die ihre Ursache unter anderem in den verschiedenen freien Weglängen der Elektronen in den einzelnen Richtungen haben dürfte. Wenn also der Strom in der direkten Verbindungslinie der beiden Pole unterbrochen wird, so hat er in den anderen Richtungen nicht nur einen längeren Weg zurückzulegen, sondern er hat auch in diesen Richtungen einen wesentlich höheren, spezifischen Widerstand zu überwinden, so daß der Gesamtwiderstand um vieles höher ist als der in der direkten Richtung. Die Folge dieser Tatsache ist, daß die Güte des Detektors variiert, je nach der Richtung, in der ihm die Spannung angelegt wird. Wird die Spannung in der Richtung der gutleitenden Achse angelegt, so

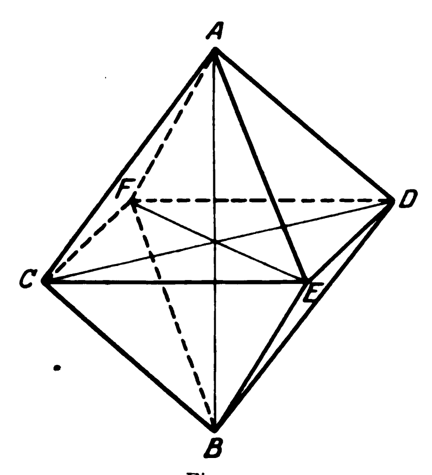


Fig. 1.
Bezeichnet man mit AB die Hauptrichtung, dann sind CD, EF die senkrechten Richtungen.

ist sein Wirkungsgrad wesentlich besser als in den anderen Achsen. Da aber auch die Stärke der Striktion von der Richtung abhängig ist, so kann ein Anlegen der Spannung an einer anderen Achse auch zur Änderung der Stromrichtung im Detektor führen. Nehmen wir z. B. an, ein Kristall habe sich bei Anlegen einer Spannung an die gutleitende Achse gedehnt, so wird er infolge des festen Kontaktes der Mikrokristalle einerseits und der Vergrößerung der freien Weglänge der Elektronen durch die Dehnung der Kristalle andererseits den Strom gut leiten. Wird jetzt die Polarität vertauscht, so wird er aus den oben angeführten Gründen zum schlechten Leiter werden. Legen wir aber diese Spannung an eine andere Achse der Kristalle, so wird er sich wohl wieder dehnen, doch wird infolge des großen Widerstandes in dieser Richtung nur wenig Strom fließen. Wird die Polarität aber vertauscht, so wird er sich zusammenziehen, wodurch sich die Kristalle in der Senkrechten dehnen müssen. Durch die Dehnung aber wird der Kontakt jetzt in der gutleitenden Richtung der Kristalle fester und es wird bei einigen Kristallen trotz des längeren Weges wegen des geringeren spez. Widerstandes mehr Strom durch den Kristall fließen als im ersten Falle. In der Tat tritt bei Bleiglanz z. B., wie auch nebst vielen anderen Reißaus fand, eine Änderung der Stromrichtung ein, je nachdem ob die Spannung an eine Spitze oder Fläche des Kristalles angelegt wird.

Auch ist bekannt, daß an den Spitzen und Kanten der Kristalle wesentlich bessere Effekte erzielt werden, als an den Flächen. Dies ist ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß dem Strom ein wesentlich größerer Widerstand entgegenwirkt, wenn er senkrecht zur Spannung sich auf Umwegen durchzwängen muß, als in der direkten Richtung. Außerdem wird der Kontakt in der besserleitenden Senkrechten geringer sein, da die Stärke der Striktion in den verschiedenen Richtungen verschieden groß ist. Man sieht aus dem Gesagten bereits, wie wichtig es ist, dem Kristall den Strom in einer bestimmten Richtung zuzuführen. Bei der Kleinheit der meist verwendeten Kristalle geschieht dies aber am besten mittels Spitzen, wobei allerdings nach Reißaus auch die Kristallecke zur Spitze werden kann. Liegen alle Kristalle mit derselben Ebene nach außen, wie es wahrscheinlich bei Großflächengleichrichtern der Fall ist, kann die Stromzuführung auch durch eine Fläche erfolgen.

Auch mit der Mitteilung von Austin[1]), daß der Thermostrom an der Kontaktstelle von Kristalldetektoren dem gleichgerichteten Strom entgegenwirkt, stimmt für den Fall der guten Kontaktstellen, für welche ja diese Mitteilung nur gilt, diese Tatsache überein, da der Elektronenstrom meistens vom Bleiglanz zum Metall fließt, während der Thermostrom entgegenfließen muß, da das Metall elektronenreicher ist. Es gibt aber auch Kristalle, die in allen Richtungen dieselbe Polarität des Detektorstromes aufweisen. Der Grund dafür liegt nach dem oben Gesagten darin, daß der Widerstand der gedehnten Kristalle in allen Richtungen größer ist als in der direkten Verbindungslinie der beiden Pole.

Nach dieser Theorie ist es auch erklärlich, daß gleiche Kristalle, selbst wenn sie sich an kongruenten Stellen berühren, wie es vom Verfasser an Carborundumkristallen derselben Druse beobachtet wurde, als sehr gute Gleichrichter wirken können, eine Erscheinung, welche nach den anderen Theorien, z. B. Verschiedenheit der Elektronendichte, Loslösungsarbeit usw. nicht zu erklären wäre. Strachan hat ferner gefunden, daß die Kontaktstelle eines Detektors während des Stromdurchganges dauernd mechanische Schwingungen ausführt, eine Erscheinung,

1) Austin, Physik. Zeitschr. **9**, 253, 1908.

die als Stütze der angeführten Theorie gelten kann. Von großer Bedeutung ist die Angabe von Strachan[1]), wonach sich piezo- und pyroelektrische Kristalle nicht als Detektoren eignen. Die reinen Piezokristalle sind aber im allgemeinen sehr schlechte Leiter und kommen daher als Detektoren überhaupt nicht in Frage, wären sie aber das nicht, so würden infolge der starken Dehnungen und Kompressionen auch sehr starke Sekundäreffekte auftreten, die die angelegte Spannung auf alle Fälle fast vollständig kompensieren würden. Es zeigen aber fast alle Kristalle piezoelektrische Eigenschaften, nur in mehr oder weniger großem Maße und gerade die mit einer geringen Striktionseigenschaft versehenen Kristalle sind für Detektoren besonders geeignet, da zur Verbesserung bzw. Verschlechterung des Kontaktes schon sehr kleine Größenveränderungen genügen, diese aber infolge ihrer Kleinheit sehr schwache Sekundäreffekte erzeugen, so daß diese sekundär auftretenden Spannungen nicht imstande sind, den gleichgerichteten Strom merklich zu kompensieren. Vom Verfasser wurde ferner an Carborundumkristallen, die längere Zeit hindurch stärkere Ströme gleichzurichten hatten, ein Brüchigwerden der Kristalle beobachtet, das ebenfalls auf Striktionserscheinungen zurückgeführt werden kann. Selbstverständlich wirken bei Drusen, wie sie alle käuflichen Detektorkristalle vorstellen, nicht alle, sondern nur der Berührungskristall, in welchem der Strom gleichgerichtet wird, während die anderen nur die Stromleitung besorgen.

Sind die zur Gleichrichtung gelangenden Spannungen sehr hoch, so kann es vorkommen, daß die Mikrokristalle über die Elastizitätsgrenze hinaus gedehnt werden, wodurch der Gleichrichtereffekt verschwindet. Nimmt man aber an, daß die Elastizität in Kristallen bedingt ist durch die elektrostatischen Kräfte, die im Innern eines solchen Kristalles herrschen, z. B. zwischen Schwefel und Blei, so muß es durch Erschüttern des Kristalles möglich sein, die Atome wieder so stark zu nähern, daß sie wieder die normale Lage einnehmen. Eine solche elektrische Bindung zwischen den Atomen eines Kristalles kann man auch bei ruhenden Atomen annehmen, da die Atome von allen Seiten im Raume gehalten werden und nicht ineinander stürzen können. Aber auch bei Zugrundelegung der mechanischen Anziehung der Massen muß derselbe Effekt eintreten. Tatsächlich kann man durch Überlastung taub gewordene Detektoren durch Erschütterung wieder brauchbar machen. Es kann aber bei überlasteten Detektoren die Verschlechterung der unipolaren Leitung auch dadurch zustande kommen, daß die einzelnen Mikrokristalle durch Mikrofunken ähnlich wie beim Kohärer zusammengeschweißt werden und erst durch Erschütterung wieder auseinandergerissen werden können. Bei solchen festverkeilten oder verschweißten Kristallen kann natürlich keine Lockerung des Kontaktes auftreten und als Folgeerscheinung davon verliert der Kristall seine Detektorwirkung. Durch die Annahme der verschieden geladenen Atome ist aber auch die Elektrostriktion erklärt, da verschiedene Polaritäten die Atome nähern, bzw. entfernen, je nachdem ob die Atome von den Ladungen angezogen oder abgestoßen werden. Ist so ein Kristall aber über die Elastizitätsgrenze gedehnt, so besitzt er freie Ionen und wird dadurch zum Leiter zweiter Ordnung. Dadurch treten dann an dem Kristall Polarisationsspannungen auf, welche der Spannung des früher gleichgerichteten Stromes entgegengesetzt sind. Da diese Spannungen kleiner sein müssen als die des gleichgerichteten Stromes, so wird der nunmehr durchgehende Wechselstrom in der einen Richtung durch die Polarisationsspannung verstärkt, in der anderen geschwächt, so daß nun durch einen überlasteten Kristall der Strom wieder, allerdings in der entgegengesetzten Richtung wie zuerst, gleichgerichtet wird. Es kann aber auch als Ursache für die Stromumkehrung im überlasteten Kristalle angenommen werden, daß die Kristalle sich bei der Dehnung drehen, wodurch die Spannung an andere Kristallpunkte zu liegen kommt, an denen der Kristall überhaupt nicht anspricht oder den Strom in der anderen Richtung durchläßt. Aber auch die Tatsache, daß manche Kristalle nur bis zu gewissen Spannungen verwendbar sind, hat seine Ursache nebst chemischen Veränderungen durch die Erwärmung in der Überdehnung oder Verdrehung der Kristalle. Daher kommt es, daß Kristalle, z. B. Carborundum, für niedrige Spannungen einen schlechten Detektor geben, für hohe aber einen sehr guten. Carborundumkristalle brauchen eben zur Dehnung eine sehr starke elektromotorische Kraft, daher werden sie durch Vorspannung, bzw. Erwärmung für niedrige Spannungen sehr verbessert. Diese Erscheinung wurde an Detektoren oft beobachtet.

Die von Frau Dr. Seidl gefundene Tatsache, daß der Detektor das Gesprochene wiedergibt und an Stelle eines Telephons verwendet werden kann, läßt sich mit der Elektrostriktion und der damit verbundenen Schwingung der den Kristall umgebenden Luft erklären.

Aber auch die Erscheinung des negativen Widerstandes von Hochohmwiderständen, für die ja häufig Carborundum verwendet wird und die sowohl bei Erhöhung der Temperatur als auch der Spannung beobachtet wird, er-

1) Strachan, Wireless World **13**, 245.

klärt die Elektrostriktion. Erwärmt man nämlich einen solchen Hochohmwiderstand, in dem ja die einzelnen Kriställchen infolge der Bearbeitung regellos durcheinander liegen, so werden nebst elektronischen Vorgängen, eventuelle Vergrößerung der freien Weglänge usw., auch die Kriställchen sich vergrößern, wodurch ein inniger Kontakt und dadurch auch eine bessere Leitfähigkeit erreicht wird. Dasselbe geschieht bei Vergrößerung der Spannung. Legt man an einen solchen Widerstand eine Spannung an, so wird ein Teil der Kristalle vergrößert, der andere verkleinert. Beide Teile werden sich prozentuell die Wage halten. Der Teil der Kristalle, der sich verkleinert, scheidet aber schon bei kleinen Spannungen aus der Stromleitung aus. Die sich vergrößernden Kristalle aber werden einen immer festeren Kontakt geben, je höher die angelegte Spannung ist. Da aber der sich vergrößernde und der sich verkleinernde Anteil an Kristallen in einem solchen Widerstand numerisch gleich ist, so ist der Widerstand auch in beiden Richtungen gleich groß, da im Falle einer Änderung der Polarität die anderen Kristalle die Stromleitung übernehmen. Vorausgesetzt ist aber dabei nur, daß die Stromzuführung nicht punktförmig oder wenigstens nicht einpolig punktförmig geschieht, da sonst der Hochohmwiderstand in den verschiedenen Richtungen verschiedene Leitfähigkeiten hätte, wie es tatsächlich beobachtet wurde. Auch hier gibt es aber eine Dehnung über die Elastizitätsgrenze hinaus und auch hier genügt wieder ein Schütteln des Stabes, um die alten Verhältnisse wieder herzustellen. Auch die Polarisationsspannung kann dabei beobachtet werden.

Alle diese Erscheinungen treten aber auch beim Detektor auf. Erwärmt man nämlich den Kristall, so tritt eine wesentliche Verbesserung des Gleichrichtereffektes auf. Dies hat seine Ursache wieder in der Vergrößerung der Mikrokristalle und in einer Herabsetzung des Widerstandes des Detektors in einer Stromrichtung durch Verbesserung des Kontaktes der einzelnen Kristalle untereinander. Versuche haben ergeben, daß die Erwärmung nur bis zu einem optimalen Punkte fortgesetzt werden darf, worauf sie die Gleichrichterwirkung auch ohne den Kristall chemisch zu verändern, nachträglich beeinflußt. Auch die Tatsache konnte nach unserer Theorie vorausgesagt werden. Werden nämlich die Kristalle durch die Erwärmung so vergrößert, daß ihr Kontakt durch Zusammenziehen zufolge der angelegten Spannung nicht mehr gelockert oder nur mangelhaft gelockert werden kann, so wird die gleichrichtende Wirkung des Detektors nachlassen. Auch kann durch zu starke Erwärmung der Kontakt in der senkrechten Richtung so verbessert werden, daß der Widerstand in dieser Richtung erheblich sinkt. Bei Bleiglanz liegt dieses Optimum bei ca. 50^0. Eben dasselbe bewirkt die Vorspannung, d. i. eine an den Detektor angelegte Gleichspannung, die seine Wirkungsweise ebenfalls wesentlich verbessert, doch auch nicht über ein gewisses maximales Maß ausgedehnt werden darf. Ihre Wirkungsweise ist der bei Hochohmwiderständen erklärten vollkommen analog. Aber auch nach Fortfall der Erwärmung bzw. Wegnahme der Vorspannung behält der Detektor eine verbesserte Wirkungsweise bis zum Eintritt einer Erschütterung bei. Dies hat sein Analogon in der Mechanik, wo ein gedehnter Körper die Elastizitätsgrenze noch lange nicht überschritten haben muß und dennoch nicht ganz in die Ruhelage zurückkehrt. Die Kristalle sind eben gedehnt und bleiben es auch nach Aufhören der Dehnungsursache noch ein wenig, bis sie durch einen starken Einfluß von außen wieder in die Ruhelage zurückgedrängt werden. Wahrscheinlich spielt dabei die Reibung der Kristalle untereinander eine gewisse Rolle, so daß der Reibungswiderstand größer ist als die Anziehungskräfte der Atome.

Aus den oben geschilderten Erscheinungen läßt sich folgern, daß wir in Kristallen zwei Arten der Stromleitung vorfinden, nämlich eine durch Elektronen und eine zweite durch Ionen. Letztere tritt anscheinend erst nach längerem, stärkerem Stromdurchgang ein.

Von großer Bedeutung für die Wirkungsweise der Detektoren sind kleine Beimengungen, die dem Kristall bei der Erzeugung zugesetzt werden. Wir wollen diese Beimengungen kurz Katalysatoren nennen und ihre Wirkungsweise betrachten. Viele Kristalle werden durch die Beimengungen solcher Katalysatoren als Detektoren verbessert. Doch geschieht dies nur bis zu einer gewissen Grenze; wird diese überschritten, so kann der Detektor seine Fähigkeit gleichzurichten überhaupt verlieren. Die Erklärung dieser Erscheinung ist ähnlich wie die des verbessernden Einflusses der Erwärmung und der Vorspannung. Diese beigemengten kleinen Spuren einer anderen Metallverbindung kristallisieren selbst wieder aus und setzen sich, wenn sie annähernd das gleiche spezifische Gewicht haben wie die Hauptverbindung, zwischen den Kristallen lose an. Dadurch wird der Kontakt zwischen den Detektorkristallen fester und die Folge davon ist eine Verbesserung der Wirkung. Übersteigt die Größe dieser Katalysatorkristalle nun die Größe des Zwischenraumes zwischen den Mikrokristallen, so kann wieder der Fall eintreten, daß der Kontakt infolge des Druckes nicht genügend gelockert werden kann, um den Strom merklich zu schwächen. Auch kann der Fall eintreten, daß die als Katalysatoren

zugeführten Kristalle in ihren Striktionswirkungen gerade den anderen entgegenwirken, wodurch die Gleichrichterwirkung verschlechtert wird, wenn die Katalysatorkristalle in zu großer Anzahl vorhanden sind. Fügt man Bleiglanz Silbersulfid zu, so kann man seine Wirkung als Detektor wesentlich verbessern; wird aber das Gewicht des Silbersulfides gleich dem des Bleiglanzes, so verschwindet die unipolare Leitfähigkeit überhaupt. Doch kann der Zusatz eines Katalysators auch die Wirkung eines Detektors nachteilig beeinflussen, wenn seine Kristalle sich an die zur bestleitenden Achse senkrechten anlegen. Durch diese Zwischenlagerung können die Kristalle in der zur Stromlinie senkrechten einen so innigen Kontakt gerade im Unterbrechungsfall der Stromlinie bekommen, daß diese Richtung dem Stromdurchgang einen geringeren Widerstand entgegensetzt als die andere, die selbst bei Dehnung eventuell nur einen schwachen Kontakt gibt. So hat z. B. die Beimengung von Zinksulfid gerade die entgegengesetzte Polarisierung des Bleiglanzes zur Folge als die des Silbersulfides. Bemerkenswert ist noch die Tatsache, daß künstliche Kristalle für Detektorzwecke besser geeignet sind als natürliche. Als Erklärung dafür dürfte wohl gelten, daß die natürlichen Kristalle unreiner sind und die Zwischenschichten der Kristalle oft von nichtleitenden Substanzen erfüllt sind, die den Widerstand des Detektors wesentlich erhöhen.

Es möge auch nicht unerwähnt bleiben, daß unsere Theorie geeignet ist, Widersprüche, die sich aus der Arbeit von Reißaus und der von Schleede und Buggisch[1]) ergeben, aufzuklären. Nach der Arbeit von Reißaus ist nämlich die Polarität des vom Detektor gleichgerichteten Stromes abhängig von der Form des Kontaktes, und zwar dermaßen, daß die Elektronen immer von der Spitze zur Fläche fließen. Nach der Arbeit von Schleede und Buggisch hingegen ist die Polarität eines Detektors festgelegt durch die verwendeten Substanzen. Im Vorhergehenden haben wir aber gesehen, daß ein Kristall dann an verschiedenen Stellen verschiedene Polarität des gleichgerichteten Stromes aufweist, wenn bei Verwendung einer Richtung der durch die direkte Verbindungslinie fließende Strom am stärksten ist, bei Verwendung einer anderen Richtung aber der Widerstand in der Verbindungslinie der beiden Pole trotz der Dehnung der Kristalle größer ist als der in den senkrechten Richtungen bei Kompression der Kristalle in der Hauptrichtung, also Dehnung in ebendiesen senkrechten Richtungen. Hingegen kann bei Verwendung anderer Substanzen der Widerstand in der direkten Richtung bei Dehnung der Kristalle immer kleiner sein als der in den senkrechten Richtungen, in welchem Falle der Kristall an allen Punkten dieselbe Polarität beibehält, nur seinen Wirkungsgrad ändert. Wir sehen also, daß es bei der Bestimmung der Polarität eines Detektors nicht so sehr auf die Form der Kontaktstelle als auf seine Zusammensetzung ankommt. Insofern sind die Arbeiten beider Forscher als richtig zu bezeichnen, doch haben beide nur einen kleinen Teil des in Betracht kommenden Materials untersucht und sind mit der Extrapolation ihre Erkenntnisse auf nicht untersuchte Substanzen zu weit gegangen. Daß die Kristalle an Spitzen besser wirken als an Flächen, scheint aus zweierlei Gründen berechtigt. Erstens, weil die Lostrennungsarbeit der Elektronen bzw. ihre Dichte an den Spitzen kleiner bzw. größer sein dürfte, und zweitens, weil durch die Spitzen ausgezeichnete Achsen laufen, in denen die Widerstände am geringsten sind. Den besten Beweis für die Arbeiten von Schleede und Buggisch haben wir in den modernen Großflächengleichrichtern, die in der einen Richtung bis zu 14 Ampere, in der anderen bloß ein bis zwei M.-A. durchlassen.

Reißaus hat ferner gezeigt, daß bei der Messung der Widerstände eines Detektors in beiden Richtungen der Widerstand in der Richtung des höheren Widerstandes allmählich abnimmt und erst nach Ablauf mehrerer Sekunden, mitunter sogar Minuten, einen konstanten Wert annimmt, der dann allerdings viel niedriger ist als der bei Wechselstrom gemessene. In der Richtung des geringeren Widerstandes aber hat er sofort seinen richtigen Wert. Die Ursache dieser Erscheinung dürfte darin zu suchen sein, daß die Kristalle, die sich durch die angelegte Spannung komprimiert haben, durch die Erwärmung allmählich wieder dehnen, ebenso wie sich ihre durch die einseitige Kompression schon gedehnten Kristalle nach den anderen Richtungen noch mehr dehnen und dadurch eine bessere Leitfähigkeit herbeiführen. Für die Erwärmung gerade dieser senkrechten Richtungen fehlt bei Betrieb mit Wechselstrom die nötige Zeit. Die Ursache kann aber auch in einer langsam durch Stoßionisation sich erst bessernden Ionenleitung liegen.

Es bleibt uns noch die Erklärung des Schwingkristalles übrig. Sie folgt aus dem bisher Gesagten zwanglos, wenn man sich vergegenwärtigt, daß das Schwingen auf der Eigenschaft des negativen Widerstandes der Kristalle beruht. Es ist bekannt, daß nicht alle Kristalle als Schwingkristalle zu verwenden sind und unter ihnen wieder nur gewisse, ausgezeichnete Punkte. Andererseits wissen wir, daß Piezokristalle, wenn sie in Resonanz mit der angelegten Frequenz kom-

1) Schleede u. Buggisch, Physik. Zeitschr. **28**, 174, 1927.

men, ihre Leitfähigkeit sehr verschlechtern, da die an ihnen entstehende Sekundärspannung die Anregespannung bis auf einen kleinen Prozentsatz aufhebt. Es ist daher der Schwingkristall nichts anderes als ein Piezokristall. Um aber seine volle Dehnung bzw. Kompression zu erhalten, braucht er eine gewisse Anregespannung, unterhalb welcher er bloß als Leiter, allerdings mit immer schlechter werdendem Leitvermögen infolge der Sekundärspannung wirkt. Ist diese Anregespannung aber überschritten, so hat der Kristall einen negativen Widerstand. Ist er in Resonanz, so wird er als guter Schwingungserzeuger wirken. Aber auch wenn er nicht in Resonanz ist, kann die durch die oberhalb einer gewissen Anregespannung, die nötig ist, um den Kristall zwangsweise in Schwingung zu versetzen, erzeugte Sekundärspannung so groß werden, daß sie den durchgehenden Strom trotz der Spannungserhöhung schwächt und der Kristall als Kristodyn wirkt. Selbstverständlich kann man mittels eines Kristodyns auch Hörfrequenzen erzeugen, wie es ja Frau Dr. Seidl tatsächlich geglückt ist. Der Ansicht von Sixtus[1]), nach welcher der negative Widerstand durch den dem Hauptstrom entgegenfließenden Thermostrom entsteht, können wir uns infolge der Kleinheit dieses Stromes einerseits und der Trägheit der Wärmeabstrahlung andererseits nicht anschließen. Auch die Ansicht einiger Autoren, wonach das Schwingen seine Ursache in Mikroflammenbogen oder Funken zwischen den Kristallen hat, hält bei näherer Betrachtung nicht stand, da die Kristalle durch diese Flammenbogen sofort verschweißt oder wenigstens zerstört werden müßten. Es wurde z. B. im Jahre 1910 von Eccles Bleiglanz als Kristodyn verwendet, eine Substanz, die durch Funken und Flammenbogen bestimmt zerstört würde. Für die Schwingungserzeugung mittels Kristallen ist ferner bemerkenswert, daß eine Kapazität ohne Verwendung einer Selbstinduktion genügt, den Strom in Schwingungen zu versetzen. Abgesehen von der Selbstinduktion, die jedem Leiter innewohnt und die also in den verwendeten Drähten auftritt, wirkt eben der Kristall selbst als solche, da er durch seine Piezoeigenschaften Gegenspannungen erzeugt, die denen einer Induktion entsprechen und diese daher ersetzen. Diese Wirkung des Detektors als Selbstinduktion ist dem Radioamateur dadurch bekannt, daß er seinen Apparat je nach der verwendeten Detektorstellung bzw. Kombination neu abstimmen muß. Es ist dafür wohl einerseits der veränderte Ohmsche Widerstand, anderseits aber auch die Induktion maßgebend. Wir wollen nun nach der entwickelten Theorie die Kennlinie eines Detektors bestimmen (Fig. 2). Tragen wir als Abszisse die Spannungen und als Ordinate die Stromstärken auf, so bekommen wir nach der positiven Richtung eine Kurve, die ziemlich steil ansteigt. Gälte das Ohmsche Gesetz, so müßte die Kurve eine Gerade sein. Da aber noch die Kontaktverbesserung hinzukommt, wird die Kurve sehr steil verlaufen. Nähert sich die Spannung aber der im Vorhergehenden beschriebenen Anregungsspannung, dann wird die gegenelektromotorische Kraft, die unterhalb dieser relativ klein war, so groß werden, daß der Strom einen Sättigungswert erreicht,

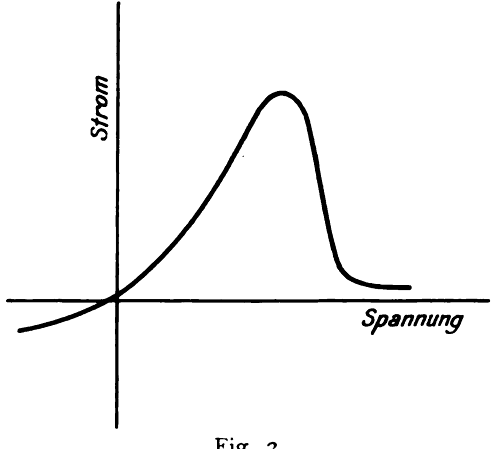


Fig. 2.
Kennlinie eines Detektors.

weil sich die Sekundär- und die Primärspannungen das Gleichgewicht halten. Wird auch dieser Punkt überschritten, so wird die Sekundärspannung so groß, daß ein Stromrückgang eintritt. In der negativen Richtung der Abszisse wird die Kurve nach Herstellung des Kontaktes in den senkrechten Kristallrichtungen längere Zeit dem Ohmschen Gesetz gehorchen, wegen des großen Widerstandes aber unter einem sehr geringen Neigungswinkel verlaufen. Tatsächlich stimmt diese Kennlinie mit den bekannten vollkommen überein.

Warum als Detektoren gerade Substanzen aus der vierten, sechsten und achten Gruppe der Elemente und ganz bestimmte Kristallformen in Frage kommen, soll Gegenstand einer späteren, über die gesamten Erscheinungen handelnden, ausführlichen Veröffentlichung werden, die sich der Verfasser für einen späteren Zeitpunkt vorbehält.

Erwähnt sei noch, daß es auch Detektoren gibt, deren gleichrichtende Wirkung auf mikroskopischer bzw. submikroskopischer Funkenbildung beruht. Diese Detektoren können aber nicht als reine Detektoren angesehen werden und fallen nicht in den Bereich unserer Betrachtungen. Für diese Detektoren spielt dann

1) Sixtus, Zeitschr. f. techn. Phys. 8, 70ff., 1928.

allerdings die Zwischenschicht eine wesentliche Rolle, die sich bei unseren Betrachtungen als unwesentlich erwies. Die Theorie der Gleichrichtung mittels Flammenbogen oder Funken in ihrer Abhängigkeit vom Material und der Form der Elektroden ist längst bekannt. Solche Detektoren können selbstverständlich auch als Schwingungserzeuger dienen. Es müssen dies aber Kristalle sein, die durch die Funkenbildung nicht zerstört oder verschweißt werden.

Die in Frage kommenden Arbeiten wurden am II. Physikalischen Institut der Universität Wien (Abt. Prof. Dr. E. Haschek) gemacht und bin ich dem Herrn Professor Haschek für seine ausgezeichneten Ratschläge aus dem reichen Schatz seiner Erfahrungen zu großem Danke verpflichtet. Ebenso danke ich Herrn Dr. Kühnert für seine eifrige Mithilfe bei der Ausführung der Versuche.

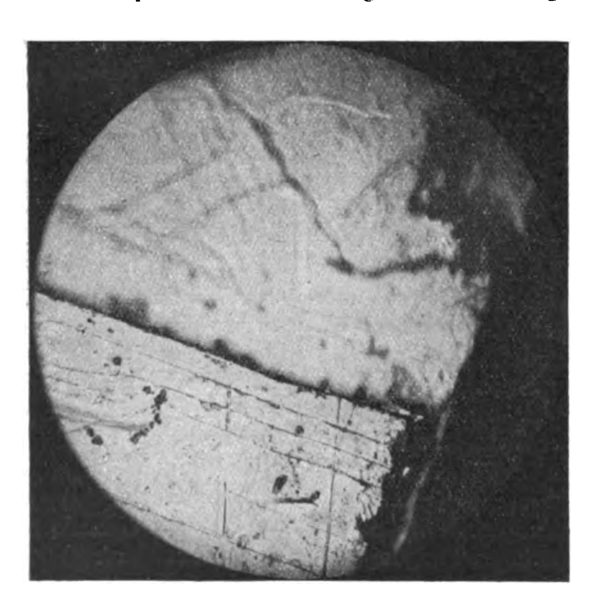
(Eingegangen 7. Mai 1928.)

Weitere Mitteilungen zum Kristalldetektorproblem[1]).

Von Paul Beck.

Um die Detektorwirkung der Kombinationen Galenit-Silber, Galenit-Kupfer und Galenit-Stahl zu untersuchen, habe ich eine Versuchsanordnung angewendet, bei welcher die gleichzeitige Durchführung der elektrischen Messungen und der mikroskopischen Beobachtung der Berührungsstelle möglich war. Das benutzte Mikroskop war ein mit Vertikalilluminator versehener, zu metallographischen Zwecken dienender Rejtö-Reichert-Apparat, mit etwa 150facher Vergrößerung. Zu den Messungen der Strom- und Klemmenspannung dienten entsprechende Weston-Instrumente.

Auf Grund meiner bisherigen Beobachtungen konnte ich folgende Gesetzmäßigkeiten feststellen:



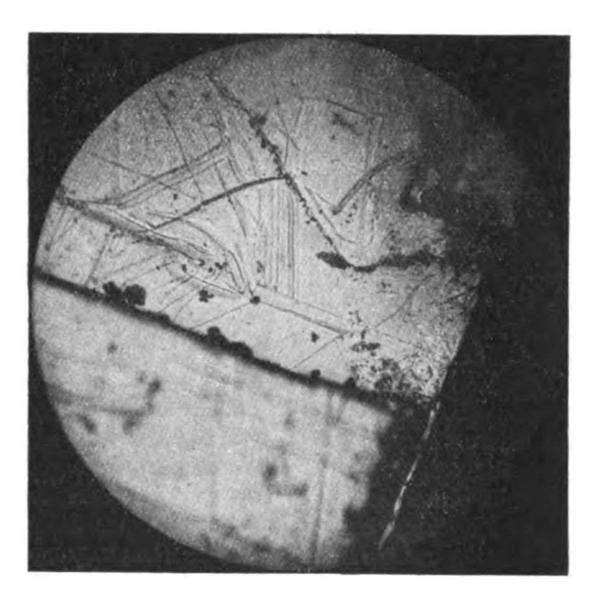


Fig. 1. Spaltfläche eines natürlichen Galenitkristalles.
a) Obere Schicht scharf eingestellt. b) Untere Schicht scharf eingestellt.
Eingeritzte Gruben und Ränder einzelner Schichten sichtbar.

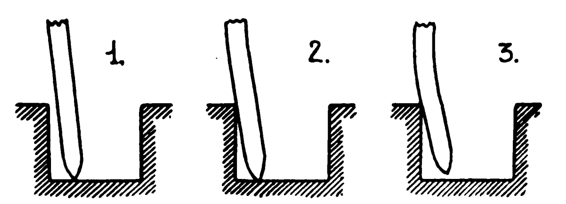


Fig. 2. Die Veränderung der Druckkraft verursacht Nadeldeformation und dadurch eine Verschiebung des Berührungsplatzes.

1) Im Anschluß an G. G. Reißaus' Mitteilung zum Kristalldetektorproblem, Physik. Zeitschr. **29**, 223, 1928

1. Die Unipolarität der auch mikroskopisch gleichmäßigen und glatten Teile der Galenit-Würfelfläche zeigt sich an allen Stellen qualitativ gleich und quantitativ nur wenig verschieden.

2. Alle Kanten, sowohl die, welche Flächen begrenzen, wie auch die Ränder kleiner Gruben und Risse, verhalten sich anders, als die Flächen. Und zwar in ca. 70 Proz. der untersuchten Fälle war die Richtung verkehrt, und die Stärke der Unipolarität in sämtlichen Fällen vermindert.

Die auf den Mikrophotographien gut sichtbaren, eingeritzten Gruben entstehen schon bei relativ geringen Druckkräften und verursachen makroskopisch unverständliche Veränderungen und Umkehrungen der Unipolarität bei der Verschiebung des Berührungsplatzes und bei der Nadeldeformation (Fig.).

3. Unter natürlichen Galeniten verschiedener Herkunft wurden zwei Typen gefunden, deren Flächen einander entgegengesetzt wirkende Unipolarität zeigen.

4. Bei beiden Typen wächst der aus dem Galenit nach der „Spitze" der Metallnadel fließende Elektronenstrom langsam und unregelmäßig[1]). Der entgegengesetzt gerichtete Strom bleibt konstant, oder nimmt langsam ab. Aus diesem Grunde muß bei dem einen die Gleichstrom-, bei dem anderen die Wechselstrom-Charakteristik aus dem Gesichtspunkte der Gleichrichterwirkung günstiger ausfallen.

Meine Experimente habe ich im September 1927 auf dem Polytechnikum zu Budapest in Prof. Misángyis Laboratorium durchgeführt. Die in den Punkten 1 und 2 enthaltenen Versuchsergebnisse sind mit denen von Herrn G. G. Reißaus in bemerkenswertem Einklang, andere aber stehen im Widerspruch zu bisher publizierten Ansichten, so daß sie bei einem Erklärungsversuche vielleicht berücksichtigt werden sollten. Derzeit beschränke ich mich auf diesen Hinweis; die Veröffentlichung einer ausführlicheren Mitteilung über diese Fragen behalte ich mir nach Vollendung weiterer Experimente vor.

Im April 1928.

1) Es war kein „Endwert" zu beobachten.

(Eingegangen 8. Mai 1928.)

Der Geschoßwiderstand.

Von H. Lorenz.

In einer früheren Arbeit „Die Abhängigkeit des Luft- und Wasserwiderstandes von der Geschwindigkeit" (Physik. Zeitschr. **18**, 209, 1917) habe ich aus dem Bewegungszustande in der Umgebung eines festen, achsensymmetrischen Körpers mit dem größten Querschnitt F, der in der Achsenrichtung die Geschwindigkeit v m/sec besitzt, die Widerstandsformel (11b)

$$\frac{W}{F \cdot v^2 \cdot \varkappa} = 1 + \frac{A v^4}{(v^2 - a^2)^2 + c^2 v^2} \tag{1}$$

abgeleitet[1]), welche ersichtlich die Beiwerte $\varkappa$, A, a und c enthält. Von diesen ist nach der Herleitung für Geschosse a die Schallgeschwindigkeit und c^2 ein Dämpfungsfaktor, während wegen

$$\left(\frac{W}{F \cdot v^2}\right)_{v=0} = \varkappa; \quad \left(\frac{W}{F \cdot v^2}\right)_{v=\infty} = \varkappa(1 + A) \tag{1a}$$

$\varkappa$ den sog. Formwiderstandsbeiwert bedeutet, der für kleine Werte von v aus Versuchen im Windkanal zu ermitteln ist, während der Zahlenwert A die Lage der oberen Asymptote und mit ihr den oberen Grenzwert des Widerstandes bestimmt. Aus der Herleitung der Formel (1) erhellt ferner, daß sie sich nur auf den sog. Verdrängungswiderstand beschränkt, der etwa dem Rücktrieb der Tragfläche entspricht, nicht aber die Oberflächenreibung

$$W_1 = \varkappa_1 \cdot F_1 \cdot v^2 \tag{2}$$

umfaßt, die mit einem anderen Beiwert $\varkappa_1$ die Körperoberfläche F_1 enthält. Diese ist beim Vergleich der Formel (1) mit Versuchsergebnissen zu beachten.

Da die Beiwerte $\varkappa$ und $\varkappa_1$ hinreichend bekannt sind, so bleiben nur noch diejenigen A und c^2 zu ermitteln, wobei wir zunächst vorn stumpfe, d. h. mehr oder weniger genau vorn kugelförmig abgerundete Körper voraussetzen wollen. Solche werden bei sehr großen Geschwindigkeiten das umgebende Medium nach allen Richtungen gleichmäßig wegschleudern, so daß in diesem Bewegungszustande keine Richtung mehr bevorzugt ist. Da nun das erste Glied 1 auf der rechten Seite der Formel (1) der Wucht der fortschreitenden Bewegung entspricht, das zweite Glied aber auf Grund der Herleitung der Seitenbewegung, so muß das Ganze im Grenzfalle den Wert 3, das letzte Glied also den Wert

$$A = 2 \tag{3}$$

annehmen, womit dieser Beiwert für kugelförmige Abrundung bestimmt ist. Andererseits besteht für den ausgezeichneten Wert der Widerstandskurve die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dv}\left(\frac{W}{F \cdot v^2}\right) = 0 \\ \text{oder} \quad &\left[c^2 - 2a^2\left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right)\right]\frac{2}{v^3} = 0 \end{aligned}\right| \tag{4}$$

1) Vgl. auch Lorenz, Ballistik. 2. Aufl. 1917, S. 92 ff.

oder für den Höchstwert mit $v = v_0$

$$c^2 = 2a^2\left(1 - \frac{a^2}{v_0^2}\right), \tag{4a}$$

womit Gleichung (1) unter Beachtung von (3) übergeht in

$$\frac{W}{F \cdot v^2 \cdot \varkappa} = 1 + \frac{2 \cdot v^4}{(v^2 - a^2)^2 + 2a^2 v^2\left(1 - \frac{a^2}{v_0^2}\right)}. \tag{1b}$$

Da in diesem Falle für v_0 hinter dem Geschosse offenbar eine Luftleere (Kavitation) eintritt, so ist v_0 nichts anderes als die mit der Molekulargeschwindigkeit sehr nahe übereinstimmende Einströmgeschwindigkeit der atmosphärischen Luft in das Vakuum, die fast genau der Formel

$$v_0^2 = 2a^2; \; c^2 = a^2 \tag{5}$$

entspricht und in Gl. (1) eingesetzt

$$\frac{W}{F \cdot v^2 \cdot \varkappa} = 1 + \frac{2}{1 - \frac{a^2}{v^2} + \frac{a^4}{v^4}} \tag{6}$$

ergibt. Außerdem aber schneidet die in der Fig. 1 mit I bezeichnete Kurve die obere Asymptote beim Aufsteigen im Punkte

$$v_1^2 = \frac{v_0^2}{2} = a^2, \tag{7}$$

d. h. beim Überschreiten der Schallgeschwindigkeit.

Aus Gl. (1) erkennt man weiter, daß für den Sonderfall

$$c^2 = 2a^2 \tag{8}$$

der Höchstwert von (1) nur für $v = \infty$, d. h. asymptotisch erreicht wird, ohne daß die Kurve II, deren Gleichung mit (3) die Form

$$\frac{W}{F \cdot v^2 \cdot \varkappa} = 1 + \frac{2v^4}{v^4 + a^4} \tag{9}$$

annimmt, die Asymptote schneidet oder einen Scheitelwert besitzt. Dieser Fall tritt nach Versuchen von Cranz bei zylindrischen Geschossen mit ebenen Stirnflächen ein.

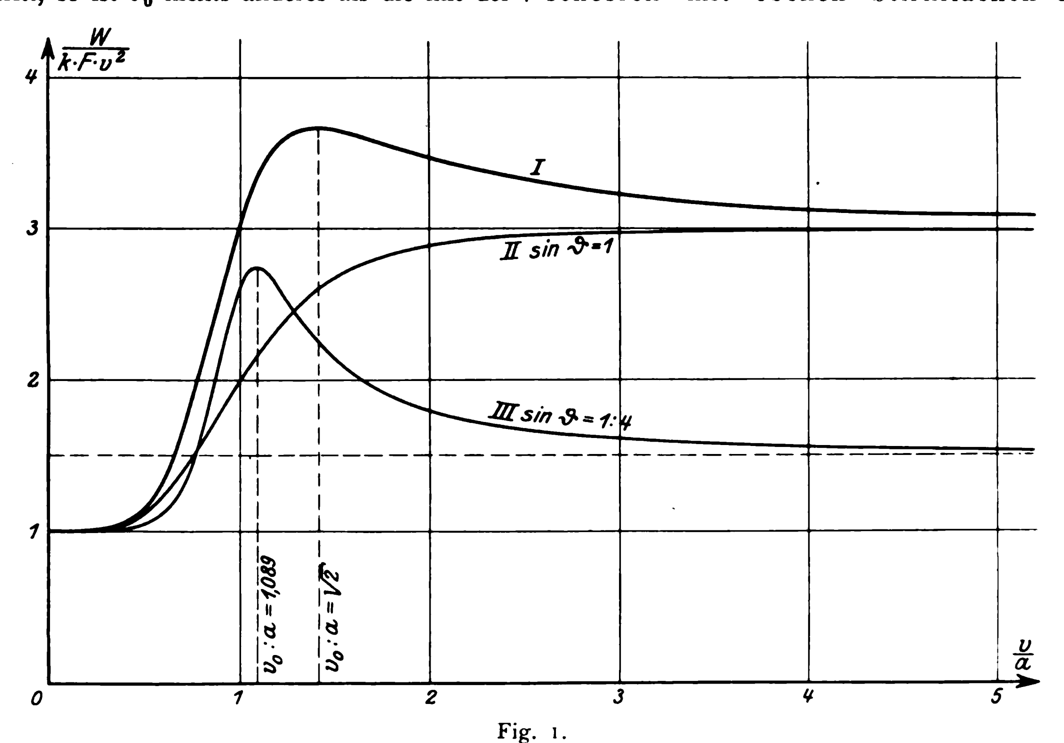


Fig. 1.

Haben wir es schließlich mit einem Spitzgeschoß mit dem halben Öffnungswinkel ϑ der Kegelspitze zu tun, so wird nur ein der Projektion entsprechender Teil der umgebenden Luft zur Seite geschleudert, wodurch sich der Beiwert A Gl. (3) im Verhältnis $\sin\vartheta : 1$ verändert. In derselben Weise muß sich auch der Dämpfungsfaktor vermindern, der andererseits für $\vartheta = 90^0$, d. h. für die ebene Stirnfläche, den Wert (8) annehmen muß. Diesen Bedingungen genügen die Ansätze

$$A = 2 \cdot \sin\vartheta; \; c^2 = a^2(\sin\vartheta + \sin^2\vartheta); \tag{10}$$

mit denen (1) übergeht in die Gleichung

$$\frac{W}{F \cdot v^2 \cdot \varkappa} = 1 + \frac{2 \cdot v^4 \cdot \sin\vartheta}{(v^2 - a^2)^2 + a^2 \cdot v^2(\sin\vartheta + \sin^2\vartheta)}, \tag{11}$$

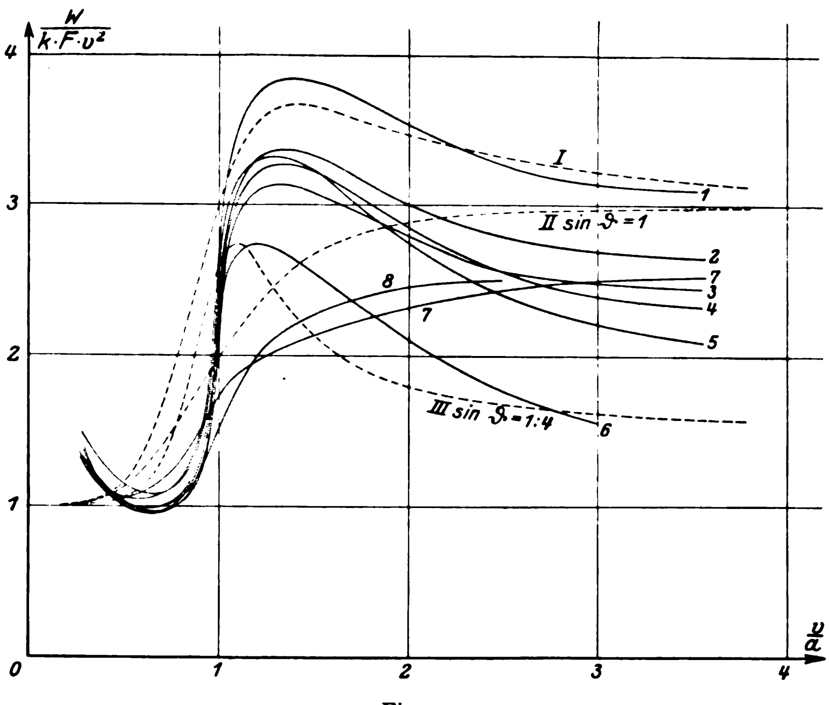


Fig. 2.

die mit $\vartheta = 90^0$ wieder (9) ergibt und für $\vartheta = 0$ mit $F = 0$ auf den selbstverständlichen Grenzfall $W = 0$ führt. Die entsprechende Kurve III hat eine obere Asymptote $1 + 2 \sin \vartheta$, die mit v_1 geschnitten wird, während dem Scheitel die Geschwindigkeit v_0 zugehört, entsprechend den Formeln (2, 6) und (10), also

$$\frac{v_0^2}{a^2} = \frac{2}{2 - \sin \vartheta - \sin^2 \vartheta} = \frac{2 v_1^2}{a^2}. \qquad (12)$$

Die durch die vorstehenden Gleichungen (6), (9) und (11) dargestellten Kurven I, II und III, letztere mit $\sin \vartheta = {}^1/_4$ entsprechend dem deutschen S-Geschoß, beziehen sich sämtlich auf die Abhängigkeit des Quotienten $W/\varkappa \cdot F \cdot v^2$ von dem Verhältnis $v : a$ nach der Zahlentafel I.

Beim Vergleich mit der Erfahrung ist die Oberflächenreibung zu beachten, welche nach Gl. (2) nur mit dem Geschwindigkeitsquadrat wächst und daher als ein konstanter Zusatz y zu den Werten $W : \varkappa \cdot F \cdot v^2 = x$ unserer Formeln auftritt. Kennt man die Lage der unteren Tangente und der oberen Asymptote, nämlich a und b, so gilt für vorn abgerundete bzw. flache Geschosse mit $A = 2$, entsprechend

Zahlentafel I.

$v : a$	I	II	III
0	1	1	1
1/3	1,027	1,024	1,0075
1/2	1,154	1,112	1,047
2/3	1,525	1,330	1,221
1	3,000	2,000	2,598
1,089			2,737
$\sqrt{2}$	3,670	2,600	2,233
2	3,460	2,885	1,780
3	3,220	2,975	1,606
4	3,125	2,993	1,557
5	3,080	2,997	1,535
∞	3,000	3,000	1,500

Kurve I und II

$$x + y = a; \qquad 3x + y = b$$

und für das Spitzgeschoß mit $A = 2 \sin \vartheta = 0{,}5$, Kurve III,

$$x + y = a; \quad 1{,}5\,x + y = b$$

Nach den Kurven von O. v. Eberhard, sowie von Becker und Cranz[1]) haben wir in willkürlichen Maßstäben

für Kurve I	$a = 1{,}15$	$b = 3{,}25$,	also	$x = 1{,}05$	$y = 0{,}10$
„ „ IIa	4,00	11,00	„	3,50	0,50
„ „ IIb	3,40	8,00	„	2,30	1,10
„ „ III	1,15	1,65	„	1,00	0,15

1) Artilleristische Monatshefte. 1912. September- und Novemberheft.

Hiernach hätten wir in den Fällen I und III nur die Beträge $y:x$ gleich 0,1 bzw. 0,15 von den Versuchsordinaten abzuziehen, um die Vergleichskurve zu finden, während im Falle IIa der Abzug in guter Übereinstimmung mit den Werten für I und III $y:x = 0{,}5:3{,}5 = 0{,}143$ beträgt. Der Fall IIb eines kurzen Zylinders von 8 mm Kaliber und 23,5 mm Länge fällt dagegen mit dem Verhältnis $y:x = 1{,}1:2{,}3 = 0{,}48$ aus dem Rahmen heraus, vermutlich infolge merkbarer Neigung der Geschoßachse gegen die Flugbahntangente.

Obwohl die Oberflächenreibung ersichtlich nur einen kleinen Bruchteil des Gesamtwiderstandes ausmacht, so wollen wir diese doch noch mit Hilfe der anderweitig bekannten Widerstandsziffer[1]) $\zeta = 0{,}00225$ berechnen, die mit dem Beiwerte $\varkappa_1$ in Gl. (2) durch die Beziehung

$$\varkappa_1 = \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g} = 0{,}000113 \cdot \gamma \quad [\varkappa g \cdot \sec^2/m^4]$$

zusammenhängt. Andererseits ist nach den Versuchen von Eberhard

$$\varkappa = 0{,}0115 \cdot \gamma \ [\mathrm{kg} \cdot \sec^2/m^4],$$

und daher erhalten wir mit Rücksicht auf das Verhältnis der Mantelfläche F_1 zum Geschoßquerschnitt F

$$\frac{y}{x} = \frac{\varkappa_1 \cdot F_1}{\varkappa \cdot F} = 0{,}01 \cdot \frac{F_1}{F}.$$

Für $F_1 : F = 10$ bis 15 ergeben sich daraus nahezu die oben ermittelten Werte. Angesichts der unvermeidlichen Streuung der ballistischen Versuchsergebnisse ist diese Kontrolle jedenfalls recht befriedigend.

Die unter Berücksichtigung der Oberflächenreibung auf die Höhe der unteren Tangente für $v = 0$ reduzierten Versuchskurven von Eberhard sowie von Cranz und Becker sind in Fig. 2 ausgezogen und die von mir ermittelten theoretischen Kurven nach den Gl. (6), (9) und (11) punktiert dargestellt. Die Versuchskurven sind mit den Geschoßformen Fig. 3 ermittelt, deren Abmessungen in Zentimeter die folgende Zahlentafel II mit derselben Bezifferung wie in Fig. 2 enthält.

Zahlentafel II.

Nr.	$2r_1$	r_2	$2r_3$	l_1	l_2
1	10	20	3,6	14,20	7,35
2	10	30	3,6	13,45	9,15
3	10	55	3,6	13,90	12,87
4	10	30	2,5	13,70	9,97
5	10	30	0	13,44	12,25
6	0,8	∞	0,1	1,80	1,40
7	10	—	10	?	0
8	0,8	—	0,8	2,35	0

1) Physik. Zeitschr. **29**, 301. 1928.

Aus der Kurvenzusammenstellung Fig. 2 geht zunächst hervor, daß die beiden Linien 7 und 8 für zylindrische Geschosse nach Ausschaltung der sehr verschiedenen Reibungswerte sehr nahe denselben Verlauf zeigen, daß sie aber ziemlich weit unterhalb der Asymptote der zugehörigen theoretischen Kurve II bleiben. Recht befriedigend ist der Anschluß der Kurve I an die Versuchskurve 1 der vorn abgeflachten Granate, nicht ganz so gut der von III an die Kurve 6 des sog. S-Geschosses, vermutlich wegen des Einflusses

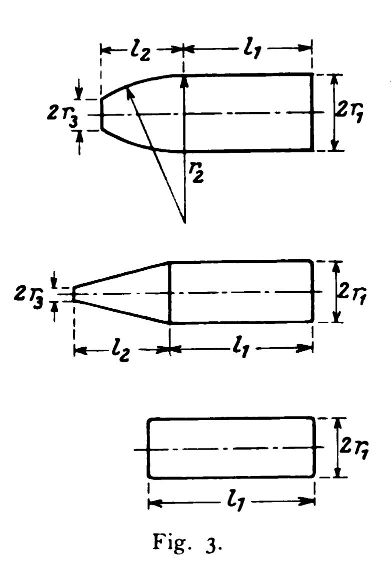


Fig. 3.

der, wenn auch geringen, Abflachung der Geschoßspitze. Die übrigen Versuchskurven liegen recht gut in dem Raum zwischen diesen Grenzfällen und lassen insbesondere die aus Gl. (11) folgende Senkung der oberen Asymptote mit der Zuspitzung des Geschoßkopfes erkennen. Da mit Ausnahme der zylindrischen Geschosse keine Versuchskurve den theoretischen Voraussetzungen genau entspricht, so ist natürlich auch keine volle Übereinstimmung zu erwarten. Man wird aber dem wirklichen Verlauf der Widerstandskurve annähernd gerecht durch Verbindung der oben entwickelten Formeln etwa im Verhältnis der Querschnittsanteile für die Abflachung und die Zuschärfung.

Die anfängliche Krümmung der Eberhardschen Versuchskurven vor ihrem Anstieg deutet auf einen mit der Geschwindigkeit v linear wachsenden, zusätzlichen Reibungswiderstand, der indessen in den Kurven von Cranz nicht zutage tritt und in unseren Formeln wegen des verschwindenden Einflusses für höhere Werte von v nicht berücksichtigt wurde.

Mit den vorstehenden Entwicklungen erledigt sich auch die Berechnung der Beiwerte A und c der Grundformel (1) aus Versuchsreihen, wie sie von H. Falkenhagen[1]) durchgeführt wurden, da die so gewonnenen Kurven sich der Versuchskurve weniger gut anschließen als die theoretische Kurve I. Dasselbe Verfahren hatte schon Sängewald[2]) auf eine frühere von mir aufgestellte, inzwischen aber durch Gl. (1) ersetzte Formel angewendet und begreiflicherweise eine wenig befriedigende Übereinstimmung gefunden.

1) Artilleristische Monatshefte 1924, S. 19.

2) Berichte der Mathematisch-Physikal. Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig LXXIII, 1921, S. 134.

(Eingegangen am 10. Mai 1928.)

Ein Ventil für Arbeiten in strömenden Gasen.

Von E. Blechschmidt.

Bei Arbeiten mit strömenden Gasen verwendete man bisher zur Druckreduktion zumeist Kapillaren, die vor die Versuchsanordnung geschaltet wurden. Zur Erzielung von Druckänderungen in der Apparatur wurde der Druck in einem vor der Kapillare befindlichen Vorratsgefäß variiert. Diese Methode führt zu Schwierigkeiten, wenn nur sehr geringe Gasmengen zur Verfügung stehen, insbesondere auch dann, wenn eine Veränderung der Gasmenge im Vorratsgefäß nicht möglich ist, wie das bei Arbeiten mit den seltneren Edelgasen häufig vorkommt, wo man aus Sparsamkeitsgründen kein Gas verlieren darf. In solchen Fällen benutzt man oft ein Ventil, das die aus dem Vorratsgefäß in die Versuchsanordnung einströmende Gasmenge beliebig zu regulieren gestattet. Die Ventile aus Metall haben gewisse Nachteile, die einmal in Dichtungsschwierigkeiten liegen, bisweilen ist auch die Lebensdauer infolge der meist verwendeten Membranen begrenzt. Es wurde hier darum für einen Spezialzweck ein Ventil konstruiert, das vollständig aus Glas besteht, somit noch den weiteren Vorteil besitzt, daß es sich mit der Versuchsanordnung verblasen läßt (vgl. Fig. 2). Es hat die Form der Pumpenhähne. Das Küken erhielt keine Bohrung, sondern wurde in der Weise geschliffen, daß der obere Teil gegen die Atmosphäre abdichtet, während im unteren Teil die zu verbindenden Apparate nur an einer Stelle vollständig gegeneinander abgeschlossen werden. Dreht man den Hahn aus dieser Ausgangsstellung heraus, so wird ein allmählich sich erweiternder Spalt freigegeben, durch den das Gas in die Versuchsanordnung einströmen kann, bis nach einer Umdrehung von ca. 270^0 der Hahn vollständig geöffnet ist, so daß sich also auch der Apparaturteil evakuieren läßt, der hinter dem Ventil liegt. Die Ablesung der Einstellung erfolgte an einer Skala, die am Hahn befestigt ist. Für ein und dasselbe Ventil können außerdem für verschiedene Zwecke auswechselbare Küken mit anderer Spaltweite hergestellt werden. Die Regulierfähigkeit durch das Ventil ist nach höheren Drucken zu lediglich durch die Gasmenge im Vorratsgefäß begrenzt, abgesehen von den durch die Versuchsanordnung bestimmten Konstanten, also Rohrweite und Pumpgeschwindigkeit. Das beschriebene Ventil

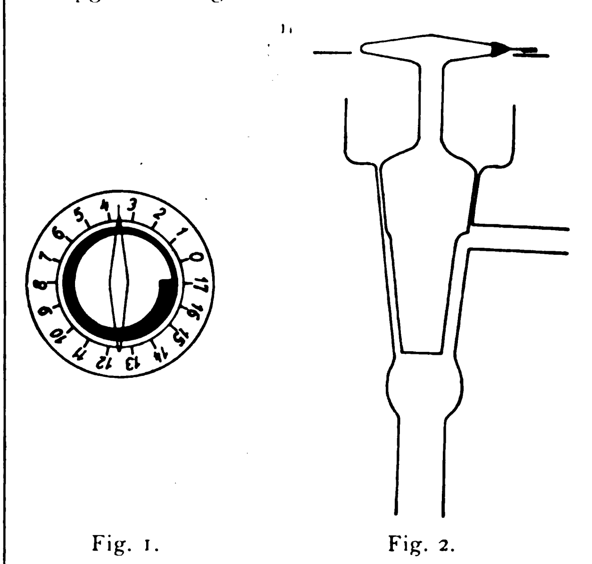


Fig. 1. Fig. 2.

ist bisher in einer Arbeit über Kathodenzerstäubungsprobleme[1]) verwendet worden und hat sich dort gut bewährt, aber auch bei anderen Versuchen mit strömenden Gasen hat es sich an Stelle von Kapillaren als brauchbar erwiesen.

Die Herstellung des Ventils, insbesondere das Einschleifen, verursacht keineswegs erhebliche Schwierigkeiten. Bei Anwendung eines einfachen Schleifverfahrens, das für diesen Zweck ausprobiert wurde, erfordert das Ventil nur wenig mehr Arbeit als ein gewöhnlicher Pumpenhahn[2]).

1) E. Blechschmidt und A. v. Hippel, Ann. d. Physik 1928 (im Druck).

2) Das Ventil ist durch die glastechnische Werkstätte von Friedrich Weiß in Leipzig, Liebigstr. 11 zum Preise von 6.— RM zu beziehen.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, im April 1928.

(Eingegangen 9. Mai 1928.)

Über die Ursachen, welche die Lichtempfindlichkeit des Auges als Funktion der Wellenlänge des Lichtes bestimmen.

Von F. Hauser.

In dem interessanten Aufsatz von G. I. Pokrowski[1]) ist zur Erklärung der Lage der Empfindlichkeitskurve des Auges die Hypothese aufgestellt, daß das Auge der Menschen und Tiere in erster Linie nicht mit dem direkten Sonnenlicht zu tun habe, sondern mit demjenigen, welches durch die Gegenstände reflektiert wird. Es könne angenommen werden, daß die öfters durch das Auge wahrgenommene Farbe die der Blätter und des Grases ist.

Hierzu gestatte ich mir zu bemerken, daß ich diese Hypothese bereits in den Naturwissenschaften[2]) ausgesprochen habe. Dort schrieb ich im fünften Absatz von oben:

„Bei der Frage nach der Notwendigkeit der Erhaltung eines vorwiegend blaugrün empfindlichen Dämmerungsapparates dürfte es wohl auch eine Rolle spielen, daß gerade in den Sommermonaten mit ihrer vielfach sehr langdauernden Dämmerung die Erde ein grünes Kleid trägt, so daß sowohl in dem von Wiesen und Feldern reflektierten als auch in dem das Laubdach des Waldes durchdringenden Dämmerungslicht das Blaugrün vorherrscht. Da sich die Entwicklung der Landwirbeltiere vorwiegend in vegetationsreichen Gebieten abspielte, erhebt sich übrigens allgemein, auch für den Tagesapparat, die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Lage des Empfindlichkeitsmaximums und der Beeinflussung der spektralen Intensitätsverteilung des Lichtes durch die Vegetation."

1) Physik. Zeitschr. **29**, 269, 1928.
2) Naturwiss. **13**, 197, 1925.

Über die Ursachen, welche die Lichtempfindlichkeit des Auges als Funktion der Wellenlänge des Lichtes bestimmen[1]).

Von G. I. Pokrowski.

Zu der obenstehenden Bemerkung von Herrn Hauser zu meiner Mitteilung über die Lichtempfindlichkeit des Auges, muß ich folgendes zufügen. Die Arbeit, in der Herr Hauser seine Vermutung ausgesprochen hat, ist mir leider entgangen. Ich muß jedenfalls zustimmen, daß die Priorität in dieser Frage Herrn Hauser gehört. Andererseits freut es mich sehr, daß die Tatsache, zu welcher ich durch das Studium der Lichtreflexion an Blättern gekommen bin und welche ich quantitativ bewiesen habe, schon früher vermutet wurde, denn das deutet auf die Richtigkeit dieser Tatsache.

1) Physik. Zeitschr. **29**, 269, 1928.

Zur Theorie der Lichtzerstreuung in der Erdatmosphäre.

Von J. J. Tichanowsky.

§ 1. Einleitung. In meinem Artikel „Theorie der Lichtzerstreuung in der Erdatmosphäre"[1]) waren in allgemeinen Zügen die Grundlagen der Theorie der Lichtzerstreuung für die absolut reine Atmosphäre behandelt. Diese Theorie läßt die Intensitäten jeder von den Komponenten des polarisierten Himmelslichtes für verschiedene Punkte der Sonnenvertikale, bei verschiedenen Wellenlängen, bei verschiedener Albedo der Erdoberfläche und verschiedener Lage des Beobachtungsortes ausrechnen. Diese Theorie berücksichtigt nur eine primäre und eine sekundäre Lichtdiffusion durch anisotrope Moleküle der Erdatmosphäre und die Diffusion des direkt von der Sonne auf die Erdoberfläche einfallenden Lichtes durch diese. Deshalb kann sie nur, als die zweite (vergleichsweise mit Berücksichtigung nur einmaliger Lichtdiffusion) Annäherung einer genaueren Theorie der Lichtzerstreuung der Atmosphäre betrachtet werden. Die wichtigsten Annahmen bei dem Aufbau dieser Theorie sind folgende:

1. Nichtbeachtung der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre,
2. Nichtbeachtung der Lichtzerstreuung der tertiären und nachfolgenden Ordnungen,
3. Vernachlässigung der Zerstreuung des vom Himmelsgewölbe auf die Erdoberfläche fallenden Lichtes durch diese,
4. Annahme der Isothermität der Erdatmosphäre ($t = 0^0$),
5. Zulassung der Gleichheit der Anisotropie der Luftmoleküle auf allen Höhen,
6. Auffassung der Erdoberfläche als genau horizontale, völlig diffus zerstreuende Ebene,
7. Zulassung dessen, daß die Dimension der Atmosphäre in der vertikalen Richtung bedeutend geringer ist, als die Dimensionen in der horizontalen Richtung,
8. Zulassung dessen, daß für alle Punkte des Himmels, die das primär oder sekundär zerstreute Licht auf den Beobachtungsort schicken, die Höhe der Sonne als ein und dieselbe gerechnet werden kann, wobei es zulässig ist, die Krümmung der Erdoberfläche nicht zu beachten.

Die Einführung der meisten der soeben angeführten Zulassungen wird gefordert, um die Komplizierung der Theorie zu vermeiden, da eine komplizierte Theorie ein geringeres praktisches Interesse hat, weil gewisse Schwierigkeiten bei ihrer Anwendung vorhanden sind.

1) Tichanowsky, Physik. Zeitschr. **28**, 680, 1927.



Vorliegender Artikel enthält etliche, der Meinung des Autors nach, notwendige Vervollkommnungen der von ihm gegebenen Theorie und einige Resultate beim Vergleich der Folgerungen der Theorie und der Beobachtungen.

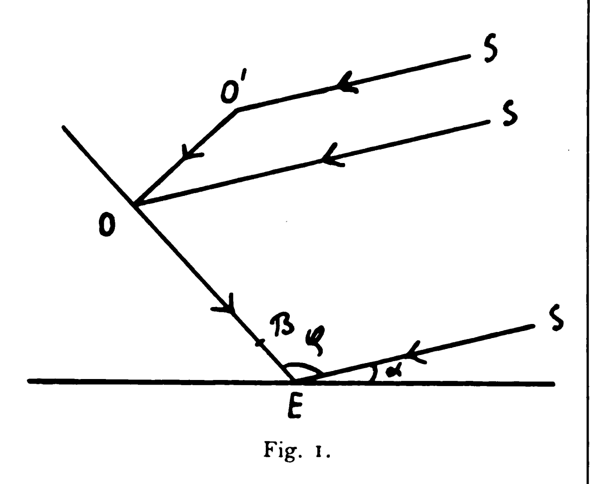


Fig. 1.

§ 2. Berücksichtigung der Einwirkung der Extinktion auf die primäre Zerstreuung. In Fig. 1 ist die Richtung BO eine in der Sonnenvertikale visierte Richtung, die mit den einfallenden Strahlen der Sonne den Winkel φ bildet. E ist der Punkt der Erdoberfläche, B der Beobachtungsort; O und O' sind einige Punkte der Atmosphäre, in welchen sich die Volumenelemente dv und dv' entsprechend befinden. Die Linie SOB ist der Weg des Strahles, der sich in dem Punkte O der primären Zerstreuung unterwirft; $SO'OB$ ist der Weg des sekundär-diffundierten Strahles. Den Luftdruck in den Punkten O', O, B und E werden wir durch H', H_z, H_b, H_e entsprechend bezeichnen. Den normalen Druck wollen wir durch H_0 bezeichnen. Ferner wollen wir die Intensität des nach OB gehenden Strahles durch dJ' bezeichnen, wobei derselbe nur durch eine primäre, vom Elemente dv entstehende Zerstreuung bedingt wird. Wir werden ihn als zwei Komponenten darstellen, dJ'_y, welche in der Ebene des Sonnenvertikals polarisiert ist, und dJ'_n, welche in der Ebene der Sonnenvertikale die elektrischen Schwingungen hat. Dann werden wir für diese Komponenten statt der Formel (3) und (4) meiner oben erwähnten Arbeit, die Extinktion beachtend, haben:

$$dJ'_y = J_0 R_z e^{-k_0(m_s - m_v) h \frac{H_z}{H_0}} e^{-k_0 m_v h \frac{H_e}{H_0}} dv \tag{1}$$

$$dJ'_r = J_0 R_z e^{-k_0(m_s - m_v) h \frac{H_z}{H_0}} e^{-k_0(m_s - m_v) h \frac{H_b}{H_0}} (a \sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, dv \tag{2}$$

In diesen Formeln ist J_0 die Intensität des einfallenden Lichtes, R_z die Zerstreuungsfunktion, welche

$$\frac{3\pi^2 (n^2 - 1)^2}{r^2 \lambda^4 L (6 - 7a)}$$

gleich ist, k_0 — Extinktionskoeffizient des Lichtes in der Luft bei normaler Luftdichte für die gegebene Länge der Welle; m_v und m_s — die „Masse" der Atmosphäre bzw. in der visierten Richtung (EO) und in der Richtung auf die Sonne (ES), für den Fall, daß in dem Punkte E normale Bedingungen des atmosphärischen Druckes (H_0) und der Temperatur (0°) bestehen; h die Höhe der homogenen Atmosphäre; a optischer Anisotropiekoeffizient der Luftmoleküle. Da

$$k = \frac{8\pi^3 (n^2 - 1)^2 (2 + a)}{\lambda^4 L (6 - 7a)}$$

so

$$R = Q \frac{k}{r^2},$$

wo

$$Q = \frac{3}{8\pi (2 + a)}$$

ist. Bemerken wir weiter, daß

$$k = k_0 \frac{H_z}{H_0} \quad \text{und} \quad H_z = H_0 e^{-\frac{z}{h}}.$$

Dann, $dv = \omega r^2 dr = \omega r^2 m_v dz$ einführend, wo z die vertikale Richtung ist, haben wir

$$dJ'_y = J_0 Q \omega k_0 m_v \frac{H_b}{H_0} e^{-\frac{z}{h}} e^{-k_0 h \left| m_v \frac{H_b}{H_0} + (m_s - m_v) \frac{H_z}{H_0} \right|} dz$$

und eine analoge Formel für dJ'_n, woraus wir, die Integration ausführend, folgende definitive Formeln für die Intensitäten eines primär zerstreuten Lichtes haben:

$$J'_y = J_0 Q \omega \frac{m_v}{m_s - m_v} q_{v,b} (1 - q_{s-v,b}), \tag{3}$$

$$J'_n = J_0 Q \omega \frac{m_v}{m_s - m_v} q_{v,b} (1 - q_{s-v,b}) (a \sin^2\varphi + \cos^2\varphi). \tag{4}$$

Hier ist

$$q_{v,b} = e^{-k_0 h m_v \frac{H_b}{H_0}},$$

$$q_{s-v,b} = e^{-k_0 h (m_s - m_v) \frac{H_b}{H_0}}.$$

§ 3. Berücksichtigung der Einwirkung der Extinktion auf die sekundäre Zerstreuung. Die Extinktion berücksichtigend, werden wir für die Intensität, z. B. J''_y des sekundär zerstreuten Lichtes, statt der Formel (9) meiner oben erwähnten Arbeit,

$$J''_y = J_0 \pi \omega Q^2 \iiint k_z k' \Phi_y e^{-k_0 h \left[m_s \frac{H'}{H_0} + m_\zeta \frac{H_z - H'}{H_0} + m_v \frac{H_b - H_z}{H_0}\right]} dr\, dr'\, d\zeta$$

haben, wo k' sich auf den Punkt O' (Fig. 1) bezieht, Φ_y ist ein Ausdruck, der in der Formel (9) in Klammer $\{\}$ steht, r ist der Abstand $O'O$, ζ ist die Zenitdistanz des Punktes O' vom Punkte O. Hier muß man m_ζ mit dem Zeichen $+$ für $\zeta < 90^0$ und mit dem Zeichen $-$ für $\zeta > 90^0$ gebrauchen. Ferner führen wir die oben gezeigten Ausdrücke für k_z und H_z und analoge Formeln

$$k' = k_0 \frac{H'}{H_0} \quad \text{und} \quad H' = H_z e^{-\frac{z'}{h}},$$

ferner auch

$$dr' = m_\zeta\, dz'$$

ein. Sodann, die Integration nach z und z' ausführend, haben wir

$$J''_y = J_0 \pi \omega Q^2 q_{v,b} \frac{m_v}{m_s - m_v} \int_0^\pi \Phi_y \frac{m_\zeta}{m_s - m_\zeta} \left[u \frac{m_s - m_v}{m_\zeta - m_v} (1 - q_{\zeta - v,b}) - (1 - q_{s-v,b})\right] d\zeta,$$

wobei

$$u = 1 \quad \text{für} \quad \zeta < \frac{\pi}{2}, \qquad u = q_{s-\zeta,e} \quad \text{für} \quad \zeta > \frac{\pi}{2}, \qquad \left(q_{s-\zeta,e} = e^{-k_0 h (m_s - m_\zeta) \frac{H_e}{H_0}}\right).$$

Schließlich aber haben wir

$$J''_y = J_0 \pi \omega Q^2 q_{v,b} \frac{m_v}{m_s - m_v} \{2 [2 A' - B' (1 + \sin^2 \alpha) - \tfrac{1}{4} C' (1 - 5 \sin^2 \alpha)]$$
$$+ a [- 2 A' (1 - \sin^2 \alpha) + B' (3 + \sin^2 \alpha) + C' (1 - 5 \sin^2 \alpha)]\}, \tag{5}$$

wo α die Sonnenhöhe ist,

$$A' = \int_0^\pi \frac{m_\zeta}{m_s - m_\zeta} \left[U \frac{m_s - m_v}{m_\zeta - m_v} (1 - q_{\zeta - v,b}) - (1 - q_{s-v,b})\right] \sin \zeta\, d\zeta,$$

$$B' = \int_0^\pi \frac{m_\zeta}{m_s - m_\zeta} [\qquad] \sin^3 \zeta\, d\zeta,$$

$$C' = \int_0^\pi \frac{m_\zeta}{m_s - m_\zeta} [\qquad] \sin^5 d\zeta.$$

Analog

$$J''_n = J_0 \pi \omega Q^2 q_{v,b} \frac{m_v}{m_s - m_v} \{2 \sin^2 \varphi [2 A' \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + B' (1 - 9 \sin^2 \alpha$$
$$+ 10 \sin^4 \alpha) - \tfrac{1}{4} C' (3 - 30 \sin^2 \alpha + 35 \sin^4 \alpha)] + a \sin^2 \varphi [2 A' (3 - 4 \sin^2 \alpha$$
$$+ 3 \sin^4 \alpha) - B' (4 - 30 \sin^2 \alpha + 30 \sin^4 \alpha) + \tfrac{1}{4} C' (9 - 81 \sin^2 \alpha + 105 \sin^4 \alpha)]$$
$$+ 2 \cos^2 \varphi [2 A' \sin^4 \alpha + B' (1 + 7 \sin^2 \alpha - 10 \sin^4 \alpha) + \tfrac{1}{4} C' (4 - 35 \sin^2 \alpha + 35 \sin^4 \alpha)]$$
$$+ a \cos^2 \varphi [2 A' (1 + \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha) + B' (2 - 37 \sin^2 \alpha + 40 \sin^4 \alpha) - \tfrac{1}{4} C' (16 - 140 \sin^2 \alpha$$
$$+ 140 \sin^4 \alpha)]\} \tag{6}$$

Die Integrale A', B', C' müssen, wie man sieht, für jede Wellenlänge, jede Sonnenhöhe, jede visierte Richtung, jedes H_b und H_e besonders berechnet werden.

§ 4. Berücksichtigung der dreifachen Zerstreuung. Wir wollen uns mit der Ausführung der Formel auf den Fall beschränken, daß die Sonne sich am Horizont befindet und der Zenit visiert wird. Wir werden dabei die Molekülanisotropie sowie auch die Lichtextinktion nicht beachten.

In dem Punkte O'' (Fig. 2) unterwirft sich der Sonnenstrahl XO'' der primären Zerstreuung, im Punkte O' zerstreut er sich zum zweiten,

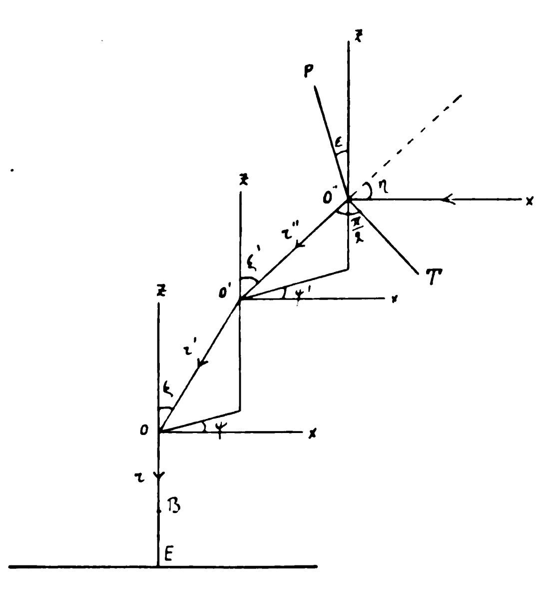


Fig. 2.

im Punkte O zum dritten Male. Die Achse z ist vertikal gerichtet; $O''P$ ist zur Ebene $XO''O$ senkrecht und bildet mit der Achse $O''Z$ den Winkel ε; $\angle XO''O' = \eta$; $O''T \perp O''O'$ und liegt in der Ebene $XO''O'$; φ' und ψ' sind entsprechend die Zenitdistanz und das Azimut des Punktes O'' aus dem Punkte O'; φ und ψ sind auch für den Punkt O' aus dem Punkt O. Für zwei Intensitäten des nach $O''O'$ zerstreuten Lichtes haben wir[1])

$$dJ'_p = J_0 R'' dv'', \quad dJ'_t = J_0 R'' \cos^2 \eta \, dv'' .$$

Nach einer zulässigen Vereinfachung der Ausrechnungen strebend, werden wir das sekundär nach $O''O'$ zerstreute Licht als schwach polarisiert rechnen. Davon ausgehend, nehmen wir seine Intensitäten mit Schwingungen nach zwei beliebigen zueinander und zu $O'O$ senkrechten Richtungen, z. B. $O'V$ und $O'H$, wo $O'V \perp OO'$ ist und in der Ebene $ZO'O$ liegt, $O'H \perp O'V$ und $\perp OO'$. Für die Intensitäten des nach $O'O$ zerstreuten Lichtes haben wir dann:

$$dJ''_v = J_0 R'' R' \left[(\cos\varepsilon \sin\zeta - \sin\varepsilon \sin\psi \cos\zeta)^2 + (-\sin\eta \cos\psi \cos\zeta + \cos\eta \cos\varepsilon \sin\psi \cos\zeta + \cos\eta \sin\varepsilon \sin\zeta)^2\right] dv'' dv' ,$$

$$dJ''_h = J_0 R'' R' \left[\sin^2\varepsilon \cos^2\psi + \cos^2\eta \, (\sin\eta \sin\psi + \cos\eta \cos\varepsilon \cos\psi)^2\right] dv'' dv' .$$

Wir drücken ferner η und ε durch ζ' und ψ' mit Hilfe der Beziehungen

$$\cos\eta = \sin\zeta' \cos\psi'$$
$$\sin\eta \cos\varepsilon = \sin\zeta' \sin\psi'$$
$$\sin\eta \sin\varepsilon = \cos\zeta'$$

aus und führen

$$dv'' = r''^2 \sin\zeta' \, dr'' \, d\zeta' \, d\psi',$$
$$dv' = r'^2 \sin\zeta \, dr' \, d\zeta \, d\psi,$$
$$dv = r^2 \omega \, dr$$

ein. Für die allgemeine Intensität des dreifach zerstreuten Lichtes

$$dJ''' = R\,(dJ''_v + dJ''_h)\,(1 + \cos^2\zeta)$$

nach der Ausführung der Integration nach ψ', ψ, r'', r', r bekommen wir

$$J''' = J_0 \omega \pi^2 P_0{}^3 h^3 m_v \frac{H_b}{H_0} \left(\frac{H_e}{H_0}\right)^2 [8A^2 + 4B^2 - 3C^2 - 8AB + 6BC - 2AC], \qquad (7)$$

wo

$$P_0 = R_0 r^2,$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\zeta \sin\zeta \, d\zeta , \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\zeta \sin^3\zeta \, d\zeta ,$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\zeta \sin^5\zeta \, d\zeta ,$$

wobei wir durch mechanische Quadratur $A = 4{,}06$; $B = 3{,}60$; $C = 3{,}38$ bekommen[1]).

§ 5. Berücksichtigung der Diffusion des Lichtes, welcher vom Himmelsgewölbe auf die Erdoberfläche fällt an derselben. In meiner Arbeit waren (Formeln 13 und 14) Ausdrücke für die Intensitäten des direkt von der Sonne auf die Erdoberfläche fallenden und von ihr reflektierten Lichtes angeführt. Wir wollen jetzt das durch die Erdoberfläche zerstreute Himmelslicht berücksichtigen, wobei wir in den Formeln (13) und (14) die Sonnenradiation auf die horizontale Oberfläche $J_0 \sin\alpha$ durch die Summe der Sonnen- und Himmelsstrahlung, ($J_0 \sin\alpha$) und (J'_0) ersetzen.

Nehmen wir ein Volumenelement dv' in der Atmosphäre, dessen Lage gegen einen Punkt E der Erdoberfläche durch die Koordinaten r' (Abstand von dv' bis E), Zenit-

1) In die Werte für A, B, C, welche in meinen oben zitierten Arbeiten angeführt sind, haben sich einige Fehler eingeschlichen, daher führen wir hier die berichtigten Werte an.

1) l. c., S. 683.

distanz ζ und Azimut ψ bestimmt wird. Dann haben wir für die Intensität des Lichtes, welche durch dieses Volumenelement nach dem Punkt E zerstreut wird, folgende Ausdrücke[1]):

$$dJ' = dJ'_p + dJ'_t = J_0 R'(1 + a\sin^2\eta + \cos^2\eta)\,dv'.$$

Wir beschränken uns hier nur auf das durch die Atmosphäre primär zerstreute Licht. Für die Intensität des im Punkte E auf die Einheit der horizontalen Erdoberfläche vom ganzen Himmel fallenden Lichtes, erhalten wir

$$J_0' = J_0 \iiint R' \left[(1 + a) + (1 - a)\cos^2\eta\right] r'^2 \sin\zeta\cos\zeta\, d\zeta\, d\psi\, dr'.$$

Indem wir die Integration ausführen, bekommen wir

$$J_0' = J_0 P_0 h\pi \frac{H_e}{H_0}\left[2(1 + a + \sin^2\alpha - a\sin^2\alpha)D_1 + (1 - a)(1 - 3\sin^2\alpha)D_2\right], \qquad (8)$$

wo

$$D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\zeta \sin\zeta\cos\zeta\, d\zeta, \quad D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\zeta \sin^3\zeta\cos\zeta\, d\zeta$$

sind.

Durch mechanische Quadratur finden wir folgende Werte:

$$D_1 = 0{,}954, \quad D_2 = 0{,}624.$$

§ 6. Einige zahlenmäßige Ausrechnungen; Beziehung der Theorie zu den ausgeführten Beobachtungen. Die Formeln (7), (8), (11), (12), (13) und (14) meiner vorausgehenden Arbeit und die Formeln (7) und (8) dieses Artikels benutzend, wollen wir die allgemeine Intensität des vom Zenit kommenden Lichtes bei der Sonnenhöhe 0^0, für $\lambda = 550\,\mu\mu$, für den auf der Erdoberfläche sich befindenden Beobachtungsort berechnen, wobei wir den letzteren auf dem Meeresniveau annehmen. Wir bekommen dann, die Extinktion nicht berücksichtigend, folgende Werte:

$J' = 83$ Proz.; $J'' = 14{,}4$ Proz.; $J''' = 2{,}0$ Proz.; $J_e''' = 0{,}6$ Proz.[2])

Hier sind entsprechend J', J'', J''' Intensitäten des einfach, zweifach und dreifach zerstreuten Lichtes, J_e''' Intensität des Lichtes, welches von der Erdoberfläche reflektiert ist (die Albedo der Erdoberfläche wird dabei gleich 0,1 angenommen). Was die Größe der Polarisation anbetrifft, so ist sie bei denselben Bedingungen, im Falle der Berücksichtigung nur einer primären Zerstreuung — 912 im Falle der Berücksichtigung der primären und sekundären Zerstreuung — 839, im Falle der Berücksichtigung J', J'', J_e'' — 834, bei Berücksichtigung J', J'', J''', J_e''' — 817 (J''' wird dabei als unpolarisiert angenommen). Aus den soeben angeführten Zahlen sieht man, die Polarisationsgröße mit einer Genauigkeit bis zu einigen Promillen nehmend, daß man sich völlig auf die Berücksichtigung nur der primären, sekundären und tertialen Zerstreuung beschränken kann. Es ist verständlich, daß bei Sonnenhöhen $> 0^0$ es notwendig ist, die Lichtdiffusion durch die Erdoberfläche zu berücksichtigen, und zwar nur die Diffusion des Lichtes, welches direkt von der Sonne auf den Erdboden niederfällt. Es ist ebenso notwendig die Lichtdiffusion der Erdoberfläche bei der Sonnenhöhe 0^0 zu berücksichtigen, wenn die Albedo der Erdoberfläche ziemlich groß ist, wie z. B. wenn die Erdoberfläche mit Schnee bedeckt ist. So ist bei Albedo 0,64 (alter Schnee)[1]) die Polarisation schon 793 und bei Albedo 0,89 (Schnee mit leicht gefrorener Oberschicht) ist sie gleich 783. Im Durchschnitt gerechnet haben wir die Herabsetzung der Polarisationsgröße infolge der Schneedecke 817 — 788 = 29. Nach einigen (24) Beobachtungen in Simferopol im Dezember-Februar war die Polarisation ($\lambda = 530\,\mu\mu$) bei der Abwesenheit der Schneedecke 795, bei der Anwesenheit der Schneedecke 764, d. h. die berechnete Herabsetzung der Polarisation stimmt mit der beobachteten überein.

Was den Einfluß der Extinktion anbetrifft, so finden wir für $\lambda = 550\,\mu\mu$, $H_b = H_e = H_o$, $\alpha = 0^0$, $\varphi = 90^0$ durch mechanische Quadratur

$$A' = 0{,}30 \quad B' = 0{,}26, \quad C_i = 0{,}25.$$

Mit Hilfe dieser Werte haben wir für die Intensitäten des primär (J') und sekundär (J'') zerstreuten Lichtes

$$J' = 87{,}8 \text{ Proz. und } J'' = 12{,}2 \text{ Proz.},$$

und für die Polarisationsgröße

$$p = 860.$$

1) l. c., S. 683.

2) Der Wert des optischen Anisotropiekoeffizienten für Luft wird dabei gleich 0,046 angenommen. Diese Zahl ist der Mittelwert aus den von Rayleigh, Gans, Raman und Rao, Cabannes erhaltenen und weiter unten angeführten Messungswerten a und aus den Werten a^*, welche aus den a-Werten des Stickstoffs und des Sauerstoffs und dem Werte des Mischungsverhältnisses berechnet sind:

	a	a^*
Rayleigh (II Serie) . . .	0,050	0,051
Gans	---	0,038
Raman und Rao	0,044	
Cabannes (II Serie) . .	0,041	0,043
Mittel:	0,046	

1) Die Messungsresultate von C. Dorno (Pernter-Exner, Meteor. Optik 1922, S. 708).



Der Einfluß der Extinktion drückt sich also aus in der (begreiflichen) Intensitätsverminderung des zweifach zerstreuten Lichtes gegenüber der Intensität des einfach zerstreuten und in der damit verbundenen Vergrößerung der Polarisation. Wenn wir noch die dreifache Diffusion und die Lichtdiffusion von der Erdoberfläche berücksichtigen, so erhalten wir wahrscheinlich die Verminderung der Polarisationsgröße bis zu 850—845 Promille. Hierzu wollen wir bemerken, daß mittels der direkten Beobachtung auf Ai-Petri und in Simferopol bei der reinsten Atmosphäre die Werte der Polarisation 847 und 846 sich ergeben würden.

Simferopol, Pädagogisches Institut, 20. März 1928.

(Eingegangen 3. April 1928.)

BESPRECHUNGEN.

E. Petzold, Elementare Raumakustik. Gr. 8⁰. XII u. 129 S. Mit 50 Abb. Berlin, Bauwelt-Verlag. 1927. M. 7.—.

Das gesteigerte Interesse der Architekten an auch „akustisch gefälligen Bauten" ist die Ursache für das Erscheinen der vorliegenden Raumakustik. Der Verf. entstammt selbst dem Kreise der Baufachleute, an die sich das Buch hauptsächlich wendet. Die in den ersten 4 Abschnitten behandelten psychophysiologischen Fragen sowie die akustische Meßtechnik benutzen Maßeinheiten, die von den in der Physik üblichen Definitionen abweichen. Daß der Verf. bei seinen Messungen, aus denen er einfache, formelmäßige Beziehungen ableitet, stets das Ohr mitbenutzt und nicht allein physikalische Meßmethoden anwendet, ist zu begrüßen, da man doch zu Raumgebilden kommen will, die für Menschen mit normaler Hörfähigkeit geeignet sind. Trotzdem wird es nötig sein, physikalisch besser definierte Schallsender und -empfänger zu benutzen als Pfeifen und Kohlemikrophone. Hiervon abgesehen kann man den in den weiteren Abschnitten des Buches vorgetragenen Darlegungen über Schallrückwurf, Nachhall, Deutlichkeit und Klangtreue, Anhall, stehende Wellen, raumakustische Beeinflussung der Schallquelle usw. nur zustimmen. E. Lübcke.

J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2., völlig umgearbeitete Auflage. (Bd. 10 der Sammlung: Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine Mathematik.) Gr. 8⁰. VIII u. 197 S. Mit 4 Fig. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1927. M. 9.—, in Leinen geb. M. 10.50.

Diese 2. Auflage ist gegenüber der ersten elementareren Inhalts und geringeren Umfangs. Bei der Auswahl des Stoffes sind Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt. Inhalt: Elementare Integrationsmethoden; Existenzbeweise im reellen und komplexen Gebiet (Methode der schrittweisen Annäherung); numerische und graphische Näherungsmethoden; lineare Differentialgleichungen (insbes. kleine Schwingungen); lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet; Abhängigkeit der Lösungen von Parametern u. Anfangswerten; Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen. Zur Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen, vor allem auch für solche, welche die spätere Anwendung der Theorie im Auge haben, wird das treffliche Werk ein höchst zuverlässiger und geeigneter Führer sein und ist daher der Aufmerksamkeit des theoretisch interessierten Physikers wert. Haupt.

H. v. Sanden, Mathematisches Praktikum. 1. Teil. (Bd. 27 der Sammlung: Teubners technische Leitfäden.) Kl. 8⁰. IV u. 122 S. Mit 17 Fig. im Text sowie 20 Zahlentafeln als Anhang. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. Geb. M. 6.80.

Die vorliegende Aufgabensammlung bedarf für den Physiker kaum einer Empfehlung. Stellt sie sich doch als Ziel, in die Methodik der numerischen Behandlung von Fragen einzuführen, wie sie sich in den Anwendungen (insbesondere auch in der Physik) darbieten. Demgemäß sind die zahlreichen Beispiele vollständig durchgerechnet (unter Diskussion der erreichten Genauigkeit). Außerdem wird jeweils der Gang der Lösung beschrieben. Die erforderliche Theorie ist am Anfang eines jeden Kapitels kurz zusammengestellt. Der Inhalt gliedert sich so: Einleitung; Rechenschieber; der Satz von Taylor; Auflösung von Gleichungen; Ausgleichsrechnung; Integration, Differentiation, Interpolation; harmonische Analyse. Referent hält die Aufgabensammlung für höchst begrüßenswert und möchte ihr eine recht große Verbreitung wünschen. Haupt.

H. Remy, Die elektrolytische Wasserüberführung und ihre Bedeutung für die Theorie der wäßrigen Lösungen. (Fortschritte der Chemie, Physik und physikalischen Chemie, 19. Band, 2. Heft.) Gr. 8⁰. 72 S. Mit 9 Fig. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1927. M. 6.50.

Der Verfasser bespricht in diesem Heft die Versuche, das beim Stromdurchgang durch Lösungen überführte Wasser zu messen. Dabei sind zwei Methoden verwendbar, einmal die Konzentrationsverschiebung neutraler Molekeln, zweitens die Fixierung einer Mittelschicht durch Diaphragmen; erstere stammt von Nernst, die zweite hauptsächlich von Remy. Beide Methoden ergeben bei richtiger Messung das Gleiche. Die Auswertung erfolgt für bestimmte Ionenhydrate, nicht für elektrodynamische Wasserdipolmitführung. Über das weite Gebiet wird ein klarer Abriß gegeben. G.-M. Schwab.

Wo. Ostwald, Die Welt der vernachlässigten Dimensionen. 8⁰. XV und 325 S. Mit 43 Abb. und 7 Tafeln. 9. u. 10. umgearbeitete und vermehrte Aufl. Dresden und Leipzig, Theodor Steinkopff. 1927. Preis geb. M. 12.—.



Das Werk, von dem jetzt nach einer Pause von einigen Jahren die 9. und 10. Auflage vorliegt, ist bereits so weit eingeführt und bestens bekannt, daß sich eine eingehendere Würdigung erübrigt. Verf. ist der Ansicht, daß zwar sein eigentlicher Zweck, der einer Propaganda- und Kampfschrift, der sich ja auch im Titel ausspricht, heute erfüllt ist, daß es sich aber trotzdem noch empfiehlt, die Eigenart der kolloiden Erscheinungsform vor unrichtigen Einstellungen von Fachgenossen zu schützen, ganz abgesehen von der Absicht, ein aus einer Feder stammendes Lehrbuch des Gebietes nicht nur für Studierende, sondern auch für Fachchemiker zum Einarbeiten zu schaffen. Von dem letzten Gesichtspunkt aus ist auch die zusammenfassende Referatenliteratur weitgehend angeführt. Ein großer Teil des Werkes, etwa die Hälfte, ist völlig umgeschrieben worden, insbesondere die technischen Anwendungen, die hier für den Nichttechniker sehr instruktiv dargestellt sind. G.-M. Schwab.

O. Ruff, Einführung in das chemische Praktikum. 8⁰. IV u. 86 S. Mit 9 Abb. Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft. 1927. M. 4.80.

Das vorliegende Büchlein ist ein Handbuch für die chemische Laboratoriumsarbeit der Chemiker, Hüttenleute und Oberlehrer. Die Anlage weicht insofern von dem üblichen Ausbildungsgange ab, als den vorbereitenden Versuchen über die einzelnen Stoffklassen ein gegenüber der eigentlichen analytischen Arbeit verhältnismäßig weiter Raum gelassen wird. Das ist zweifellos ein Vorteil, da der gewandte Analytiker, der trotzdem von anorganischer Chemie vor der Examenvorbereitung noch wenig Ahnung hat, eine allzu häufige Erscheinung bildet. Wer das vorliegende Buch sorgsam durchgearbeitet hat, wird dagegen eine äußerst solide anorganische Bildung besitzen, da es geradezu zu intensivster Lehrbuchbenutzung zwingt. Aus der Unterrichtspraxis heraus wird man freilich die Frage stellen müssen, ob die sinngemäße Benutzung, zumal in dem gegenüber Technischen Hochschulen freieren Betrieb der Universitätslaboratorien, tatsächlich erzwungen werden kann. Über das intensiv geübte System der Fragezeichen bestehen ja zweierlei Meinungen. Zu begrüßen ist die zeitsparende Einführung der Zentrifuge in das anorganische Praktikum. G.-M. Schwab.

A. Mangin und W. Tschikolew, Drei grundlegende und gemeinverständliche Arbeiten zur Scheinwerferfrage, übersetzt von A. Sonnefeld (Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 219). Gr. 8⁰. XII u. 133 S. Mit 48 Fig. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1927. M. 6.50.

Das Buch umfaßt zwei Arbeiten des französischen Oberst Alphonse Mangin, geb. 1825, über das „System der optischen Telegraphie für die Verteidigung von Paris", Paris 1874, und „Untersuchung verschiedener optischer Einrichtungen zur Prüfung ferner Gegenstände mit elektrischem Licht", Paris 1878, sowie eine kurze Abhandlung des russischen Oberst Tschikolew über „die Prüfung elektrischer Scheinwerfer auf photographischem Wege", St. Petersburg 1892.

Die erste Arbeit, in der verschiedene optische Signalgeräte vom fernrohrartigen Linsenscheinwerfer bis zu einem Spiegelscheinwerfer von 40 cm Durchmesser mit den dazugehörigen Empfangsgeräten beschrieben werden, hat in der Hauptsache historisches Interesse. Die vier Anmerkungen (ca. 12 Seiten stark), in denen mit großer Anschaulichkeit die Helligkeit des Gebers und Empfängers sowie die der Gesamteinrichtung berechnet wird, werden jedoch auch jetzt noch manchem auf Nachbargebieten Arbeitenden wertvolle Aufschlüsse geben.

In der zweiten Untersuchung werden die Formeln für Helligkeit und Streuung von Linsenscheinwerfern, Scheinwerfern mit Kugelspiegeln und mit dem nach Mangin benannten Linsenspiegel entwickelt. Auch hier ist von besonderem Interesse die Anmerkung *A*, die die Durchrechnung des Mangin-Spiegels enthält, der seinerzeit in der Scheinwerfertechnik dem sphärischen Spiegel gegenüber einen großen Fortschritt bedeutete.

In der dritten kurzen Abhandlung von Tschikolew ist eine Prüfmethode für Scheinwerferspiegel beschrieben, die darin besteht, das Bild eines Koordinatennetzes in dem Hohlspiegel zu photographieren, eine Methode, die zu schneller Prüfung der Spiegel viel angewandt wurde.

Helmuth Schering.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

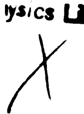
Habilitiert: An der Universität Berlin Fräulein Dr. Gertrud Kronfeld für Chemie, an der Universität München der Konservator des Chemischen Laboratoriums daselbst Dr. Georg Maria Schwab (früher in Würzburg) für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Paul Knipping zum a. o. Professor für Röntgenphysik und Röntgentechnik ebenda, Dr. Alexander Meissner zum Honorarprofessor für Maschinenbau an der Technischen Hochschule Berlin, Dr. T. B. Johnson zum Sterling Professor für Chemie an der Yale University in New Haven, der Privatdozent der Physik an der Universität zu Wien Dr. Hugo Sirk zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Ljubljana (Laibach).

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Richard Lorenz.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 14. Ausgegeben am 15. Juli 1928. Nr. 762. Printed in Germany. **29. Jahrgang.**

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 14 — 15. Juli 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 16 am 10. August 1928 — 29. Jahrgang

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Erregung sehr schneller elektrischer Schwingungen in der Dreielektrodenröhre.

Von O. Pfetscher.

I. Einleitung.

(Problemstellung. — Vereinfachende Annahmen. — Grundgedanke der Theorie.)

Das Bestreben, die übliche Methode zur Erzeugung ungedämpfter elektrischer Wellen mit Hilfe der Elektronenröhre zu übertragen auf das Gebiet kurzer Hertzscher Wellen, stößt auf zwei wesentliche Hindernisse:

1. Die Eigenkapazität der Röhre (d. h. ihrer Elektrodenanordnung) läßt sich nur beschränkt und auf Kosten ihrer Belastbarkeit herabsetzen*).

2. Die endliche Flugzeit der Elektronen zwischen den einzelnen Elektroden bewirkt zwischen den Spannungsschwankungen der letzteren und den Stromänderungen im allgemeinen einen Phasenunterschied. Die aus dem statischen Kennlinienfeld der Röhre gezogenen Schlüsse auf die Schwingfähigkeit verlieren damit ihre Gültigkeit.

Noch bevor man sich theoretisch mit dieser letzteren Komplikation beschäftigt hatte, brachte die Entdeckung von H. Barkhausen und K. Kurz[1]) den experimentellen Nachweis dafür, daß auch dann günstige Anregungsbedingungen gefunden werden können, wenn die Elektronenflugzeit mit der Periode der elektrischen Schwingung vergleichbar wird. Es handelt sich hier um die bekannte Bremsfeldschaltung der genannten Verfasser, bei welcher das Gitter der Röhre auf hoher, positiver, die Anode auf schwach positiver bzw. mehr oder weniger stark negativer Spannung gegen den Heizdraht gehalten wird. In der Folge beschäftigte sich eine ganze Reihe von Autoren mit diesem Gegenstand, die im einzelnen hier nicht aufgeführt zu werden brauchen, da dies in den neueren Arbeiten*)[2])[3]) und außerdem durch das Referat von W. I. Romanoff[4]) auf dem IV. Deutschen Physikertag schon ausführlich geschehen ist. Dort wurde insbesondere darauf hingewiesen, daß sich die verschiedenen Veröffentlichungen in zwei Gruppen einteilen lassen: Nach der Ansicht der einen Gruppe wird die Periode der erzeugten Schwingungen lediglich durch die Flugzeit der Elek-

*) l. c. K. Kohl, Ann. d. Physik **85**, 1, 1928.
1) H. Barkhausen und K. Kurz, Physik. Zeitschr. **21**, 1, 1920.
2) M. T. Grechowa, Zeitschr. f. Phys. **35**, 50 u. 59, 1926 und **38**, 621, 1926.
3) N. Kapzov und S. Gwosdower, Zeitschr. f. Phys. **45**, 114, 1927.
4) W. I. Romanoff, Physik. Zeitschr. **28**, 770, 1927.

tronen festgelegt, nach der Meinung der anderen wird die Frequenz in erster Linie durch den Außenkreis bestimmt. Das Verdienst der russischen Forscher, insbesondere von N. Kapzov[3]) ist es, diesen scheinbaren Widerspruch durch die experimentelle Feststellung aufgeklärt zu haben, daß beide Erscheinungen in ein und derselben Röhre möglich sind. Es handelt sich also um zwei verschiedene Vorgänge, die sich unter Umständen sogar überlagern können.

Wir befassen uns im Folgenden nur mit derjenigen Gruppe von Schwingungen, bei welcher die Frequenz hauptsächlich durch den äußeren Kreis festgelegt ist, für welche außerdem das Potential der Anode sich nur wenig von demjenigen der Elektronenquelle unterscheidet. Für diese Art von Schwingungen existiert bereits eine von E. Gill und I. Morell[5]) mitgeteilte Theorie. Sie gibt indessen keine Erklärung für die kleinen Wellenlängenänderungen, die in diesem Falle (vgl. die russischen Messungen[2])[3])!) durch die Variation der Gitterspannung bei unverändertem Außenkreis verursacht wurden. Außerdem erlaubt die von den britischen Forschern gewählte Form der Darstellung der Vorgänge in der Röhre keinen unmittelbaren rechnerischen Anschluß derselben an die Erscheinungen im Außenkreis. In vorliegender Arbeit wird versucht in einer neuen Darstellung den Übergang vom Elektronenmechanismus in der Röhre zu den elektrischen Vorgängen in den Außenleitern durchzuführen und Amplitude und Frequenz der „Gill-Morell"-Schwingungen als Funktion der Gitterspannung zu berechnen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe handelt es sich letzten Endes darum, elektrische Strombetrachtungen aufzubauen aus der Beobachtung der Bewegung der einzelnen Elektronen. Es sind also von vornherein recht verwickelte Beziehungen zu erwarten und es ergibt sich die Notwendigkeit von erlaubten Vereinfachungen Gebrauch zu machen und gewisse Beschränkungen einzuführen:

1. Die Rechnung soll für ebene Elektrodenform durchgeführt werden. Diese die mathematische Behandlung wesentlich erleichternde Vereinfachung ist insofern berechtigt, als es W. Romanoff[4]) gelungen ist, Schwingungen der genannten Art auch bei Röhren mit plattenförmigen Elektroden zu erzielen.

2. Zwischen Gitter und Glühdraht soll kein Wechselfeld vorhanden sein. Diese zwar nicht völlig richtige Annahme bewährte sich schon bei E. Gill und I. Morell[5]) für eine erste Diskussion der Erscheinungen.

3. Die Elektronenquelle soll in ihrer ganzen Ausdehnung konstantes Potential besitzen.

4. Die Elektronen sollen sich gegenseitig nicht merklich in ihrer Bewegung beeinflussen. Es wird also in den Flugräumen die Gültigkeit der Laplaceschen Gleichung ($\Delta V = 0$) vorausgesetzt und absichtlich auf eine Berücksichtigung von Raumladungserscheinungen verzichtet mit dem Ziel, zunächst festzustellen, welche Vorgänge schon bei Vernachlässigung derartiger Wirkungen zu erwarten sind. Angesichts der hohen Gitterspannung erscheint diese Vereinfachung für mäßige Emissionsströme im allgemeinen unbedenklich; bei der Untersuchung der Vorgänge in unmittelbarer Nähe der Umkehrstelle an der Anode, sowie in der Nachbarschaft des Glühfadens bedarf allerdings der Einfluß der Raumladung noch einer Nachprüfung.

5. Hierzu treten noch die Annahmen kleiner Dämpfung, einer gegen die Gleichspannung kleinen Amplitude der Wechselspannung an den Elektroden, sowie kleiner Frequenzänderungen bei der Variation der Gitterspannung. Wie unten noch im einzelnen gezeigt werden wird, können auch diese Bedingungen in einem großen Bereich der Schwingungen noch als hinreichend erfüllt angesehen werden.

Der Grundgedanke unserer Theorie ist der folgende:

Die Schwingung im Außenkreis bewirkt, wie das schon E. Gill und I. Morell annahmen, Spannungsschwankungen an den Elektroden der Röhre und infolgedessen eine Unterteilung der Elektronen an der Anode. Es bilden sich periodisch ausgezeichnete Elektronengruppen, deren Influenzwirkung auf die Elektroden die Schwingung im Außenkreis weiter anstößt. Es lassen sich nämlich die von den einzelnen bewegten Elektronen hervorgerufenen Stromstöße ersetzen im wesentlichen durch einen Wechselstrom von der Schwingungsfrequenz, den wir dann als den „Zubringerstrom" des Außenkreises ansehen. Die Annahme einer Influenzwirkung, die, erstmals, — wenn auch ohne mathematische Formulierung — von S. Zilitinkewitsch[6]) ausgesprochen wurde, hat insofern allgemeinere Bedeutung, als sicher auch die eigentlichen „Barkhausen-Schwingungen" (charakterisiert durch das hohe negative Anodenpotential) auf diese Weise angefacht werden, wenngleich dort die Gruppenbildung der Elektronen außer einer etwaigen Unterteilung an der Anode noch andere wesentlichere Ursachen haben muß.

5) E. W. B. Gill und I. H. Morell, Phil. Mag. **44**, 161, 1922.
6) S. I. Zilitinkewitsch, Arch. f. Elektrotechnik **15**, 470, 1926.



II. Die Vorgänge in der Elektronenröhre.

1. Die Potentialverteilung in der Röhre.

Da bei den bisher veröffentlichten Messungen stets Glühdrähte als Elektronenquelle verwendet wurden, wollen wir als Bezugspunkt für die Angabe der Spannungen das negative Ende des Heizdrahtes wählen und die Potentiale, bezogen auf diesen Null-Punkt, folgendermaßen definieren:

V_f = Mittleres Potential des Glühdrahtes;
V_a = Gleichpotential der Anode;
V_g = Gleichpotential des Gitters.

Die elektrische Schwingung in dem an Gitter und Anode angeschlossenen Außenkreis erzeugt eine Wechselspannung zwischen diesen beiden Elektroden:

$$v = V_2 \cdot \sin(\omega t),$$

die wir in Richtung Gitter → Anode positiv rechnen wollen. Von Potentialschwankungen zwischen Glühdraht und Gitter wird abgesehen (siehe oben!).

2. Die Elektronenbewegung im Raume „Glühdraht-Gitter".

Aus der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \varepsilon \cdot \frac{dV}{dx} \quad (\varepsilon = \text{absoluter Betrag der spezif. Ladung des Elektrons})$$

berechnet sich die Geschwindigkeit eines Elektrons an der Stelle $x = d_1$ (Gitter siehe Fig. 1) zu:

$$(\mathfrak{v}_x)_{d_1} = \frac{\varepsilon(V_g - V_f)}{\omega d_1} \omega \tau_1 = \frac{2\omega d_1}{n_1 \pi}$$

wo τ_1 die Flugzeit des Elektrons von der Kathode zum Gitter ist und $n_1 = \frac{\tau_1}{T/2}$, deren Verhältnis zur halben Periode der elektrischen Schwingung festlegt.



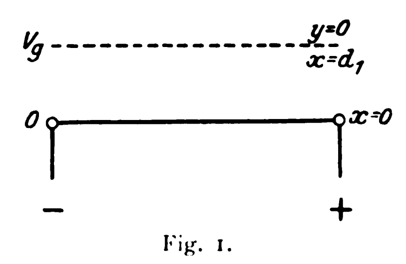


Fig. 1.

3. Die Elektronenbewegung im Raume „Gitter-Anode".

Mit der Geschwindigkeit $(\mathfrak{v}_x)_{d_1}$ treten alle Elektronen in den Raum „Gitter-Anode" ein und werden durch das hier herrschende Feld (V_g ist $\gg V_a$) gebremst. Die Bewegungsgleichung lautet hier:

$$\frac{d\mathfrak{v}_y}{dt} = \frac{\varepsilon(V_a - V_g)}{d_2} + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{d_2} \cdot \sin(\omega t).$$

Für das zur Zeit $t = t_1$ das Gitter passierende Elektron ergibt die erste Integration dieser Gleichung die Geschwindigkeit im Raume „Gitter-Anode" zu:

$$\mathfrak{v}_y = \frac{2 d_1 \omega}{n_1 \pi} - \frac{\varepsilon \cdot (V_g - V_a)}{\omega \cdot d_2} \cdot (\omega t - \omega t_1) - \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega \cdot d_2}[\cos(\omega t) - \cos(\omega t_1)].$$

Die nochmalige Integration liefert den Flugweg:

$$y = \frac{\varepsilon \cdot (V_a - V_g)}{2 \cdot d_2 \omega^2} \cdot (\omega t - \omega t_1)^2 + \frac{2 d_1}{n_1 \pi} (\omega t - \omega t_1) + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} \cdot \cos (\omega t_1) \cdot (\omega t - \omega t_1)$$
$$- \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} [\sin (\omega t) - \sin (\omega t_1)].$$

Es ist zweckmäßig, in die weitere Rechnung die mittlere Flugzeit bis zur Umkehr einzuführen, d. h.: diejenige Zeit, die ein Elektron beim Nichtvorhandensein des Wechselfeldes brauchen würde um seinen Umkehrpunkt zu erreichen. Ob der letztere wie im Falle $V_a < V_f$ reell oder wie im Falle $V_a > V_f$ nur virtuell ist, ist für diese rein rechnerische Operation, zumal V_a sich nur wenig von V_f unterscheiden soll, belanglos. Diese Flugzeit bis zur Umkehr (τ_2) folgt aus:

$$\omega \tau_2 = n_2 \pi = \frac{\omega \cdot d_2 \cdot \sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)}}{\varepsilon (V_g - V_a)}, \quad \text{wo } n_2 = \frac{\tau_2}{T/2} \text{ gesetzt ist,}$$

während der Flugweg bis zur Umkehr (im Falle $V_a > V_f$ eine mathematische Extrapolation!) sich darstellt in der Form:

$$y_0 = \frac{\sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)}}{2 \omega} \cdot n_2 \pi = \frac{V_g - V_f}{V_g - V_a} \cdot d_2 .$$

Unter der Einwirkung des Wechselfeldes ändert sich nun die Flugzeit der Elektronen bis zur Umkehr periodisch. Diese Änderung ist, solange die Wechselspannungsamplitude gegen die Gleichspannung V_g noch klein ist, selbst gering; sie sei bezeichnet mit $\tau_2 \cdot \delta$, wo $\delta \ll 1$ ist und von der Startzeit $t = t_1$ des Elektrons am Gitter abhängt. Der Flugweg bis zur Umkehr ist dann im Schwingungsfalle gegeben durch die Gleichung:

$$y = y_0 + \Delta y = \frac{n_2 \pi}{2 \omega} \cdot \sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)} \cdot (1 - \delta^2) + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 d_2} \cdot [n_2 \pi (1 + \delta) \cos (\omega t_1) + \sin (\omega t_1)$$
$$- \sin (\omega t_1 + n_2 \pi) \cos (n_2 \pi \delta) - \cos (\omega t_1 + n_2 \pi) \cdot \sin (n_2 \pi \delta)].$$

Berücksichtigt man jetzt, daß die Amplitude V_2 klein gegen $V_g - V_a$ vorausgesetzt wurde, daß ferner $(n_2 \pi \delta)$ für nicht zu große Flugzeiten ein kleines Argument ist, so gelangt man nach einfacher Umformung unter Vernachlässigung der quadratisch kleinen, sowie der Glieder höherer Ordnung zu dem Ergebnis:

$$y_0 + \Delta y = \frac{V_g - V_f}{V_g - V_a} \cdot d_2 + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} \cdot [n_2 \pi \cdot \cos (\omega t_1) + \sin (\omega t_1) - \sin (\omega t_1 + n_2 \pi)].$$

Die Lage des Umkehrpunktes wird also von δ in diesem Falle ganz unabhängig, d. h.: die Änderung der Flugzeit kommt gegenüber dem direkten Einfluß, den die Startphase ωt_1 am Gitter auf den Ort der Umkehr hat, nicht in Betracht. Es empfiehlt sich, statt der Startzeit t_1 die Umkehrzeit $t_2 = t_1 + \tau_2 (1 + \delta)$ einzuführen. So erhalten wir schließlich die Verschiebung Δy des Umkehrpunktes als Funktion der Umkehrphase:

$$\Delta y = \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} \cdot M \cdot \sin (\omega t_2 + \Phi),$$

wo:

$$M \cdot \cos \Phi = n_2 \pi \cdot \sin (n_2 \pi) + \cos (n_2 \pi) - 1$$
$$M \cdot \sin \Phi = n_2 \pi \cdot \cos (n_2 \pi) - \sin (n_2 \pi) \quad \text{gesetzt ist.}$$

4. Die Unterteilung an der Anode.

Die „Gill-Morell-Schwingungen" sind dadurch charakterisiert, daß das Anodenpotential V_a von dem der Glühfadenmitte nicht sehr verschieden ist, daß die einsetzende Schwingung also stets eine Unterteilung der das Gitter erstmals passierenden Elektronen herbeiführt in solche, die die Anode erreichen und in solche, die wieder zum Gitter zurückfallen, und zwar sind hier folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $V_a > V_f$: Die in den Raum „Gitter-Anode" eintretenden Elektronen werden, solange keine Schwingungen vorhanden sind, alle von der Anode aufgenommen. Der mittlere Umkehrpunkt ist virtuell (liegt hinter der Anode). Setzen Schwingungen ein, so kehrt periodisch ein kleiner Teil der Elektronen vor der Anode um und fällt zum Gitter bzw. Glühdraht zurück.



2. $V_a < V_f$: Solange keine Schwingungen vorhanden sind, fliegen alle Elektronen zum Gitter zurück, der mittlere Umkehrpunkt ist reell (liegt vor der Anode). Im Schwingungsfalle wird periodisch ein Teil der Elektronen von der Anode aufgenommen.

3. $V_a = V_f$: Im Schwingungsfalle tritt totale Unterteilung ein, d. h.: die Hälfte aller in den Raum „Gitter-Anode" eintretenden Elektronen wird von der Anode aufgenommen, die andere Hälfte fällt zum Gitter zurück.

Wir wollen nun zunächst die Frage beantworten:

„Wie groß muß die Spannungsamplitude sein, damit eine Unterteilung der Elektronen eben beginnt? Welche Elektronen fallen zum Gitter zurück bzw. welche erreichen die Anode?"

Die Unterteilung beginnt in jedem Falle, wenn:

$y_0 + \Delta y = d_2$ wird, wobei für Δy bzw. die Extremwerte $\pm \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 d_2} \cdot M$ für $V_a \gtrless V_f$ einzusetzen sind. Daraus ergibt sich die für eine Unterteilung jeweils erforderliche Mindestamplitude zu:

$$V_{2\,\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n_2 \pi)^2}{M} \cdot \left(1 - \frac{V_a - V_f}{V_g - V_f}\right) \cdot |V_a - V_f| \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{(n_2 \pi)^2}{M} \cdot |V_a - V_f|.$$

Im Falle $V_a > V$ fallen diejenigen Elektronen zuerst zum Gitter zurück, für welche die Umkehrphase:

$$\omega t_2 = \frac{(4k - 1)\pi}{2} - \Phi \text{ ist; } (k = 1, 2 \cdots).$$

Im Falle $V_a < V_f$ erreichen diejenigen Elektronen zuerst die Anode, für welche:

$$\omega t_2 = \frac{(4k - 3)\pi}{2} - \Phi \text{ ist; } (k = 1, 2, \cdots).$$

Im Grenzfalle $V_a = V_f$ (totale Unterteilung) fallen alle Elektronen zum Gitter zurück, für welche $\Delta y < 0$ ist, also im Bereiche:

$$\pi - \Phi < \omega t_2 < 2\pi - \Phi;$$

die während der anderen Halbperiode an die Anode gelangenden Elektronen werden von dieser aufgenommen.

Tabelle 1.

$n_2\pi$ [Winkelmaß]	M	Φ	$\frac{1}{2} \cdot \frac{(n_2\pi)^2}{M}$	$n_2\pi$ [Winkelmaß]	M	Φ	$\frac{1}{2} \cdot \frac{(n_2\pi)^2}{M}$
30°	0,138	− 21,0°	1,00	210°	4,57	− 144,2°	1,46
45°	0,302	− 30,4°	1,02	240°	5,28	− 167,1°	1,67
60°	0,530	− 40,3°	1,03	270°	5,79	+ 170,5°	1,91
90°	1,149	− 60,3°	1,07	300°	6,12	+ 145,3°	2,23
105°	1,53	− 70,7°	1,10	330°	6,26	+ 118,8°	2,64
119°	1,91	− 80,1°	1,13	360°	6,28	+ 90,0°	3,13
135°	2,37	− 91,0°	1,17	390°	6,29	+ 58,8°	3,68
150°	2,83	− 101,3°	1,22	420°	6,49	+ 25,5°	4,16
180°	3,73	− 122,5°	1,32	450°	6,93	− 8,3°	4,43

In der vorstehenden Tabelle I sind für verschiedene Werte $(n_2\pi)$ die zugehörigen M- und Φ-Werte (die letzteren im Winkelmaß) angegeben; ferner ist die für eine Unterteilung erforderliche Mindestamplitude $V_{\min}$ unter der Annahme $|V_a - V_f| = 1$ Volt nach der obigen Näherungsformel berechnet. Man erkennt, daß diese Amplitude insbesondere für große Flugzeiten größer sein muß als der zu überwindende Potentialanstieg $|V_a - V_f|$. Ein Anschwingen ist im allgemeinen deshalb nur dann zu erwarten, wenn wenigstens ein kleiner Teil der emittierten Elektronen schon vor dem Einsetzen der Schwingungen unmittelbar an der Anodenfläche umkehrt.

III. Die Berechnung des Zubringerstromes.

Die Elektronen, die sich in der Röhre bewegen, influenzieren auf den Elektroden elektrische Ladungen. Solange der Elektronenstrom zeitlich konstant ist, kann diese Erscheinung nicht zu Schwingungen Anlaß geben. Erst wenn auf irgendeine Weise eine periodische Gruppierung der Elektronen eintritt, können unter gewissen Bedingungen Schwingungen entstehen. Diese Gruppen-

bildung bringt die Schwingung selbst zustande, und zwar bei den G.-M.-Schwingungen in erster Linie durch die Unterteilung an der Anode in „hinüberkommende" und „nicht hinüberkommende", bei den eigentlichen B.-Schwingungen, wie es schon Kapzov[3]) angedeutet hat, wahrscheinlich durch die Wirkung der bisher nicht berücksichtigten Wechselspannung zwischen Gitter und Glühdraht. Wir beschränken uns hier bei der Beschreibung der G.-M.-Schwingungen auf die Influenzwirkung, die die Elektronen während des weitaus größeren Teiles ihres Fluges, also zwischen Anode und Gitter (n_2 ist in den praktisch vorkommenden Fällen wesentlich größer als n_1) ausüben.

Zunächst betrachten wir ein einzelnes Elektron mit der Ladung ($-e$), welches sich irgendwo (siehe Fig. 2) in dem von Anode und Gitter gebildeten Kondensator befinden möge. Bezeichnet man mit p_{ik} in der üblichen Weise die Kapazitätskoeffizienten, mit e_1 und e_2 die Aufladungen der Anoden- bzw. der Gitterelektrode, mit $v_{1,2,3}$ die Potentiale, so gelten die bekannten Beziehungen:

$$e_1 = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 + p_{13}v_3$$
$$e_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + p_{23}v_3$$
$$e_3 = p_{13}v_1 + p_{23}v_2 + p_{33}v_3$$

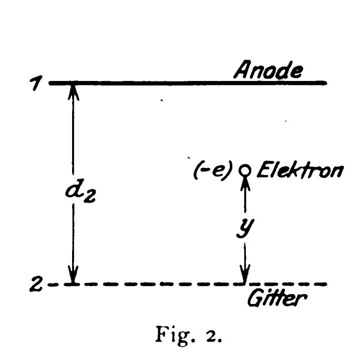


Fig. 2.

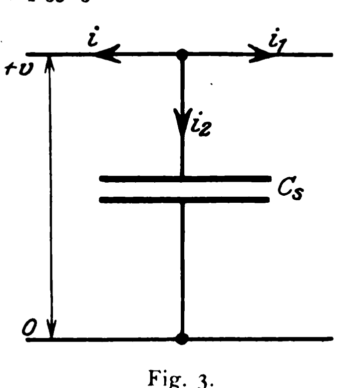


Fig. 3.

Das Elektron kann hier als nahezu punktförmige Ladung aufgefaßt werden. Es ist also: v_1 bzw. $v_2 \ll v_3$ und p_{13} bzw. $p_{23} \ll p_{12}$ oder p_{22} oder p_{11}; d. h. aber: $(p_{13}v_1)$ und $(p_{23}v_2)$ sind klein von der 2. Ordnung und können vernachlässigt werden. So ergibt sich:

$$e_3 = p_{33}v_3 = -e, \text{ wo „}e\text{" der absolute Betrag der El.-Ladung ist.}$$

$$e_1 = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 - \frac{p_{13}}{p_{33}} \cdot e$$

$$e_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 - \frac{p_{23}}{p_{33}} \cdot e$$

Die Koeffizienten $\frac{p_{13}}{p_{23}}$ und $\frac{p_{23}}{p_{33}}$ sind nur von geometrischen Daten abhängig. Sie können daher unter der Annahme $v_1 = v_2 = 0$ berechnet werden. Maxwell[7]) führt diese Rechnung für eine punktförmige Ladung und unendlich ausgedehnte, ebene Kondensatorflächen durch und erhält, in unsere Bezeichnungsweise übertragen:

$$[e_1]_{v_1 = v_2 = 0} = e \cdot \frac{y}{d_2}; \qquad [e_2]_{v_1 = v_2 = 0} = e \cdot \frac{d_2 - y}{d_2}.$$

Da die Größe des Elektrons gegen diejenige der Elektroden nicht in Betracht kommt, dürfen wir dieses Resultat übernehmen. Es ist also:

$$-\frac{p_{13}}{p_{33}} = \frac{y}{d_2} \quad \text{und:} \quad -\frac{p_{23}}{p_{33}} = \frac{d_2 - y}{d_2}$$

und daher:

$$e_1 = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 + \frac{y}{d_2} \cdot e$$

$$e_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + \frac{d_2 - y}{d_2} \cdot e.$$

7) J. Cl. Maxwell, Lehrbuch d. Elektr. u. d. Magnetismus 1, 277 (Berlin 1883).

Unter der Voraussetzung gleicher Elektroden ($p_{11} = p_{22} = p$) wird:

$$e_1 - e_2 = (p - p_{12}) \cdot (v_1 - v_2) + \frac{2y - d_2}{d_2} \cdot e,$$

oder, wenn wir die Kapazität $p - p_{12} = C_s$ und $v_1 - v_2 = v$ setzen:

$$e_1 - e_2 = C_s \cdot v + \frac{2y - d_2}{d_2} \cdot e.$$

Ist nun das Elektron zwischen Anode und Gitter in Bewegung, so ist der von den Kondensatorplatten nach außen in eine etwa angeschlossene Lecherleitung abfließende positive Elementarstrom (siehe Fig. 3):

$$i_1 = -\frac{d}{dt}(e_1 - e_2) = -C_s \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{2e}{d_2} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$= -i_2 - i.$$

Am Kondensator C_s liegt also gewissermaßen eine Stromverzweigungsstelle. $i = \frac{2e}{d_2} \cdot \frac{dy}{dt} = -(i_1 + i_2)$ ist der von einem einzelnen Elektron gelieferte Beitrag zu dem gesuchten Zubringerstrom des äußeren Kreises (L, C). Er ist der Geschwindigkeit des aktiven Elektrons proportional. Zunächst ist festzustellen, welche Elektronen in jedem Falle aktiv sind bzw. welche Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ in obige Gleichung einzusetzen ist.

1. Einsetzende Unterteilung im Falle: $V_a > V_f$.

Mit Beginn der Unterteilung möge in jeder Periode ein einzelnes Elektron von der Anode zum Gitter zurückfallen. Seine momentane Geschwindigkeit hierbei ergibt sich, wenn wir in $\mathfrak{v}_y$ (siehe II!) statt der Startzeit t_1 des Elektrons am Gitter seine Umkehrzeit an der Anode $t_2 \sim t_1 + \tau_2$ einführen, zu:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega \cdot d_2} \cdot (\omega t - \omega t_2) - \frac{\varepsilon V_2}{\omega d_2} \cdot \left[\cos(\omega t) - \cos(\omega t_2 - n_2 \pi)\right].$$

Für den größten Teil der Flugzeit überwiegt das erste Glied stark, so daß in hinreichender Annäherung geschrieben werden kann:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2} \cdot (\omega t - \omega t_2).$$

Diese Gleichung gibt jedoch nur für die Fallzeit, also von $\omega t = \overline{\omega t_2} = \frac{3\pi}{2} - \Phi$ (das ist die Umkehr-

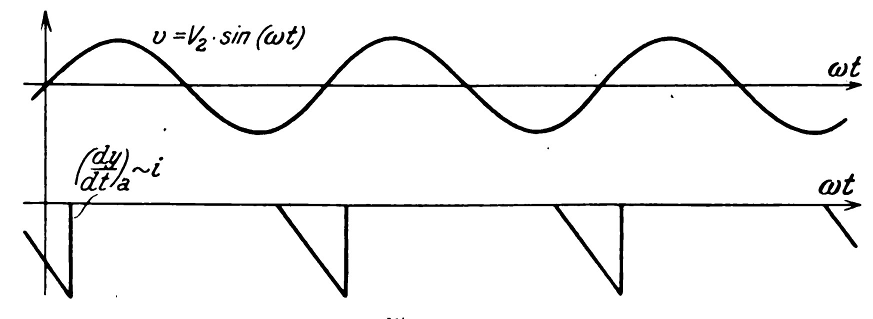


Fig. 4.

phase des ersten zurückfallenden Elektrons an der Anode, siehe II, 4!) bis $\omega t_3 = \frac{3\pi}{2} - \Phi + n_2 \pi$ (Phase der Rückkunft in die Gitterebene). Der von dem fallenden Elektron gelieferte, zu $\frac{dy}{dt}$ proportionale Strombeitrag besteht also in einem einmaligen Stromstoß von der Dauer des Fluges von der Anode zum Gitter. Zur Zeit $\overline{\omega t_2} = \frac{7\pi}{2} - \Phi$ (allgemein $\frac{(4k-1)\pi}{2} - \Phi$) beginnt ein neues Elektron den Raum „Anode-Gitter" zu durchfallen und hat einen neuen Stromstoß zur Folge. Diese Stöße erfolgen also mit der Frequenz ω der Wechselspannung am Kondensator, d. h. der sich aus-

bildenden Schwingung. Da die bewegte Ladung bei jedem Stoß dieselbe ist, ist der resultierende Strom der Geschwindigkeit des jeweils fallenden Elektrons — sie sei mit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ bezeichnet — proportional und hat deshalb die in Fig. 4 skizzierte, dreieckige Form.

Dieser Verlauf von $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ läßt sich leicht durch eine Fouriersche Entwicklung ersetzen:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_a = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t) + \cdots + A_n \cdot \cos(n\omega t) + B_n \cdot \sin(n\omega t),$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\omega t) f(\omega t)\, d(\omega t); \qquad B_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\omega t) f(\omega t)\, d(\omega t).$$

Für: $\overline{\omega t_2} \leq \omega t \leq \overline{\omega t_2} + n_2\pi$ ist $f(\omega t) = -\frac{\varepsilon \cdot (V_g - V_a)}{\omega d_2} \cdot (\omega t - \overline{\omega t_2})$,

im übrigen Teil der Periode ist $f(\omega t) = 0$.

Setzt man die Startphase an der Anode $\overline{\omega t_2} = \frac{(4k-1)\pi}{2} - \Phi$ ein, so liefert die Berechnung der Koeffizienten:

$$A_0 = -\frac{\omega d_2}{\pi} \cdot \left[1 + \frac{V_a - V_f}{V_g - V_a}\right];$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot \left[n_2\pi \cdot \cos(\Phi - n_2\pi) + \sin(\Phi - n_2\pi) - \sin\Phi\right] = \frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot f_1(n_2\pi)$$

$$B_1 = -\frac{\varepsilon \cdot (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot \left[n_2\pi \cdot \sin(\Phi - n_2\pi) - \cos(\Phi - n_2\pi) + \cos\Phi\right] = \frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot f_2(n_2\pi).$$

Auf die Ermittlung der übrigen Koeffizienten kann verzichtet werden, da die schon eingangs gemachte Beschränkung auf kleine Dämpfung es erlaubt, die Entwicklung des Störungsgliedes $f(\omega t)$ nach dem ersten Gliede abzubrechen [8]).

Die bisherige Rechnung bezog sich auf ein einzelnes in jeder Periode von der Anode zum Gitter fallendes Elektron. Tatsächlich ist es jedoch, auch bei einsetzender Unterteilung, eine große Anzahl von Elektronen, die wenigstens nahezu gleichzeitig in jeder Periode zum Gitter zurückfällt. Bezeichnet Q den absoluten Betrag der gesamten, jeweils nahezu gleichzeitig fallenden Ladung, so läßt sich die Summation über die Elementarvorgänge einfach in der Weise durchführen, daß man die oben entwickelte aktive Geschwindigkeit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ statt mit der Elementarladung mit der Gesamtladung Q multipliziert und auf diese Weise den Zubringerstrom berechnet.

2. Einsetzende Unterteilung im Falle: $V_a < V_f$.

In diesem Falle können, solange keine Schwingungen vorhanden sind, keine Elektronen die Anode erreichen. Die Influenzwirkung der zur Anode emporfliegenden Elektronen wird in jedem Augenblick durch eine gleichstarke der herabfallenden Elektronen kompensiert. Tritt infolge einer einsetzenden Schwingung Unterteilung ein, so gelangt ein kleiner Teil der während einer Periode emittierten Elektronen auf die Anode. Im nämlichen Augenblick geht eine „Elektronenlücke" an der Anode ab und wandert mit der Fallgeschwindigkeit, die die aus dem kontinuierlichen Elektronenstrom ausgesparte Elektronenschicht besitzen würde, von der Anode zum Gitter. Diese Lücken gehen also immer zur Zeit der Elektronenaufnahme an der Anode, d. h.: wenn Δy sein Maximum erreicht, von der Anode weg, also mit der Phase:

$$\omega t_2 = \frac{(4k-3)\pi}{2} - \Phi \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Während nun eine solche Lücke von der Anode zum Gitter eilt, markiert sie in jedem Augenblick diejenigen aufsteigenden Elektronen, deren Geschwindigkeit momentan nicht kompensiert wird, also die „aktiven" Elektronen. Die Träger dieser nicht kompensierten Geschwindigkeit — wir bezeichnen letztere wieder mit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ — sind zwar in jedem Augenblick andere Elektronen; da aber die

8) l. c. K. Krüger, Ann. d. Phys. 70, 291, 1923.

Anzahl der aktiven Elektronen während des ganzen Vorgangs dieselbe bleibt (nämlich gleich der von der Anode aufgenommenen Elektronenzahl), so ist der Verlauf des influenzierten Stromes durch die Geschwindigkeit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ bedingt. Diese aber ist in jedem Augenblick entgegengesetzt gleich derjenigen der Lücke; also in hinreichender Annäherung ist hier:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_a = -\frac{\varepsilon(V_g - V_a)}{\omega d_2} \cdot (\omega t - \overline{\omega t_2}),$$

wo jetzt $\overline{\omega t_2}$ den oben angegebenen Wert hat. So ergibt sich die in Fig. 5 skizzierte Stromform. Die

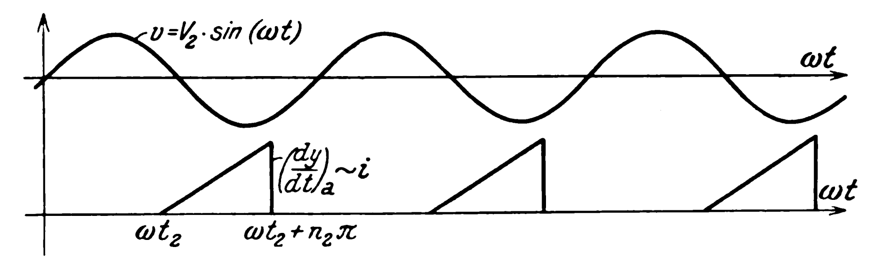


Fig. 5.

Fourier-Entwicklung des Störungsgliedes liefert hier für die Koeffizienten A_1 und B_1 dieselben Werte wie im Falle $V_a > V_f$, während $A_0 = +\frac{\omega d_2}{\pi} \cdot \left[1 + \frac{V_a - V_f}{V_g - V_a}\right]$ jetzt das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt wie oben. Physikalisch bedeutet das: Hinsichtlich der Wechselstromverhältnisse unterscheiden sich unter den der Rechnung zugrunde liegenden Bedingungen die Fälle $V_a \gtrless V_f$ überhaupt nicht. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Änderung des Gleichstroms zwischen Anode und Gitter, welche die Schwingung erzwingt, im zweiten Falle im umgekehrten Sinne erfolgt wie im ersten. Diese ganz triviale Tatsache läßt sich sofort am Verhalten des Anoden- und Gitterstromes beim Einsetzen der Schwingungen feststellen (vgl. die Versuche von Gill und Morell[5])!).

3. Totale Unterteilung im Falle $V_a = V_f$.

Dieser Fall kann als Grenzfall jedes der beiden oben behandelten aufgefaßt werden. Wir entwickeln ihn aus dem ersten, indem wir annehmen, daß vor dem Einsetzen der Schwingungen eben noch alle in den Raum „Gitter-Anode" hineinfliegenden Elektronen die Anode erreichen. Sind Schwingungen im Gange, so fallen dann alle Elektronen zum Gitter zurück, für welche $\Delta y < 0$ wird (l. c. S. 453), also im Bereiche:

$$\pi - \Phi \leq \overline{\omega t_2} \leq 2\pi - \Phi.$$

Jetzt erfolgt also in jeder Periode nicht ein einzelner von einer bestimmten Elektronenschicht herrührender Stoß wie bei einsetzender Unterteilung, sondern eine Summe von Stößen, die den verschiedenen jetzt während einer Periode nacheinander fallenden Elektronengruppen zukommen. Zu jeder Startzeit an der Anode $(\overline{\omega t_2})$ innerhalb des angegebenen Intervalls, d. h.: zu jeder möglichen Elektronengruppe würde in diesem Falle ein anderer Verlauf der „aktiven Geschwindigkeit" $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$, also eine andere Fouriersche Entwicklung gehören. Es muß daher hier ein Mittelwert der momentanen aktiven Geschwindigkeiten gesucht werden. Das geschieht am einfachsten durch Bestimmung der mittleren Fourier-Koeffizienten.

Die zu einer bestimmten Startgruppe (Abgangsphase $\overline{\omega t_2}$) gehörigen Koeffizienten sind unter Berücksichtigung der Annahme $V_a = V_f$:

$$A_0 = -\frac{\omega d_2}{\pi};$$

$$A_1 = -\frac{\varepsilon(V_g - V_f)}{\omega d_2 \pi} \cdot [n_2\pi \cdot \sin(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) + \cos(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) - \cos(\overline{\omega t_2})];$$

$$B_1 = \frac{\varepsilon(V_g - V_f)}{\omega d_2 \pi} \cdot [n_2\pi \cdot \cos(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) - \sin(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) + \sin(\overline{\omega t_2})].$$

$\overline{A_0}$ ist von der Startphase $\overline{\omega t_2}$ unabhängig. Für $\overline{A_1}$ und $\overline{B_1}$ ergeben sich, wenn $\overline{\omega t_2}$ in dem oben bezeichneten Intervall variiert wird, nach leicht ersichtlicher Umformung mit Hilfe der hier gültigen Beziehung:

$$n_2 \pi = \frac{2 \omega d_2}{\sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)}}$$

die Mittelwerte:

$$\overline{A_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\pi - \Phi}^{2\pi - \Phi} A_1 \, d(\overline{\omega t_2}) = \frac{4 \omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_1}{n_2^2};$$

$$\overline{B_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\pi - \Phi}^{2\pi - \Phi} B_1 \cdot d(\overline{\omega t_2}) = \frac{4 \omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_2}{n_2^2}.$$

Dabei sind f_1 und f_2 die schon unter 1. angegebenen Funktionen von $(n_2 \pi)$. Die Phasenverhältnisse sind also hier dieselben wie oben. In unserem Sinn aktiv ist jetzt die Hälfte aller in den Raum „Gitter-Anode" hineinfliegenden Elektronen, während in den Fällen $V_a \gtrless V_f$ nur ein Bruchteil dieser Elektronen zu der Aufrechterhaltung der Schwingung beiträgt.

Ist ein Glühdraht als Elektronenquelle vorhanden, so ist V_f für die einzelnen Partien desselben verschieden. Es ändert sich also längs des Heizdrahtes der Grad der Unterteilung. Doch scheint bei den eigentlichen G.-M.-Schwingungen ein Anschwingen nur dann möglich zu sein, wenn wenigstens für eine kleine Elektronengruppe die Bedingung totaler Unterteilung (Scheitel der Wurfparabel in der Anodenfläche) erfüllt ist. Der Einfachheit halber wollen wir diese Bedingung für die ganze Elektronenquelle als erfüllt ansehen und die weitere Betrachtung lediglich auf der Annahme völliger Unterteilung $(V_a = V_f)$ aufbauen.

Von dem zu Beginn des III. Abschnittes berechneten elementaren Zubringerstrom: $i = \frac{2e}{d_2} \cdot \frac{dy}{dt}$ kommen wir zu dem gesamten Zubringerstrom, wenn wir den absoluten Betrag Q der während einer Periode zum Gitter zurückfallenden Ladung mit der nach Fourier entwickelten, mittleren aktiven Geschwindigkeit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ multiplizieren. So ergibt sich, wenn wir die eingeführten Strombezeichnungen (i, i_1, i_2) jetzt einfach auf die Gesamtströme übertragen:

$$i = \frac{Q \cdot \overline{A_0}}{d_2} + \frac{2 Q \cdot \overline{A_1}}{d_2} \cdot \cos(\omega t) + \frac{2 Q \cdot \overline{B_1}}{d_2} \cdot \sin(\omega t).$$

Das erste Glied kennzeichnet die Änderung, die der von der Anode zum Gitter fließende Gleichstrom beim Einsetzen der Schwingungen erfährt: $\frac{Q \cdot \overline{A_0}}{d_2} = -\frac{Q \cdot \omega}{\pi} = \Delta i_{a, g}$. Bezeichnet i_a den nach unserer Annahme beim Nichtschwingen vorhandenen Sättigungsstrom an der Anode und werden alle zurückfallenden Elektronen vom Gitter aufgenommen, so wird hier: $\Delta i_{a, g} = - i_a$ und daher die positive aktive Ladung:

$$Q = i_a \cdot \frac{T}{2} = i_a \cdot \frac{\pi}{\omega}.$$

Für die Aufrechterhaltung der Schwingung ist die Wechselkomponente des Zubringerstromes maßgebend. Sie läßt sich schreiben in der Form:

$$\tilde{i} = \frac{2 Q \cdot \overline{A_1}}{\omega d_2 V_2} \cdot \omega V_2 \cdot \cos(\omega t) + \frac{2 Q \overline{B_1}}{d_2 V_2} \cdot V_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$= C_i \cdot \frac{dv}{dt} \qquad + \frac{1}{R_i} \cdot v,$$

indem man die zwischen Anode und Gitter herrschende Wechselspannung $v = V_2 \cdot \sin(\omega t)$ einführt.

Das Ergebnis dieses Abschnitts können wir dann zusammenfassend so aussprechen: Die durch den Elektronenmechanismus hervorgerufenen Stromstöße dürfen im Falle $V_a = V_f$ hinsichtlich ihrer elektrischen Wirkung ersetzt werden durch einen von der Anode zum Gitter fließenden, einer hier unwesentlichen Gleichstromkomponente überlagerten, quasistationären Wechselstrom von der Frequenz ω. Die Bahn dieses Stromes müssen wir uns bestehend denken aus einer Kapazität C_i und

einem dazu „parallel geschalteten“ Ohmschen Widerstand R_i. Dabei sind diese fiktiven Leitergebilde:

$$C_i = \frac{2\,Q \cdot \overline{A_1}}{\omega\, d_2\, V_2} = \frac{8}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{V_2} \cdot \frac{f_1}{n_2^2} \quad \text{und:} \quad \frac{1}{R_i} = \frac{2\,Q \cdot \overline{B_1}}{d_2\, V_2} = \frac{8\omega}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{V_2} \cdot \frac{f_2}{n_2^2}$$

Funktionen der Frequenz, des Verhältnisses von aktiver Ladung pro Periode (Q) zur Spannungsamplitude (V_2) und schließlich der Betriebsspannung V_g vermöge der Beziehung: $\omega\,\tau_2 = n_2 \pi$ $= \frac{2\,\omega\, d_2}{\sqrt{2\,e\,(V_g - V_f)}}$.

f_1 und f_2 sind Funktionen der Flugzeit τ_2 der Elektronen:

$$f_1 = n_2 \pi \cdot \cos(\Phi - n_2 \pi) + \sin(\Phi - n_2 \pi) - \sin \Phi;$$
$$f_2 = -\left[n_2 \pi \cdot \sin(\Phi - n_2 \pi) - \cos(\Phi - n_2 \pi) + \cos \Phi\right].$$

IV. Der „äußere“ Schwingungskreis.

Die Berechnung der Influenzwirkung im vorigen Abschnitt ergab an der Röhrenkapazität die Stromverzweigung:

$$i = -(i_1 + i_2)\,.$$

Dabei bedeutet, wenn wir jetzt die bei der Betrachtung des einzelnen Elektrons eingeführte Bezeichnung auf die aus den elementaren Beiträgen resultierenden Gesamtströme übertragen:

i den oben berechneten „Zubringerstrom“,
i_1 den Strom, der in die an Gitter und Anode angeschlossenen Außenleiter abfließt,
i_2 den durch die Röhrenkapazität C_s fließenden Strom.

Der Zubringerstrom — hier interessiert nur die Wechselkomponente — ließ sich in der Form darstellen:

$$i = C_i \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_i} \cdot v\,,$$

wo $v = V_2 \cdot \sin(\omega t)$ die Spannung der Anode gegen das Gitter bedeutete. Es liegt also noch eine zweite Stromverzweigung vor:

$$i = i_3 + i_4\,,$$

wenn wir als die Zweige (3) und (4) die aus den Betriebsbedingungen der Elektronenröhre errechneten Strombahnen, nämlich die Kapazität C_i und den Widerstand R_i betrachten.

1. Voraussetzung quasistationärer Verhältnisse.

Die an Gitter und Anode angeschlossenen Außenleiter sind in der Regel Lecherdrähte. Der Schwingungsvorgang ist nichtquasistationär. Es erleichtert jedoch den Überblick, wenn zunächst in Kürze die Rechnung unter der Voraussetzung quasistationärer Verhältnisse durchgeführt wird.

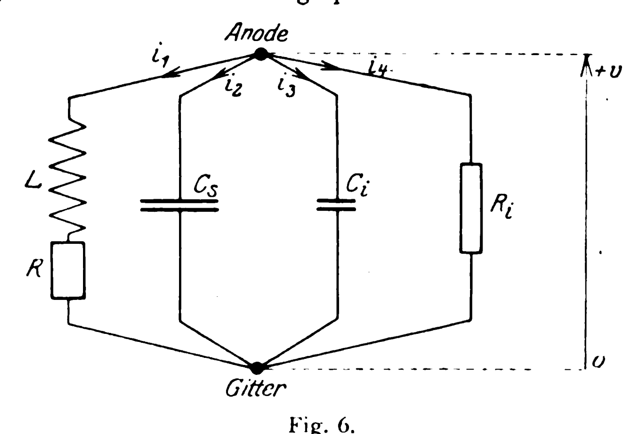


Fig. 6.

Der an Gitter und Anode der Röhre angeschlossene Zweig (1) bestehe aus dem Verbrauchswiderstand R und der Induktivität L. Die Zubringerleitung (3 und 4) liegt dann an der Schwingdrossel (L, C_s); wir erhalten das in Fig. 6 skizzierte Schaltbild. Die Elimination von i_2, i_3 und i_4 aus

den Gleichungen:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

und:

$$L \cdot i'_1 + R \cdot i_1 = \frac{1}{C_s} \cdot \int i_2 \, dt = \frac{1}{C_i} \cdot \int i_3 \, dt = R_i \cdot i_4$$

führt auf die Differentialgleichung:

$$L \cdot (C_s + C_i) \cdot i''_1 + \left[R \cdot (C_s + C_i) + \frac{L}{R_i}\right] \cdot i'_1 + \left(\frac{R}{R_i} + 1\right) \cdot i_1 = 0.$$

ω_0 sei die Eigenfrequenz des Kreises (L, C_s). Die Bedingungen für den eingeschwungenen Zustand (konstante Amplitude und Frequenz) lauten dann:

$$\frac{L}{R_i} + R \cdot (C_s + C_i) = 0$$

$$1 + \frac{R}{R_i} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \omega^2 L C_i = 0;$$

sie lassen sofort die bekannte Forderung eines negativen Widerstandes R_i erkennen.

2. Ein Paralleldrahtsystem mit Selbststeuerung.

Um auch den praktisch stets vorliegenden nichtquasistationären Schwingungszustand diskutieren zu können, sei im folgenden die von Abraham[9]) gegebene Rechenmethode darauf angewandt, in Kürze eine einfache Theorie eines sich selbst steuernden Lechersystems zu entwickeln. Dabei sei auch ungefähr an die dortige Bezeichnungsweise angeschlossen.

Ein in der Luft frei ausgespanntes Lechersches Paralleldrahtsystem (1, 2 in Fig. 7) von der

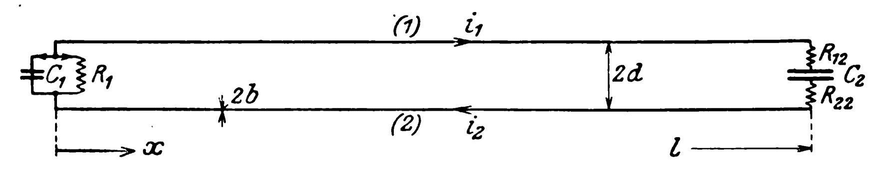


Fig. 7.

Länge l sei an den beiden Enden je durch einen Kondensator C_1 bzw. C_2 überbrückt. Der Energieverbrauch in diesem System, der sich im allgemeinen aus schwer erfaßbaren Einzelbeträgen (dielektrische Verluste, Strahlung, Energieabgabe an ein Meßinstrument usw.) zusammensetzt, sei, um übersichtliche Verhältnisse zu bekommen, in einem Ohmschen Widerstand ($R_2 = R_{12} + R_{22}$) lokalisiert, der zu gleichen Teilen in den Kondensatorzuleitungen von C_2 liegen möge. Die räumliche Ausdehnung dieser Widerstände sei klein. (Man denke etwa an Lötstellen; auch ein Energieentzug durch eine an der Brücke B_2 lose angekoppelte Galvanometerschleife dürfte ähnliche Verhältnisse bedingen.) Energieverluste längs der Paralleldrähte sollen nicht in Frage kommen, eine Voraussetzung, die bekanntlich um so besser erfüllt ist, je höher die Frequenz der Schwingungen, je größer das Reflexionsvermögen der Leiteroberfläche und je kürzer das Drahtsystem ist. Die Strahlungsverluste können durch Wahl eines genügend kleinen Abstandes ($2d$) auf ein Minimum gebracht werden.

Die Frage, die wir uns vorlegen müssen, lautet:

„Wie muß ein parallel zu C_1 liegender Widerstand R_1 beschaffen sein, damit die Amplitudenschwächung, welche die an ($C_2 R_2$) reflektierte Welle erlitten hat, durch die nachfolgende Reflexion an ($C_1 R_1$) wieder wettgemacht wird, damit sich also eine ungedämpfte, stehende elektrische Welle in dem System ausbildet? Von welchen Daten hängt die Frequenz der entstehenden Schwingung ab? —

Das Lechersystem erstrecke sich in Richtung positiver x. Die in Richtung negativer x fortschreitende Ladungswelle sei:

$$e'_1 = A' \cdot e^{j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} \; {}^{10)};$$

9) Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität **1**, 309ff.
10) Von allen derartigen komplexen Ausdrücken mögen die Lateralteile genommen werden.

die in Richtung positiver x fortschreitende Welle sei:

$$e_1'' = A'' \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}.$$

Längs der Paralleldrähte ergibt sich dann die Spannungsverteilung:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{C} \cdot \left[A' \cdot e^{j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} + A'' \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} \right]$$

und die Stromverteilung:

$$i_1 = -i_2 = -c \cdot \left[A' \cdot e^{j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} - A'' \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} \right],$$

wobei mit $C = \dfrac{1}{4 \cdot \ln\left(\dfrac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b}\right)}$ die Kapazität der Längeneinheit der Parallelleitung bezeichnet ist.

Wendet man auf die Stelle $x = 0$ die Kirchhoffschen Regeln an, so erhält man die Beziehung:

$$\frac{A' - A''}{A' + A''} = \frac{1}{c \cdot C} \cdot \left[\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right].$$

Nun ist zu fordern, daß die durch die Reflexion an (C_2, R_2) geschwächte Welle $A' \cdot e^{j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)}$ durch die nachfolgende Reflexion an (C_1, R_1) wieder eine gleichwertige Amplitudenverstärkung erfährt. Demgemäß setze man: $A' = |A| \cdot e^{-\beta + \gamma_1 j}$ und $A'' = |A| \cdot e^{-\gamma_1 j}$, wobei: $0 < e^{-\beta} < 1$ vorausgesetzt sei. Durch $(2\gamma_1)$ wird die Phasenverschiebung der einfallenden gegen die reflektierte Welle festgelegt. Ferner führe man die abkürzende Schreibweise ein:

$$u_1 = \frac{1}{c \cdot C \cdot R_1}; \quad v_1 = \frac{\omega \cdot C_1}{c \cdot C}.$$

Dann ist:

$$\frac{A''}{A'} = e^{\beta} \cdot \frac{1 - j \cdot \operatorname{tg} \gamma_1}{1 + j \cdot \operatorname{tg} \gamma_1} = \frac{1 - u_1 - j v_1}{1 + u_1 + j v_1}.$$

Die Trennung der Real- und Lateralteile liefert:

$$\cos 2\gamma_1 = e^{-\beta} \cdot \frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{(1 + u_1)^2 + v_1^2}; \quad \sin 2\gamma_1 = e^{-\beta} \cdot \frac{2 v_1}{(1 + u_1)^2 + v_1^2}$$

und die Kombination dieser Beziehungen nach Einführung einer Hilfsgröße b_1:

$$\text{(I)}: \operatorname{cotg}(2\gamma_1) = -\frac{u_1^2 + v_1^2 - 1}{2 v_1} = b_1; \quad \text{(II)}: e^{2\beta} = \frac{1 - 2u_1 + u_1^2 + v_1^2}{1 + 2u_1 + u_1^2 + v_1^2}.$$

Die Formeln (I) und (II) entsprechen den von P. Drude[11]) bei seiner sog. „2. Methode" zur Messung von Dielektrizitätskonstanten auf etwas andere Weise hergeleiteten Beziehungen. Die Tatsache, daß stets $v_1 (\gtreqless) 0$ ist — auch die hinzukommende, unter Umständen negative dynamische Kapazität C_i vermag praktisch daran nichts zu ändern, da $C_i < C_s$ (siehe Abschnitt V!) —, sowie die Voraussetzung $0 < e^{-\beta} < 1$ führen auf die Forderungen:

1. $0 \leqq 2\gamma_1 \leqq \pi$ und zwar $\begin{cases} 0 \leqq 2\gamma_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}, & \text{wenn } u_1^2 + v_1^2 \leqq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} \leqq 2\gamma_1 \leqq \pi, & \text{wenn } u_1^2 + v_1^2 \geqq 1 \end{cases}$ ist;

2. $u_1 < 0$ bzw., wenn wir eine später verwendete Hilfsgröße a_1 einführen:

$$\frac{1 + u_1^2 + v_1^2}{-2 u_1} = a_1 > 1.$$

Daraus ergibt sich sofort — wie zu erwarten war — die Tatsache, daß der Widerstand R_1 negativ sein muß.

Die an (C_1, R_1) reflektierte Ladungswelle $A'' \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$ werde nun am anderen Ende des Lechersystems an der Brücke (R_2, C_2) neuerdings reflektiert, und zwar derart, daß die neue Reflexionswelle mit der ursprünglichen $A' \cdot e^{j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)}$ in Amplitude und Phase übereinstimmt. In diesem Falle wird die Spannungs- und Stromverteilung längs der Paralleldrähte während der sukzessiven Re-

11) P. Drude, Wied. Ann. **61**, 478, 1897.

flexionen an den beiden Brücken stets durch die oben angegebenen Funktionen $(\Phi_1 - \Phi_2)$ bzw. $i_1 = -i_2$ dargestellt.

Die Anwendung der Kirchhoffschen Regeln auf die Stelle $x = l$ ergibt die Beziehung:

$$\frac{A''}{A'} \cdot e^{-j\frac{2\omega l}{c}} = -\frac{1 + u_2 - jv_2}{1 - u_2 + jv_2},$$ wobei $u_2 = cCR_2$ und $v_2 = \frac{cC}{\omega C_2}$ gesetzt ist.

Die Trennung der Real- und Lateralteile führt nach einfacher Zwischenrechnung schließlich auf die Beziehungen:

$$\text{(III)}\quad \operatorname{cotg} 2\left(\frac{\omega l}{c} + \gamma_1\right) = -\frac{(u_2^2 + v_2^2 - 1)}{2 v_2} = b_2 \quad \text{und: (IV)}\quad e^{2\beta} = \frac{1 + 2u_2 + u_2^2 + v_2^2}{1 - 2u_2 + u_2^2 + v_2^2}.$$

Setzen wir jetzt $2\left(\frac{\omega l}{c} + \gamma_1\right) = 2k\pi - 2\gamma_2$, wo $0 \leqq 2\gamma_2 \leqq 2\pi$ sei, so gelangen wir angesichts der Bedeutung von v_2 und der Voraussetzung über $e^{-\beta}$ zu den Forderungen:

3. $0 \leqq 2\gamma_2 \leqq \pi$ und zwar $\begin{cases} 0 \leqq 2\gamma_2 \leqq \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } u_2^2 + v_2^2 \geqq 1 \\ \frac{\pi}{2} \leqq 2\gamma_2 \leqq \pi, & \text{wenn } u_2^2 + v_2^2 < 1 \end{cases}$ ist;

4. $u_2 > 0$ und: $\frac{1 + u_2^2 + v_2^2}{2u_2} = -a_2 > 1$, d. h.: R_2 ist, wie es sein muß, ein positiver, Energie verzehrender Widerstand.

Führt man endlich in die Formeln (II) und (IV) die Hilfsgrößen a_1 und a_2 ein, so lassen sich die gewonnenen Beziehungen in der folgenden Weise zusammenstellen:

$$\text{(I):}\ u_1^2 + v_1^2 + 2b_1v_1 - 1 = 0; \qquad \text{(II):}\ u_1^2 + v_1^2 + 2a_1u_1 + 1 = 0;$$
$$\text{(III):}\ u_2^2 + v_2^2 + 2b_2v_2 - 1 = 0; \qquad \text{(IV):}\ u_2^2 + v_2^2 + 2a_2u_2 + 1 = 0;$$
$$\text{(V):}\ \frac{\omega l}{c} + \gamma_1 + \gamma_2 - k\pi = 0; \qquad \text{(VI):}\ a_1 + a_2 = 0,$$

wobei:

$$a_1 = \frac{e^{2\beta} + 1}{e^{2\beta} - 1}; \quad b_1 = \operatorname{cotg} 2\gamma_1; \quad b_2 = -\operatorname{cotg} 2\gamma_2,$$

$$u_1 = \frac{1}{cCR_1}; \quad v_1 = \frac{\omega C_1}{cC} \quad \text{und} \quad u_2 = cCR_2; \quad v_2 = \frac{cC}{\omega C_2} \text{ ist.}$$

Nach Einführung der Wellenlänge λ der elektrischen Schwingung stellt sich die Gleichung (V) dar in der Form:

$$l = \frac{\lambda}{2} \cdot \left[k - \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,cotg}(b_1) + \operatorname{arc\,cotg}(-b_2)\right)\right].$$

Diese Formel gibt den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ, der Länge l des Paralleldrahtsystems und den Eigenschaften b_1 und b_2 der begrenzenden Brücken wieder; die Beziehung ist deshalb recht kompliziert, da im allgemeinen auch die Hilfsgrößen b_1 und b_2 über v_1 und v_2 von der Wellenlänge abhängen. k bedeutet die Anzahl der auf der Strecke l zwischen den beiden Brücken liegenden Spannungsknoten. Für $k = 1$ bzw. $k = 2, 3, \ldots$ erhält man die Grundschwingung bzw. die anharmonischen Oberschwingungen des durch C_1, R_1, C_2, R_2, C und l bestimmten Systems. Ob alle diese Schwingungen, bzw. welche, sich tatsächlich ausbilden, das hängt von der besonderen Art der Erregung ab und kann erst im folgenden V. und VI. Abschnitt entschieden werden.

Der für die Amplitudenschwächung charakteristische Reflexionsfaktor $e^{-\beta}$ bestimmt sich aus der Hilfsgröße a_1: $e^{-\beta} = \sqrt{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1}}$.

Die Entfernungen der Brücken B_1 und B_2 von den ihnen zunächst liegenden Spannungsknoten seien D_1 bzw. D_2 und erfüllen die Gleichung:

$$D_{1,2} = \frac{\lambda}{4} \cdot \left(1 - \frac{2\gamma_{1,2}}{\pi}\right) \text{ und zwar ist:}$$

$\begin{cases} 0 \leqq D_1 \leqq \frac{\lambda}{8}, & \text{wenn } u_1^2 + v_1^2 \geqq 1 \\ \frac{\lambda}{8} \leqq D_1 \leqq \frac{\lambda}{4}, & \text{wenn } u_1^2 + v_1^2 \leqq 1 \end{cases}$ ist. Dagegen: $\begin{cases} 0 \leqq D_2 \leqq \frac{\lambda}{8}, & \text{wenn } u_2^2 + v_2^2 < 1 \\ \frac{\lambda}{8} \leqq D_2 \leqq \frac{\lambda}{4}, & \text{wenn } u_2^2 + v_2^2 \geqq 1 \end{cases}$ ist.

Vielleicht ist es von Interesse, daß sich der etwas verwickelte Zusammenhang zwischen den Größen u_1, v_1, u_2, v_2 und den Hilfsgrößen a_1, a_2, b_1, b_2 auf eine recht anschauliche geometrische Form (Fig. 8) bringen läßt:

Die Kurven (I) und (III) sind zwei Individuen des elliptischen Kreisbüschels: $u^2 + v^2 + 2bv - 1 = 0$ mit den Grundpunkten $(+1, 0)$ und $(-1, 0)$, während die Kreise (II) und (IV) dem konjugierten hyperbolischen Büschel: $u^2 + v^2 + 2au + 1 = 0$ zugehören. Das elliptische Büschel steht in unmittelbarem Zusammenhang mit den Brückenverkürzungen, insofern nämlich, als die

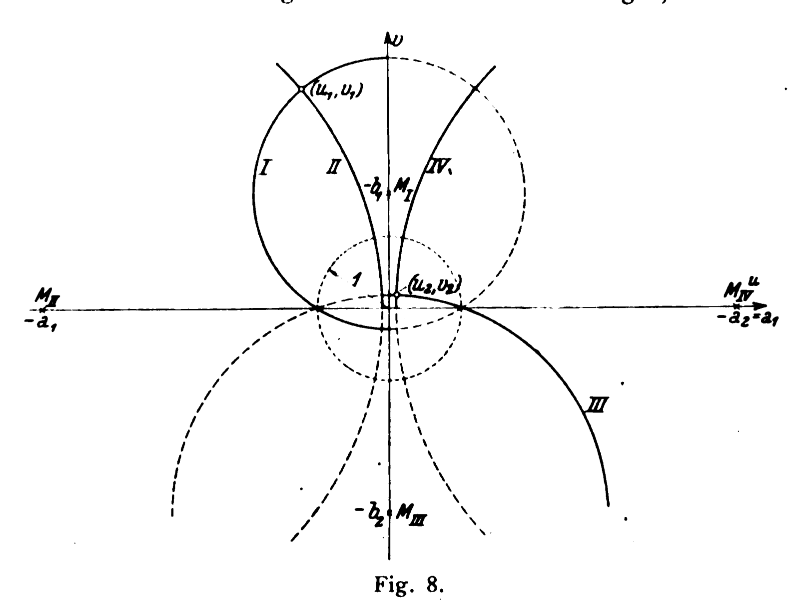


Fig. 8.

Lage der Kreismittelpunkte $M_{\mathrm{I\ bzw.\ III}}$ auf der v-Achse durch die Hilfsgröße b gegeben ist. Das hyperbolische Büschel gibt Aufschluß über den Grad der Reflexion, da hier die Kreismittelpunkte $M_{\mathrm{II\ bzw.\ IV}}$ auf der u-Achse durch die Hilfsgröße a festgelegt sind.

(I) × (II) liefert die zu a_1 und b_1 zugehörigen Werte u_1 und v_1,
(III) × (IV) liefert die zu a_2 und b_2 zugehörigen Werte u_2 und v_2;

wobei bezüglich der Gültigkeit der Lösungen zu beachten ist, daß u_1 negativ, u_2, v_1 und v_2 dagegen positiv sein müssen. Es läßt sich also an Hand dieser Darstellung leicht übersehen, wie sich der Reflexionsfaktor und die Brückendistanz D bei Variation von u und v verändern. Liegt z. B. der Punkt (u_1, v_1) außerhalb des Einheitskreises, so ist $D_1 < \frac{\lambda}{8}$, im anderen Falle größer, während für D_2 und Punkt (u_2, v_2) das Kriterium sich umkehrt. Im allgemeinen gehören zu einem gegebenen Reflexionsfaktor und vorgegebenem positiven v_1 zwei verschiedene Werte u_1.

3. Verschiedene Schaltmöglichkeiten.

Um die soeben abgeleiteten, allgemeinen, mathematischen Beziehungen für unsere spezielle Fragestellung nutzbar zu machen, sind jetzt über R_1, C_1 und C_2 noch bestimmte nähere Annahmen zu machen.

Die Brücke B_1 werde durch eine mit Anode und Gitter an das Lechersystem angeschlossene, in der oben gekennzeichneten Weise betriebene Elektronenröhre gebildet. Es ist dann:

$$R_1 = R_i,$$

d. h.: den notwendig negativen Widerstand R_1 muß der aus der Influenzwirkung (siehe Abschn. III!) errechnete innere Widerstand bilden. Die Brückenkapazität C_1 setzt sich zusammen aus der statischen Kapazität C_s der Elektroden und der durch den Elektronenmechanismus hervorgerufenen dynamischen Kapazität C_i (siehe oben!), d. h. es ist:

$$C_1 = C_s + C_i.$$

Ist der Sockel der Röhre entfernt und sind die Elektrodenzuleitungen geradlinige kurze Verlängerungen der Lecherdrähte — eine Voraussetzung, die bei den käuflichen Röhrentypen allerdings

meist schlecht erfüllt ist —, so dürfte die Berechnung der Röhrenkapazität C_s aus den geometrischen Daten der Elektroden wenigstens einen ersten Näherungswert liefern. Außerdem besteht die Möglichkeit, C_s aus der experimentell beobachteten Brückenverkürzung zu ermitteln.

Die andere Brückenkapazität C_2 kann an sich jede Größe haben. In der Tat sind auch bei der Ausbildung von Kurzwellenschaltungen alle Möglichkeiten ausprobiert worden:

$C_2 = 0$ freies Ende, umgebildet zum offenen Resonator, z. B. bei H. Barkhausen[1]).
C_2 ein kleiner, veränderlicher Kondensator [J. Sahánek[12]); G. Marconi[13])],
$C_2 \rightarrow \infty$, ein großer fester Kondensator [E. Gill u. I. Morell[5]), A. Scheibe[14]), N. Kapzov[3])].

Von diesen Möglichkeiten kommt nur die zuletzt genannte für messende Versuche in Betracht und zwar aus folgendem Grunde: Es ist unvermeidlich die Batteriezuleitungen z_a und z_g irgendwo an die Lecherdrähte anzulegen. Geschieht dieser Anschluß symmetrisch, aber an einer beliebigen Stelle (siehe Fig. 9), so zerlegt er durch seinen kapazitiven Einfluß (C_3) das System gewissermaßen in einen Primärkreis P und einen mehr oder weniger lose damit gekoppelten Sekundärkreis S. Die Untersuchung der Frequenz- und Amplitudenverhältnisse in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen der Röhre kann in diesem Falle durch die sekundäre Resonanzerscheinung zwischen P und S getrübt werden. Klare Verhältnisse erhält man dann, wenn die Batterieanschlüsse in einem Spannungsknoten angelegt werden, dessen Lage auch bei Frequenzänderungen des Systems gut definiert bleibt. Die oben angeführten Forscher erreichen das in der Weise, daß als Brückenkondensator C_2 eine

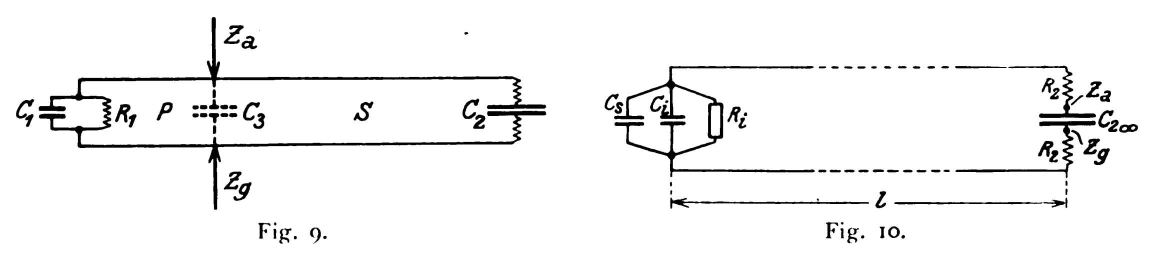


Fig. 9. Fig. 10.

gegen die verteilte Kapazität C der Drähte sehr große Kapazität (ein Blockkondensator von etwa 5000 cm genügt) eingeschaltet wird, an deren Belege unmittelbar die Batteriezuleitungen angeschlossen sind. Diese in der Fig. 10 skizzierte Schaltung liegt unserer weiteren Betrachtung zugrunde.

Mathematisch drückt sich die gewählte Spezialisierung so aus: Wir setzen in dem allgemeinen Gleichungssystem (S. 462)

$$v_2 = \frac{cC}{\omega C_2} = 0.$$

Dann wird:

$$2\gamma_2 = \operatorname{arccotg}(-b_2) = \pi \text{ und daher: (V) } \frac{2\omega l}{c} = (2k-1)\pi - 2\gamma_1.$$

Die Länge der Lecherleitung wird:

$$l = \frac{\lambda}{4}\cdot\left(2k - 1 - \frac{2\gamma_1}{\pi}\right); \qquad k = 1, 2 \cdots$$

V. Der Zusammenhang der Vorgänge in der Röhre mit denen im Außenkreis.

Durch Verknüpfung der Ergebnisse der Berechnung des Elektronenmechanismus mit den Bedingungen für die Unterhaltung einer stationären Schwingung im Außenkreis ist es nun möglich, die Frequenz und Amplitude der Schwingung zu berechnen.

1. Der quasistationäre Zustand.

Setzt man in die S. 460 gefundene Bedingung für konstante Amplitude und Frequenz die S. 459 gewonnenen Werte

$$\frac{1}{R_i} = \frac{2QB_1}{d_2 V_2} \quad \text{und} \quad C_i = \frac{2QA_1}{\omega d_2 V_2}$$

12) J. Sahánek, Physik. Zeitschr. **26**, 368, 1925.
13) G. Marconi, Referat in der Zeitschr. „Radio für Alle" **2**, 109, 1924.
14) A. Scheibe, Zeitschr. f. Hochfr.-Techn. **27**, 1, 1926.

ein, so erhält man die Gleichungen:

$$(1)\quad R\omega C_s = \frac{-2Q}{d_2 V_2}\cdot(R\cdot\overline{A_1}+\omega L\overline{B_1}) \quad \text{und:} \quad (2)\ 1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{-2Q}{d_2 V_2}\cdot(R\cdot\overline{B_1}-\omega L\cdot\overline{A_1}).$$

Die Elimination der Amplitude aus diesen beiden Gleichungen führt nach Einführung der die Dämpfung charakterisierenden Größe $\varkappa = \frac{R}{\omega_0 L}$ auf die Frequenzbedingung:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 - (1-\varkappa^2)\cdot\frac{\omega}{\omega_0} - \varkappa\cdot\frac{\overline{A_1}}{\overline{B_1}} = 0,$$

welche sich unter Beschränkung auf kleine Dämpfung ($\varkappa^2 \ll 1$) und kleine Frequenzänderungen $\Delta\omega = \nu\cdot\omega_0$ ($\nu \ll 1$) vereinfacht zu:

$$\nu = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\varkappa}{2}\cdot\frac{\overline{A_1}}{\overline{B_1}} - \frac{\varkappa^2}{2}.$$

Zur Ermittlung der Amplitude V_2 gehen wir von Gl. (1) aus:

$$V_2 = \frac{-2Q}{R\omega C_s d_2}\cdot(R\cdot\overline{A_1}+\omega L\cdot\overline{B_1}),$$

die auf Grund der Annahme kleiner Frequenzänderungen ($\nu\cdot\omega_0$) und geringer Dämpfung ($\varkappa$) nach erlaubten Vernachlässigungen übergeht in die Form:

$$V_2 = \frac{-2Q}{d_2}\cdot\frac{L}{R\cdot C_s}\cdot(1+\varkappa^2+2\nu)\cdot\overline{B_1}.$$

Der rechtzeitige Anstoß des Außenkreises (L, C_s) würde so erfolgen, daß sich die Eigenfrequenz ω_0 dieses Kreises ausbildet. Die zugehörige Amplitude $(V_2)_0$ ergibt sich also für $\nu = 0$, d. h. für $\overline{B_1} = (\overline{B_1})_0$ zu:

$$(V_2)_0 = \frac{-2Q}{d_2}\cdot\frac{L}{R\cdot C_s}\cdot(1+\varkappa^2)\cdot(\overline{B_1})_0$$

und die Amplitudenbedingung stellt sich schließlich dar in der Form:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} = \left(1+\frac{2\nu}{1+\varkappa^2}\right)\cdot\frac{\overline{B_1}}{(\overline{B_1})_0}.$$

Nachdem der Gang der Rechnung an dem übersichtlicheren quasistationären Fall kurz gezeigt ist, wollen wir jetzt — ohne uns schon hier in eine Diskussion der Ergebnisse einzulassen — erst noch versuchen, die Voraussetzung quasistationärer Verhältnisse fallenzulassen.

2. Der nichtquasistationäre Fall.

Die oben getroffene spezielle Wahl des 2. Brückenkondensators $\left(\frac{C_2}{C}\rightarrow\infty\right)$ verwandelt das S. 462 angegebene allgemeine Gleichungssystem unter Berücksichtigung der für C_1 und R_1 S. 463 eingeführten Werte in die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
&(\text{I}):\ u_1^2+v_1^2+2b_1v_1-1=0; &&(\text{II}):\ u_1^2+v_1^2+2a_1u_1+1=0;\\
&(\text{III}):\ u_2^2+v_2^2+2b_2v_2-1=0; &&(\text{IV}):\ u_2^2+v_2^2+2a_2u_2+1=0;\\
&(\text{V}):\ \frac{\omega l}{c}+\gamma_1-\frac{(2k-1)\pi}{2}=0; &&(\text{VI}):\ a_1+a_2=0;
\end{aligned}$$

wo:

$$a_1=\frac{e^{2\beta}+1}{e^{2\beta}-1};\qquad b_1=\operatorname{cotg}2\gamma_1;\quad b_1\rightarrow+\infty\qquad u_1=\frac{1}{cCR_i};$$

$$v_1=\frac{\omega(C_s+C_i)}{cC};\qquad u_2=cCR_2;\qquad v_2=0\ \text{ ist.}$$

Die Eigenschaften der Brücke (2) sind also vollständig vorgegeben, wenn wir noch den Grad der Amplitudenschwächung durch den Reflexionsfaktor $e^{-\beta}$ und damit die Größe $a_1 = -a_2$ festlegen, sowie die Eigenschaften (C, l) der Doppelleitung als bekannt voraussetzen. Außerdem sei die statische Kapazität C_s der Elektronenröhre vorgegeben. Die Größen R_i und C_i sind als Funktionen



der Frequenz, Amplitude und der Betriebsbedingungen der Röhre bekannt. Die Aufgabe, die wir uns stellen müssen, lautet dann:

Unter Beschränkung auf eine kleine Amplitudenschwächung (Dämpfung) und kleine Frequenzänderungen sind die Frequenz und die Amplitude als Funktionen der übrigen Größen, insbesondere der Betriebsspannung V_g zu entwickeln.

Aus (I) und (II) ergibt sich durch Subtraktion die einfachere Beziehung:

$$a_1 u_1 - b_1 v_1 + 1 = 0$$

oder:

$$\frac{a_1}{c C R_i} - \frac{b_1 \omega (C_s + C_i)}{c C} + 1 = 0$$

in die wir die Werte: $C_i = \frac{2 Q \overline{A}_1}{\omega d_2 V_2}$ und $\frac{1}{R_i} = \frac{2 Q \overline{B}_1}{d_2 V_2}$ einsetzen.

Für das Verhältnis der pro Periode aktiven Ladung Q zur Spannungsamplitude V_2 folgt dann:

$$\frac{Q}{V_2} = \frac{c C d_2}{2} \cdot \frac{1 - b_1 \cdot \frac{\omega C_s}{c C}}{b_1 \overline{A}_1 - a_1 \overline{B}_1} = \frac{c C d_2}{2} \cdot \frac{1 - b_1 p}{b_1 \overline{A}_1 - a_1 \overline{B}_1}, \tag{1}$$

wenn wir in abkürzender Bezeichnung: $\frac{\omega C_s}{c C} = p$ setzen.

Die Berechnung von ω und V_2 erfordert noch eine zweite Gleichung; es empfiehlt sich die Verwendung von Gl. (II):

$$u_1^2 + v_1^2 + 2 a_1 u_1 + 1 = 0,$$

die sich nach Einführung der für C_i und $\frac{1}{R_i}$ oben gegebenen Werte schreiben läßt in der Form:

$$\left(\frac{2}{c C d_2}\right)^2 \cdot (\overline{A}_1^2 + \overline{B}_1^2) \cdot \left(\frac{Q}{V_2}\right)^2 + \frac{4}{c C d_2} \cdot a_1 \overline{B}_1 + p \cdot \overline{A}_1 \cdot \frac{Q}{V_2} + p^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Die Kombination der Gleichungen (1) und (2) ergibt nach Einführung der Größe $Z = \frac{\overline{A}_1}{\overline{B}_1}$ ($\overline{B}_1 \neq 0$!) und einfacher Zwischenrechnung die in Z quadratische Gleichung:

$$Z^2 - 2 a_1 p \cdot Z + \frac{1 - a_1^2}{1 + b_1^2} \cdot (1 - b_1 p)^2 + a_1^2 p^2 = 0$$

mit den Lösungen:

$$Z = a_1 p \pm (1 - b_1 p) \cdot \sqrt{\frac{a_1^2 - 1}{b_1^2 + 1}}.$$

Bei kleiner Dämpfung $\left(\frac{1}{a_1^2} \ll 1\right)$ dürfen wir uns schon mit der Näherung begnügen:

$$Z = a_1 p + a_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 a_1^2}\right) \cdot (1 - b_1 p) \cdot (1 + b_1^2)^{-1/2}. \tag{3}$$

Zunächst wollen wir nun diejenigen Werte der Funktion Z berechnen, die zur Erregung der Eigenfrequenzen ω_0 des Lecherkreises gehören. Die letzteren sind dabei so zu definieren: Es sind diejenigen Frequenzen, die sich einstellen, wenn die verkürzende Wirkung der durch die Röhre gebildeten Brücke (Fig. 10) dieselbe ist, wie bei alleinigem Vorhandensein der statischen Kapazität C_s der Elektroden. Im Falle der Ausbildung der Eigenfrequenzen ist also:

$$b_1 = (b_1)_0 = \left(\frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{2 v_1}\right)_0 = \frac{1 - p_0^2}{2 p_0}, \qquad \text{wobei } p_0 = \frac{\omega_0 C_s}{c C} \text{ ist}.$$

Diese Frequenzen errechnen sich aus Gl. (V), die in diesem Falle lautet:

$$\frac{2 \omega_0 l}{c} - (2k - 1)\pi + (2\gamma_1)_0 = 0; \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

Nach Einführung der Abkürzung $\frac{\omega_0 l}{c} = q_0$ und Berücksichtigung der Bedeutung von b_1

(vgl. S. 466) ergibt sich hieraus die Beziehung:

$$\operatorname{cotg}(2q_0) = -\operatorname{cotg}(2\gamma_1)_0 = -(b_1)_0 = \frac{p_0^2 - 1}{2p_0}, \tag{4}$$

mit deren Hilfe wir schließlich für $p = p_0$ und $b_1 = (b_1)_0$ aus Gl. (3) die zu den Eigenfrequenzen ω_0 gehörigen Z-Werte ermitteln:

$$Z_0 = a_1 p_0 (\pm) a_1 p_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2a_1^2}\right).$$

Eine einfache Abschätzung der Schwingungsamplitude V_2, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden darf, ergab, daß von den zwei theoretisch möglichen Wurzelwerten für den Resonanzvorgang praktisch nur der eine: $Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}$ in Betracht kommt.

Die allgemeine Formel für Z (Gl. 3), in der wir jetzt auch nur das negative Vorzeichen der Wurzel zu berücksichtigen brauchen, kann auf Grund der schon eingangs eingeführten Beschränkungen in eine übersichtlichere Form gebracht werden. Vor allem machen wir jetzt Gebrauch von der Annahme, daß bei konstantem Außenkreis (l, C_s usw.) die Variation der Betriebsbedingungen der Röhre (enthalten in Z) nur kleine Abweichungen $\nu \cdot w_0$ ($\nu \ll 1$) der Frequenz gegen die Eigenfrequenz ω_0 dieses Kreises hervorbringen soll, indem wir setzen: $\nu = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, also: $p = p_0(1+\nu)$ und $q = q_0(1+\nu)$. Eine einfache Umformung ergibt dann (l. c. Gl. V!):

$$(1 + b_1^2)^{-1/2} = \sin(2\gamma_1) = \sin[2q_0(1+\nu)].$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe nach Potenzen von ν und bricht diese unter der Voraussetzung eines kleinen Argumentes $(2q_0\nu)$ mit dem linearen Glied ab, so erhält man bei Berücksichtigung von (4):

$$(1 + b_1^2)^{-1/2} = \frac{2p_0}{1 + p_0^2} \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{2p_0} \cdot 2q_0\nu\right).$$

Ferner formen wir mit Hilfe von (V) um:

$$b_1 = \operatorname{cotg}(2\gamma_1) = \operatorname{cotg}[(2k-1)\pi - 2q_0(1+\nu)]$$
$$= \frac{\operatorname{tg}(2q_0\nu) - \operatorname{cotg}(2q_0)}{1 + \operatorname{tg}(2q_0\nu)\cdot\operatorname{cotg}(2q_0)}.$$

Die Voraussetzung, daß $(2q_0\nu)$ ein kleiner Bogen ist, daß ferner $\operatorname{tg}(2q_0\nu)\cdot\operatorname{cotg}(2q_0)$ praktisch klein gegen 1 ist — die Berechtigung dieser Annahmen wird unten im Zusammenhang geprüft werden — erlaubt es, nach Anwendung der Binomial- und der tang-Entwicklung die Größe b_1 bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung zu schreiben in der Form:

$$b_1 = -\operatorname{cotg}(2q_0) + [1 + \operatorname{cotg}^2(2q_0)]\cdot 2q_0\nu$$

oder unter Beachtung von (4):

$$b_1 = \frac{1 - p_0^2}{2p_0} + \left(\frac{1 + p_0^2}{2p_0}\right)^2 \cdot 2q_0\nu. \tag{5}$$

Setzt man jetzt die soeben für p, b_1 und $(1 + b_1^2)^{-1/2}$ gefundenen Werte ein in die Gl. (3):

$$Z = a_1 p - a_1\left(1 - \frac{1}{2a_1^2}\right)\cdot(1 - b_1 p)\cdot(1 + b_1^2)^{-1/2},$$

so gelangt man unter Beschränkung auf das in ν lineare Glied zu der Beziehung:

$$Z = \frac{p_0}{2a_1} + 2a_1\cdot\left(q_0 + \frac{p_0}{1 + p_0^2}\right)\cdot\nu, \tag{6}$$

aus der endlich die gesuchte Näherungsformel für die Frequenzänderungen hervorgeht:

$$\nu = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{Z - Z_0}{2a_1\cdot\left(q_0 + \frac{p_0}{1 + p_0^2}\right)}, \qquad Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}. \tag{7}$$

Die Berechnung der Amplitude V_2, zu der wir jetzt übergehen, geschieht am besten mit Hilfe

der etwas umgeformten Gl. (1):

$$V_2 = -\frac{2a_1 Q}{cCd_2} \cdot \frac{1 - \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{\overline{A}_1}{\overline{B}_1}}{1 - b_1 p_0 (1 + \nu)} \cdot \overline{B}_1 .$$

Nach Einsetzen des in (5) für b_1, sowie des in (6) für $Z = \frac{\overline{A}_1}{\overline{B}_1}$ gefundenen Wertes und unter Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung gelangt man zu dem Resultat:

$$V_2 = -\frac{4a_1 Q}{cCd_2} \cdot \frac{\overline{B}_1}{1 + p_0^2} \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{4a_1^2} + 2 p_0 q_0 \nu\right) .$$

Die Amplitude $(V_2)_0$ (bei rechtzeitigem Stoß) geht hieraus hervor, wenn $\nu = 0$ und $\overline{B}_1 = (\overline{B}_1)_0$ gesetzt wird:

$$(V_2)_0 = -\frac{4a_1 Q}{cCd_2} \cdot \frac{(\overline{B}_1)_0}{1 + p_0^2} \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{4a_1^2}\right) . \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung der Kleinheit der Dämpfung ($0{,}8 < e^{-\beta} < 1$) ergibt sich dann schließlich als Verhältnis der Amplitude V_2 zur Normalamplitude $(V_2)_0$ die Näherung:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} = (1 + 2 p_0 q_0 \nu) \cdot \frac{\overline{B}_1}{(\overline{B}_1)_0} , \tag{9}$$

wobei ν die in Gl. (7) angegebene Funktion ist.

3. Der Geltungsbereich der Rechnung.

Es wurde im Laufe der mathematischen Entwicklung von einigen Vereinfachungen Gebrauch gemacht, deren physikalische Möglichkeit noch zu erweisen ist.

In dem Abschnitt, der über den Elektronenmechanismus handelte, wurde insbesondere vorausgesetzt, daß die Flugzeit der Elektronen bis zur Umkehr (τ_2) durch die Wechselspannung $V_2 \cdot \sin(\omega t)$ nur eine kleine Änderung ($\delta \cdot \tau_2$) erfährt. Das ist dann der Fall, wenn die Amplitude V_2 keine zu großen Werte annimmt. Im allgemeinen dürfen wir in dem Bereiche $0 < n_2 < 1{,}5$ $\left(n_2 = \frac{\tau_2}{T/2}\right)$ noch eine hinreichende Annäherung erwarten, wenn wir $\frac{V_2}{V_g - V_f} < \frac{1}{10}$ voraussetzen. Darüber hinaus, bis etwa $n_2 = 2{,}5$ dürfen wir nur für die wesentlich schärfere Bedingung $\frac{V_2}{V_g - V_f} < \frac{1}{100}$ eine Anwendbarkeit der Rechnung erwarten.

Außerdem wurden im letzten Abschnitt einige Vernachlässigungen vorgenommen, deren wesentliche die folgenden sind:

Die relative Frequenzänderung:

$$\nu = \frac{Z - Z_0}{2a_1\left(q_0 + \frac{p_0}{1 + p_0^2}\right)}$$

sollte als noch klein gegen 1 betrachtet werden können. Das ist aber nur für hinreichend große a_1-Werte angängig. Hier stoßen wir also wieder auf die schon anfangs von uns gemachte Annahme kleiner Dämpfung. Um ν abzuschätzen, beschränken wir uns zunächst auf die Grundschwingung des Lecherkreises ($k = 1$) und wählen beispielsweise $a_1 = 20$, was einem Reflexionsfaktor $e^{-\beta} = 0{,}95$ entspricht. Dann ist die praktisch etwa zu stellende Forderung $\nu \lesssim 0{,}05$ in einem um so größeren Intervall von Z-Werten (siehe hierzu Fig. 11!), d. h. in einem um so größeren Flugzeitbereich erfüllt, je kleiner p_0 ist, je größer also die Wellenlänge der Schwingung und je kleiner die statische Kapazität C_s der Röhre ist. Da diese p_0-Werte praktisch ungefähr im Intervall $1 \lesssim p_0 < 4$ liegen, läßt sich die an ν gestellte Forderung experimentell hinreichend erfüllen. Fig. 11 zeigt ferner, daß sich mit Erhöhung der Dämpfung (z. B. $e^{-\beta} = 0{,}82$) der Geltungsbereich der Rechnung ebenfalls verkleinert und sich etwas in Richtung wachsender Z-Werte (d. h. abnehmender Flugzeiten, Tab. II. S. 470) verschiebt.

Auch über $q_0 = \frac{\omega_0 l}{c}$ mußte oben eine Annahme gemacht werden. Vermöge der Beziehung (4) läßt sich dem für p_0 oben zugelassenen Intervall der Bereich: $0{,}5\,\pi + 2\,(k-1)\pi \gtrsim 2\,q_0 > 0{,}16\,\pi + 2\,(k-1)\pi$ zuordnen. Solange $k = 1$ ist, d. h. solange der Lechersche Kreis in der Grundschwingung erregt ist, darf in diesem Bereich unter der schon anfangs gemachten Voraussetzung kleiner Frequenzänderungen (ν) bei unverändertem Außenkreis der Bogen ($2\,q_0\nu$) als klein betrachtet werden. Ebenso ist $\operatorname{cotg}\,(2\,q_0)\cdot\operatorname{tg}\,(2\,q_0\nu)$ in dem angegebenen Intervall noch hinreichend klein gegen 1. Was die Oberschwingungen des Außenkreises anlangt ($k = 2, 3\ldots$), so kann unsere Annäherung nur in immer näherer Umgebung des rechtzeitigen Stoßes ($\nu = 0$) die Verhältnisse noch richtig wieder-

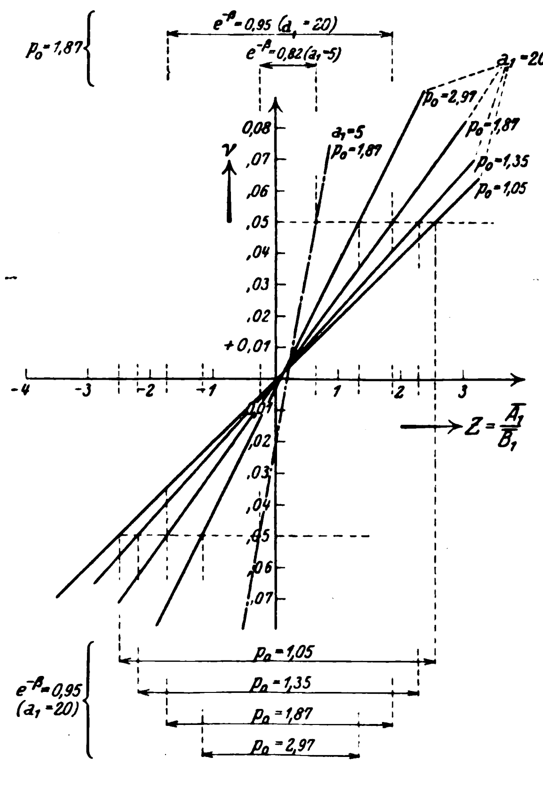


Fig. 11.

geben. Das bedeutet jedoch nicht eine gleichstarke Einschränkung des zulässigen Flugzeitintervalles (d. h. des Bereiches von Z), da mit wachsender Ordnungszahl k, also mit zunehmendem q_0 sich ohnedies ν erniedrigt (Gl. 7).

Zusammenfassend läßt sich sagen: Das Bestreben, die komplizierten mathematischen Zusammenhänge durch eine, wenn auch rohe, relativ einfache Näherung zu ersetzen, erfordert eine ziemlich starke Einschränkung ihrer Anwendung, und zwar decken sich die Geltungsbereiche der Rechnung — wie sich zeigen wird — in vielen Teilen ungefähr mit den experimentell beobachteten Bereichen der „Gill-Morell"-Schwingungen. Es ist dies die Hauptschwierigkeit in der mathematischen Behandlung des Problems. Sie legt den interessanten Gedanken nahe, daß außerhalb dieser Gebiete, wo die komplizierten Vorgänge im Elektronenmechanismus sich nicht mehr genügend „abschleifen" würden, die Störungen des denkbar einfachsten Verlaufs der Erscheinungen im allgemeinen dämpfend wirken, ja unter Umständen ein Anschwingen überhaupt unmöglich machen.

VI. Diskussion der Ergebnisse, Vergleich mit Experimenten.

Da bis jetzt die vorliegende Erzeugungsweise nur für sehr hohe Frequenzen in Betracht kommt, befassen wir uns hier nur mit dem nichtquasistationären Fall. In der oben entwickelten Theorie kamen wir zu dem Ergebnis, daß die Amplitude und die Frequenz der erregten Schwingung — wir setzen



nach wie vor totale Unterteilung voraus — von den Größen:

$$\overline{A}_1 = \frac{4\omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_1}{n_2^2} \quad \text{und} \quad \overline{B}_1 = \frac{4\omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_2}{n_2^2} \text{ abhängt.}$$

Dabei sind f_1 und f_2 die am Schlusse des III. Abschnittes angegebenen Funktionen von $(n_2\pi)$, einer Größe, die ihrerseits die Flugzeit der Elektronen zwischen Anode und Gitter (τ_2) charakterisiert und mit der Betriebsspannung am Gitter (V_g) in der einfachen Beziehung steht (S. 459):

$$n_2\pi = \omega\tau_2 = \frac{2\omega d_2}{\sqrt{2\varepsilon(V_g - V_f)}}. \tag{10}$$

Man erkennt sofort: Irgendwelche Einschränkungen der Funktionen f_1 und f_2 bedeuten bei gegebenem Außenkreis und gegebener Röhre auch gewisse Grenzen des anwendbaren Gitterspannungsbereiches. In der Tabelle II sind für verschiedene Argumente $(n_2\pi)$ die f_1- und f_2-Werte und die insbesondere interessierenden Kombinationen:

$$Z = \frac{\overline{A}_1}{\overline{B}_1} = \frac{f_1}{f_2} \quad \text{und} \quad y = \frac{f_2}{n_2^2} \text{ angegeben.}$$

Tabelle II.

$n_2\pi$	n_2	f_1	f_2	Z	Y	$n_2\pi$	n_2	f_1	f_2	Z	Y
30°	0,167	— 0,089	+ 0,102	— $0{,}87_3$	+ 3,66	210°	1,168	+ 4,32	+ 1,43	+ 3,01	+ 1,05
45°	0,250	— 0,264	+ 0,147	— 1,80	+ 2,35	240°	1,334	+ 2,34	+ $4{,}72_5$	+ 0,495	+ 2,66
60°	0,333	— 0,524	+ 0,089	— 5,88	+ $0{,}80_1$	270°	1,500	— 1,93	+ 5,46	— 0,353	+ 2,42
90°	0,500	— 0,989	— 0,587	+ 1,69	— 2,36	300°	1,668	— 5,72	+ 2,14	— $2{,}67_5$	+ 0,770
105°	0,583	— 0,951	— 1,19	+ 0,80	— 3,50	330°	1,834	— 5,28	— 3,35	+ $1{,}57_5$	— 0,995
119°	0,662	— 0,639	— $1{,}79_5$	+ 0,357	— 4,11	360°	2,000	0,00	— 6,28	0,00	— $1{,}57_5$
135°	0,750	+ 0,089	— $2{,}36_5$	— 0,038	— 4,21	390°	2,17	+ 5,58	— 2,92	— 1,91	— 0,620
150°	0,834	+ 1,09	— 2,60	— 0,419	— 3,73	420°	2,34	+ $5{,}05_5$	+ 4,07	+ 1,24	+ 0,742
180°	1,000	+ 3,37	— 1,57	— 2,14	— 1,57	450°	2,50	— $1{,}98_5$	+ 6,62	— 0,299	+ 1,06

1. Die Schwingungsbereiche.

In Fig. 12 ist der Verlauf der Funktion $Y = \frac{f_2}{n_2^2}$ und $Z = \frac{f_1}{f_2}$ graphisch dargestellt. Das Diagramm gibt sofort Antwort auf die Frage, in welchen Flugzeitbereichen $(n_2\pi)$ Schwingungen nach dieser Methode überhaupt unterhalten werden können. Schwingungen sind dann möglich, wenn der dynamische Widerstand der Röhre R_i bzw. sein reziproker Wert (siehe Abschn. III):

$$\frac{1}{R_i} = \frac{8\omega}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{V_2} \cdot Y \text{ negativ ist.}$$

Da Q den absoluten Betrag der aktiven Ladung bedeutet, muß also im Schwingungsfalle $Y < 0$ sein, eine Forderung, die dem Diagramm gemäß in zwei für unsere Rechnung noch in Betracht kommenden Gebieten:

$$0{,}37 < n_2 < 1{,}10$$

und

$$1{,}73 < n_2 < 2{,}25 \text{ (dieser Bereich nur für sehr kleine Amplituden!)}$$

erfüllt ist. Doch auch in diesen Intervallen können Schwingungen der berechneten Art nur erwartet werden, solange die Abweichung (ν) von der Eigenfrequenz des Außenkreises klein bleibt. Für das erste hauptsächlich in Betracht kommende Intervall sind die Gebiete, in welchen das hinreichend der Fall ist, für verschiedene Werte p_0 und Dämpfungen durch Übertragung aus Fig. 11 eingezeichnet. Während das erste oben angegebene Intervall ungefähr den Bereich der beobachteten „Gill-Morell"-Schwingungen umfaßt, liegen Messungen in dem zweiten Intervall nicht vor. Immerhin bestände die Möglichkeit, daß die gelegentlich, insbesondere von M. Grechowa[2]) beobachteten Wellen, die zweimal kürzer waren als die der Gill-Morellschen Beziehung: $\lambda^2 V_g = \text{const.}$ entsprechende Wellenlänge und deren Zustandekommen noch nicht geklärt ist, mit diesem Anregungsgebiet etwas zu tun haben. Sichere Schlüsse in dieser Richtung können jedoch einstweilen nicht gezogen werden, da wir uns hier an der Grenze der möglichen Extrapolation vorliegender Rechnung befinden.

2. Der „rechtzeitige" Anstoß.

An Hand von Fig. 12 läßt sich nun sofort die Frage beantworten, wie das Verhältnis $n_2 = \frac{\tau_2}{T/2}$ und damit die Gitterspannung zu wählen ist, damit irgendeine der Eigenfrequenzen ω_0 des äußeren Kreises angeregt wird. Gemäß Formel (7) ist in diesem Falle zu fordern $v = 0$, d. h.: es sind in den Gebieten, in welchen $Y < 0$ ist (negativer Widerstand!), diejenigen n_2-Werte zu suchen, für welche $Z = Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}$ wird.

a) Verschwindend kleine Dämpfung ($a_1 \rightarrow \infty$):

In diesem Falle ist $Z_0 = 0$. Den Eigenfrequenzen entsprechen dann gemäß Fig. 12 die Nullstellen der Funktion Z:

$$\text{I: } (n_2)_0 = 0{,}74 \quad \text{und} \quad \text{II: } (n_2)_0 = 2{,}0.$$

Von (II) sehen wir aus dem oben mitgeteilten Grunde einstweilen ab. Das durch Stelle (I) gegebene, dem rechtzeitigen Stoß im Falle unendlich kleiner Dämpfung entsprechende Verhältnis von Flugzeit

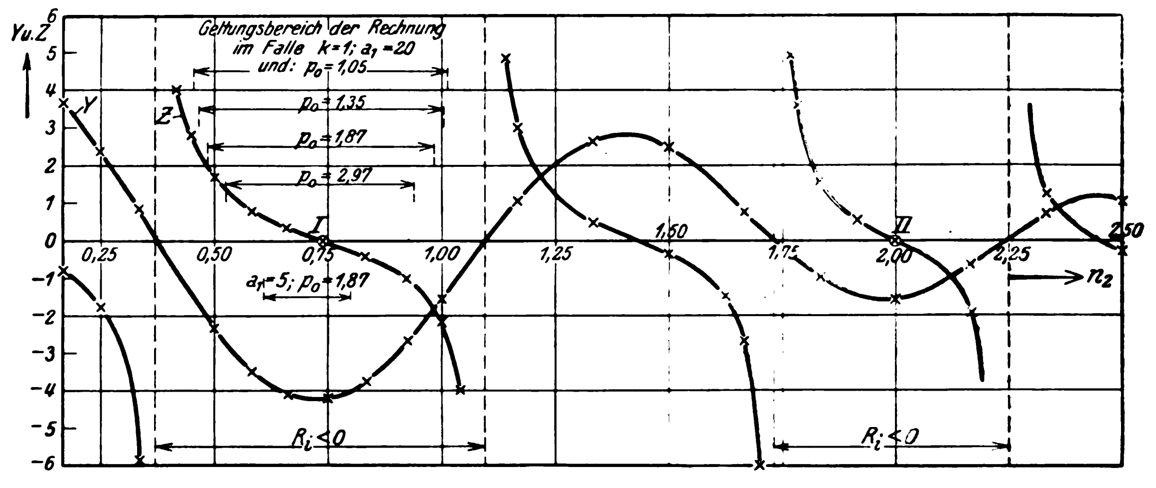


Fig. 12.

und halber Schwingungsdauer stimmt sehr gut mit dem von Gill und Morell experimentell und auf anderem Wege theoretisch für die günstigste Anregung ermittelten Werte überein. Setzt man diesen n_2-Wert in die Gl. (10) (S. 470) ein, so gelangt man zu dem schon von Gill und Morell mitgeteilten Grundgesetz: $\lambda^2 \cdot V_g = \text{const.}$, aus dem sich die zum rechtzeitigen Stoß jeweils erforderliche Gitterspannung errechnen läßt für $a_1 \rightarrow \infty$:

$$(V_g - V_f)_{0\,(\text{Volt})} = 7{,}30 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{d_2}{\lambda_0}\right)^2. \tag{11a}$$

b) Der Einfluß der Dämpfung auf die Erregung der Eigenfrequenzen:

Das Grundgesetz $\lambda^2 \cdot V_g = \text{const.}$ gilt jedoch, streng genommen, nicht mehr, wenn wir eine von 0 verschiedene Dämpfung in Betracht ziehen. Die Formel $Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}\left(\text{wobei } p_0 = \frac{\omega_0 C_s}{c C}\right)$ läßt erkennen, daß in diesem Falle der dem rechtzeitigen Stoß zukommende Z-Wert von der Frequenz und der statischen Kapazität C_s der Röhre abhängt, und zwar in um so höherem Maße, je größer die Dämpfung ist. Dasselbe gilt dann natürlich auch von der zugehörigen Flugzeit. Bei vorgegebener Röhre (C_s) verschiebt sich der zur Erregung der Eigenfrequenzen gehörige Wert $(n_2)_0$ mit wachsender Frequenz und Dämpfung nach Werten, die kleiner sind als 0,74, bleibt aber in der Nachbarschaft dieser Stelle. Die zugehörige Betriebsspannung berechnet sich dann nach der allgemeineren Formel:

$$(V_g - V_f)_{0\,[\text{Volt}]} = 4 \cdot 10^6 \left|\frac{d_2}{(n_2)_0 \cdot \lambda_0}\right|^2, \tag{11b}$$

wobei jetzt also $(n_2)_0$ vermöge der Beziehungen: $Z_0 = G(n_2)_0 = \frac{p_0}{2a_1} = \frac{\pi C_s}{\alpha_1 \lambda_0 C}$ selbst eine Funktion von λ_0 ist. Dieser Zusammenhang ist in Fig. 13 für eine bestimmte Elektronenröhre ($C_s = 3$ cm, $d_2 = 0{,}60$ cm) und eine bestimmte Dämpfung $a_1 = 20$ ($e^{-\beta} = 0{,}95$) durch die gestrichelte Kurve dargestellt, in Fig. 14a außerdem noch für $a_1 = 5$ ($e^{-\beta} = 0{,}82$) um die Verschiebung der Kurve bei Erhöhung der Dämpfung zu zeigen.

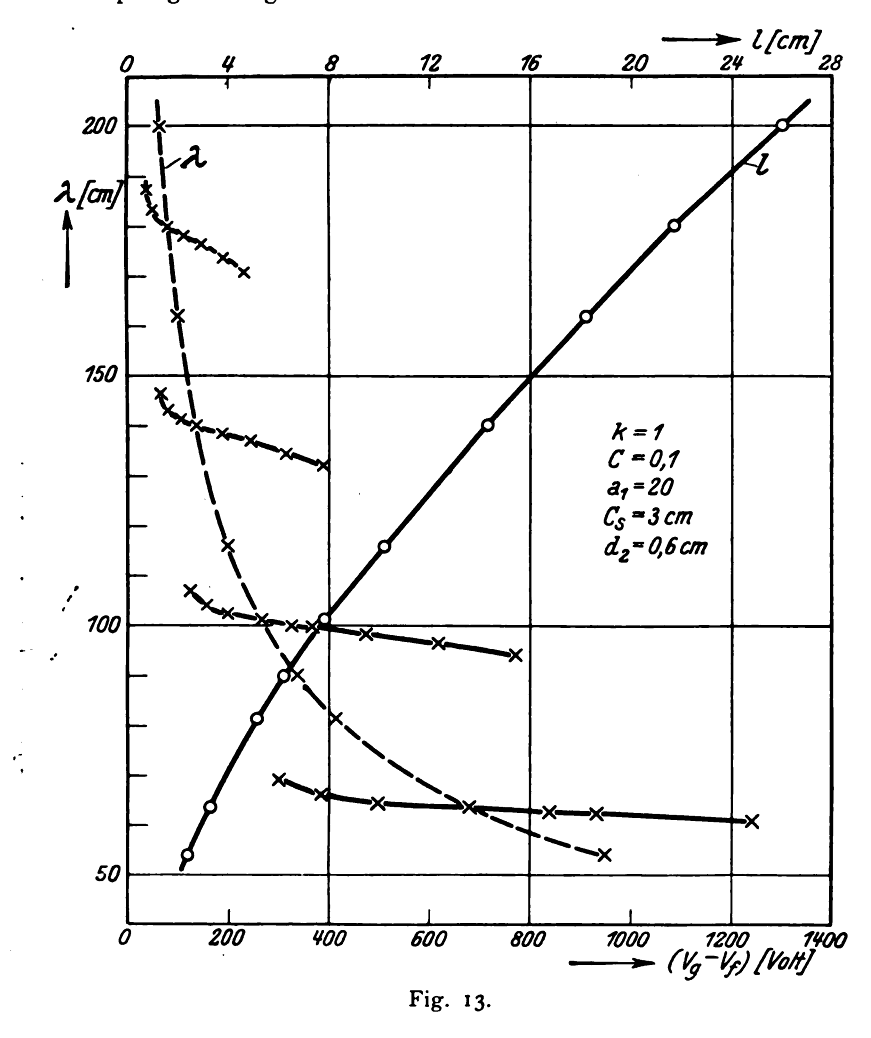


Fig. 13.

Jeder Eigenwelle λ_0 entspricht eine bestimmte Einregulierung der Länge l der angeschlossenen Außenleiter, die für die Daten ($C_2 \to \infty$; $C_s = 3$ cm; $C = 0{,}1$) und für die Erregung des Grundtones ($k = 1$) nach der bekannten Formel (vgl. S. 464)

$$l = \frac{\lambda_0}{4}\left(2k - 1 - \frac{(2\gamma_1)_0}{\pi}\right)$$

errechnet und in die Fig. 13 mit eingezeichnet wurde.

Um nun auch die beim rechtzeitigen Anstoß sich ausbildende „Normalamplitude“ als Funktion der zugehörigen Betriebsspannung $(V_g - V_f)_0$ bzw. der Wellenlänge λ_0 darzustellen, setzen wir die Größe $(B_1)_0 = \frac{4\omega_0 d_2}{\pi^4} \cdot Y_0$ zusammen mit dem im Abschnitt III, 3 für die aktive Ladung angegebenen Wert $Q_0 = i_a \cdot \frac{\pi}{\omega_0}$ in die Formel (8) für die Normalamplitude ein und erhalten:

$$(V_2)_{0\,[\text{Volt}]} = -\frac{0{,}48}{\pi^3} \cdot \frac{a_1}{C \cdot (1 + p_0^2)} \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{4a_1^2}\right) \cdot Y_0 \cdot i_{a\,[\text{mA}]}.$$

Die Normalamplitude hängt also über p_0 und indirekt über $V_0 = F(n_2)_0$ von der Normalwelle λ_0 und damit von der Betriebsspannung $(V_g - V_f)_0$ ab, außerdem von dem in den Raum „Gitter-Anode" gelangenden Elektronenstrom i_a. Der letztere ist seinerseits eine Funktion der Emission der Glühkathode, sowie der „Durchlässigkeit" des Gitters. Diese wiederum ist in unserem Fall in erster Linie durch die geometrischen Eigenschaften des Gitters gegeben, hängt aber im allgemeinen auch von der variablen Gitterspannung V_g ab und kann von Fall zu Fall aus dem Verhältnis des Sättigungsstromes an der Anode zum Emissionsstrom i_e ermittelt werden. Da es uns hier zunächst nur um eine qualitative Abschätzung der Vorgänge zu tun sein kann, nehmen wir vereinfachend an, daß stets

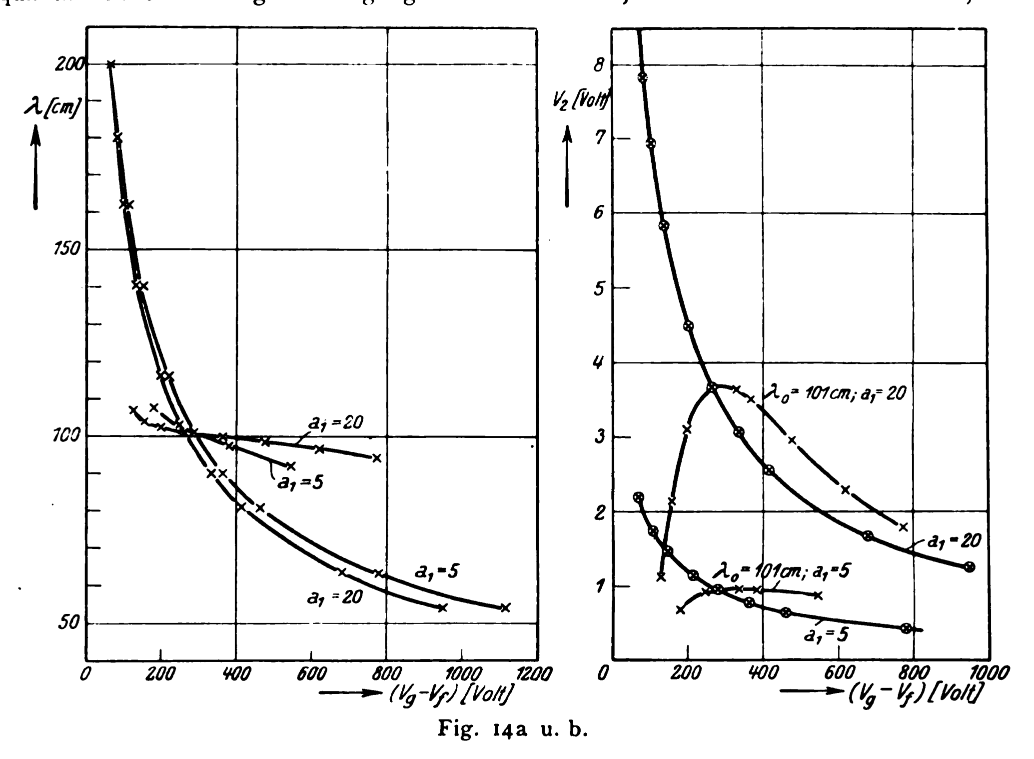


Fig. 14a u. b.

die Hälfte der emittierten Elektronen in den Raum „Gitter-Anode" gelange; wir setzen also: $i_a = m \cdot i_e$, wobei $m = \text{const.} = 0{,}5$ sei.

In Fig. 15 ist unter dieser Annahme der Zusammenhang zwischen der Normalamplitude $(V_2)_0$ und der Betriebsspannung $(V_g - V_f)_0$ für das schon oben eingeführte Beispiel und eine Emissionsstromstärke $i_e = 2{,}5$ [mA] durch die gestrichelte Linie eingezeichnet. Den Einfluß der Dämpfung zeigt Fig. 14b. Intensitätsmessungen, die zum Vergleich herangezogen werden könnten, liegen noch nicht vor.

3. Die praktische Grenze für die Verkürzung der Welle.

In der Fig. 16 ist für das genannte Beispiel diejenige Emissionsstromstärke i_e angegeben, die bei totaler Unterteilung nötig ist, um bei verschiedenen Abstimmungen (l) des Außenkreises, sowie verschiedener Dämpfung dessen Eigenwelle λ_0 zu einer Amplitude $(V_2)_0 = 10$ Volt zu erregen. Man erkennt, wie außerordentlich schnell sich die Betriebsverhältnisse der Röhre bei Verkleinerung der Eigenwelle λ_0 (d. h.: Vergrößerung von p_0) verschlechtern. Die Röhrenkapazität C_s wirkt bei steigender Frequenz mehr und mehr als schädlicher Nebenschluß. Die hierdurch erzwungene Steigerung der Emission ist bei den handelsüblichen Röhren, die einen elektrisch geheizten Faden als Kathode besitzen, noch wesentlich größer als in der Figur, weil dort wegen des Potentialgefälles am Glühdraht im Mittel nur eine unvollständige Unterteilung der Elektronen an der Anode eintreten kann, also ein kleinerer Bruchteil der emittierten Elektronen „aktiv" wird. Um bei möglichst hohen Frequenzen noch hinreichende Amplituden zu erzielen, muß man bei gegebenem Abstand „Anode-Gitter" (d_2) die Betriebsspannung $(V_g - V_f)$, sowie den Emissionsstrom möglichst steigern, die Röhrenkapazität C_s und damit die Elektroden möglichst klein halten (Verkleinerung von p_0!). Die erste Forderung: einer hohen Belastbarkeit der Röhre schließt aber die andere: kleiner Elektrodenausmaße aus. Man wird also einen Kompromiß zwischen beiden schließen müssen. Hierdurch ist eine praktisch nicht

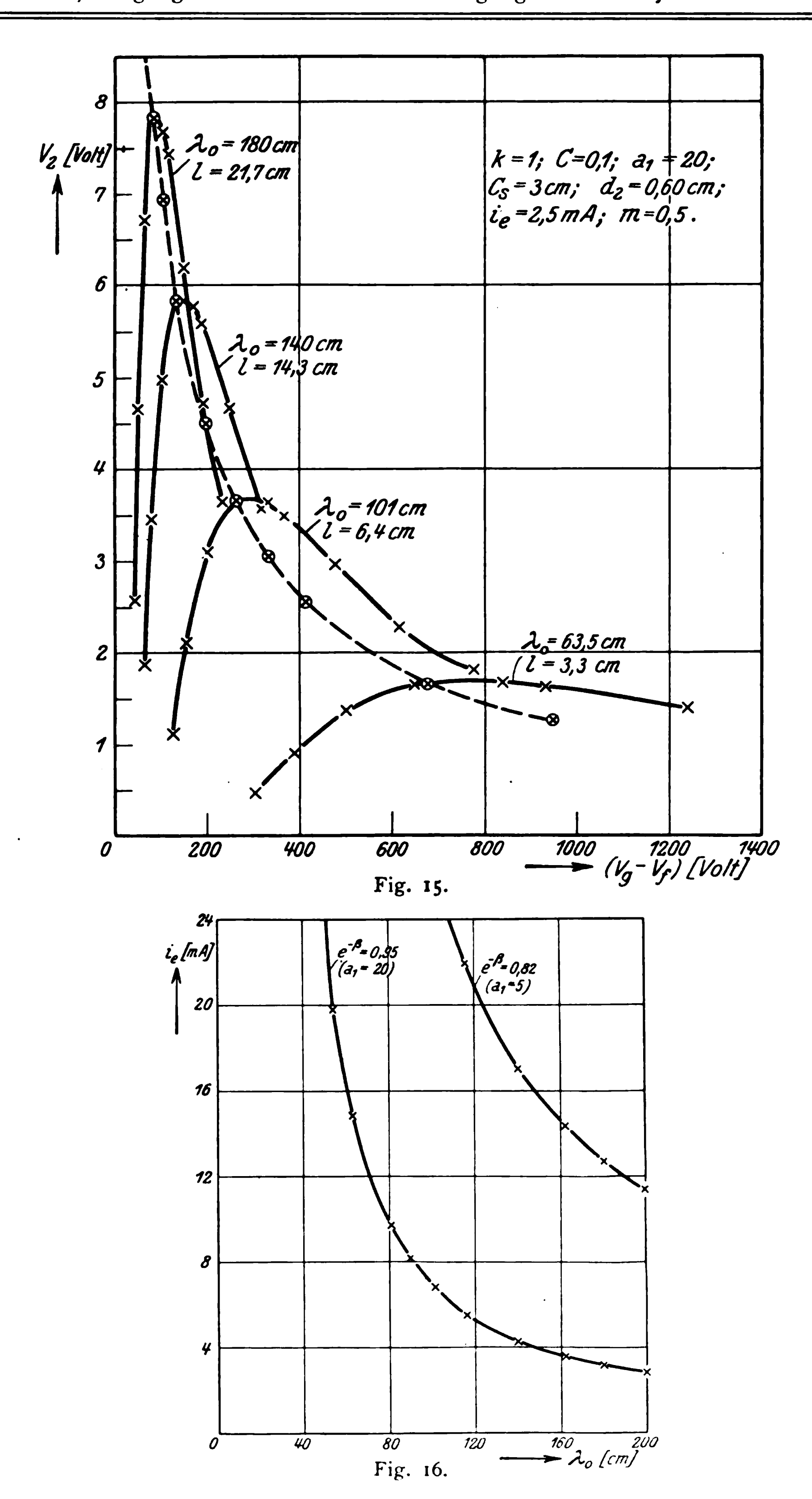


Fig. 15.

Fig. 16.

überschreitbare, untere Grenze für die nach vorliegender Methode erzielbaren Wellenlängen (es ist hier nur von der Grundschwingung die Rede) gegeben.

4. Die Abweichungen von der Eigenfrequenz und der Normalamplitude.

Die Experimentalarbeiten der russischen Forscher brachten die Feststellung, daß auch bei einer bestimmten Länge (l) des Außenkreises (d. h. konstanter Eigenwelle λ_0) Schwingungen nicht nur für eine einzelne, sondern für einen ganzen Bereich von Gitterspannungen (V_g) erhalten werden können, und zwar ändert sich in diesem Falle die Wellenlänge der Schwingung etwas mit der Variation von V_g. Der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Gitterspannung wird dann (l. c. die Fig. 17 und 18) durch ein „treppenartiges Gebilde" dargestellt, wobei einer bestimmten „Stufe" eine bestimmte Einregulierung (l) des Außenkreises entspricht.

Auch unsere oben entwickelte Theorie liefert in der Wellenlängenbeziehung:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot (1 - \nu) = \lambda_0 \cdot \left[1 - \frac{Z - Z_0}{2 a_1 \left(q_0 + \frac{p_0}{1 + p_0^2}\right)}\right] \tag{7a}$$

einen derartigen Zusammenhang, wie man sofort erkennt, wenn man sie auf das schon mehrfach erwähnte Beispiel:

$$a_1 = 20; \quad C = 0{,}1; \quad k = 1; \quad d_2 = 0{,}60 \text{ cm}; \quad C_s = 3 \text{ cm}$$

anwendet. In Fig. 13 sind die so errechneten „Stufen", und zwar in einer Länge, wie sie durch die Zulässigkeit unserer Rechnung bedingt ist, eingezeichnet. Außerdem wurde für die oben schon angenommenen Daten:

$$i_e = 2{,}5 \text{ [mA]}; \quad m = 0{,}5$$

die jeweilige Spannungsamplitude V_2 als Funktion von ($V_g - V_f$) nach der oben gewonnenen Formel:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} = (1 + 2 p_0 q_0 \nu) \cdot \frac{\overline{B}_1}{(\overline{B}_1)_0} \quad \text{berechnet,} \tag{9}$$

die sich nach Einsetzen aller bekannten Größen auf die Näherungsform bringen läßt:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} \sim [1 + (1 + 2 p_0 q_0) \nu] \cdot \frac{Y}{Y_0}.$$

$(V_2)_0$ und ν wurden oben schon berechnet; der Zusammenhang zwischen Y und $V_g - V_f$ (über n_2) ist bekannt. Es läßt sich also, wie das in Fig. 15 ausgeführt ist, auch die Abhängigkeit der Amplitude V_2 von der Gitterspannung V_g bei verschiedener Einregulierung (l) des Außenkreises aufzeichnen. Man erkennt, daß die Erregung der Maximalamplitude innerhalb einer Stufe sehr nahe mit derjenigen der Eigenfrequenz zusammenfällt.

Aus Fig. 14 entnehmen wir endlich noch, daß bei zunehmender Dämpfung sich der Einfluß der Gitterspannung auf die Wellenlänge bei konstantem Außenkreis verstärkt, die Stufe verläuft steiler.

Zwischen dem Experiment und der vorliegenden Theorie erkennen wir nun in folgenden Punkten die zunächst zu erweisende qualitative Übereinstimmung:

a) Die Wellenlänge innerhalb einer „Stufe" nimmt mit Erhöhung der Betriebsspannung ($V_g - V_f$) ab, und zwar in um so geringerem Maße, je kürzer die Eigenwelle λ_0 ist, auf die der zugehörige Außenkreis abgestimmt ist, je höher also das betreffende Gitterspannungsgebiet liegt. Man vgl. hierzu die Fig. 17 und 18 mit Fig. 13!

b) Die Grenzen der experimentell beobachteten Stufen (l. c. Fig. 18!) rücken im Gebiet höherer Gitterspannung mehr und mehr auseinander. Dieselbe Erscheinung erhalten wir in Fig. 13, wenn wir die Bereiche theoretisch mit der Gültigkeit unserer Näherungsrechnung, d. h. nach Maßgabe der Möglichkeit eines denkbar einfachsten Naturvorgangs abgrenzen (l. c. S. 469). Die Punkte maximaler Anregung (fette Punkte in Fig. 17, *M* in Fig. 18, Maxima in Fig. 15) liegen dann etwas gegen die linken Grenzen (kleiner Gitterspannung) der möglichen Anregungsintervalle verschoben.

c) Das Diagramm in Fig. 17 wurde von M. Grechowa an einem Zweiröhrengenerator (C_2 wurde durch eine zweite im Betrieb befindliche Röhre gebildet) aufgenommen. Wenn sich hierdurch auch nichts Wesentliches ändern kann gegenüber den für eine Röhre geltenden Betrachtungen, so gab doch erst die Anwendung der unserer Rechnung zugrunde liegenden Einröhrenschaltung durch N. Kapzov und S. Gwosdower[3]) Aufschluß über die genaue Form der im Fall $V_a \sim 0$ erhaltenen λ, V_g-Kurven (Fig. 18). Ein Blick auf Fig. 13 zeigt, daß auch dieser „cotangens"-ähnliche Verlauf der Stufen von unserer Theorie befriedigend wiedergegeben wird.

d) Bisher war in der Diskussion nur von dem Grundton des Außenkreises ($k = 1$) die Rede.



Da aus praktischen Gründen bei der Verkürzung der Welle oft der 1. oder 2. Oberton ($k = 2, 3, \ldots$) benutzt werden muß — der 1. Spannungsknoten rückt nämlich dann häufig ins Innere der Röhre —, sei kurz darauf hingewiesen, welche Änderung hierdurch bedingt ist.

Aus den Messungen der Fig. 17 läßt sich die Einwirkung der Ordnungszahl k auf die Form der einzelnen Stufen wenigstens ungefähr ablesen. Stellt man nämlich die Eigenwelle λ_0 als immer höhere anharmonische Oberschwingung des Außenkreises her ($k = 2, 3, 4 \ldots$), so sollte man zunächst,

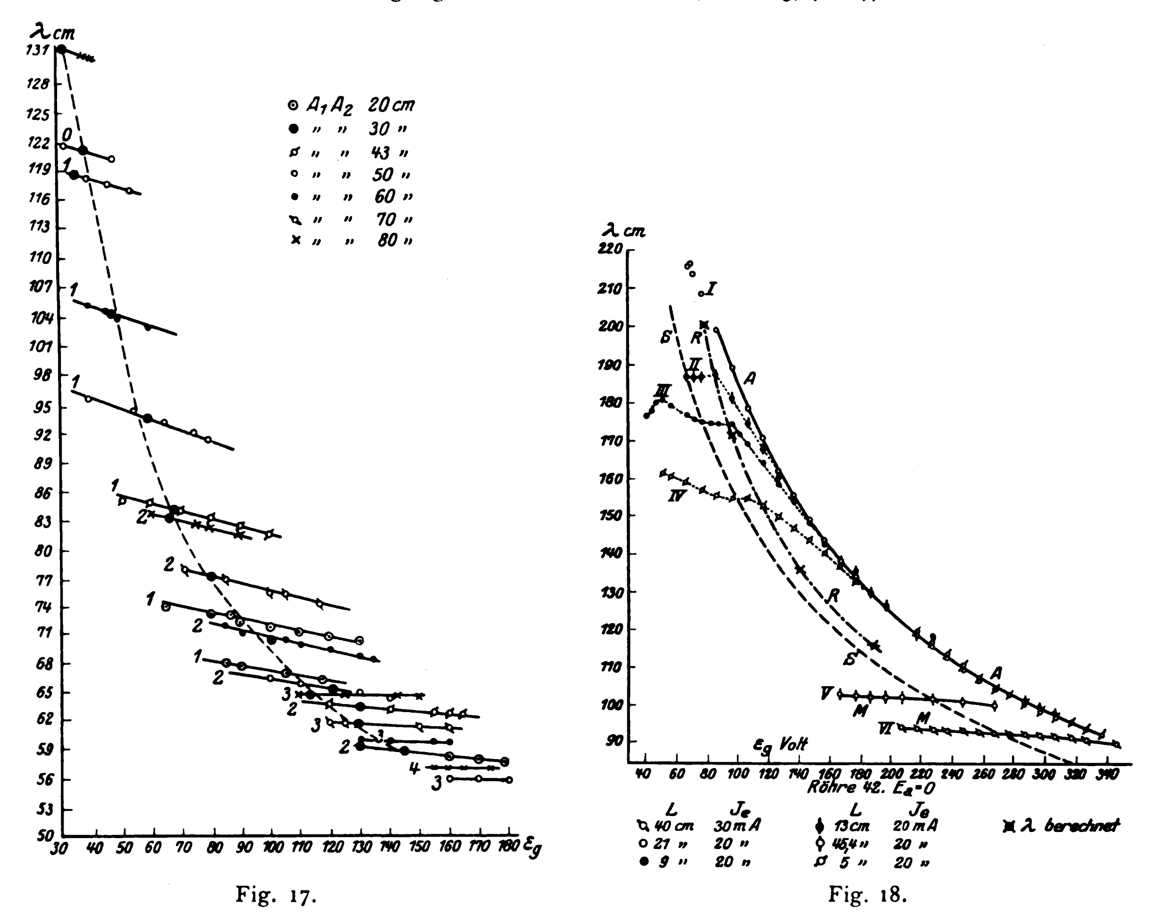


Fig. 17. Fig. 18.

da ja die Verlängerung der Lecherleitung eine Erhöhung der Dämpfung bringt, einen immer steileren Verlauf der Stufen erwarten. Das tritt aber nicht ein. Vergleicht man die Stufen 2, 3 mit der Stufe 1 im ungefähr gleichen Gitterspannungsniveau ($\lambda_0 = \mathrm{const}$), so erkennt man, daß die Neigung der Stufe mit wachsender Ordnungszahl im allgemeinen konstant bleibt. Für diese Tatsache finden wir in unserer Formel (7a) eine Erklärung, wenn wir uns an die Bedeutung der Größe $q_0 = \frac{\omega_0 l}{c} \doteq (2k - 1) \cdot \frac{\pi}{2} - (\gamma_1)_0$ erinnern. q_0 wächst mit k, so daß insbesondere beim Übergang vom 2. zum 3., 4.... Oberton*) die Einwirkung der erhöhten Dämpfung ungefähr durch die Vergrößerung von q_0 kompensiert werden kann. Genaueres läßt sich erst nach quantitativen Dämpfungsmessungen sagen.

5. Ungeklärte Fragen.

Es soll nun zum Schluß auf einige Punkte hingewiesen werden, die in vorliegender Theorie keine Erklärung gefunden haben. Vor allem ist dies die Abhängigkeit der Amplitude und der Frequenz von kleinen Änderungen des Anodenpotentials V_a. Hierzu kann vorläufig nur vermutungsweise folgendes gesagt werden: Solange es sich um eigentliche G.-M.-Schwingungen handelt und insbesondere infolge des Spannungsabfalles am Glühdraht eine Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen

*) In Fig. 17 bedeutet (1) die erste Oberschwingung, $k = 2$ in unserer Bezeichnung!

gegeben ist, wird eine Änderung des Anodenpotentials in erster Linie den Grad der Unterteilung an der Anode beeinflussen. Außerdem ist im Falle $V_a \neq V_f$ der Unterteilungsgrad natürlich eine Funktion der Amplitude V_2. Das gibt Anlaß zu folgender Überlegung:

Die Berechnung des Außenkreises lieferte ein bestimmtes Verhältnis $\frac{Q}{V_2}$ (1 in Fig. 19); damit also bei gegebenem Außenkreis und bestimmten Betriebsverhältnissen der Röhre die Amplitude V_2 aufrecht erhalten wird, muß die Unterteilung an der Anode eine dazu proportionale, bestimmte, aktive Ladung Q pro Periode verfügbar machen. Nur in dem oben behandelten Fall totaler Unterteilung ($V_a = V_f$) ist diese verfügbare Ladung von der Amplitude unabhängig, kann also bei vorgegebener Emission als konstant (2 in Fig. 19) angesehen werden. Ist jedoch $V_a \gtrless V_f$, so wird die verfügbare aktive Ladung selbst eine Funktion der Amplitude V_2; an die Stelle von (2) tritt eine durch den Unterteilungsmechanismus bedingte Kurve der Art (2′) in Fig. 20. Wenn man nun be-

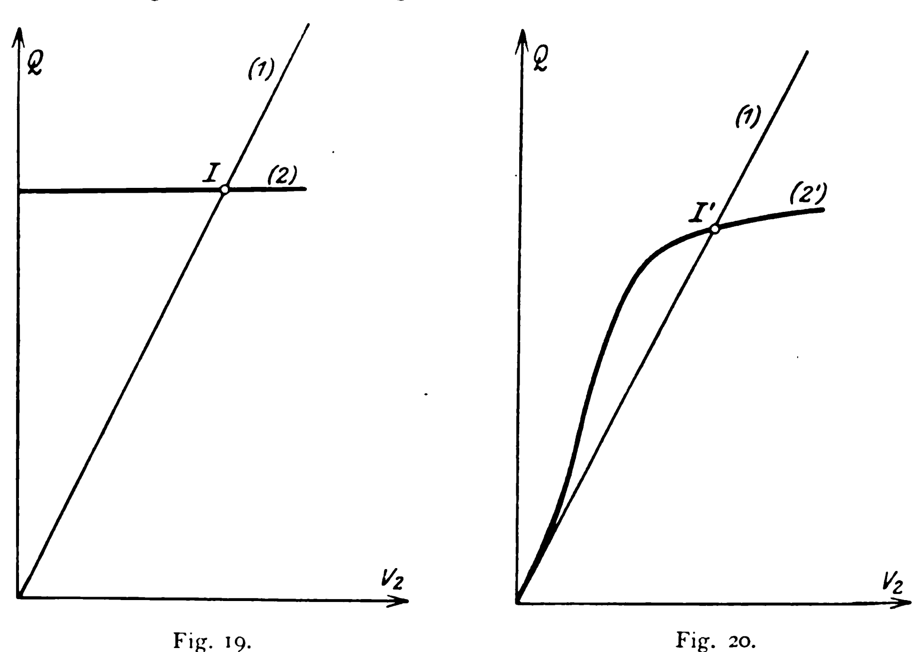


Fig. 19. Fig. 20.

achtet, daß sowohl die Neigung der Geraden (1) als auch der Verlauf von (2′) von den Betriebsbedingungen, der letztere insbesondere auch von V_a abhängt, erkennt man sofort, daß in diesem Falle die Lage des stationären Zustandes (I′) bzw. die Größe der stabilen Amplitude V_2 von dem Anodenpotential beeinflußt sein muß. Es ist wohl sofort klar, daß die Kurven (1) und (2′) hier eine ähnliche Rolle spielen wie Rückkoppelungsgerade und Schwingkennlinie bei der gewöhnlichen niedriger frequenten Arbeitsweise der Röhre[15]). Unsere Theorie, die nur den eingeschwungenenZustand, nicht die Anlaufbedingungen erfaßt, muß hier notwendig versagen.

Eine Berechnung der Kurve (2′) wäre aber auch zwecklos, solange nicht ein anderer weit wichtigerer Punkt geklärt ist. Es muß vor allem die bisher vernachlässigte Wechselspannung zwischen Glühdraht und Gitter und die damit zusammenhängende, unter Umständen hinzukommende B.- bzw. S.-Schwingung berücksichtigt werden. Eine theoretische Klärung dieser Frage dürfen wir aber nach einer Ankündigung von W. I. Romanoff durch das Moskauer Institut erwarten.

VII. Zusammenfassung und Schluß.

Es wurde in dieser Arbeit der Versuch gemacht, die Entstehungsweise der sog. „Gill-Morell"-Schwingungen in einer Theorie zu entwickeln, die ausgehend von einer Influenzwirkung der in der Röhre bewegten Elektronen, sowohl die Vorgänge in der Röhre als auch diejenigen im äußeren Schwingungskreis gleichzeitig in einheitlicher Weise erfaßt. Dabei gelang es einerseits den Einfluß der Dämpfung auf den Vorgang abzuschätzen, andererseits die bisher gleichfalls noch nicht geklärte Abhängigkeit der Wellenlänge von der Gitterspannung bei unverändertem Außenkreis aus der Theorie

15) H. G. Möller, „Die Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen". Sammlung Vieweg. 49, 2. Aufl.



zu errechnen und eine qualitative Übereinstimmung mit einschlägigen experimentellen Beobachtungen zu erzielen. Darüber hinaus kommt der hier an einem Spezialfall (Annahme totaler Unterteilung an der Anode) entwickelten Betrachtungsweise allgemeinere Bedeutung zu, insofern sie sich auch auf andere Mechanismen periodischer Ladungsbewegung nach Ermittelung der jeweiligen Fourierkoeffizienten ($\overline{A}_1$, $\overline{B}_1$) bzw. der zugehörigen Funktionen (Y und Z) übertragen ließe*).

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Würzburg ausgeführt. In den Jahren 1925/26 beschäftigte sich der Verfasser mit experimentellen Untersuchungen, die einerseits die Verkürzung der Wellenlänge, andrerseits die Klärung des Zusammenhangs zwischen Außenkreis und Elektronenmechanismus zum Ziele hatten. Zunächst gelang es mit der Holbornschen Gegentaktschaltung[16]) durch Verwendung kapazitätsarmer Röhren im Betriebe ($V_a \gg V_g$) die Wellenlänge auf 120 cm zu erniedrigen. Der Übergang zu dem für die weitere Verkürzung der Welle günstigeren Barkhausenschen „Bremsfeldbetrieb" ($V_a \ll V_g$) konnte unmittelbar an dieser 2-Röhrenschaltung gemacht werden. Der Ersatz der einen Röhre durch einen sehr kleinen, veränderlichen bzw. durch einen großen festen Kondensator führte zur Marconi- bzw. schließlich zur G.-M.-Schaltung (l.c. S. 464). Die kürzeste im Falle $V_a \ll V_g$ erreichte Wellenlänge betrug 45 cm. Die weitere Verkürzung der Welle hätte Spezialkonstruktionen besonders kapazitätsarmer Röhren erfordert, wozu die Mittel nicht vorhanden waren. Im Gegensatz zu mancher früheren Beobachtung war das Zustandekommen dieser Schwingungen nicht sonderlich von der Röhrentype abhängig; insbesondere konnten auch bei ebener Elektrodenform Schwingungen dieser Art erhalten werden. Ferner zeigte sich, daß die Wellenlänge — es handelte sich dabei immer um G.-M.-Schwingungen — in erster Linie durch den von der Röhrenkapazität und den Außenleitern gebildeten Schwingungskreis bestimmt war; im Gegensatz zu den S.-Schwingungen konnte also bei konstantem Außenkreis die Gitterspannung in ziemlich weiten Grenzen variiert werden, ohne daß eine beträchtliche Änderung der Wellenlänge auftrat (siehe die „Stufen" oben!). Es erübrigt sich, auf alle diese Voruntersuchungen einzugehen, da sie durch weitergehende Veröffentlichungen von A. Scheibe[14]) und M. T. Grechowa[2]) überholt wurden. Für die Fortführung der experimentellen Untersuchung konnten die erforderlichen Hilfsmittel erst allmählich beschafft werden, andrerseits erschien der mathematische Ausbau einiger an die bisherigen experimentellen Ergebnisse geknüpften Vermutungen und Überlegungen im Hinblick auf die Gewinnung schärferer Fragestellungen wünschenswert. Es wurde deshalb einstweilen vorliegende theoretische Arbeit durchgeführt. Die Fortführung der experimentellen Untersuchung ist in Angriff genommen.

Zum Schlusse möchte ich vor allem Herrn Prof. Dr. F. Harms für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie sein stetes Interesse, für seine wertvolle Kritik bei der Sichtung der zahlreichen theoretischen Möglichkeiten, endlich für die Bereitstellung eigener Apparate zu einer ersten experimentellen Orientierung meinen aufrichtigsten und wärmsten Dank zum Ausdruck bringen. Ferner bin ich für die Überlassung einiger Apparate Herrn Prof. Dr. E. Wagner zu Dank verpflichtet.

Bei der experimentellen Voruntersuchung konnten Mittel, welche vom Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft bewilligt waren, benutzt werden, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt werden möge.

Weiter sei bestens gedankt der Marconi Osram Valve Co. London, sowie dem Radioröhrenlaboratorium Nishnij-Nowgorod, welche in freundlicher Weise für diese Versuche einige besonders geeignete Röhren kostenlos zur Verfügung stellten.

*) Nachtrag bei der Korrektur: Durch das Entgegenkommen von Herrn Prof. Dr. Rau ist mir eine inzwischen in den Ann. d. Phys. **86**, 129, 1928 erscheinende Experimentalarbeit von H. Hollmann zugänglich geworden. Diese liefert den klaren Nachweis, daß nicht nur in dem in vorliegender Arbeit ausschließlich behandelten Fall $V_a \sim 0$, sondern auch im Falle merklich negativer Anode in gewissen Gebieten eine starke Beeinflussung der Wellenlänge λ durch die Länge (l) der Außenleiter eintritt. Die dort angegebenen Kurven $\lambda = f(l)$ lassen erkennen, daß es sich auch in diesem Falle, wie es schon von K. Kohl (l. c. S. 449) vermutungsweise ausgesprochen wurde, um zwei miteinander gekoppelte Systeme: Elektronenmechanismus und Außenkreis handelt. Es ergibt sich also die Möglichkeit und Notwendigkeit die oben entwickelte Theorie auf die auch praktisch besonders wichtigen B-Schwingungen auszudehnen, möglichst unter Verzicht auf die Annahme kleiner Amplituden und geringer Frequenzänderungen. Das kann offenbar in der Weise geschehen, daß die Influenzwirkung der nach der Barkhausenschen Vorstellung um das Gitter pendelnden Elektronen berücksichtigt und die in bekannter Weise aus den Flugzeiten im Gesamtraume „Kathode-Anode" ermittelte Periode als „Eigenperiode des Elektronenmechanismus" in die Rechnung eingeführt wird.

16) F. Holborn, Zeitschr. f. Phys. **6**, 328, 1922.

Würzburg, Physikal. Institut d. Universität, im März 1928.

(Eingegangen 31. März 1928.)



Radioaktive Niederschläge auf Hochantennen.

Von F. Schindelhauer.

Befindet sich ein geerdeter Leiter von der Kapazität C im elektrischen Felde der Erde, so ist er mit einer Elektrizitätsmenge Q geladen, welche bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{Q}{C} + V = 0, \qquad (1)$$

wo V das Potential an der Stelle ist, an welcher sich der Leiter befindet. Bei normalem Zustande des Erdfeldes trägt der Leiter negative Oberflächenladung. Durch den erdenden Draht fließt ein Strom, sobald

1. das elektrische Feld sich ändert. Die Stromstärke beträgt alsdann $C\frac{dV}{dt}$.
2. die Oberflächenladung des Leiters durch Ionisation an die ihn umgebenden Luftteile abgegeben wird.

Am Observatorium Potsdam sind Beobachtungen des unter 2 angegebenen Stromes angestellt worden. Über einige Versuche in dieser Richtung ist schon in dieser Zeitschrift berichtet[1]). Als geerdete Leiter werden Hochantennen benutzt, in deren Erdleitung ein Meßinstrument liegt. Bei der Fortsetzung dieser Versuche ist der Ausgleichstrom einige Monate lang photographisch aufgezeichnet worden. Über die Ergebnisse dieser Versuche soll hier berichtet werden. Meist ist ein Drehspul-Spiegelgalvanometer als Meßinstrument benutzt worden. Als Elektroden dienen die in der früheren Untersuchung (a. a. O.) beschriebenen beiden Schirmantennen, die in 6 m bzw. 30 m Höhe angebracht sind, ferner eine etwa 120 m lange L-Antenne in ungefähr 35 m Höhe. Die Kapazitäten dieser Antennen weichen nicht erheblich voneinander ab, sie betragen

für die Niedrigantenne	$C = 1240$ cm
„ „ Hochantenne	$C = 1220$ cm
„ „ L-Antenne	$C = 1020$ cm.

Da immer nur ein Meßinstrument für diese Versuche zur Verfügung steht, so wird mit den beiden Schirmantennen nacheinander gearbeitet, die Umschaltung auf eine andere Antenne geschieht alle 2 Stunden oder in längeren Intervallen.

Die Antenne wird über das mit einem passenden Nebenschluß versehene Galvanometer hinweg geerdet. Die Messung ist richtig, sobald der Erdungswiderstand klein ist gegenüber den Isolationswiderständen. Die Registriertrommel hat 24stündigen Umlauf. Die Auswertung der erhaltenen Kurven geschieht in der Weise, daß Stundenmittelwerte abgelesen werden. Dann werden aus ihnen Tages- und Monatsmittelwerte errechnet, — endlich mehrere Monate zusammengefaßt. Für die Berechnung der Tagesmittel wird nicht der Zeitraum von Mitternacht bis Mitternacht, sondern von 8^h morgens bis 8^h des nächsten Tages gewählt; hauptsächlich deswegen, weil 8 a Beobachtungstermin am Potsdamer Observatorium ist (Ablesung der Bodenthermometer), das Auflegen des neuen Bogens auf den photographischen Registrierapparat geschieht ebenfalls um 8 a.

Es ergeben sich dabei für zwei aufeinanderfolgende Jahre folgende Mittelwerte für die 4 Beobachtungsperioden:

I. Juni, Juli, August L-Antenne 2,08 10^{-8} Amp. (26 Tage),
II. Nov., Dez., Hochantenne 14,23, Niedrigantenne 1,39 (24 Tage),
III. Januar, Febr., Hochantenne 1,15, Niedrigantenne 1,54 (20 Tage),
IV. Mai, Juni Hochantenne 17,43 (14 Tage).

Die Werte sind auffallend niedrig in Periode I und III. Periode II unterscheidet sich von der unmittelbar folgenden Periode III durch hohe und sehr wechselnde Temperaturen und Nichtvorhandensein einer Schneedecke von längerer Dauer. Während Periode III ist die Schneedecke fast dauernd sehr hoch und die Temperaturen auch in der ersten Hälfte des Februar niedrig. Im ganzen läßt sich sagen, daß die Werte des Ausgleichstromes im heißen Sommer und kalten Winter niedrig sind, dagegen sehr hoch im Frühjahr bei Erwärmung des Bodens. Bemerkenswert ist das Verhalten der Niedrigantenne in den beiden Perioden II und III. Die Periode III begünstigt das Auftreten von Bodeninversionen, von unmittelbar dem Erdboden aufliegenden kalten Luftschichten, in denen jede Austauschbewegung mit höheren Schichten fast völlig unterbleibt. In meiner früheren Untersuchung habe ich versucht, das Verhalten des Ausgleichstromes dadurch zu erklären, daß ich einen radioaktiven Niederschlag auf der negativ elektrischen Antenne angenommen habe. Die durch Bodenatmung aus dem Erdboden austretenden Emanationen streichen an der Antenne vorbei, wenn sie durch Luftaustausch in die Höhe geführt werden und lagern auf dem negativen Sammlerdraht einen aktiven Niederschlag ab. Bei der Ausbildung von Bodeninversionen muß das gesamte radioaktive Gas über der Erdoberfläche liegen bleiben und kann nicht in größere Höhen gelangen. So erklärt sich der hohe Wert des Ausgleichstromes in der Niedrigantenne in Periode III. Ist die obige Erklärung richtig, so muß der Ausgleichstrom hauptsächlich abhängig sein von Luftdruckänderungen, von der Erwärmung des Bodens, vom elektrischen

1) Physik. Zeitschr. 23, 36—39, 1922.

Felde, in dem sich die Antenne befindet und endlich von den Faktoren, die den Austausch begünstigen oder hemmen.

1. Luftdruck. Nach den Registrierungen des Laufgewichtsbarographen Sprung[1]) werden die Werte der stündlichen Änderung des Luftdrucks für diejenigen Zeiten ermittelt, für welche Aufzeichnungen des Ausgleichstromes vorliegen. Dann werden hieraus Tagesmittel (8 a—8^h) der stündlichen Luftdruckänderung gebildet, welche also genau den Tagesmitteln des Ausgleichstromes entsprechen. Es werden Stufen des fallenden und steigenden Luftdrucks abgeteilt und die zugehörigen Werte des Ausgleichstromes für jede Stufe gemittelt. So ergibt sich für die Stufen:

Tabelle I.

Luftdruckänderung	+ 3 — + 1 mm	+ 1 — 0 mm	0 — — 1 mm	— 1 — — 2 mm	— 2 — — 4 mm
	steigen		fallen		
Ausgleichstrom	2,6	2,5	6,1	16,0	21,2 · 10^{-8} Amp.

Also fallender Luftdruck ergibt weit höhere Stromwerte als steigender Druck, weil bei fallendem Barometer die Emanation aus dem Boden ausgeblasen wird. Die Zahlen der letzten Stufen sind mit einem ziemlich hohen mittleren Fehler behaftet, weil die Anzahl der Beobachtungen noch zu gering ist. Es kommt ja hier aber nur darauf an, den allgemeinen Funktionsverlauf ungefähr festzulegen. Die obigen Zahlen gelten für die Hochantenne. Für die Niedrigantenne ergibt sich:

	steigend	fallend
Luftdruckänderung	+ 3 — 0	0 — — 4 mm
Ausgleichstrom	1,88	2,44 · 10^{-8} Amp.

Also wiederum ein deutlicher Anstieg des Stromes mit fallendem Barometer.

Dieses Resultat gilt für aperiodische Luftdruckänderungen. Der tägliche Gang des Barometers macht sich im Verlauf des Ausgleichstromes (s. weiter unten) nicht in derselben Weise bemerkbar. Vielmehr laufen hier die Kurven manchmal durchaus parallel.

2. Bodentemperatur. Die Bodenatmung hängt ferner von den Temperaturänderungen im Boden ab. Sieht man von größeren Tiefen ab, so muß bei steigender Temperatur während des Tages die emanationshaltige Luft der oberen Schichten ausgetrieben werden. Die Erscheinung wird sich allerdings dadurch komplizierter gestalten, daß eine Wechselwirkung der verschiedenen Schichten sich ergibt.

Von einer näheren Untersuchung ist zunächst bei dem geringen zur Verfügung stehenden Material abgesehen worden.

Im Jahresgange wird der Einfluß der Bodentemperaturänderung so zur Geltung kommen, daß im Frühjahr bei steigender Erwärmung der mit Emanation angereicherten Schichten große Mengen von aktivem Niederschlag auf der Antenne angesammelt werden. So erklärt sich der hohe Wert des Ausgleichstromes in Periode IV (Mai—Juni) von 17,4 · 10^{-8}. Im Hochsommer scheint dagegen der Boden nicht so viel Emanation nachliefern zu können wie durch den sehr großen Luftaustausch vom Erdboden in die höheren Luftschichten abtransportiert wird. Die Luft in der Umgebung der Antenne ist daher arm an radioaktiven Gasen (Periode I: 2,1 · 10^{-8} Amp.). Den Einfluß der aperiodischen Änderungen der Bodentemperatur erhält man in ähnlicher Weise wie den der Luftdruckänderungen. Es stehen aber nur zweimal tägliche Ablesungen der Bodenthermometer (um 8^h und 14^h) zur Verfügung. In Tabelle II ist die Änderung der Bodentemperatur von 8 a^h bis 8^h des folgenden Tages untersucht, die Tagesmittelwerte des Ausgleichstromes sind ja für den gleichen Zeitraum berechnet. Tabelle II zeigt demnach die Abhängigkeit dieser Tagesmittel des Ausgleichstromes von der Änderung der Bodentemperaturen in den Tiefen 2, 5, 10 und 20 cm für die gleiche Zeit; und zwar sind lediglich 2 Stufen: negative und positive Änderung gewählt worden. Die Perioden II und III (Nov., Dez., Jan., Febr.), sowie I, IV (Mai, Juni, Juli, August)

Tabelle II.

Abhängigkeit des Ausgleichstroms von der Änderung der Bodentemperatur (8 a—8 a) in verschiedenen Tiefen.

Tiefe m	Beob. Perioden	Ausgleichstrom bei fallender Temperatur	Ausgleichstrom bei steigender Temperatur
0,02	II. III	2,0	6,8 · 10^{-8} Amp.
	I. IV	2,1	6,0
0,05	II. III	2,2	7,6
	I. IV	1,5	5,8
0,10	II. III	2,4	6,3
	I. IV	4,6	6,4
0,20	II. III	2,4	6,0
	I. IV	6,2	4,5

1) Sprung, Ergebn. d. Met. Beob. in Potsdam. J. 1893. Berlin 1895.

Tabelle III.

Temperaturänderung 8^h—8^h und 8^h—14^h in verschiedenen Bodentiefen für Stufen des Ausgleichstromes (Mittelwerte 8^h—8^h).

Tiefe m	Beob. Periode	Ausgleichstrom 0—1	1—5	$5 \cdot 10^{-8}$ Amp.	Ausgleichstrom 0—1	1,5	$5 \cdot 10^{-8}$ Amp.
		Temperaturänderung 8^h—8^h			Temperaturänderung 8^h—14^h		
0,02	II. III	—0°,6	—1,0	+1,5	2,8	3,6	5,4
	I. IV	+0,1	+1,0	+1,2	15,9	14,3	10,7
	Mittel	—0,2	—0,1	+1,4			
0,05	II. III	—0,6	—1,1	+1,5	2,8	3,2	5,0
	I. IV	+0,0	+1,2	+1,1	13,3	11,4	9,1
	Mittel	—0,3	+0,0	+1,3			
0,10	II. III	—0,7	—0,9	+1,5	2,2	2,6	4,1
	I. IV	—0,3	+1,5	+0,4	8,6	9,8	7,2
	Mittel	—0,5	+0,2	+0,6			
0,20	II. III	—0,2	—0,8	+0,8	0,8	1,1	1,4
	I. IV	—0,0	+1,4	—0,1	4,8	5,8	4,4
	Mittel	—0,1	+0,2	+0,3			
0,50	II. III	—0,1	—0,1	—0,3			
	I. IV	—0,2	+0,9	—0,1			
	Mittel	—0,2	+0,3	—0,2			

sind jedesmal zusammengefaßt worden. Bei steigender Temperatur ist der Ausgleichstrom im Mittel etwa 3mal größer. In 20 cm Tiefe stimmt die Sache im Sommer aber nicht mehr (Periode I, IV); vielmehr ist hier der Ausgleichstrom bei steigender Temperatur kleiner. Hier bieten sich zwei Erklärungsmöglichkeiten: 1. die starke Verzögerung der Phase, in 20 cm Tiefe fällt das Maximum auf 17^h (gegen 14^h in 10 cm)[1]). 2. Die bereits erwähnte Möglichkeit des Austauschs nach unten. Durch die starke Erwärmung der oberen Bodenschichten wird die Emanation auch gegen die tieferen Schichten getrieben, welche eine Phasenverzögerung um 90° haben, deren Gaseinschlüsse also ihr Volumen verkleinern. Bei der kurzen Dauer der Nächte können sich die oberen Schichten nicht genügend mit Emanation frisch versorgen.

In Tabelle III sind die mittleren Änderungen der Bodentemperaturen berechnet, welche verschiedenen Werten des Ausgleichstromes entsprechen. Die ersten drei Vertikalreihen geben die Änderung der Bodentemperatur von 8 a^h bis 8^h. Fast durchweg werden die größten Stromwerte durch die größten Temperaturanstiege hervorgerufen, nur in der Tiefe 50 cm nicht mehr. Bereits in 20 cm tritt das Gesetz im Sommer außer Kraft. Noch besser erscheinen die besonderen Verhältnisse des Sommers im zweiten Teile der Tabelle III, welcher die Temperaturänderung von 8—14^h — also ungenau ausgedrückt — die Amplitude des täglichen Ganges der Bodentemperatur angibt. Im Winter bewirkt in sämtlichen Tiefen die größte Temperaturamplitude auch die größten Stromstärken, während im Sommer gerade in geringen Tiefen das Verhältnis sich am deutlichsten umkehrt. Durch die sehr starke Erwärmung der oberen Schichten wird eben die hier befindliche Emanation sehr schnell nach oben getrieben. Ein Nachschub aus tieferen Schichten findet aber nicht statt wegen des in den oberen Schichten herrschenden Überdrucks. Ferner ist im Sommer der günstigste Wert des Austausches überschritten, die Emanation wird in größere Höhen geschafft und die Konzentration in der Umgebung der Antenne bleibt gering.

3. Potentialgefälle. Ist η die Ladung des exponierten Leiters pro Längeneinheit, so fließt durch die an ihn heranfliegenden Ionen entgegengesetzten Vorzeichens der Strom $4\pi\eta n e v$ zur Erde ab, wo n die Anzahl der Ionen in der Volumeinheit und v ihre Beweglichkeit ist. Das gleiche Gesetz gilt für radioaktive Träger; die Zahl der auf der Längeneinheit niedergeschlagenen A-Atome ist[1]):

$$m = 4\pi u \eta N.$$

Es muß also sowohl die Anzahl der aufgefangenen Ionen wie die der A-Atome mit der

1) Süring, Der tägliche Temperaturgang in geringen Bodentiefen, Abh. d. Pr. Met. Inst. Bd. V, Nr. 6, 1919.

1) Swann, Terr. Magn. **19**, 76, 1914; Meyer u. Schweidler, Radioaktivität II. Aufl. 1927, S. 582.

Tabelle IV.
Potentialgefälle und Ausgleichstrom (Tagesmittel).

Beobachtete Periode	Potentialgefälle			
	0—100	100—200	200—300	300—400 V.
II. III	—	1,45	1,60	7,03
I. IV	1,26	6,02	13,65	
Hochantenne Mittel	1,26	4,61	3,61	7,03
Niedrigantenne	—	0,70	1,59	3,00

Ladung des Sammlerdrahts, d. h. nach Gl. (1) mit der Feldstärke zunehmen.

Das Potentialgefälle wird in Potsdam laufend auf der Wiese mit einem Benndorf-Elektrometer aufgezeichnet[1]) und es werden Mittelwerte für jede Stunde ausgewertet. Für die vorliegende Untersuchung wird angenommen, daß die dort gemessenen Feldstärkeänderungen denjenigen proportional sind, die in der Umgebung des Sammlerdrahtes stattfinden. Bei Feststellung des aperiodischen Verlaufs sind die Tagesmittel in derselben Weise und für die gleichen Zeiträume (8^h—8^h) berechnet worden wie die des Ausgleichstroms. Tabelle IV zeigt die Zusammenstellung dieser Ergebnisse nach Stufen des Potentialgefälles geordnet. Die Stromwerte steigen in der Tat mit zunehmender Feldstärke, aber weniger als erwartet. Nur bei der Niedrigantenne scheint ziemliche Proportionalität mit der Feldstärke zu herrschen. Anschaulicher ergibt sich der Einfluß der Feldstärke bei der Untersuchung des täglichen Ganges (s. unten).

4. Windgeschwindigkeit. Bei gleichbleibendem Gehalte der Luft an Emanation sollte nach der Formel von Swann die Menge der auf den Sammlerdraht niedergeschlagenen *A*-Atome von der Windgeschwindigkeit unabhängig sein. Bei den Schirmantennen sollte auch die Windrichtung ohne Einfluß sein. In der Tat wird nun aber durch Austauschvorgänge der Gehalt der unteren Schichten an radioaktiven Gasen beträchtlich geändert. Besonders große Schwankungen zeigen sich unmittelbar über dem Boden, weil hier die kurzlebigen Thoriumprodukte in die Erscheinung treten können, sobald der Austauschkoeffizient[2]) einen bestimmten Wert überschreitet. W. Schmidt und F. Heß haben unter der Annahme eines bestimmten Austauschkoeffizienten die Höhenverteilung der Emanationen und Zerfallsprodukte berechnet[3]).

Die Austauschwerte in der Nähe der Erdoberfläche unterliegen nun zweifellos außerordentlich großen Schwankungen im Laufe des Tages sowohl wie in größeren Zeiträumen. Mit ihnen ändert sich auch die Menge und Art der in der Umgebung der Sammlerdrähte vorhandenen Emanation, so daß der Vorgang ziemlich kompliziert ist. Es kann sich hier bei diesen Messungen, die lediglich als Vorversuche zu betrachten sind, nur darum handeln, den Einfluß der den Austausch bestimmenden Faktoren in großen Zügen zu untersuchen. Zweifellos ist es aber möglich mit Hilfe ähnlicher quantitativ eingerichteter Versuche den Austauschkoeffizienten aus dem Gehalt an radioaktiven Substanzen mit ziemlicher Genauigkeit zu ermitteln, während andere gebräuchliche Methoden unmittelbar über der Erdoberfläche versagen dürften. Ein besonders empfindliches Reagens würden dann die *Th*-Produkte für diese kleinen Austauschkoeffizienten abgeben.

Der Austausch nimmt mit der Windgeschwindigkeit zu, die Turbulenzelemente nehmen an Größe zu[1]). Für den vorliegenden Zweck sind die Registrierungen des auf dem großen Turme des Observatoriums über der Hochantenne angebrachten Schalenkreuzanemometers verwendet worden. Seine Angaben sind wiederum für die gleichen Zeiträume, für die Stromwerte vorhanden sind, zu Tagesmitteln vereinigt. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle V nach Stufen der Geschwindigkeit angeordnet und die zugehörigen Werte des Ausgleichstroms berechnet.

Tabelle V.

	1—3	3—4	4—6	6—10 skm
Hochantenne	3,7	14,1	9,7	$2{,}9 \cdot 10^{-8}$ Amp.
Niedrigantenne	0,8		2,9	1,2

Der Ausgleichstrom steigt zunächst mit zunehmender Windgeschwindigkeit, d. h. mit zunehmendem Austausch. Zweifellos wird auch der Atmungsprozeß des festen Bodens mit zunehmender Turbulenz angeregt. Sobald der

1) Ergebn. d. Beobachtungen in Potsdam.
2) W. Schmidt, Der Massenaustausch in Luft und verwandte Erscheinungen, Hamburg 1925.
3) V. F. Heß u. W. Schmidt, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre. Physik. Zeitschr. **19**, 109, 1918. W. Schmidt, Zur Verteilung rad. Stoffe in der freien Luft. Physik. Zeitschr. **27**, 371, 1926.

1) W. Schmidt, Massenaustausch S. 99.

Austausch aber einen großen Wert überschreitet, nimmt der Gehalt der Luft an Emanation in der Nähe des Sammlerdrahtes wieder ab, die Emanation wird dann gleich in größere Höhen geschafft.

Windrichtung. Die Vergleichung der Windrichtung mit den Stromwerten wird wiederum auf die entsprechenden Zeiträume erstreckt unter Zugrundelegung der stündlichen Mittelwerte. Es wird die Häufigkeit des Vorkommens der 4 Quadranten für jedes Tagesmittel des Ausgleichstromes berechnet. Dann werden die Strommittelwerte in 3 Stufen eingeteilt (0 bis $1 \cdot 10^{-8}$ Amp., 1—5 $> 5 \cdot 10^{-8}$ Amp.). Für jede Stufe wird die Häufigkeit des Vorkommens der 4 Quadranten errechnet. Dann ergibt sich folgendes Bild:

Tabelle VI.

Ausgleichstrom für verschiedene Windrichtungen.

	N	E	S	W
0—1 · 10⁻⁸ Amp.	17	30	20	33
1—5	13	31	24	31
5	15	12	25	48

(Die Zahlen geben die Häufigkeit des Vorkommens des betr. Quadranten in Prozenten an.)

Man sieht, daß bei geringeren Stromstärken eine nennenswerte Bevorzugung einer Richtung nicht vorkommt. Erst größere Stromstärken bevorzugen die W-Richtung.

Weiter wird der Ausgleichstrom für die verschiedenen Windrichtungen berechnet. Es werden die Richtungen NW, N, NE zu einem N-Quadranten, NE, E, SE zum E-Quadranten usw. zusammengefaßt. Dann ergeben sich als Mittelwerte des Ausgleichstroms für die verschiedenen Richtungen:

N	E	S	W
2,0	2,4	5,9	5,9—10⁻⁸ Amp.

Die größten Stromstärken ergeben sich also bei Winden aus südlichen und westlichen Richtungen. Irgendeine physikalische Bedeutung kommt diesem Resultate wohl nicht zu. Es bestätigt lediglich, daß (nach Tab. I) mit fallendem Luftdruck, also Herannahen eines Tiefdruckgebietes und damit Einsetzen von südwestlichen Winden Emanation aus dem Boden entlassen wird, womit der aktive Niederschlag auf dem Sammlerdraht zunimmt.

Bewölkung. Für die Bewölkung liegen in Potsdam zweistündliche Beobachtungen vor. Die Zusammenstellung der gleichzeitigen Beobachtungen des Ausgleichstromes ergibt folgendes (die Bewölkung nach Stufen geordnet):

Tabelle VII.

	Bewölkung		
	0—4	4—8	8—10
Hochantenne	4,9	3,8	3,3
Niedrigantenne	0,6	1,6	6,4 · 10⁻⁸ Amp.

In der Hochantenne fließen bei geringer Bewölkung die größten Stromstärken, während es in der Niedrigantenne gerade umgekehrt ist. Offenbar wird wohl durch Bestrahlung der Erdoberfläche die Emanation sehr ausgiebig in die Höhe geführt, so daß in der Umgebung der Niedrigantenne der Gehalt gering gehalten wird. Dagegen bleibt bei starker Bewölkung das radioaktive Gas in geringer Höhe liegen.

Temperaturgefälle. Der Vorgang des Emporhebens der Emanation von der Erdoberfläche zu den Sammlerdrähten ist nur möglich, wenn die Temperaturen unmittelbar über der Erdoberfläche größer sind als oben. Ist das Temperaturgefälle umgekehrt, so lagert unten eine stabile Schicht, welche jeden Austausch verhindert. Das Vorhandensein einer solchen Bodeninversion läßt sich in Potsdam durch Vergleich der Temperaturbeobachtungen auf der Beobachtungswiese und auf dem großen Turme des Hauptgebäudes (Höhenunterschied etwa 30 m) feststellen. Hier werden die Temperaturen zweimal täglich (um 8^h und 14^h) abgelesen. Eine genauere Untersuchung ist mit dem vorhandenen geringen Beobachtungsmaterial nicht möglich, es können nur die Tagesmittel des Ausgleichstroms für negatives und positives Temperaturgefälle an den beiden Beobachtungsterminen angegeben werden (Tagesmittel für den um 8^h beginnenden Tag):

Temperaturgefälle	8^h	14^h
neg.	2,3	2,6 · 10⁻⁸ Amp.
pos.	6,7	5,4

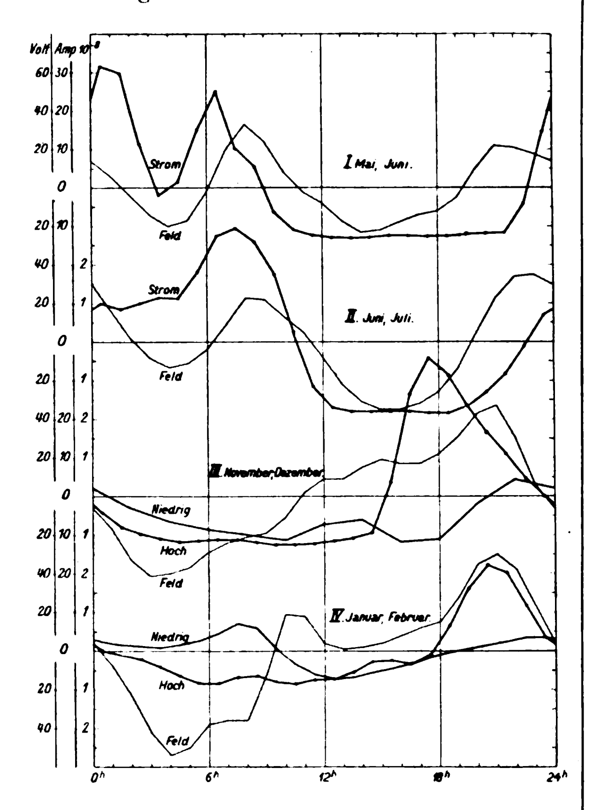
d. h. bei positivem Gefälle ist die Stromstärke 2—3 mal größer als bei negativem Gefälle.

Frost. Schneedecke. Vielfach findet man die Angabe, daß gefrorener Boden die Abgabe von Emanation erheblich hindere oder unmöglich mache. Es ist nicht einzusehen, wie durch Gefrieren der oberen Schichten ein luftdichter Abschluß der Erdoberfläche erreicht werden soll. Eine Berechnung des Ausgleichstroms für positive und negative Werte der Bodentemperatur in 2 cm Tiefe (8^h) ergibt das umgekehrte Resultat, nämlich $1,7 \cdot 10^{-8}$ Amp. für positive und $3,8 \cdot 10^{-8}$ Amp. für negative Temperaturen. Berücksichtigt sind nur die Wintermonate Nov., Dez. (Periode II), Jan., Febr. (Periode III). Dagegen liegt der Einfluß einer Schneedecke klar am Tag. Er be-

wirkt den großen Unterschied zwischen Beobachtungsperiode II und III. Eine besondere Auswahl der Tage mit und ohne Schneedecke für diesen Zeitraum ergibt folgende Mittelwerte für den Ausgleichstrom:

Tage mit Schneedecke $0{,}89 - 10^{-8}$
Tage ohne Schneedecke $5{,}0$.

Es ist aber auch hier kaum anzunehmen, daß die Durchlässigkeit des Bodens durch die Schneedecke in irgendeiner Weise behindert wird. Nur



werden einerseits die Temperaturschwankungen im Erdboden erheblich verkleinert, andererseits wird der Luftaustausch behindert, da die Schneedecke eine Erwärmung des Bodens verhindert und Entstehen und Verharren von Bodeninversionen begünstigt.

Täglicher Gang. In den Fig. 1—4 sind die täglichen Gänge des Ausgleichstromes und des Potentialgefälles wie sie aus stündlichen Mittelwerten sich ergeben, dargestellt, und zwar für jede Beobachtungsperiode besonders. In Fig. 3 und 4 sind auch die während der gleichen Zeiträume in der Niedrigantenne registrierten Stromwerte aufgetragen, und zwar in 4 in demselben Maßstabe, wie die der Hochantenne, während in 3 der Maßstab der Hochantenne 10mal verkleinert werden mußte. Als „Feld" ist der Gang des Potentialgefälles nach den Aufzeichnungen auf der Wiese in geringer Höhe über dem Boden eingezeichnet. Überall sind Abweichungen vom Mittelwert dargestellt.

Der unter der Einwirkung des normalen elektrischen Feldes fließende Strom, welcher als luftelektrischer Vertikalstrom aus der Atmosphäre in eine über die Erdoberfläche hinausragende Elektrode fließt, setzt sich aus 2 Komponenten zusammen: 1. den positiv geladenen Rückstoßatomen, welche sich auf dem negativ geladenen Sammlerdraht niederschlagen, 2. den durch Zerfall dieses radioaktiven Niederschlags gebildeten Trägern positiven Vorzeichens. Außerdem sind noch Träger da, die durch andere Ionisatoren gebildet werden, sie kommen aber, wie gleich gezeigt werden wird, wenig in Betracht.

Für die in Potsdam verwendete Höhe der Sammlerdrähte (6 und 30 m) kommt hauptsächlich Radiumemanation als diejenige in Betracht, welche A-Atome absetzt. Nach Wilhelm Schmidt[1]) ist bereits in 5 m Höhe keine Thoriumemanation mehr vorhanden, wenn der Austausch in 100 m Höhe $A = 50$ abs. Einh. gesetzt wird und eine Abhängigkeit des A von der Höhe z nach der Funktion $A = A_0 \cdot z^{4/3}$ [2]) angenommen wird. Freilich liegt die Sache hier in Wirklichkeit nun so, daß das A in den unteren Schichten einen beträchtlichen täglichen Gang aufzuweisen hat, so daß zur Zeit der größten Erwärmung des Bodens und der unteren Luftschichten das A einen vielfach höheren positiven Wert als den theoretisch berechneten erreichen wird. Dagegen wird A nachts Null werden. Am Tage wird also die Emanation in so beträchtlicher Menge nachgeliefert werden, daß die Zufuhr die Abfuhr bei weitem übersteigt (von horizontalem Transport abgesehen), während nachts überhaupt keine Zufuhr vorhanden ist. Außerdem ist, wie schon wiederholt bemerkt, die Sache so, daß A einen günstigsten Wert erreicht, wenn es über diesen Wert steigt, so wird der Gehalt an Emanation in der Umgebung der Sammlerdrähte wieder geringer.

Meyer und Schweidler berechnen[3]), daß bei 24stündiger Periode der Zufuhr für Radiumemanation die Gehaltsänderung auf 2,9 Proz. der Amplitude der Zufuhränderung sinkt. Die zeitliche Verspätung, die die Gehaltsänderung gegenüber der Zufuhränderung erleidet, wird nahezu 6 Stunden.

Die Kurven des täglichen Ganges scheinen nun in der Tat eine Phasenverzögerung von ungefähr dieser Größe anzudeuten. In Fig. 3 (Nov.-Dez.) wird das Maximum in der Hochantenne etwa um 17—18h erreicht, in Fig. 4

1) Physik. Zeitschr. **27**, 375, 1926.
2) Massenaustausch S. 87.
3) Radioaktivität. II. Aufl. S. 589.



(Jan.-Febr.) um 20—21^h, also schon etwas später wegen des höheren Sonnenstandes und deswegen länger dauernden Emanationstransportes. Im Mai-Juni (Fig. 1) verspätet es sich bis Mitternacht; Juni-August ebenfalls. Im Sommer entsteht eine doppelte Welle, weil 2 Zufuhrperioden im Laufe des Tages vorhanden sind, eine morgens und eine abends, unterbrochen durch eine Periode sehr großen Austauschs (Abfuhr nach oben). Wegen der großen Tagesdauer ist diese Periode sehr lang und drängt die beiden Maxima weit auseinander, das erste tritt etwa um 7^h schon ein und wird zum Hauptmaximum.

Die Messungen des Ausgleichstroms in Antennen sind luftelektrische Vertikalstrommessungen beider Vorzeichen, angestellt an Elektroden, die weit in das Feld hineinragen. Überall werden solche hervorragenden Punkte der Erdoberfläche den Hauptteil des Stroms zur Erdoberfläche zurückführen. Absichtlich sind nur Schönwetterströme gemessen worden[1]), um Spitzenentladung zu vermeiden. Ein Vergleich mit den Kurven des aus Potentialgefälle und Leitfähigkeit berechneten Vertikalstroms[2]) zeigt, daß der Verlauf der Kurven ähnlich ist, die Maxima fallen auf die gleichen Zeiten. Die in der Niedrigantenne erhaltenen täglichen Gänge zeigen in ihrem Verlaufe keine wesentlichen Unterschiede von denen der Hochantenne. Die tägliche Schwankung ist erheblich geringer, weil die Schwankungen des Emanationsgehalts nicht so groß sind. Ferner verspätet sich das Maximum um 3—4 Stunden, weil die Zufuhr von unten in dieser geringen Höhe später aufhört. In der Tat bildet sich ja manchmal eine Sperrschicht zwischen den beiden Antennen aus.

Die Betrachtung der Kurven des Potentialgefälles lehrt, daß Strom und Feldstärke auffallend übereinstimmen und vollkommen in Phase sind[3]), es ist also unmöglich, den täglichen Gang durch Induktion zu erklären (nach $i = C\frac{dV}{dt}$). Das Maximum des Potentialgefälles um 21^h ist das auf der ganzen Erde gleichzeitig auftretende. Der Ausgleichstrom verspätet sich gegen dieses Maximum gewöhnlich; irgendein Zusammenhang kann hier wohl kaum bestehen; nur wird der Anstieg des Vertikalstromes steiler durch das gleichzeitige Ansteigen des Feldes. Anders steht es mit dem Morgenmaximum des Potentialgefälles, das im Sommer mit dem Maximum des Vertikalstroms zusammen plötzlich in die Erscheinung tritt (im Jan.-Febr. ist es schon angedeutet). Hier sieht man umgekehrt eine deutliche Verzögerung des Feldes hinter dem Strom. Es ist hier zwanglos der Feldanstieg durch den Anstieg des Kollektorstroms zu erklären. Dadurch müssen sich positive Raumladungen in ziemlich niedriger Höhe bilden. Der Austausch reicht morgens nicht bis in größere Höhen hinauf, infolgedessen stauen sich diese positiven Ladungen hier und verstärken das Feld.

Beim ersten Anblick der Feld- und Stromkurven könnte man meinen, daß das Verhalten des Stroms sich einfach durch Feldstärkeänderungen erklären ließe. Eine Betrachtung der Schwankungen beider Elemente zeigt sofort die Irrigkeit dieser Annahme. Die hier gemessenen Vertikalströme haben eine außerordentlich große Amplitude aufzuweisen. In Tabelle VIII ist das Verhältnis Schwankung/Mittelwert für die vorliegenden galvanometrischen Strommessungen, für die gleichzeitigen Feldstärken und drittens für die von Kähler[1]) aus Leitfähigkeit und Potentialgefälle errechneten Vertikalströme (in entsprechenden Monaten) zusammengestellt:

Tabelle VIII.

Beob. Periode	Ausgleich-strom	Potential-gefälle	Vertikal-strom
I	2,3	0,5	0,7
II	3,4	0,3	0,2
III	2,8	0,4	0,4
IV	2,6	0,4	1,0

Für die in Antennen gemessenen Vertikalströme ist dieses Verhältnis etwa 3, während es für das Potentialgefälle nur 0,4 beträgt. Versucht man den Einfluß der Feldstärke zu eliminieren, indem man die Stundenwerte des Stroms mit einem Reduktionsfaktor $\frac{Vm}{V}$ multipliziert (Vm mittleres Potential, V das zu dem betreffenden Stromwert gehörige), unter der Annahme, daß Ohmscher Strom herrscht, so gelangt man zu Stromwerten, welche sich von den nichtreduzierten fast gar nicht unterscheiden. Ein täglicher Gang von dieser Amplitude läßt sich nur durch das Auftreten von kurzlebigen *Th*-Produkten erklären. Die in der Niedrigantenne gemessenen Ströme sind gewöhnlich beträchtlich niedriger als die in der Hochantenne fließenden. Im Mittel müßten sie im Verhältnis der Feldstärken kleiner sein, die an der Hoch- bzw. Niedrigantenne

1) Vgl. dagegen: Wormell, Roy. Soc. Proc. A. Vol. **115**, 443, 1927. Messung der Spitzenentladungen unter Gewitterwolken. Wahrscheinlich fließt der ganze Vertikalstrom während der kurzen Perioden der Feldumkehr bei Böen und Gewittern nach oben.

2) Kähler, Ergebn. der met. Beob. in Potsdam im Jahre 1911, S. XXVI.

3) s. a. Kähler a. a. O.

1) a. a. O.



herrschen. Dieses Verhältnis läßt sich leicht bestimmen, wenn man schnelle Feldänderungen in ihrer Wirkung auf die beiden Antennen betrachtet. Befindet sich in der Umgebung ein vollkommenes Dielektrikum, so ist im Gleichgewichtszustande

$$\frac{Q}{C} + V = \frac{Q}{C} + hf(t)\ ^{1)}. \qquad (2)$$

Die Ladung Q ändert sich nur bei einer Änderung von V, wo V nur mit der Höhe h der Antenne proportional und im übrigen nur eine Funktion der Zeit ist. Alsdann fließt durch den Erdungswiderstand ein Strom und an den Enden des Widerstands W herrscht eine Spannung:

$$v = -W\frac{dQ}{dt} = WC\frac{dv}{dt} = hWCf'(t).^{2)}$$

Bezeichnet man mit h_1 die wirksame Höhe der oberen, mit h_2 die der unteren Antenne, so ergibt sich

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{h_1 W_1 C_1}{h_2 W_2 C_2}; \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{i_1}{i_2}\frac{C_2}{C_1},$$

Man braucht also nur für irgendeine schnelle Feldänderung die Stromstärken in den beiden Antennen zu messen und kann daraus die wirksamen Höhen berechnen. Aus 21 derartigen Messungen (es sind kurz aufeinander folgende, nicht gleichzeitige Messungen der Kurvenbreite vorgenommen worden) ergibt sich $\frac{h_1}{h_2} = 4{,}6$. In Wirklichkeit bekommt man für das Verhältnis der Ausgleichströme Hochantenne/Niedrigantenne in Beobachtungsperiode II: 10 in III: 0,75, d. h. in II hat die Niedrigantenne viel zu wenig Strom, weil die radioaktiven Gase durch lebhaften Austausch gleich nach oben geschafft werden; in III dagegen hat sie zu viel Strom, weil eine Sperrschicht zwischen den beiden Antennen liegt, welche bewirkt, daß die obere Antenne als Kollektor fast ganz ausgeschaltet wird, die Stromlinien münden jetzt meist unten ein, weil sie hier einen guten, aktiven Niederschlag vorfinden.

Die Messungen des Vertikalstroms in Antennen haben den Vorzug einer einfachen galvanometrischen Meßmethode und vor allem geben sie nicht einen Vertikalstrom, der bloß von einer Auswahl von Ionenarten herrührt, wie die indirekten Methoden. Sie haben aber den Nachteil, daß die Auffangfläche schwer zu bestimmen ist. Man kann versuchen, die Größe der Auffangfläche auf zweierlei Art zu schätzen: 1. Man denkt sich die Antenne ersetzt durch einen Plattenkondensator derselben Kapazität, dessen Plattenabstand gleich der mittleren Höhe der Antenne über dem Boden ist. Dann ergibt sich die Auffangfläche zu $A = 2\pi d \cdot C$. Nimmt man $d = 20$ m an, so ergibt sich für die

L-Antenne	$A = 2{,}5 \cdot 10^7$ cm²
Schirmantenne	$A = 3{,}1 \cdot 10^7$ cm²

2. Nach Dieckmann[1]) kann man den sog. Antennenluftquerschnitt einer Schirmantenne berechnen. Er ist gleich einer Kreisfläche, deren Durchmesser gleich der Höhe der Antenne ist. Nimmt man $h = 40$ m an, so ergibt sich $A = 1{,}2 \cdot 10^7$ cm², also bedeutend kleiner.

Legt man die nach 1 berechneten Werte für A zugrunde, so erhält man als gesamten Vertikalstrom pro Quadratzentimeter in der Beobachtungsperiode:

I	$0{,}8 \cdot 10^{-15}$ Amp.
II	4,6
III	0,4
IV	5,6

im Mittel etwa $3{,}10^{-15}$ also etwa 10mal soviel als die bisherigen Messungen ergeben haben. Es ist aber zu berücksichtigen, daß die Auffangfläche mit 3000 qm sicher erheblich überschätzt worden ist, die gemessenen Vertikalströme sind also noch bedeutend größer. Anscheinend hat man den Anteil am Vertikalstrom, den Dieckmann (a. a. O.) Kollektorstrom nennt, doch bedeutend unterschätzt. (Dieckmann unterscheidet: 1. Ausgleichstrom, d. h. Strom durch Ionisation der Luft, 2. Kollektorstrom, d. h. Strom durch radioaktive Niederschläge, 3. Hallwachsstrom, der bei den hier benutzten geschwärzten Drähten keine nennenswerte Rolle spielen kann.) Im ersten Teile dieser Arbeit ist gezeigt worden, daß es sich hier im wesentlichen nur um Kollektorstrom durch aktive Niederschläge handeln kann. Wenn Spitzenwirkung vorliegen würde, so könnte nicht der Strom beim Morgenmaximum im Sommer dem Potentialgefälle voreilen.

Gegen die Messungen in den beiden Schirmantennen könnte der Einwand erhoben werden, daß sie durch die Nähe des Gebäudes gefälscht wären. Dieser Einwand trifft aber auf die L-Antenne nicht zu, welche die gleichen Resultate ergibt.

Zusammenfassung. Es wird der bei normalem Erdfelde in einen hervorragenden Punkt der Erdoberfläche einströmende Vertikalstrom gemessen. Es wird gezeigt, daß dieser Strom in der Hauptsache durch radioaktiven Beschlag der Elektrode hervorgerufen wird, da

1) Wilson, Proc. Roy. Soc. A. **92**, 555, 1916.
2) Appleton, Watson, Watt und I. F. Herd, Proc. Roy. Soc. A. Vol. **111**, 615, 1926.

1) Dieckmann, Experimentelle Untersuchungen auf dem Grenzgebiet zwischen drahtloser Telegraphie und Luftelektrizität. Berlin 1922, S. 33.

1 die Bodenatmung eine ausschlaggebende Rolle spielt. Die Stromstärke wächst mit fallendem Luftdruck und mit steigenden Bodentemperaturen.

2. der Massenaustausch in den unteren Schichten von Einfluß ist, wie sich aus dem Vergleich mit Windgeschwindigkeit, Bewölkung und vertikalem Temperaturgefälle in den untersten Luftschichten ergibt. Sowohl die aperiodischen Änderungen wie der tägliche Gang des Kollektorstromes laufen wie zu erwarten, im allgemeinen mit dem des Potentialgefälles parallel. Das Morgenmaximum des Potentialgefälles im Sommer läßt sich durch den Gang des Kollektorstromes erklären: es wird durch das Einsetzen des Kollektorstromes eine Anreicherung positiver Träger in den unteren Luftschichten bewirkt.

Der tägliche Gang des Kollektorstroms läßt sich durch die tägliche Änderung des Austauschkoeffizienten unmittelbar über dem Boden erklären, durch den der Gehalt der Luft an radioaktiven Gasen geändert wird.

Die Messungen ergeben außerordentlich hohe Werte des Vertikalstroms.

Die Berechnung der Ergebnisse ist mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft geschehen, wofür ich an dieser Stelle nochmals meinen besten Dank sagen möchte.

(Eingegangen 14. Mai 1928.)

Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr.

Von L. Prandtl.

Die Frage nach den Wärmemengen, die bei der Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr zwischen der Rohrwand und der Flüssigkeit ausgetauscht werden, wenn Rohr und Flüssigkeit verschiedene Temperatur haben, ist in letzter Zeit mehrfach behandelt worden, vgl. etwa die kürzlich in der Physik. Zeitschr. erschienene Arbeit von A. Sellerio[1]), sowie die Arbeit von ten Bosch in der Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing. 1926. In diesen Arbeiten wird u. a. eine Beziehung behandelt, die ich früher einmal angegeben habe[2]), und die inzwischen von G. I. Taylor[3]) noch einmal gefunden worden ist. Diese Beziehung behandelt das Zusammenwirken der nur durch Wärmeleitung beteiligten laminaren Schicht an der Rohrwand und der überwiegend durch Konvektion wirkenden inneren Flüssigkeitsmasse. Sie enthält noch zwei auf die turbulente Flüssigkeitsströmung im Rohr bezügliche Größen, von denen besonders die eine in meiner früheren Arbeit ganz unbestimmt bleiben mußte. In der Zwischenzeit sind auf diesem Gebiete erfreuliche Fortschritte gemacht worden, so daß es sich lohnt, die damaligen Rechnungen jetzt wieder aufzunehmen.

Da es für die Leser wohl so am bequemsten ist, übernehme ich hier die Bezeichnungen von Sellerio. Die in Rede stehende Beziehung ist von ihm in seiner Gleichung (IV) wiedergegeben. Diese lautet

$$h = \frac{\lambda \mu c_p u_m}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{c_p \eta}{\chi} - 1\right)}. \quad (1)$$

Darin ist h die „Wärmeübergangszahl", d. h. die sekundlich bei 1^0 Temperaturdifferenz zwischen Wand und Flüssigkeit durch die Flächeneinheit der Rohrwand tretende Wärmemenge. λ ist die Widerstandsziffer der Rohrströmung, definiert durch die Gleichung

$$-\frac{dp}{dx} = \lambda \frac{\mu}{2r} \frac{u_m^2}{2}, \quad (2)$$

μ die Dichte, u_m die mittlere Geschwindigkeit, u_1 die Geschwindigkeit an der Grenze zwischen der laminaren Flüssigkeitsschicht an der Wand und der turbulenten Innenmasse; ferner ist r der Rohrradius, c_p die spezifische Wärme, η die Zähigkeit und χ die Wärmeleitung der Flüssigkeit. Durch die angedeuteten Fortschritte der Lehre von den turbulenten Strömungen können nicht nur für λ bessere Angaben als damals gemacht werden, sondern auch für u_1/u_m, das damals unbestimmt blieb, kann jetzt eine Formel angegeben werden, in der allerdings ein Zahlwert noch offen bleibt. H. Blasius[1]) hat die im Bereich von Reynoldsschen Zahlen $\mathfrak{R} = \frac{u_m r}{\nu}$ von 1 200 bis 50 000 sehr gut stimmende Formel angegeben:

$$\lambda = 0{,}3164 \sqrt[4]{\frac{\nu}{u_m d}},$$

die wir in $\lambda = 0{,}266 \sqrt[4]{\frac{\nu}{u_m r}} = 0{,}266\, \mathfrak{R}^{-1/4}$ (3)

umschreiben können

$$\left(\nu = \frac{\eta}{\mu} = \text{kinematische Zähigkeit}\right).$$

1) Physik. Zeitschr. **29**, 55, 1928.

2) Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten, Physik. Zeitschr. **11**, 1072, 1910, vgl. dort Gl. (11) u. (12). Herr Sellerio hatte die Freundlichkeit, in Physik. Zeitschr. **29**, 398, 1928 schon auf die Übereinstimmung dieser Gleichungen mit seiner Formel (IV) hinzuweisen.

3) Technical Report of the Adv. Comm. for Aeronautics 1916/17, S. 423; vgl. auch den Stantonschen Artikel „Friction" in Glazebrooks Dictionary of applied Physics, Bd. I, S. 401 (London 1922).

1) Mitteilungen über Forschungsarbeiten herausgegeb. vom Ver. deutsch. Ing., Heft 131, 1913.

Über die Geschwindigkeitsverteilung konnte festgestellt werden, daß in dem turbulenten Gebiet der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit in der Wandnähe proportional der 7. Wurzel aus dem Wandabstand ist[1]). Mit geringem Fehler kann diese Beziehung bis zur Rohrmitte verwendet werden, so daß mit y = Wandabstand[2])

$$u = u_{\max} \cdot \left(\frac{y}{r}\right)^{1/7} \tag{4}$$

ist. An der Wand herrscht Laminarströmung mit einem Geschwindigkeitsanstieg $\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\eta}$, wo τ die Schubspannung in den wandnahen Teilen der Flüssigkeit ist, für die aus dem Blasiusschen Gesetz die Beziehung

$$\tau = 0{,}0225\, \mu u_{\max}^{7/4} \cdot \left(\frac{\nu}{r}\right)^{1/4}$$

$$= 0{,}0225\, \mu u_{\max}^{2} \cdot \left(\frac{\nu}{u_{\max} r}\right)^{1/4} \tag{5}$$

folgt[3]). $\frac{u_{\max} r}{\nu} = \mathfrak{R}_1$ ist dabei eine im Verhältnis $\frac{u_{\max}}{u_{\text{mittel}}}$ vergrößerte Reynoldssche Zahl (das Verhältnis ist etwa = 1,2). Es sei nun für die Rechnung angenommen, daß Laminargebiet und Turbulenzgebiet eine scharfe Grenze hätten, und daß die Grenze da liegt, wo $\frac{du}{dy}$ nach Gl. (4) $= \tau/\eta$ mit τ gemäß (5) ist, und daß im Laminargebiet die Geschwindigkeit linear, also mit konstantem $\frac{du}{dy}$ zu Null geht; es ergibt sich also

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{u_{\max}}{r} \cdot \left(\frac{r}{y}\right)^{6/7} = 0{,}0225 \frac{\mu}{\eta} \cdot u_{\max}^2 \cdot \mathfrak{R}_1^{-1/4};$$

links kann $\left(\frac{r}{y}\right)^{6/7}$ durch $\left(\frac{u_{\max}}{u}\right)^6$ ersetzt werden, rechts kann $\frac{\mu u_{\max}}{\eta} = \frac{u_{\max}}{\nu} = \frac{\mathfrak{R}_1}{r}$ gesetzt werden. Damit erhält man

$$\left(\frac{u_{\max}}{u}\right)^6 = 0{,}1575\, \mathfrak{R}_1^{3/4}$$

oder

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1{,}363\, \mathfrak{R}_1^{-1/8}. \tag{6}$$

Das aus dieser Rechnung ermittelte u ist gerade das frühere u_1, so daß nun das gesuchte Verhältnis

$$\frac{u_1}{u_m} = \frac{u_{\max}}{u_m} \cdot 1{,}363\, \mathfrak{R}_1^{-1/8}$$

ist. Mit $\frac{u_{\max}}{u_m} = 1{,}2$ und Einführung von $\mathfrak{R}$ an Stelle von $\mathfrak{R}_1$ wird

$$\frac{u_1}{u_m} = 1{,}2^{7/8} \cdot 1{,}363\, \mathfrak{R}^{-1/8} = 1{,}60\, \mathfrak{R}^{-1/8}. \tag{7}$$

Damit sind die fraglichen Angaben gewonnen, und es wird also die Wärmeübergangszahl, mit $0{,}266/8 = 0{,}03325$ und $\mu u_m = \frac{\eta}{r} \mathfrak{R}$:

$$h = 0{,}03325 \frac{c_p \eta}{r} \frac{\mathfrak{R}^{3/4}}{1 + 1{,}6\, \mathfrak{R}^{-1/8}\left(\frac{c_p \eta}{\chi} - 1\right)}. \tag{8}$$

Es sei jedoch ausdrücklich erwähnt, daß der Zahlenfaktor 1,6 in Gl. (7) und (8) sehr unsicher ist. In Wirklichkeit ist keine scharfe Grenze des Laminargebiets und des Turbulenzgebiets zu erwarten, da die Wirbel sich bei Annäherung an die Wand ganz allmählich verlieren dürften. Das rein laminare Gebiet, das nur durch Wärmeleitung ohne Konvektion an dem Wärmeübergang beteiligt ist, wird hierdurch offenbar verkleinert, doch ist einstweilen Bestimmtes über den Einfluß auf unseren Zahlwert nicht zu sagen. Versuchszahlen, die bei Stanton (l. c.) angegeben sind, lassen einen Zahlwert 1,0 bis 1,1 an Stelle von 1,6 besser erscheinen. Die Entscheidung kann durch Wärmeübergangsversuche in Flüssigkeiten größerer Zähigkeit bei nicht zu kleinen Reynoldsschen Zahlen gewonnen werden[1]); es ist bemerkenswert, daß hier eine rein hydrodynamische Frage durch eine Wärmeübergangsbeobachtung geklärt werden kann.

Für die beiden Sonderfälle $\frac{c_p \eta}{\chi} = 1$ und $\frac{c_p \eta}{\chi} = \infty$ (das erste näherungsweise erfüllt bei Gasen das zweite bei sehr zähen Flüssigkeiten von geringeren Wärmeleitvermögen) ergibt die Formel (8) einfache Potenzgesetze; im ersteren Fall wird h proportional $\mathfrak{R}^{3/4}$, im zweiten proportional $\mathfrak{R}^{7/8}$; für Werte von $\frac{c_p \eta}{\chi}$ zwischen diesen Grenzen ergeben sich Werte von h, die zwischen diesen beiden Formeln liegen.

1) Vgl. etwa v. Kármán, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**, 233, 1921; zwischen dieser Beziehung und der Blasiusschen Widerstandsformel existiert eine logische Verknüpfung, vgl. l. c., Abschn. 4.

2) Gemäß dem Nachstehenden ist y nicht genau der wirkliche Abstand von der Wand, sondern dieser Abstand verringert um $^6/_7$ der Dicke der laminaren Schicht (die allerdings häufig sehr klein ist).

3) v. Kármán, l. c., S. 241.

1) Dabei wäre zu beachten, daß der Versuchsstrecke eine Anlaufstrecke von wenigstens 50 Rohrdurchmessern vorgeschaltet ist, und daß der Druckabfall für die Wärmeübergangsströmung selbst gemessen wird. Die Temperaturunterschiede sollen klein gewählt werden, damit die Unterschiede in η und χ nicht zu groß werden.

Eine für die Anwendung wichtige Frage ist noch die: Welche Temperatur soll man für die Wärmeleitung und für die Zähigkeit in Formel (8) zugrunde legen, da doch beide Größen von der Temperatur stark abhängen. Ich stimme hierin mit Herrn ten Bosch[1]) überein, der vorschlägt, den Mittelwert zwischen der Wandtemperatur T_w und derjenigen an der Grenze der Laminarschicht gegen das Turbulenzgebiet (T_1) dafür zu wählen. Die Berechnung von T_1 kann so erfolgen, daß man die der Gl. (1) zugrunde liegende Beziehung

$$\frac{T_1 - T_w}{u_1 \eta}\cdot\chi = \frac{T_m - T_1}{u_m - u_1}\cdot c_p, \qquad (9)$$

die die Gleichheit der durch Leitung in der Laminarschicht übertragenen Wärmemenge mit der durch Konvektion im Turbulenzgebiet fortgeführten zum Ausdruck bringt, nach T_1 auflöst. Dies liefert

$$T_1 = T_w + (T_m - T_w)\frac{\frac{u_1}{u_m}\cdot\frac{c_p \eta}{\chi}}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{c_p \eta}{\chi} - 1\right)}, \qquad (10)$$

woraus die gesuchte Mitteltemperatur $\frac{T_w + T_1}{2}$ unter Einführung vorläufiger Werte von η und χ berechnet werden kann. Gegebenenfalls ist die Rechnung mit den verbesserten Werten zu wiederholen.

Zusammenfassung. Eine frühere Formel für den Wärmeübergang im Rohr wird durch neuere Angaben über Eigenschaften der turbulenten Flüssigkeitsströmung ergänzt und eine Vorschrift für die bei der Ermittlung der Konstanten der Flüssigkeit zugrunde zu legende Mitteltemperatur angegeben.

Nachtrag bei der Korrektur.

In der Zwischenzeit ist über den Wärmeübergang strömender Flüssigkeiten eine Arbeit von L. Schiller und Th. Burbach[2]) erschienen, in der u. a. eine neue sehr einfache Formel, dort als Gl. (2) bezeichnet, vorgeschlagen wird. Für die Analyse der Forschungsergebnisse möchte ich aber meiner Formel doch den Vorzug geben, und die obigen Darlegungen lassen mich erwarten, daß der Exponent der Potenzformel abhängig von $\sigma = \frac{\chi}{\eta c_p}$ zwischen $^3/_4$ und $^7/_8$ variieren wird. Immerhin ist es bemerkenswert, daß die Schillersche Formel die Wärmeübergangsversuche für Luft und für Wasser gleich befriedigend darzustellen vermag.

1) Z.V.D.I. S. 912, 1926.
2) Physik. Zeitschr. **29**, 340, 1928.

(Eingegangen 25. Mai 1928.)

Bemerkung zur Theorie der Stromleitung in festen Isolatoren.

Von R. Seeliger.

Wie Pool, Schiller, Sinjelnikoff und Walther u. a. gefunden haben, hängt der Widerstand fester Isolierstoffe nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der am Isolator liegenden Potentialdifferenz ab; er nimmt ab, wenn diese beiden Größen zunehmen, eine Eigenschaft die bekanntlich für die Theorie der elektrischen Festigkeit der Isolatoren von grundsätzlicher Bedeutung ist, solange man sich im Gebiet des sog. Wärmedurchschlags und des wärme-elektrischen Durchschlags befindet. Von Interesse für die Kenntnis des Mechanismus der Stromleitung ist nun insbesondere die Abhängigkeit des Widerstandes von der Potentialdifferenz und es sind deshalb auch bereits eine Reihe von Hypothesen vorgeschlagen worden, um diese Abhängigkeit zu erklären. Die russischen Physiker, die sich in den letzten Jahren so erfolgreich mit den physikalischen Grundlagen des elektrischen Durchbruchs durch feste Isolatoren beschäftigt haben, bevorzugen hierbei die Annahme, daß auch bei hohen Feldstärken unverändert das Ohmsche Gesetz gilt und daß die Abnahme des Widerstandes mit zunehmender Feldstärke eine nur „scheinbare" ist, vorgetäuscht durch die Ausbildung elektromotorischer Polarisationskräfte im Inneren des Isolators. Sie konnten diese Annahme durch sehr eingehende direkte Messungen der in Betracht kommenden Größen stützen; Joffe hat sich kürzlich[1]) in einer zusammenfassenden Darstellung der bisher erhaltenen Ergebnisse von neuem ganz auf den Boden dieser Annahme gestellt und sich gegen eine Kritik von Schiller gewendet.

Ich glaube nun aber, daß die Einführung der genannten Polarisationsspannungen und der damit zusammenhängenden Begriffe der „wahren Leitfähigkeit" und der „Polarisationskapazität" zwar bei der Beschreibung der Eigenschaften eines Isolators manche Vorteile bieten kann, daß sie aber letzten Endes von der eigentlichen Fragestellung abführt und zur theoretischen Klärung des Mechanismus der Stromleitung in starken Feldern nichts Neues beiträgt. Zur Unterstützung dieser skeptischen Auffassung möchte ich im folgenden auf den tatsächlichen Sachverhalt etwas genauer eingehen.

Der Grundgedanke der Theorie der Polarisationskräfte ist am besten ersichtlich für den fiktiven (z. B. in Isolatoren vom Kalkspattypus sehr weitgehend realisierten) Fall, daß die Potentialverteilung im Inneren des Isolators linear ist

1) Zeitschr. f. Phys. **48**, 288, 1928.

und daß nur dicht an einer oder an beiden der Elektroden ein Potentialsprung liegt. Man mißt unmittelbar die Potentialdifferenz V zwischen den Elektroden und den übergehenden Strom J und berechnet daraus bei einem Elektrodenabstand d den „scheinbaren" spez. Widerstand R des Isolatormaterials zu

$$R \cdot d = \frac{V}{J} \cdot \tag{1}$$

Auf diesem Weg hat man nun gefunden, daß R mit zunehmendem V abnimmt. Wenn jedoch an den Elektroden Potentialsprünge von dem Gesamtbetrag P liegen, ist R nicht der „wahre" spez. Widerstand, sondern es ist dieser zu berechnen aus

$$R' \cdot d = \frac{V - P}{J} \cdot \tag{2}$$

Die Elimination von J aus (1) und (2) gibt

$$R = R' \cdot \frac{V}{V - P} \cdot \tag{3}$$

Nur wenn P proportional mit V zunimmt, ist R ebenfalls eine Materialkonstante, während im allgemeinen, d. h. für $P = P(V)$, R von V abhängen wird; wenn insbesondere P mit V stärker als proportional zunimmt, erhält man eine Abnahme des scheinbaren Widerstandes R mit zunehmender Spannung V.

Wenn man diese Überlegungen auf den allgemeinen Fall übertragen will, daß die Potentialverteilung im ganzen Isolatorinneren irgendwie abweicht von der linearen Verteilung, wird man offenbar folgendermaßen vorgehen müssen. Zwischen den Elektroden vom Abstand d liege die Potentialdifferenz V_0; diese und der Strom J werde gemessen. Die tatsächliche Potentialverteilung sei $V' = V'(x)$. Dann ist wieder für den „scheinbaren" spez. Widerstand

$$R = \frac{1}{d} \frac{V_0}{J}, \tag{4}$$

während für den „wahren" in einer Schicht dx anzusetzen ist

$$R' \, dx = \frac{dV'}{J} \cdot \tag{5}$$

Eliminiert man aus (4) und (5) den Strom 7, so erhält man

$$R = R' \cdot \frac{V_0}{d} \frac{1}{(dV'/dx)} \tag{6}$$

und durch Integration über die Dicke d des Isolators hieraus auch den „scheinbaren" (W) und den „wahren" (W') Gesamtwiderstand des Isolators. Wenn man noch $dP = dV - dV'$ für die in der Schicht dx liegende Polarisationsspannung einführt, kann man die Endformeln in folgender Gestalt schreiben

$$\begin{aligned} R &= R'\left(1 + \frac{dP}{dV'}\right) = R' \frac{dV}{dV - dP} \\ W &= W' + R' \int_0^d \frac{dP}{dV'} \, dx \\ &= W' + R' \int_0^d \frac{dP}{dV - dP} \, dx \end{aligned} \tag{7}$$

als die sinngemäße Verallgemeinerung der Formel (3).

R' ist definitionsgemäß auch hier eine Materialkonstante, R hingegen ist nun örtlich variabel und hängt von der Potentialverteilung ab. Da negative Feldstärken (wie sie in manchen Gasentladungen festgestellt worden sind) hier nicht auftreten werden, ist dV' stets positiv und es ist also $R \lesseqgtr R'$ wenn $dP \lesseqgtr 0$ ist. Realere Bedeutung haben W und W'. Wie man leicht zeigen kann, ist aber stets $W > W'$, außer im trivialen Fall, wo dP überall gleich null und $W = W'$ ist. Denn wie man durch eine Unterteilung des ganzen Integrationsbereiches o bis d in die Abschnitte, in denen dP positiv bzw. negativ ist, sofort einsehen kann, ist stets

$$\int_0^d \frac{dP}{dV'} \, dx > 0,$$

weil

$$\int_0^d dP = 0 \quad \text{d. h.} \quad \int_0^d dV = \int_0^d dV'$$

sein muß.

Endlich läßt sich natürlich auch die Dichte ϱ der in der Schicht x, $x + dx$ sitzenden Raumladung mit den Polarisationsspannungen in Verbindung bringen. Es ist ϱ proportional mit $\frac{d}{dx}\left(\frac{dP}{dx}\right)$; dies ist physikalisch klar, da dP/dx die in dieser Schicht sitzende Polarisationskraft ist und die Raumladungen die Quellenstellen dieser fiktiven elektrischen Kraft sind.

Die in dem einfachen zuerst angegebenen Beispiel scheinbar sich zeigende Anschaulichkeit verschwindet im allgemeinen Fall also fast vollständig. Was übrig bleibt, ist eigentlich eine Trivialität, nämlich der Ersatz einer nichtlinearen Potentialverteilung durch eine geeignete kontinuierliche Verteilung von fiktiven inneren elektromotorischen Kräften; es ist natürlich notwendig, diese einzuführen, wenn man im allgemeinen Fall das Ohmsche Gesetz beibehalten will, ohne für die stationäre Strömung die

Quellenfreiheit des Stromes aufzugeben. Daß man damit jedoch über einen rein formalen Ansatz nicht hinausgeht und über den eigentlichen Mechanismus des im Isolator fließenden Trägerstromes keinerlei neuen Aufschluß, hinausgehend über die Aussagen aus der Potentialverteilung $V'(x)$, bzw. der Verteilung der Raumladungen, gewinnt, geht aus den obigen Ausführungen bereits hervor. Man kann z. B. auch keine Folgerung dahingehend ziehen, ob der scheinbare Widerstand R bzw. W mit zunehmender Potentialdifferenz V_0 zu oder abnimmt, wenn man wiederum nicht die Änderung der Verteilung $V'(x)$ d. h. die Verteilung der Raumladungen mit V_0 bereits kennt.

Die Analogie mit der Sachlage bei Gasentladungen wird dies vielleicht noch deutlicher hervortreten lassen. In jeder Gasentladung, in der die Potentialverteilung nicht linear ist, kann man natürlich ganz ebenso wie oben die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes postulieren und dann geeignete innere elektromotorische Polarisationskräfte annehmen. Man wird aber daraus wohl kaum eine Aufklärung über den Mechanismus der Entladung, d. h. irgendwelche Aufschlüsse über die Kinetik der Ladungsträger zu finden erwarten. Die bekannte Sachlage in einem fremdionisierten dichten Gas eignet sich im Gebiet des Sättigungsstromes gut als Demonstrationsbeispiel für den eingangs besprochenen einfachsten Fall, da man es dabei ebenfalls mit einer im Inneren des Gases konstanten Feldstärke d. h. linearem Potentialgefälle und einer steilen sprungartigen Potentialänderung dicht an jeder der Elektroden zu tun hat. Man hat dann $J = \text{Const} =$ Sättigungsstrom J_s zu setzen und würde also für den scheinbaren spez. Widerstand finden $R \cdot d = V/J_s$ d. h. eine Proportionalität mit der Feldstärke. Andererseits könnte man einen wahren spez. Widerstand $R' \cdot d = (V-P)/J_s$ und Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes ansetzen, wenn man Polarisationsspannungen an den Elektroden annimmt, die linear mit der angelegten Spannung ansteigen. Ein einfachstes Beispiel zur Analogie mit dem allgemeinen oben durchgerechneten Fall bietet etwa die raumladungsbegrenzte Langmuir-Schottkysche Elektronenströmung im Vakuum. Hier muß man eine kontinuierliche Verteilung von elektromotorischen Kräften im ganzen Raum zwischen den Elektroden annehmen und würde folgendes erhalten. Es ist bekanntlich

$$J \sim V_0^{3/2}; \quad V' \sim V_0 \cdot x^{1/3}.$$

Der scheinbare Widerstand W ist also hier proportional mit $1/\sqrt{V_0}$, er nimmt mit zunehmendem V_0 ab. Der scheinbare spez. Widerstand R ändert sich wie $\text{const} \cdot x^{-1/3}$ mit x und die Polarisationsspannung in der Schicht x, $x + dx$ läßt sich darstellen in der Form $dP = (a - b \cdot x^{1/3})\, dx$. Ich sehe keinen Unterschied zwischen diesen Beispielen und den Verhältnissen in einem festen Isolator und kann jedenfalls nicht finden, daß die Einführung des wahren spez. Widerstandes und der Polarisationsspannungen für die physikalische Einsicht in den Mechanismus der Stromleitung hier irgendeinen Vorteil bringt.

Sinjelnikoff und Walther haben in einer schönen experimentellen Untersuchung[1]) nun aber gezeigt, daß vor Ausbildung der Raumladungen im Isolator tatsächlich das Ohmsche Gesetz bei hohen Feldstärken ebenso gilt wie in schwachen Feldern und diese wichtige Feststellung behält natürlich ihren vollen Wert. Nach Ausbildung der Raumladungen gilt das Ohmsche Gesetz für den scheinbaren Widerstand nicht mehr und wenn in jener Arbeit seine Gültigkeit für den wahren Widerstand gezeigt wird, so ist dies nach den obigen Ausführungen ein Zirkelschluß oder besser gesagt eine reine Formalität. Auch hier kann die Analogie mit Gasentladungen vielleicht die Sachlage noch etwas anschaulicher machen. Der Unterschied zwischen den Vorgängen in einem Isolator und in einer Gasentladung ist nämlich hinsichtlich der hier interessierenden Dinge nur der, daß sich in einem Gas die definitive Raumladungs- und Potentialverteilung sehr viel schneller einstellt und deshalb sich alle bisherigen Untersuchungen auf den Endzustand (Reststrom) beziehen. Die eine der von Sinjelnikoff und Walther angegebenen Methoden zur Ermittelung des wahren spez. Widerstandes würde man unmittelbar übertragen, die andere mit dem neuen Hilfsmittel des Kathodenstrahloszillographen vermutlich ebenfalls anwenden können (und hat damit z. B. beim Studium der Entwicklung eines Funkenüberschlages eigentlich bereits begonnen). Man wird aber wohl sicher nicht aus der Umrechnung des gewohnten ionentheoretischen Bildes auf räumlich verteilte innere elektromotorische Kräfte und Ohmsche Stromelemente eine grundsätzliche weitere Klärung des Entladungsmechanismus erwarten. Natürlich „sind die Gegenspannung, deren Größe und räumliche Verteilung, die Polarisationskapazität keine Hypothesen" in dem Sinn, daß sie nicht auch wirklich zu messen bzw. aus entsprechenden Messungen zu errechnen wären. Damit kommt man aber wie ich glaube keinen Schritt weiter in der Einsicht in den Mechanismus der sich tatsächlich abspielenden Vorgänge. Eine Ohmsche Strömung ist eine nicht nur stationär mögliche, sondern auch eine stabile Strömung und wenn sie scheinbar wie in festen Isolatoren und Gasen von selbst in eine andere kompliziertere übergeht — in welchen Zeiten diese Ent-

1) Zeitschr. f. Phys. **40**, 786, 1927.

wicklung vor sich geht, ist ganz nebensächlich — so halte ich es nicht für richtig zu schließen: Das Ohmsche Gesetz gilt und gilt auch weiterhin, die Abweichungen sind nur scheinbar und sind durch die Ausbildung von Gegenspannungen zu erklären. Worauf es ankommt, erfaßt man vielmehr, wenn man schließt: Das Ohmsche Gesetz gilt nicht, es gilt schon von Anfang an nicht, die Abweichungen sind nicht nur scheinbar, sondern die Vorgänge in der Strömung sind eben ganz andere wie in einer Ohmschen Strömung.

(Eingegangen 30. Mai 1928.)

Über die Hypothese, daß die höchsten Atmosphärenschichten durch β-Strahlen erwärmt werden.

Von Helge Petersen.

In dieser Zeitschrift (**29**, 232, 1928) hat Wilhelm Anderson einige Einwendungen vorgebracht gegen die von mir (d. Z. **28**, 510, 1927) erörterte Möglichkeit einer Erwärmung der höchsten Atmosphärenschichten durch β-Strahlen von der Sonne. Hierdurch veranlaßt möchte ich um Platz für folgende Bemerkungen ersuchen.

Der Aufsatz W. A.s zerfällt in zwei Teile: 1. Über die Möglichkeit der Existenz einer elektrisch geladenen Korpuskularstrahlung, ausgehend von der Sonne, und 2. Über die Möglichkeit einer mehr oder weniger vollständigen Absorption in der Atmosphäre einer β-Strahlung gewisser Intensität.

1. Daß es gewisse Schwierigkeiten gibt, sich eine mit Rücksicht auf das Vorzeichen der elektrischen Ladung einheitliche Strahlung von der Sonne vorzustellen, ist ja allgemein erkannt; eine noch größere Schwierigkeit als diejenige von W. A. erwähnte, sehe ich übrigens im Umstande, daß ein solches Strahlenbündel, wegen der gegenseitigen Abstoßung der Korpuskeln, nicht als solches die Erde erreichen zu können scheint. Demgegenüber steht aber die Tatsache, daß die Birkeland-Störmersche Nordlichttheorie sehr viele der beobachteten Eigentümlichkeiten des Nordlichts und dessen Verbindung mit den erdmagnetischen Verhältnissen im wesentlichen zu erklären vermag, so viele, daß man wohl kaum bezweifeln darf, hier auf dem richtigen Wege zu sein, selbst wenn zugegeben wird, daß wir noch keine erschöpfende Erklärung besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, die wir dadurch für die Existenz einer Korpuskularstrahlung gewinnen, die von der Sonne bis zur Erde reicht, scheint mir von viel größerer Bedeutung zu sein, als die negativen Einwendungen mehr allgemeiner Natur, die gegen die Existenz derselben erhoben werden können. Wie W. A. selbst anführt, läßt sich z. B. die von ihm erwähnte Einwendung recht leicht beseitigen (siehe auch S. Chapman, Ionisation in the upper atmosphere. Quarterly Journal 1926, Nr. 219). Daß man dabei genötigt wird, auch eine positiv geladene Strahlung als Quelle einer eventuellen Erwärmung anzunehmen, gebe ich gern zu; das Auftreten beider Gattungen von Strahlen im Nordlichtprozeß ist ja mehrfach angenommen worden. Die Berechnung der Energie auf der Grundlage der Annahme einer β-Strahlung scheint mir dennoch naheliegend, weil diese Annahme die Grundlage der Berechnung Birkelands war. (Ich möchte hier einfügen, daß es mich wundert zu lesen (l. c. S. 232), daß ich den Elektronenstrom auf 10^6 schätze. Birkeland hat diese ungefähre Stromstärke aus seinen Messungen unter gewissen speziellen Annahmen gefunden, wie auch von mir angeführt, und ich habe nur sein Resultat benutzt.) Zieht man, statt mit Birkeland eine β-Strahlung anzunehmen, die Annahme einer α-Strahlung, oder vielleicht Strahlungen beider Gattungen vor, wird ja dadurch nur die zu erwartende Erwärmung viel größer werden.

Damit meine ich aber — im Gegensatz zu W. A. —, daß „alle Schwierigkeiten gehoben sind". Denn, wenn wir Strahlungen beider Vorzeichen annehmen, ist ja zugleich die Möglichkeit gegeben zu verstehen, warum die Aufladung der Erde während der Bestrahlung nicht so groß wird, daß sie eine weitere Bestrahlung verhindert — ganz abgesehen von der Möglichkeit anderer Erklärungsweisen.

Zu den letzten Bemerkungen W. A.s möchte ich noch sagen, daß ich gar nicht den Wunsch habe, eine Hypothese aufrechtzuerhalten. Ich meine — und meinte auch dies geschrieben zu haben —, daß wenn wir eine Korpuskularstrahlung annehmen und dieser Strahlung eine Intensität der erwähnten Größenordnung beimessen, dann ist eine Erwärmung der obersten Atmosphärenschichten, wie entwickelt, zu erwarten; und es scheint mir, daß W. A. überhaupt keine Einwendung gegen diese Hypothese gemacht hat.

Kopenhagen, Dän. Met. Inst., Mai 1928.

(Eingegangen 8. Mai 1928.)

Erwiderung auf den letzten Artikel von Herrn H. Petersen.

Von Wilhelm Anderson.

Was die 10^6 Amp. anbetrifft, so habe ich gegen einen solchen Strom nichts einzuwenden. Es ist auch vielleicht möglich, daß dabei die Ge-

schwindigkeit der β-Strahlen $2{,}59 \cdot 10^{10}$ cm · sec^{-1} beträgt: mit einer solchen Zahl hat nämlich H. Petersen in seinem vorigen Artikel gerechnet[1]). Ebenfalls gebe ich die Möglichkeit zu, daß diese β-Strahlung bei der Erwärmung der höchsten Atmosphärenschichten die Hauptrolle spielt. Dies alles gebe ich aber nur unter der Bedingung zu, daß wir es mit einem reinen Elektronenstrom zu tun haben, ohne merkliche Beimischung positiver Atomionen.

Sollte dagegen der Elektronenstrom von einem gleich intensiven und gleich schnellen Strome positiver Atomionen begleitet sein, so liegen die Verhältnisse ganz anders. Vor allem scheint mir dann die oben erwähnte Geschwindigkeit unzulässig groß zu sein. Die schnellsten bis jetzt bekannten positiven Ionen sind die α-Strahlen der radioaktiven Stoffe; die Geschwindigkeit dieser Strahlen beträgt aber höchstens etwa $2 \cdot 10^9$ cm · sec^{-1}. Die Entstehung einer Geschwindigkeit von $2{,}59 \cdot 10^{-10}$ cm · sec^{-1} wäre bei positiven Ionen wohl kaum zu erklären. Ich glaube daher, daß man mit etwa 150mal kleineren Geschwindigkeiten rechnen müßte, so wie es z. B. die Theorie von E. A. Milne verlangt. Milne hat nämlich gezeigt, daß unter gewissen Umständen ionisiertes Calcium durch selektiven Strahlungsdruck von der Sonne weg in den Weltenraum getrieben werden kann. Die maximale Geschwindigkeit, welche das ionisierte Calcium dabei erlangen kann, ist etwa 1600 km · sec^{-1}; dadurch erklärt Milne die Entstehung der Protuberanzen[1]). Wenn solche Protuberanzenmassen in die irdische Atmosphäre eindringen, so werden sie keine elektrische Aufladung hervorrufen, da die positiven Calciumionen von einer entsprechenden Anzahl gleich schneller Elektronen begleitet werden. Diese Protuberanzenmassen können auch die Erwärmung der höchsten Schichten der irdischen Atmosphäre verursachen, aber die Hauptrolle dabei werden die positiven Calciumionen spielen, da ihre Masse und also auch ihre kinetische Energie viele tausendmal größer ist als diejenige der Elektronen. Den letzteren wird bei der Erwärmung der höchsten Atmosphärenschichten eine nur ganz unmerkliche Rolle zufallen.

1) Freilich halte ich es für ausgeschlossen, daß diese β-Strahlung durch radioaktive Prozesse im Sonnenkörper hervorgerufen wird. Ich kann aber auf diese Frage hier nicht näher eingehen.

1) The Observatory **49**, 183, 1926.

Dorpat (Estland), 13. Mai 1928.

(Eingegangen 22. Mai 1928.)

BESPRECHUNGEN.

F. Weigert, Optische Methoden der Chemie. 8°. XVI u. 632 S. Mit 341 Abb. u. 16 Tafeln. Leipzig, Akad. Verlagsges. m. b. H. 1927. Geh. M. 36.—, geb. 38.—.

Da in auffälliger Weise bei Experimentaluntersuchungen sowie auch im Unterricht der Doktoranden immer weniger Wert gelegt wird auf rein experimentelle Fragen, so ist das Buch von Weigert besonders zu begrüßen. Er hat in der Wahl der behandelten Fragen wie in der Art der Darstellung eine besonders glückliche Hand gehabt; das Buch ist so recht als ein Lehrbuch für den älteren Studenten der Chemie, der Physik und physikalischen Chemie zu bezeichnen. Mit der so oft betonten „starken Durchdringung der Chemie mit physikalischen Ideen" sollte eine stärkere Betonung methodisch-physikalischen Könnens des Chemikers Hand in Hand gehen. Man darf nicht sagen, daß ein Einblick in die Zeitschriftenliteratur solches schon weitgehend zeigt; es handelt sich nicht nur darum, daß der forschende Chemiker und Physikochemiker die Methoden kennt, sondern ab ovo beherrscht; mehr aber noch ist es wichtig, daß das große Heer der in die Industrie gehenden Chemiker das physikalische Rüstzeug besitzt, um physikalische Methoden anzuwenden und einzuführen. Gerade dieses können Bücher dieser Art leisten, wenn sie genügende Verbreitung finden.

Um einen Überblick über das Gebotene zu geben sei der Inhalt angegeben: 1. Optische Instrumente und ihre Verwendung, 2. Lichtquellen, 3. Strahlenfilter, 4. Photographische Operationen, 5. Spektroskopie, 6. Photometrie, 7. Spektralphotometrie, 8. Kolorimetrie und Nephelometrie, 9. Farbenmessungen, 10. Energiemessungen, 11. Photochemische Messungen, 12. Mikroskopie und Ultramikroskopie, 13. Lichtbrechung, -bestimmung, 14. Analyse von polarisiertem Licht, 15. Lumineszenz, Untersuchung schwacher Lichterscheinungen.

Referent hat das Buch ziemlich genau gelesen und ist für viele Hinweise, die er da gefunden hat, dankbar. Zahlreiche Fragen kann Weigert nach eigenen Untersuchungen darstellen, er gibt viel von seinen Erfahrungen bekannt — und man weiß ja aus den zahlreichen chemisch-optischen Untersuchungen des Verfassers, wie gut er auch schwierige experimentelle Dinge beherrscht. Manche kleine Unklarheiten sind aufgefallen, von denen einige hier angeführt sein sollen, da Weigert im Vorwort direkt darum bittet, aber auch um den Benützer des Werkes die Möglichkeit zu geben, sie zu verbessern. S. 18: die Zerstäubung erfolgt besser in Edelgasen; noch besser ist Verdampfung im Vakuum. S. 34: es ist vorteilhaft für gleichmäßiges Brennen der *Hg*-Lampe, große Selbstinduktion in die Zuleitungen zu legen. S. 41: die Angaben über die Struktur von *Hg* 2537 sind veraltet. S. 42: erste Zeile muß wohl Auerbrenner statt

Quarzbrenner heißen. S. 43, 10. Zeile von unten: Methode geht nur bei Gleichstrom oder völlig synchronem Lauf der Spektralröhren. Andere kontinuierliche Spektren im UV liefern Jod und H_2. S. 53: Ultrarot undurchlässige Filter gibt es fast nicht (vgl. § 52, S. 64); man muß vor der Methode der thermoelektrischen Energiemessung im Sichtbaren warnen, wenn das Rot nur durch Filter fortgebracht ist. S. 54: dünne Spiegelglasplatten ($^1/_{20}$ mm) lassen bei λ 280 $\mu\mu$ noch etwa 30 Proz. durch! S. 64: Rotfilter: Molybdänglanz, Biotitglimmer und ähnliches nicht vergessen! S. 86, § 69: Unterschied zwischen Banden-, kontinuierlichem Spektrum und Spektrallinien bei Apparaten verschiedener Dispersion, Bedeutung der Spaltbreite bei dem Suchen nach Absorptionslinien — dies sollte der Text ausführlicher enthalten. S. 93: Monochromator zuerst von Lehmann beschrieben. S. 112, 3. Zeile von unten: Quarzplättchen (statt Glasblättchen). S. 153 ff.: hier sollte das thermoelektrische Photometer von Ives behandelt sein, das wohl sehr anwendungsfähig sein dürfte. S. 203, 2. Zeile: Photozelle (statt Entladungsröhre). S. 231, Fig. 213 ohne nähere Ausführung über die Bedeutung der Buchstaben unverständlich. Im Kap. 7 (das im ganzen übrigens zu den besten des Buches gehört) sollte auch ein Hinweis darauf stehen, daß unter Umständen geringste Verunreinigung ganz falsche Ergebnisse herbeiführen kann; z. B.: die Pohlsche Untersuchung des Cholesterins! Im Kap. 8 bei der Nephelometrie vermisse ich einen Hinweis darauf, daß es bei Trübungsmessung besonders auf exakt definierten Strahlengang ankommt, daß man z. B. die Trübung einer langen und kurzen Flüssigkeitsschicht nicht unmittelbar miteinander vergleichen darf. S. 274 ff.: hier sollte einiges über die kritischen Arbeiten über die Ostwaldsche Farbenmessung gesagt werden. S. 353: die *HCl*-Reaktion verläuft doch jedenfalls anders. S. 506: die Tabelle für die Wellenlänge der *Na*-Linie ist nicht verständlich. S. 377 dürfte viel ausführlicher sein, dagegen S. 379 ruhig fehlen: diese Erscheinungen sind wesentlich komplizierter als hier dargestellt.

Zum Schluß soll nochmals betont werden, daß „die Optischen Methoden der Chemie" eine Neuerscheinung von grundlegender Bedeutung darstellen. Sie bilden keine Konkurrenz zu Kohlrausch, nicht zu Ostwald-Luther, sie stellen ein Novum in der Literatur der Experimentalwissenschaft dar. Aber sie sind nicht nur ein Lehrbuch: ein umfassendes Inhaltsverzeichnis: 30 Seiten Autorenregister mit Angaben des Inhalts ihrer zitierten Arbeiten, 30 Seiten Sachregister machen sie zu einem nützlichen Nachschlagewerk. — Die Verlagsbuchhandlung hat für eine sehr gute Ausstattung gesorgt, ausgezeichnet sind die 16 Seiten (größtenteils photographische) Abbildungen mit ausführlichen Erläuterungen. Walther Gerlach.

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Herausgegeben von Th. v. Kármán. Heft 4. Gr. 8⁰. 48 S. Mit 46 Abb. Berlin, Julius Springer. 1925. M. 5.10.

Aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen erscheinen seit einiger Zeit, herausgegeben von seinem Direktor v. Kármán, in schöner Ausstattung die dort ausgeführten theoretischen und experimentellen Arbeiten in Heftform mit etwa 3 Bogen Umfang. Diese Erscheinungsform ist insofern zu begrüßen, als man auf diese Weise die Möglichkeit erhält, ohne allzu große Kosten sich solche Arbeiten zu erwerben, die sonst je nach dem mehr theoretischen, technischen oder experimentellen Charakter in recht vielartigen Zeitschriften zerstreut sind.

Das vorliegende Heft 4 enthält zunächst eine theoretische Arbeit von B. Eck: „Strömungserscheinungen in Ventilen", in der gezeigt wird, daß unter gewissen Vernachlässigungen (zweidimensional, ohne Reibung, freier Strahl nach Verlassen des Ventils) sich diese Strömungen nach den Methoden der exakten Hydrodynamik behandeln lassen. Auch werden Vergleiche mit Versuchen von Schrenk angestellt. Es folgt eine „Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl" von Th. v. Kármán, die den Lesern dieser Zeitschrift von dem Referenten bereits in einem zusammenfassenden Bericht über das Turbulenzproblem mitgeteilt wurde (Physikal. Zeitschr. **26**, 571, 1925). Als dritte Arbeit schließt sich an: „Über die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz", der Vortrag v. Kármáns auf der Delfter Tagung für angewandte Mechanik, in dem Kármán neben zahlreichen anderen interessanten Betrachtungen den Gedankengang einer statistischen Berechnung des turbulenten Bewegungszustandes und des turbulenten Strömungswiderstandes darlegt, ein Gedankengang, der vielleicht einmal zur Lösung dieser Seite des Turbulenzproblems führen wird. Beschlossen wird das Heft durch eine Arbeit von B. Eck und E. Kayser: „Über einige Anwendungen nomographischer Methoden in der Thermodynamik", in der ein Druck-, Volumen-, Temperaturdiagramm und eines zur Ermittelung der Arbeit für 1 kg Gas bei polytroper Zustandsänderung mitgeteilt wird. Der Inhalt des Heftes beweist neben der Güte auch die Vielseitigkeit der Aachener Arbeiten.

L. Schiller.

E. Marcus, Die Zeit- und Raumlehre Kants in Anwendung auf Mathematik und Naturwissenschaft. 8⁰. 238 S. München, E. Reinhardt. M. 6.—.

Der im Kreise der Freunde Kantischer Philosophie bekannte Verf. will eine geschlossene und entschieden neue Begründung der Lehre Kants geben, indem er zeigt, wie sie angewandt werden muß. Indessen darf der Naturwissenschaftler nicht hoffen, in dieser Abhandlung etwa einen, seinem fachwissenschaftlichen Ausgangspunkt angemessenen Weg zu einem erleichterten Verständnis der Kantschen Raum-Zeitphilosophie zu finden. Kants Lehre wird stellenweise mit einer so verworrenen Dialektik vorgetragen (obgleich der Verf. selbst ausführlich gegen diese „aus Irrungen der Reflexion entsprungene Scheinlogik" zu Felde zieht), daß es z. B. leicht möglich wäre, mit methodisch gleichwertigen Gedankengängen zu beweisen, daß es nur Kurven geben kann, die überall eine bestimmte Tangentenrichtung haben. Es ist infolge Raummangels ganz unmöglich, auf alle Einzelheiten einzugehen. Es seien nur einige Sätze der Äthertheorie angeführt, die sich wesensbestimmend durch das ganze Buch hindurchziehen: „die Raumvorstellung tritt gleichzeitig mit der Empfindung auf, aber nicht durch sie, oder durch ihre Verlegung nach außen, sondern dadurch, daß wir die Empfindung nicht z. B. in unsrer Netzhaut wahrnehmen, sondern außerhalb dieser Organe ... Dies wird bewirkt durch die vom ätherischen Zentralorgan über die Leibesgrenze hinausgehende Undulation des organisierten Äthers beim Zusammenstoß mit

dem transorganischen Äther ... Diese Theorie erklärt auch, daß wir das optische Gebilde im Spiegel hinter der Spiegelfläche wahrnehmen: die organischen Wellen gehen durch den Spiegel hindurch und müßten hinter denselben mit einer hinreichend empfindlichen photographischen Platte experimentell nachweisbar sein" (!!) — Vielleicht kann man auf geisteswissenschaftlichem Gebiet mit solchen Methoden etwas Sinnhaftes zum Ausdruck bringen, vom Gebiet der exakten Wissenschaften aus jedoch stellen sich derartige Betrachtungsweisen als schöne Dichtungen dar, die man wissenschaftlich ablehnen wird. Es ist zu bedauern, daß verschiedene wertvolle Einzelheiten bes Buches, wozu auch die bisher noch unveröffentlichte, historisch interessante Kantsche Äthertheorie gehört, hinter solch unzugänglichem Gestrüpp verborgen liegen. R. Döpel.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. 1. Teil, für den Druck bearbeitet und herausgegeben von R. Courant und O. Neugebauer. (Bd. 24 der Sammlung: Grundlehren der math. Wissenschaften.) Gr. 8⁰. XIII u. 385 S. Mit 48 Fig. Berlin, Julius Springer. 1926. M. 21.—; geb. M. 22.50.

2. Teil: Die Grundbegriffe der Invariantentheorie u. ihr Eindringen in die mathematische Physik. Für den Druck bearbeitet von R. Courant und St. Cohn-Vossen. (Bd. 25 der Sammlung: Grundlehren der math. Wissenschaften.) Gr. 8⁰. X und 208 S. Mit 7 Fig. Berlin, Julius Springer. 1927. M. 12.—; geb. M. 13.50.

Die angezeigten Vorlesungen sind, obwohl leider Fragment geblieben und trotz mancher Unausgeglichenheiten, eine in ihrer Art wohl einzigartige Erscheinung. Sind doch diese Überblicke über die Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen das Werk eines Mannes, der selber in seiner Wissenschaft ein Erschauer großer Zusammenhänge war und der über die Kunst lebendigster Darstellung in seltenem Maße verfügte. Und wird doch gerade der Zeitraum und seine Vorgeschichte behandelt, in den Kleins Wirksamkeit fiel. Die Physik findet ausgiebige Berücksichtigung, wie das bei Klein wohl selbstverständlich ist. So wird im 1. Bande auf Gauß' physikalische Arbeiten (Gauß und Weber, Erdmagnetismus usw.) eingegangen. Ferner finden sich Erörterungen über die Mechanik und mathematische Physik in Frankreich in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts. Das 5. Kapitel ist der Mechanik und mathematischen Physik in Deutschland und England bis etwa 1880 gewidmet und der ganze 2. Band ist eine Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Relativitätstheorie (wobei die allgemeine Relativitätstheorie allerdings fehlt). Im einzelnen findet man eine Fülle interessanter Bemerkungen, auf die wir hier leider nur im allgemeinen hinweisen können. Referent teilt die Überzeugung der Herausgeber, daß diese Vorlesungen „sicherlich auf alle Mathematiker und Physiker und weit über diesen Kreis hinaus, eine große Wirkung ausüben" werden. Haupt.

L. Heffter u. C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd. Zweite wesentlich umgearbeitete und vermehrte Auflage. Gr. 8⁰. XV u. 477 S. Mit 112 Fig. im Text. Karlsruhe, G. Braun. 1927. Brosch. M. 20.—.

Das bekannte Lehrbuch ist gekennzeichnet durch systematische Benutzung des Begriffes der Transformationsgruppe. Dementsprechend wird mit der „projektiven" Geometrie begonnen, d. h. mit dem Studium derjenigen Eigenschaften geometrischer Gebilde, die bei projektiven Verwandlungen (Transformationen) erhalten (invariant) bleiben. Sodann wird zur „affinen" Geometrie aufgestiegen, die sich kurz dahin kennzeichnen läßt, daß bei ihr, spezieller, nur solche projektive Transformationen in Betracht gezogen werden, welche parallele Gerade wieder in parallele Gerade überführen (d. h. bei welchen die „unendlich ferne" Gerade in sich übergeführt wird). Schließlich gelangt man zur gewöhnlichen Geometrie, bei welcher — noch spezieller — als Transformationen nur die Bewegungen (im gewöhnlichen Sinne) zugelassen werden. Angesichts der Tatsache, daß die Relativitätstheorie durchaus vom Begriff der Transformationsgruppe und der Invariante beherrscht wird, erscheint die Kenntnis eines solchen Aufbaues der analytischen Geometrie, bei dem übrigens auch die nichteuklidische Geometrie ihren Platz findet, für den mathematischen Physiker interessant. Das ausgezeichnete Werk ist für solche Leser um so eher geeignet, als es sehr klar geschrieben ist und gerade auch auf denjenigen Rücksicht nimmt, der in diese Betrachtungen erst eingeführt werden will. Die vorliegende Neuauflage des 1. Bandes unterscheidet sich von der ersten vor allem dadurch, daß die Darstellung von vornherein axiomatisch fundiert ist. Behandelt wird, abgesehen von den Grundlagen, vor allem die ebene Geometrie, während die Raumgeometrie dem 2. Bande (Leipzig 1923) vorbehalten ist. Haupt.

R. Lehnhardt, Der Detektor und seine Anwendung für Empfang, Verstärkung und Erzeugung elektrischer Wellen. (Die Hochfrequenz-Technik, Bd. 8.) 1. Aufl. Gr. 8⁰. VI u. 95 S. Mit 62 Fig. Berlin, H. Meusser. 1926. M. 5.80.

Das Bändchen behandelt die Mittel zur Wahrnehmbarmachung der elektromagnetischen Schwingungen. Nach einem Überblick über die geschichtliche Entwicklung der verschiedenen Detektoren, kurzer Erläuterung und Würdigung von Prinzip, Wirkungsweise und Ausführung — von der H. Hertzschen Funkenstrecke bis zu den Elektronenröhren — werden eingehend die Kontaktdetektoren behandelt. Der Angabe der zu Detektorzwecken verwendbaren Stoffe und ihrer Eigenschaften (Empfindlichkeit, Zusammenhang mit physikalischen Eigenschaften u. a.) schließt sich ausführliche Behandlung und kritische Würdigung der Theorien an. Künstliche Kristalle, die zweckmäßigsten Formen leiten über zu Detektorschaltungen mit Hinweisen auf ihre Eigenart gegenüber Röhrenschaltungen. Der letzte Abschnitt ist dem Prinzip und Wirkungsweise des Schwingkristalls gewidmet. Literaturübersicht und Namen- und Stichwörterverzeichnis beschließen das Bändchen, das in leicht verständlicher Weise auch dem Laien einen Einblick in die teilweise noch ungeklärten Verhältnisse bietet. Decker.

C. Lübben, Die Antenne und ihre Verwendung in der Radiotechnik. (Die Hochfrequenz-Technik, Bd. 9.) 1. Aufl. Gr. 8⁰. V u. 76 S. Mit 69 Fig. Berlin, H. Meusser. 1926. M. 4.80.

Das Bändchen bietet eine übersichtliche Darstellung der für Antennen, wie sie speziell für Rundfunk- und Kurzwellenempfang in Betracht kommen, maßgebenden Punkte. Nach einleitender Behandlung der Aufgabe der Antenne für Sende- und Empfangszwecke, der Antenne als Schwingungskreis und der Bedeutung der Abstimmung wird ausführlich auf Form, Größe und die die Wirkung herabsetzenden Faktoren eingegangen. Die gebräuchlichsten Antennenformen (Hoch-, Zimmer-, Behelfsantennen) werden hinsichtlich Eigenwelle, wirksame Höhe, günstigster Wirkungsbereich kritisch besprochen. Auf Befestigung, Einführung, Erdung und Blitzschutz wird hingewiesen. Die Richtantennen, vor allem die Rahmenantenne, werden an Hand mehrerer Schaltschemen (mit Angabe der elektrischen Größen) behandelt. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln zur Bestimmung der Antennenkonstanten, ein umfangreiches Literatur- und Stichwörterverzeichnis beschließen die Ausführungen, die ohne reine Theorie gerade dem Laien wissenswerten Aufschluß zu geben berufen erscheinen. Decker.

M. Singelmann, Störbefreiung in der drahtlosen Nachrichtenübermittlung. (Die Hochfrequenz-Technik, Bd. 7.) 1. Aufl. Gr. 8⁰. X u. 151 S. Mit 239 Fig. Berlin, H. Meusser. 1926. M. 8.50.

Das Bändchen bietet in gedrängter, aber doch erschöpfender Weise eine Übersicht über die Mittel zur Störbefreiung. Nach einleitender Besprechung des Wesens der Störungen im allgemeinen werden Dämpfungsverminderung, Filterkreise, Kettenleiter, sowie Hochfrequenzverstärker und Überlagerungsempfänger behandelt. Den für Richtempfang geltenden Antennenanordnungen schließt sich die Erörterung einiger besonderer Probleme — künstliche Dämpfung, Amplitudenbegrenzung, Kompensationsschaltungen — sowie eine kurze Behandlung der piezoelektrischen Resonanz an. Zum Schluß des Hauptteils wird noch auf die Verzerrungsbeseitigung durch Gegentakt-Niederfrequenzverstärker und stereoakustisches Hören hingewiesen. Die Bewältigung des umfangreichen Stoffes, sowie Verständnis und Beurteilung der zahlreichen Schaltbilder wird durch eine kurzgefaßte Darlegung der in den einzelnen Abschnitten behandelten Fragen und Erläuterungen bei den Schaltskizzen selbst erleichtert. Eine kurze Übersicht über praktische Ausführung (Gerätebau), hauptsächlich hinsichtlich Spulen, beschließt das Bändchen, das, mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis versehen, einen Einblick in die Mittel zur Störbefreiung und Anregung zu Untersuchungen bietet.
Decker.

J. M. Kolthoff, Die Maßanalyse. Erster Teil: Die theoretischen Grundlagen der Maßanalyse 8⁰. XII u. 254 S. Mit 20 Abb. Berlin, J. Springer. 1927. M. 10.50, geb. M. 11.70.

Die Erwähnung dieses Büchleins in der „Physikalischen Zeitschrift“ rechtfertigt sich dadurch, daß es (wenigstens der vorliegende erste, theoretische Teil) kein Laboratoriumsbuch für den Chemiker allein ist, sondern ein vom Standpunkt der theoretischen und physikalischen Chemie aus äußerst interessantes Werkchen. Die physikalisch-chemischen Grundlagen der gesamten Maßanalyse, also Massenwirkungsgesetz, Indikatorentheorie, Potentialtheorie, Reaktionsinduktion, Kinetik, Katalyse, Adsorption, Fehlerrechnung usw., werden hier in mustergültiger Weise auf ein in den meisten einschlägigen Büchern in dieser Richtung stiefmütterlich behandeltes Gebiet exemplifiziert, von dem Gedanken ausgehend, daß dies Vorgehen nicht nur alte Methoden verstehen, sondern auch neue finden lehrt.
G.-M. Schwab.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Frankfurt a. M. Dr. Eberhard Mauz für Physik, an der Universität Münster Dr. Wolfgang Langenbeck für Chemie, an der Universität Hamburg Dr. Gerhard Thomsen für Mathematik.

Ernannt: Der Abteilungsvorsteher am Kaiser-Wilhelm-Institut für Kohlenforschung in Mülheim Dr. H. Tropsch zum Leiter des Kohlenforschungsinstitutes in Prag, der Observator an der Sternwarte Hamburg-Bergedorf Professor Dr. Kasimir Romouald Graff zum ord. Professor der Astronomie an der Universität Wien und Direktor der Sternwarte daselbst, der Privatdozent an der Bergakademie Freiberg Dr. H. J. Steinbrecher zum a. o. Professor der organisch-chemischen Technologie ebenda.

Gestorben: Der ord. Professor für Chemische Technologie an der Montanistischen Hochschule in Berlin Dr. Ing. Hans Fleissner, der frühere Herausgeber des Journal of the American Chemical Society Professor Abram Adam Breneman, der frühere Professor der Chemie an der Universität von Pennsylvanien Dr. Edgar F. Smith.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 15. | Ausgegeben am 1. August 1928. Nr. 765. Printed in Germany. | 29. Jahrgang.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 15 | 1. August 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 17 am 25. August 1928.

INHALT:

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zum Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern.

Von M. Wächtler.

Inhaltsübersicht.

Über die Grunderscheinungen der akzidentellen Doppelbrechung isotroper Körper.
Über Beobachtungs- und Meßeinrichtungen.
Einiges über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Homogenitätsprüfung durchsichtiger Materialien.
Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Ermittlung des Spannungszustandes in einem mechanisch beanspruchten Modellkörper.
1. Die Grundlagen des Verfahrens.
   a) Allgemeines.
   b) Über die Ähnlichkeit des Spannungszustandes im durchsichtigen Modell und im eigentlichen Konstruktionsteil.
   c) Über die Eigenschaften verschiedener Modellmaterialien.
   d) Über die Methoden zur völligen Bestimmung der Spannungen auf Grund der Messungen im polarisierten Licht.
2. Anwendungen auf einfache Belastungsfälle.
   a) Reine Normalbeanspruchung.
   b) Reine Scherung.
   c) Allgemeine ebene Biegung.
   d) Spezieller Biegungsfall nach F. Neumann.
   e) Biegung gekrümmter Stäbe.
   f) Kreisscheiben mit verschiedener Randbelastung.
   g) Radialbeanspruchte Kreisringe.
   h) Zugstäbe mit diskontinuierlichen Stellen im Innern (Kreisloch, elliptisches Loch, Risse).
   i) Diskontinuierliche Stellen an den Kanten (Einkerbungen, Ecken, — scharfe und abgerundete —).
3. Über ein spezielles technisches Beispiel (Spannungen in Zahnrädern).
Literaturverzeichnis.

Einleitung.

Um einen isotropen Körper doppelbrechend zu machen, kann man verschiedene Versuchsbedingungen anwenden. Am bekanntesten ist es, durch Einwirkung mechanischer Kräfte und durch Temperaturfelder optische Anisotropieeffekte zu erzielen. Es gibt aber auch viele Fälle, wo durch ein elektrisches oder magnetisches Feld Doppelbrechung erzeugt wird, und es ist auch gelungen, durch gerichtete optische Einwirkungen (Bestrahlung mit polarisiertem Licht) bestimmte Körper doppelbrechend zu machen (100).

Die Untersuchungen, die sich mit dem Studium dieser Fragen beschäftigen, sind so zahlreich, daß für diesen Bericht eine Beschränkung auf speziellere getroffen werden soll, und zwar befassen sich diese Ausführungen ausschließlich mit den Erscheinungen, die durch das Einwirken äußerer mechanischer Kräfte entstehen.

Über die elektrischen Erscheinungen ist u. a. in einem Sammelbericht von Szivessy im Jahrbuch d. Radioakt. u. Elektr. referiert

worden (92). Die Beschränkung auf die durch mechanische Einwirkung entstehenden Effekte wird noch weiter dadurch spezialisiert, daß hier nicht auf die Fragen der Entstehung der Doppelbrechungserscheinungen auf Grund von strukturtheoretischen Überlegungen eingegangen werden soll. Hierüber ist vom Verfasser bezüglich der Erscheinungen in Kolloiden in einem a. a. O. (98) erschienenen Artikel eine Übersicht zu geben versucht worden. Der Gegenstand dieser Arbeit erstreckt sich vielmehr auf die Anwendungsmöglichkeiten, die die akzidentelle Doppelbrechung zum Studium von Materialbeanspruchungen gefunden hat. Die Theorie der akzidentellen Doppelbrechung wird nur vom rein phänomenologischen Standpunkt aus im Anschluß an den von F. Neumann aufgestellten Ansatz erwähnt.

Die zahlreichen Arbeiten, die sich mit Untersuchungen des Spannungszustandes in doppelbrechenden Modellen beschäftigen, sind in den verschiedensten zum Teil schwer zugänglichen Zeitschriften zerstreut. Das ist sicher auch der Grund, daß auf diesem Gebiet öfter Arbeiten ausgeführt wurden ohne Kenntnis der bereits anderweitig vorhandenen Literatur. An bereits vorliegenden Sammelberichten sind zu nennen: eine Arbeit von H. Schultz, „Die Bestimmungen der Spannungen in beanspruchten Körpern mit Hilfe polarisierten Lichtes" (Betrieb (86)), eine von P. Heymans, „La Photo-Elasticimétrie ... (Bulletin Belge (45)), eine Abhandlung von E. G. Coker, „Photo-Elasticity for Engineers" (Gen. el. Rev. (19)), eine von G. Delanghe, „La Photo-Elasticimétrie ... (Génie civil (34)).

Mit Ausnahme des letzten sind alle diese Berichte 1920—21 erschienen. Seit dieser Zeit ist aber eine weitere Anzahl von Originalarbeiten veröffentlicht worden, so daß jetzt ein Bericht, der bestrebt ist, möglichst vollständig die bisherige Literatur zu berücksichtigen, berechtigt erscheint. Wenn auch eine möglichst allseitige Berücksichtigung der Literatur angestrebt war, so mußte doch eine Auswahl der wesentlichen Arbeiten getroffen werden, infolge des zu großen Materials. Die Gesichtspunkte, die für eine Beschränkung maßgebend waren, sind einmal vorwiegend die neuere Literatur zu behandeln und ferner bei den Anwendungen Untersuchungen von rein technischem Interesse von näheren Erörterungen auszuschließen.

Nach einer kurzen Beschreibung der prinzipiellen Erscheinungen folgt eine Übersicht über die Beobachtungsmethoden und die Meßtechnik. Bei den Anwendungen wurden die Homogenitätsstudien von Materialien nur kurz erwähnt, da dieser Gegenstand bekannter und auch schon, besonders bezüglich der Gläser, verschiedentlich behandelt worden ist (86, 65)[1]. In dem spezielleren Teil der eigentlichen quantitativen Spannungsmessungen wird einleitend die theoretische Voraussetzung für die Ähnlichkeit der Spannungsverteilung im optischen Modell und im Konstruktionsstück erörtert. Im engsten Zusammenhang damit wird dann die Eignung der verschiedenen für die optischen Modelle zur Verwendung kommenden Materialien behandelt. Diese Fragen sind gerade in neuerer Zeit wiederholt Gegenstand von Meinungsverschiedenheiten wenigstens bezüglich der Verwendung des Zelluloid geworden. Nach der Darstellung der verschiedenen Methoden, aus den optisch direkt zugänglichen Messungen, die zu jedem Punkt des Modelles gehörigen Werte der Hauptspannungen nach Größe und Richtung zu ermitteln, werden Anwendungsbeispiele behandelt. Hierbei ist eine Auswahl in dem oben erwähnten Sinne getroffen, so daß vorwiegend einfache Belastungsfälle, die meist auch einer elastizitätstheoretischen Behandlung zugänglich sind, von allgemein physikalischem Interesse berücksichtigt wurden.

Über die Grunderscheinungen der akzidentellen Doppelbrechung isotroper Körper.

Wird ein Körper aus einem isotropen durchsichtigen Material, z. B. ein Würfel aus gut gekühltem Glas einem allseitig gleichmäßigen Druck ausgesetzt, indem er etwa in eine Flüssigkeit, die unter Druck gesetzt werden kann, gebracht wird, so ändert er sein Verhalten gegenüber einem hindurchgeschickten Lichtstrahl, abgesehen von einer geringen gleichmäßigen Änderung des Brechungsexponenten nicht. Er bleibt also isotrop, d. h. sein physikalisches, speziell sein optisches Verhalten ist für jeden Punkt in jeder Richtung das gleiche. Wird aber eine Beanspruchung auf den Würfel ausgeübt, die nicht allseitig gleichmäßig ist, sondern z. B. in einem auf zwei gegenüberliegenden Würfelflächen gleichförmig angreifenden Zug oder Druck besteht, so zeigt der Körper jetzt gegenüber einem durchgehenden Lichtstrahl der nicht mit der Kraftrichtung parallel ist, ein anderes Verhalten als im unbeanspruchten Material. Er verhält sich jetzt wie ein Kristall, und zwar bei der speziellen einfachen Beanspruchungsart wie ein optisch-einachsiger, dessen optische Achse mit der Kraftrichtung zusammenfällt.

Wenn man in einem beliebigen Punkte eines isotropen Körpers auf jedem Radiusvektor den zugehörigen Wert des Brechungsexponenten für die betreffende Richtung durch eine dem

[1]) Weitere Literatur hierüber siehe bei Drude u. Werthauer (33).



Brechungsexponenten proportionale Strecke markiert, so ergeben die Endpunkte sämtlicher Radiovektoren eines Punktes den Ort einer Kugeloberfläche. Bei einem gleichförmig in einer Richtung beanspruchten Körper ergibt sich als charakteristische Fläche ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse in die Beanspruchungsrichtung fällt. Bei einer Beanspruchung durch Zug ist es ein ausgezogenes, bei Beanspruchung durch Druck ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Diese charakteristische Fläche wird nach Fletcher (41) Indexellipsoid oder optische Indikatrix genannt. Wie Fletcher gezeigt hat, lassen sich aus der Kenntnis des Indexellipsoids alle charakteristischen Eigenschaften der optisch anisotropen Körper herleiten[1]). Als wesentlichste ergibt sich die bekannte Tatsache, daß ein gewöhnlicher Lichtstrahl, wenn er nicht in der Achse der Indikatrix verläuft, im allgemeinen in zwei Strahlen polarisierten Lichtes, deren Polarisationsebenen senkrecht aufeinanderstehen, zerlegt wird. Diese beiden Strahlen, von denen der eine (ordentliche Strahl), das Snelliussche Brechungsgesetz wie in isotropen Medien befolgt, während der andere (außerordentliche Strahl) es nicht befolgt, pflanzen sich mit verschiedener Geschwindigkeit in dem Körper fort. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in isotropen Körpern mit akzidenteller Doppelbrechung hat F. Neumann, der sowohl theoretisch wie auch experimentell die Erscheinungen eingehend untersucht hat, Beziehungen aufgestellt (75). Er erhält für den allgemeinsten Fall einer räumlichen Deformation für die Hauptlichtgeschwindigkeiten folgende Gleichungen:

$$v_x = v_0 + q\xi + p\eta + p\zeta$$
$$v_y = v_0 + p\xi + q\eta + p\zeta$$
$$v_z = v_0 + p\xi + p\eta + q\zeta.$$

Hierin bedeutet v_x, v_y, v_z, die Komponenten der Hauptlichtgeschwindigkeit nach den drei Koordinatenachsen; ξ, η, ζ, die Hauptdilatationen, v_0 die Lichtgeschwindigkeit im nichtdeformierten Körper; p und q sind Materialkonstanten, die noch von der Wellenlänge abhängen. Die Voraussetzung dieser Theorie sind die Annahmen, daß in einem gleichförmig gedehnten unkristallinischen Körper für die Lichtfortpflanzung die Fresnelschen Gesetze gelten, daß die Polarisationsachsen in die Richtung der Hauptdilatationsachsen fallen, und daß die Hauptlichtgeschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, lineare Funktionen der Dehnung sind. Diese Annahmen sind wahrscheinlich und auch durch die bisherige Erfahrung bestätigt (vgl. Pockels 76, Lehrb. S. 460).

1) Vgl. Ambronn-Frey (5) S. 11 u. f.

Nach dem obigen Ansatz hängt das Vorzeichen der Doppelbrechung von der Größe $p - q$ ab. Ist dieselbe positiv, so ergibt sich das Vorzeichen der Doppelbrechung positiv in bezug auf die Dehnungsrichtung, ist $p - q$ dagegen für ein Material negativ, so bedeutet das, daß dasselbe durch Dehnung negativ doppelbrechend in bezug auf die Dehnungsachse wird, also ein Verhalten wie ein negativ einachsiger Kristall zeigt. Die Untersuchungen von Pockels (76) an Gläsern ergaben, daß der Wert von $p - q$ im allgemeinen positiv ist, mit zunehmendem Bleigehalt des Glases aber abnimmt und bei schwersten Flintgläsern negativ ist[1]). Er konnte auch ein Glas von bestimmtem Bleigehalt herstellen für das $p - q = 0$, daß also keine Doppelbrechung bei elastischer Deformation zeigte. Infolge der großen Dispersion der Doppelbrechung ist dieser Fall aber jeweils immer nur für eine Wellenlänge zu erreichen. Nach den bisher vorliegenden Beobachtungen ist schweres Flintglas der einzige isotrope Körper, der bei Dehnung negativ doppelbrechend wird (die an verschiedenen Kolloiden gefundenen, ähnlichen Erscheinungen lassen sich auf das Vorhandensein kristalliner Bausteine zurückführen). Was der eigentlich physikalische Grund dieses merkwürdigen Verhaltens von schwerem Flintglas ist, ist noch nicht geklärt. Die Neumannsche Theorie kann hierüber natürlich keinen Aufschluß geben, da sie ja nicht auf den inneren Mechanismus des Zustandekommens der Anisotropie eingeht.

Zur Bestimmung der beiden Größen p und q hat König (62) einfache Ausdrücke abgeleitet. Man kann jede elastische Deformation auf ihre beiden Grundformen Dilatation und Schiebung zurückführen. Die optischen Einflüsse, die diesen Grundbeanspruchungsarten zugeordnet sind, sind charakterisiert, durch die Größe der Doppelbrechung G_0, die infolge der Dilatation entsteht, bezogen auf die Dilatation und durch die Doppelbrechung infolge der Schiebung, bezogen auf die Größe der Schiebung. Diese beiden Größen G_0 und K_0 lassen sich leicht experimentell bestimmen und stehen mit p und q in folgenden Beziehungen:

$$K_0 = -\frac{1}{3}(2p + q)N; \quad G_0 = \frac{N^2}{vo}(p - q),$$

wobei N den Brechungsexponenten des undeformierten Materials bedeutet.

Da die akzidentelle Doppelbrechung isotroper Körper im allgemeinen nicht so groß ist, daß die beiden Strahlen so stark gebrochen

1) Über die Messungen früherer Beobachter vgl. Pockels, Lehrbuch (76) S. 462.



werden, daß eine getrennte Beobachtung und Bestimmung der einzelnen Brechungsexponenten möglich ist, so bestimmt man die Differenz der Brechungsexponenten aus Interferenzbeobachtungen der beiden Strahlen im polarisierten Licht. Wird ein doppelbrechender Körper von einem parallelen Strahlenbündel gradlinig polarisierten Lichts durchsetzt, so erhalten die beiden in dem Körper entstehenden Strahlen infolge ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gegeneinander eine Phasendifferenz, die man bestimmen kann, wenn man die Lichtstrahlen durch einen zweiten Polarisator treten läßt. Praktisch wählt man die Beobachtungsbedingungen so, daß die beiden Polarisatoren, zwischen denen der doppelbrechende Körper sich befindet, mit ihren Polarisationsebenen aufeinander senkrecht stehen, daß also das Gesichtsfeld ohne doppelbrechendes Objekt dunkel erscheint. Die Aufhellung, die ein anisotroper Körper hervorbringt, ist abgesehen von der Stärke der Doppelbrechung abhängig von der Richtung, die die Beanspruchungsrichtungen mit den Polarisationsebenen bilden. Für den einfachen Fall eines gleichförmig in einer Richtung gezogenen Glasstreifens erhält man leicht eine Übersicht. Es zeigt sich, daß der Streifen bei konstant gehaltener Spannung maximale Aufhellung zeigt, wenn die Dehnungsrichtung unter 45^0 zu den Polarisationsebenen orientiert ist. In dieser Lage, die man als Diagonalstellung bezeichnet, nimmt man im allgemeinen die Beobachtung und Messung der Doppelbrechung vor. Zwischen der Differenz der Brechungsexponenten des außerordentlichen n_a und des ordentlichen Strahls n_0, die als Maß der Stärke der Doppelbrechung dient und der in dem doppelbrechenden Körper entstehenden Gangdifferenz der beiden Strahlen besteht folgende einfache Beziehung:

$$n_a - n_0 = \frac{\gamma \lambda}{d},$$

wobei d die Dicke der doppelbrechenden Schicht, γ die Gangdifferenz in Wellenlängen, λ die Wellenlänge der Beobachtungslichtsorte ist. Diese Gleichung ist die Grundlage für die Meßmethode der Stärke der Doppelbrechung mit Hilfe von Interferenzbeobachtungen. Um nun für einen isotropen Körper eine charakteristische Größe für die akzidentelle Doppelbrechung zu haben, bezieht man die Größe $n_a - n_0$ auf die relative Verlängerung und bezeichnet sie (vgl. 60, S. 19) als spezifische Doppelbrechung G. Statt auf die relative Verlängerung kann man die Stärke der Doppelbrechung auch auf die Spannung pro Flächeneinheit beziehen, um ebenfalls eine „spezifische Doppelbrechung" G_p zu erhalten. Zwischen G und G_p gilt die einfache Beziehung $G = G_p E$, wobei E den Elastizitätsmodul bedeutet.

Als Dispersion der Doppelbrechung bezeichnet man (5, S. 50) das Verhältnis der Stärke der Doppelbrechung für kurzwelliges Licht zu der für langwelliges, z. B.

$$\frac{(n_a - n_0)_{436\,\mu\mu}}{(n_a - n_0)_{650\,\mu\mu}}.$$

Dieser Wert ist für Körper mit normaler Dispersion der Doppelbrechung z. B. für gewöhnliches Kronglas etwa gleich 1. (Siehe auch Köhler (59) und Reeb (79).)

Über Beobachtungs- und Meßeinrichtungen.

Die Versuchsanordnungen, die man zur Beobachtung der Doppelbrechungserscheinung deformierter Körper anwendet, sind sehr einfach. Fig. 1 gibt die von Hönigsberg (52) benutzte Apparatur wieder. Das Licht einer Bogen-

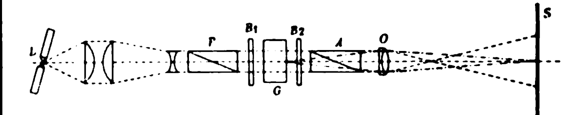


Fig. 1. Nach Hönigsberg (52).

lampe L, das durch einen Kondensor und eine Zwischenlinse praktisch parallel gemacht ist, durchsetzt so das Nicolsche Prisma P, den Polarisator, dann den Versuchskörper G und gelangt durch den zweiten Nicol A, den Analysator, dessen Polarisationsebene senkrecht zu der des Polarisators steht, zum Objektiv O, mit dessen Hilfe die Erscheinungen entweder auf den Schirm S projiziert oder photographisch registriert werden können. Will man eine quantitative Auswertung der Erscheinungen, so beobachtet man im allgemeinen subjektiv durch O.

Der Vorteil dieser Anordnung besteht darin, daß die parallelen Strahlen unmittelbar zwischen den Nicols verlaufen, so daß die Doppelbrechungserscheinungen des Versuchskörpers rein beobachtet werden können und nicht durch Apparatureinflüsse gestört werden. Anderseits ist aber dabei das Gesichtsfeld durch die Öffnung der Nicols begrenzt. Wenn man also zu größeren Gesichtsfeldern übergehen will, so ist die Verwendung sehr großer und damit kostspieliger Nicols notwendig, was einen Nachteil dieser Versuchsanordnung bedeutet.

Man kann aber bei Verwendung von Nicols mit kleiner Öffnung größere Versuchskörper untersuchen, wenn man die in Fig. 2 dargestellte Versuchsanordnung wählt.

Hierbei ist ein großes Gesichtsfeld zu erzielen. Es befinden sich aber jetzt zwischen den

Nicols außer dem Versuchskörper noch zwei Sammellinsen L und O_1. Damit durch diese keine wesentlichen Störungen im Beobachtungsfeld entstehen, müssen sie sehr sorgfältig ausgewählt sein, sowohl hinsichtlich ihres Materials als auch in bezug auf eine spannungsfreie Fassung.

Für die Beobachtung sehr großer Modelle hat Coker und Thompson (29) ein Polariskop

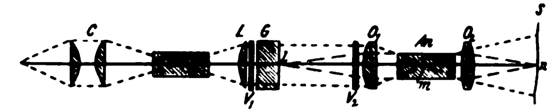


Fig. 2. Nach Schultz (86).

konstruiert, das keine Nicols verwendet (Fig. 3). Als Lichtquelle dient eine durch mehrere Metallfadenlampen F erhellte Mattglasscheibe M. Der Polarisator P besteht aus einem Spiegel aus schwarzem Glas. Als Analysator wird ein Glasplattensatz G verwandt. Die beiden Glimmerplättchen V_1 und V_2 (auf deren Bedeutung

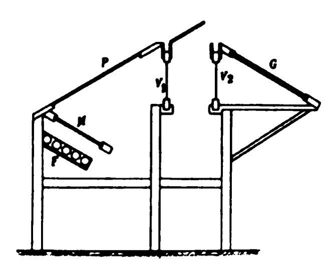


Fig. 3. Nach Coker u. Thompson (29).

weiter unten eingegangen wird), begrenzen das Gesichtsfeld und haben eine Fläche von je $25 \cdot 102$ cm^2. Eine spezielle Versuchsanordnung zur Prüfung optischer Gläser ist auch von Schultz (86) angegeben worden.

Die quantitative optische Auswertung eines beanspruchten Körpers besteht in der Ermittlung der Lage mechanisch neutraler Zonen, sowie in der Feststellung der Stärke der Doppelbrechung und ihrer Achsenrichtung in jedem Punkte.

Um die Achsenrichtung der Doppelbrechung, die mit der Richtung der Hauptspannungsrichtungen zusammenfällt, zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten. Die eine besteht darin, daß man das Gesichtsfeld mit Hilfe einer feinen Blende von Punkt zu Punkt untersucht und zu jedem Punkt durch Drehen des Objektes oder beider Nicols gleichzeitig die maximale Aufhellung, das ist die Diagonalstellung jeder Stelle des Objektes, bestimmt (siehe z. B. Steinheil, Rieth). Die andere Möglichkeit besteht in der Aufzeichnung derjenigen Stellen, die die gleiche Achsenrichtung für eine beliebige Winkelstellung des Objektes zu den gekreuzten Nicols haben. Diese Punkte werden durch Aufzeichnen der „Isoklinen", das sind diejenigen schwarzen Linien, die zwischen gekreuzten Nicols bei Drehung des Objektes ihre Lage ändern, weil sie denjenigen Stellen entsprechen, deren Achsenrichtung parallel zu den Polarisationsrichtungen sind und die deshalb dunkel bleiben. Dreht man somit die beiden Nicols in gekreuzter Stellung einmal um 360° und zeichnet zu jeder Winkelstellung die jeweilige Lage der beweglichen schwarzen Linien auf, so hat man damit sämtliche Linien gleicher Achsenrichtung erfaßt, aus denen man dann wie weiter unten noch gezeigt wird. für jeden Punkt die Hauptspannungsrichtung bestimmt.

Will man die Lage optisch neutraler Zonen, also solcher Stellen, für die keine Gangdifferenz und somit keine Doppelbrechung besteht, ermitteln, so muß man eine Überlagerung der „Isoklinen" dadurch ausschalten, daß man das Objekt bzw. beide Nicols gleichzeitig einmal um die optische Achse dreht, wobei die wirklichen neutralen Stellen dadurch leicht von den „Isoklinen" zu unterscheiden sind, daß sie im Gegensatz zu letzteren bei jeder Winkelstellung die gleiche Lage haben. Da dieses Verfahren zur Trennung umständlich ist, und es ferner in manchen Fällen erwünscht ist, unmittelbar durch eine Beobachtung im Gesichtsfeld sich über die Lage der neutralen Zonen zu orientieren, kann man sich dazu einer besonderen Versuchsanordnung bedienen. Das eine Verfahren, mit dessen Hilfe man die unmittelbare Sichtbarmachung der neutralen Zonen erreicht, ist von Siedentopf angegeben (88) und besteht darin, die beiden Nicols in gekreuzter Stellung sehr rasch völlig synchron rotieren zu lassen. Man erreicht dadurch, wenn die Rotationsgeschwindigkeit groß genug ist, daß die wandernden Isoklinen eine so schwache Intensität erhalten, daß sie nicht mehr wahrgenommen werden können. Praktisch wendet man dieses Verfahren nicht mehr an, da der Rotationsmechanismus, wenn er zuverlässig arbeiten soll, schwierig herzustellen ist. Man kann aber mit einem statischen Verfahren denselben Zweck leicht erreichen. Die Methode stammt bereits von Maxwell und ist unseres Wissens für optische Modelluntersuchungen zuerst von Hönigsberg (54) angewandt worden. Man beobachtet dabei nicht mehr in geradlinig polarisiertem Licht, sondern in zirkularpolarisiertem Licht. Das erreicht man dadurch, daß man in den Strahlengang zwischen Polarisator und Versuchskörper ein Glimmerplättchen von $^1/_4$ Wellenlänge Phasendifferenz einschaltet und zwischen Versuchskörper und

Analysator ein ebensolches dessen Achsen zum ersten senkrecht stehen und die beide in der Diagonalstellung orientiert sind. In Fig. 1—3 sind diese Glimmerplättchen in der Apparatur eingezeichnet. Diese Beobachtung im zirkularpolarisierten Licht ist für die Orientierung über die Lage von Nullzonen recht zweckmäßig, sie stößt aber praktisch auch auf gewisse Schwierigkeiten, da zwei exakt gleiche Glimmerplättchen mit $^1/_4$ Gangdifferenz für eine bestimmte Wellenlänge nicht immer leicht zu beschaffen sind und die Methode streng auch nur für monochromatisches Licht gilt. Für quantitative Auswertung wird daher im allgemeinen mit geradlinig polarisiertem Licht gearbeitet.

Zur Bestimmung der Stärke der Doppelbrechung und ihres Vorzeichens verwendet man einen Kompensator, d. i. ein doppelbrechender Körper, dessen Doppelbrechung nach Größe und Vorzeichen bekannt ist und als Vergleichsgröße für die zu messende Doppelbrechung dient. Für exakte Messungen ist die Verwendung von monochromatischem Licht erforderlich; für viele Fälle ist aber die Beobachtung im weißen Licht ausreichend, außerdem hat man dabei den Vorteil, soweit es sich um farblose Objekte mit annähernd normaler Dispersion handelt, aus den auftretenden Interferenzfarben die „Ordnung der Gangdifferenz" zu bestimmen. Bekanntlich zeigt doch ein doppelbrechender Körper zwischen gekreuzten Nicols im monochromatischen Licht außer an den bereits erwähnten Stellen, den „Isoklinen" und den neutralen Zonen, auch noch da Isotropie, wo die Gangdifferenz der beiden Strahlen ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge des Beobachtungslichtes ist. Es bleibt somit zunächst die Gangdifferenz bis auf ein Vielfaches der Wellenlänge unbestimmt. Bei Anwendung von weißem Licht dagegen ist eine Verwechselung der neutralen Zonen mit den Stellen für die eine Gangdifferenz von einem ganzen Vielfachen einer Wellenlänge vorliegt im allgemeinen nicht möglich, da letztere jetzt nicht schwarz, sondern in den den einzelnen Ordnungen entsprechenden Interferenzfarben erscheinen.

Um mit einem Kompensator die verschiedensten Werte der Gangdifferenzen des zu messenden Körpers bequem „kompensieren" zu können, stellt man ihn meist als Keil mit geringem Keilwinkel aus einem Kristall her. Ein sehr einfacher und bequem zu handhabender derartiger Kompensator ist der Quarzkeilkompensator nach Siedentopf (89). Er besteht im wesentlichen aus einem Quarzkeil, der so aus einem Kristall geschnitten ist, daß dessen optische Achse parallel zur Grundfläche verläuft und senkrecht auf der Keilkante steht. Ein solcher Keil zeigt bekanntlich in der Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols im monochromatischen Licht ein System von geradlinigen schwarzen Interferenzstreifen, die parallel zur Keilkante verlaufen. Von diesen entspricht der der Keilkante am nächsten liegende einer Gangdifferenz von einer Wellenlänge, während für jeden folgenden die Gangdifferenz um eine weitere Wellenlänge wächst. Im weißen Licht entsteht an Stelle schwarzer Streifen ein System von Interferenzfarben, durch die die verschiedenen „Ordnungen" der Gangdifferenz zu unterscheiden sind. Der Keil ist als Kompensator mit einer Skala versehen, die unmittelbar den Wert $\gamma\lambda$ in μ angibt.

Um nun eine unbekannte Gangdifferenz zu bestimmen, überlagert man dem doppelbrechenden Objekt diejenige Stelle des Quarzkeils, deren Gangdifferenz die zu bestimmende gerade aufhebt, so daß man auf dem Kompensator dann direkt das gesuchte $\gamma\lambda$ ablesen kann. Je nach dem Vorzeichen der unbekannten Doppelbrechung im Vergleich zu der des Quarzes muß man, um die Kompensation erreichen zu können, den Keil entweder in der „Additionslage" (bei entgegengesetztem Vorzeichen) oder in der Subtraktionslage (bei gleichem Vorzeichen) überlagern. Im weißen Licht ist die Kompensation sehr bequem, da hierbei die kompensierende Stelle des Keils schwarz erscheint. Im monochromatischen Licht dagegen muß man aus der Verschiebung der Kompensatorstreifen die gesuchte Gangdifferenz ermitteln, wobei diese zunächst nur bis auf ganze Vielfache der Wellenlänge zu bestimmen ist. Zur völligen Bestimmung muß man sich entweder durch Orientierung im weißen Licht einen Anhaltspunkt über die Ordnung der Gangdifferenz verschaffen (wofür aber das Vorhandensein annähernd normaler Dispersion der Doppelbrechung Voraussetzung ist), oder man muß die Entstehung der Gangdifferenz zeitlich mit zunehmender Belastung verfolgen. In manchen Fällen kann man auch durch keilförmiges Anschneiden des zu messenden Körpers sehr bequem die Ordnung der Gangdifferenz ermitteln.

Die Genauigkeit mit der man $\gamma\lambda$ mit dem Quarzkeilkompensator bestimmen kann, ist für eine mittlere Gangdifferenz von etwa $0{,}50\,\mu$ durch einen Fehler von 1—2 Proz. begrenzt.

Für genauere Messungen ist der Babinetsche Kompensator sehr geeignet. Er besteht aus zwei Quarzkeilen mit gleichen Keilwinkeln, die übereinandergeschoben werden, so daß eine planparallele Platte veränderlicher Dicke entsteht. Die beiden Keile sind so aus dem Quarz geschnitten, daß bei einem die optische Achse des Quarzes der Keilkante parallel, beim andern senkrecht zu derselben verläuft. Im weißen Licht

erscheinen also parallel zur Nullinie auf jeder Seite dieselben Interferenzstreifen, beide Seiten besitzen aber entgegengesetztes Vorzeichen. Wird ein solcher Kompensator mit einem doppelbrechenden Objekt überlagert, so erkennt man zunächst aus der Verschiebungsrichtung des Nullstreifens das Vorzeichen der Doppelbrechung. Die Gangdifferenz wird nun in der Weise gemessen, daß der verschobene Nullstreifen wieder in seine Ausgangslage gebracht wird, indem man mittels einer Mikrometerschraube, die beiden Keile gegeneinander verschiebt. Die dazu nötige Drehung der Mikrometerschraube, die mit einer in Wellenlängen geeichten Trommelablesung verbunden ist, gestattet dann die Ermittlung der gesuchten Gangdifferenz.

Neben den genannten gibt es noch eine ganze Anzahl anderer Kristallkompensatoren, die zum Teil auf ganz anderen Prinzipien beruhen, von deren Beschreibung aber hier abgesehen werden soll. (Siehe z. B. Ambronn-Frey (5) und Drude und Werthauer (33).)

In manchen Fällen, wo es sich vorwiegend um eine Orientierung über den Doppelbrechungsverlauf und nicht um genaue quantitative Bestimmungen handelt, benutzt man als Kompensator nicht einen doppelbrechenden Körper mit kontinuierlich veränderlicher Gangdifferenz in Form eines Keils, sondern man verwendet eine Anzahl verschieden dicker Gips- oder Glimmerplättchen. Diese sind in ihrer Dicke z. B. so abgestuft, daß man Gangdifferenzen von 1 Achtel Wellenlänge noch abgleichen kann.

Für die speziellen Zwecke der optischen Spannungsmessung wird gelegentlich auch zur Kompensation an Stelle eines Kristallkompensators ein isotroper Körper, dem man durch Zug oder Druck akzidentelle Doppelbrechung erteilt, verwandt. Es ist naheliegend, einen solchen Kompensator aus dem gleichen Material herzustellen, aus dem man gerade das Modell angefertigt hat. So kann man z. B. in einer entsprechenden Dehnungsvorrichtung einen schmalen Glasstab einspannen, der durch Drehen einer Schraube, deren Umdrehungen direkt in kg/mm^2 geeicht sind, über einen bestimmten Längenbereich gleichmäßig doppelbrechend wird. Diesen Kompensator bringt man je nach dem Vorzeichen der zu messenden Doppelbrechung in Additions- oder Subtraktionslage über dem Objekt an und erzeugt durch Drehen der Schraube eine so starke Gangdifferenz, daß Isotropie resultiert. Durch Ablesen der Kompensatorspannung läßt sich dann sofort der Spannungsbetrag an der unbekannten Stelle anzeigen. Diese Art eines Kompensators ist meines Wissens zuerst von Coker (20) angegeben worden. Da nun häufig Modelle aus Zelluloid verwandt werden, so benutzt man dabei auch als Kompensator einen gedehnten Zelluloidstreifen. Wie weiter unten noch näher gezeigt wird, können aber gegen die Verwendung von Zelluloid zu Modellen unter Umständen gewisse Bedenken auftreten, diese würden sich dann sinngemäß auch auf die Verwendung dieses Materials zu Kompensatoren beziehen.

Die Genauigkeit bei den optischen Spannungsmessungen wird durch die bei der Bestimmung der Stärke der Doppelbrechung und bei der Ermittlung der Achsenrichtungen erreichbare festgelegt. Die Messung der Gangunterschiede ist eine völlige Präzisionsmessung bei der der Fehler leicht auf einige Promille begrenzt werden könnte. Die in manchen Fällen nötige Messung der Dicke oder Dickenänderung ist auch mit einer solchen Genauigkeit möglich, so daß dadurch die Fehlergrenze nicht verschlechtert wird. Die Bestimmung der Achsenrichtung, die meist aus der Aufnahme der Isoklinen erfolgt, ist wesentlich ungenauer, da diese Linien immer eine gewisse Breite besitzen. Eine weitere Beeinträchtigung der Genauigkeit kommt dadurch zustande, daß die Materialien, die zu den Modellen verwandt werden, oft eine geringe Anisotropie von der Herstellung her besitzen, die im allgemeinen nicht zu eliminieren ist. Es wird somit insgesamt mit einem Fehler von einigen Prozent im Durchschnitt zu rechnen sein, was aber für die meisten Fälle durchaus ausreichend ist.

Einiges über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Homogenitätsprüfung durchsichtiger Materialien.

Von der Kenntnis der Erscheinungen der akzidentellen Doppelbrechung wird praktisch bei Prüfung von Gläsern Gebrauch gemacht. Von einem Glas, das für optische Instrumente verwandt werden soll, verlangt man neben einer schlierenfreien Beschaffenheit, daß es möglichst frei von inneren Spannungen ist. Es ist bekannt, daß fast jedes Glas, wenn es nicht unter ganz besonderen Bedingungen gekühlt worden ist, doppelbrechend ist. Die Erscheinungen sind prinzipiell die gleichen wie sie ein Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte zeigt. Der Grund für die Doppelbrechung in Gläsern beim Fehlen äußerer Kräfte ist in inneren Spannungen zu suchen, die sich beim Erstarren der Schmelze ausbilden, da im allgemeinen dieser Prozeß nicht für jede Stelle der Masse gleichmäßig erfolgt.

Diese Doppelbrechungserscheinungen sind bereits von Seebeck (87) beobachtet und von Brewster (18)[1]) näher studiert und in ihrer

1) Über weitere Arbeiten der älteren Literatur, insbesondere von Brewster siehe auch das Literaturverzeichnis von Heymans (45) S. 129.

Ursache erkannt worden. Eine ausführliche Untersuchung mit theoretischen Erörterungen wurde dann von F. Neumann in der bereits erwähnten Arbeit durchgeführt. Im Anschluß daran sind von Czapsky (32) diese Fragen weiter verfolgt worden. Er konnte auch zeigen, daß eine Glasplatte z. B. aus Spiegelglas durch eine Schmalseite parallel zur Glasoberfläche beobachtet, doppelbrechend ist, und zwar an den verschiedenen Stellen des Querschnitts mit verschiedenem Vorzeichen. Die Mittelpartie parallel zu den Kanten ist am stärksten doppelbrechend, sie wird auf jeder Seite von einer neutralen Faser begrenzt, denen unmittelbar längs der Kanten wieder doppelbrechende Zonen folgen. Das Vorzeichen der Mittelpartie ist positiv in bezug auf die Längsrichtung, entspricht also einem isotropen, durch Dehnung doppelbrechend gemachten Streifen. Die Randpartien sind negativ, entsprechen also einem durch Druck positiv gemachten Streifen. Diese Spannungsverhältnisse kommen durch die Abkühlung der Glasschmelze zustande. Die äußeren Teile erstarren zuerst und verhindern so die mittleren Partien sich soweit zusammenzuziehen, als es ihrer Temperatur nach der Abkühlung entsprechen würde, und versetzen diese somit in einen Zustand der dauernden Dehnung. Die äußeren Partien dagegen, die diesen Dehnungskräften entgegenwirken, kommen somit in einen Druckzustand.

Die Doppelbrechungserscheinungen, die im allgemeinen einem jeden Glas in bestimmtem Grade eigentümlich sind, lassen sich in starkem Maße dadurch erzeugen, daß man ein erweichtes Glas absichtlich rasch abkühlt. Man erhält dann die für Demonstrationszwecke bekannten bleibenden Interferenzkurven bis zu hohen Ordnungen. Da von den optischen Gläsern möglichste Spannungsfreiheit verlangt wird, so wird bei deren Herstellung in einem besonderen Kühlverfahren für eine möglichst gleichmäßige und sehr langsame Kühlung Sorge getragen. Mit dem Studium der Kühlvorgänge mit Hilfe der akzidentellen Doppelbrechung befassen sich u. a. Arbeiten von Adams und Williamsen (1), Schultz (86), English und Turner (36), Weidert und Berndt (99). (Vgl. auch Preston (77).) Tuzi (95) hat neuerdings auch an dem von ihm bezüglich seiner Doppelbrechungseigenschaften untersuchten Kunstharz „Phenolith" Untersuchungen an erwärmten Stücken im polarisierten Licht ausgeführt.

Während bei Fabrikations- und Verarbeitungsprozessen von Gläsern schon seit langem mit Erfolg Homogenitätsprüfungen im polarisierten Licht durchgeführt werden, bedient man sich meines Wissens in den Herstellungsprozessen von plastischen Massen noch kaum dieser Methoden. Eine gemeinschaftlich von K. Haupt und dem Verfasser (44) angestellte Untersuchung an Kaseinkunsthorn konnte aber zeigen, daß man auch in solchen Fällen wichtige Aufschlüsse über die Homogenität des fertigen Produktes sowie Richtlinien für eine zweckmäßige Gestaltung von bestimmten Arbeitsgängen während der Fabrikation erhalten kann.

Das Kaseinkunsthorn, das für Isolationszwecke und für verschiedene andere Gegenstände verwandt wird, wird prinzipiell in der Weise hergestellt, daß man schwach angefeuchtetes Kasein unter starkem Druck und unter Wärme verknetet und dann mit Hilfe von Strangpressen durch eine enge Öffnung zu Stäben verpreßt. Diese Stäbe werden dann in einem Formaldehydbad schwacher Konzentration gehärtet, worauf sie noch einer Trocknung in heißer Luft unterworfen werden. Da diese Stäbe zur Herstellung von kleinen Teilen durchweg auf Automaten verarbeitet werden, so sind an ein gut zu verarbeitendes Material die Forderungen zu stellen, daß es soweit frei von inneren Spannungen sein muß, daß die Stäbe in den Automaten nicht springen.

Um einen Überblick über den Spannungszustand fertiger Stäbe zu erhalten, wurden aus solchen ungefärbten Materials verschiedener Dicke und verschiedener Herkunft senkrecht zur Stabachse etwa 2 mm dicke parallel begrenzte Scheiben geschnitten, die hinreichend durchsichtig waren, um eine gute Beobachtung zu ermöglichen. (In größeren Schichtdicken ist das Material undurchsichtig.) Zwischen gekreuzten Nicols zeigten alle Proben das typische Bild eines Sphärokristalles, also konzentrisch angeordnete Interferenzfarben, die entsprechend den Polarisationsrichtungen von einem schwarzen Kreuz durchsetzt sind. Die Gangdifferenzen stiegen bei den meisten Proben nach dem Rand zu an. Es waren aber auch solche dabei, die eine konzentrische neutrale Zone aufwiesen, von der aus sowohl nach dem Rand als nach dem Zentrum zu die Doppelbrechung zunahm. Das Vorzeichen war selbstverständlich nach beiden Richtungen entgegengesetzt.

Um ein Urteil über die Ursache der Doppelbrechung und insbesondere darüber zu erhalten, ob es zulässig ist, aus diesen Erscheinungen Schlüsse auf innere Spannungen, die den Verarbeitungsprozeß gefährden können, zu ziehen, wurden systematische Untersuchungen des Produktes während des Fabrikationsgangs angestellt. Ein unmittelbar aus der Strangpresse kommender Stab zeigte in den entnommenen Proben keinerlei Doppelbrechung. Dadurch war die Möglichkeit, daß die Doppelbrechung viel-

leicht durch Gleichrichtung anisotroper „Bausteine" während der Pressung zustande gekommen sei, wie es z. B. bei sehr stark gedehntem Zelluloid der Fall ist, ausgeschlossen. Die Anisotropie war also als in inneren Spannungen begründet anzunehmen. Diese Spannungen entstehen wie sich weiter zeigt, vorwiegend während des Härteprozesses, in dessen Verlauf auch in manchen Fällen die entgegengesetzten Spannungszustände zwischen Zentral- und Randpartien zustande kamen. Das Formaldehydwassergemisch, das zur Härtung verwandt wird, kommt nämlich in doppelter Weise zur Wirkung. Wird ein frischgepreßter Stab in die Härteflüssigkeit gebracht, so wirkt diese, durch den Zylindermantel eindringend, zunächst vorwiegend quellend. Die

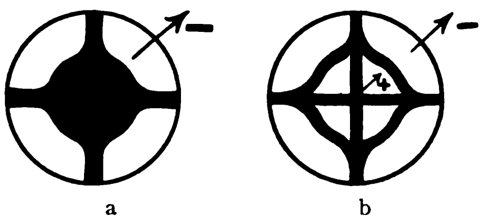


Fig. 4. Nach Haupt und Wächtler (44).

einem solchen Stab entnommene Probe zeigt ein Bild, wie Fig. 4a. Nach längerem Verbleiben in der Härteflüssigkeit zeigt sich dann die in Fig. 4b skizzierte Erscheinung. Das Vorzeichen der Doppelbrechung der Zentralpartie läßt, da das der Randpartie einer Quellung zugeordnet ist, jetzt auf Schrumpfung dieser Teile schließen. Der Grund hierfür ist darin erblickt worden, daß die Härteflüssigkeit beim Eindringen in den Stab durch Diffusion ihre Konzentration erhöht und so den noch weiter zentral gelegenen Teilen begierig Wasser entzieht, wodurch in diesen Schrumpfspannungen entstehen. Ein optisches Studium der Härtung in Bädern verschiedener Konzentration gestattet nun diejenige Konzentration zu bestimmen, bei der möglichst geringe innere Spannungen auftreten, bei der also von diesem Gesichtspunkt aus dasjenige Material entsteht, das dem geringsten Bruchrisiko bei der automatischen Verarbeitung ausgesetzt ist.

Eine Längsschnittbeobachtung an Stäben zeigte, wie aus den Querschnittsuntersuchungen zu erwarten war, ein Bild, das dem von Czapsky bei Gläsern gefundenen ganz analog ist. Parallel zu den Kanten des Streifens verläuft je eine neutrale Zone, die die negativ doppelbrechende Zentralpartie (Schrumpfung) von den beiden positiven Randpartien (Quellung) trennt. Eine Verfolgung des Trocknungsprozesses ergab in manchen Fällen noch eine Steigerung der Randspannungen, zeigte aber kein weiteres prinzipiell interessantes Resultat.

Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Ermittlung des Spannungszustandes in einem mechanisch beanspruchten Modellkörper.

1. Die Grundlagen des Verfahrens.

a) Allgemeines.

Neben den mehr qualitativen Untersuchungsmethoden die Homogenität eines Materials zu prüfen, bietet sich ein weiteres Anwendungsgebiet für quantitative Doppelbrechungsstudien in der Möglichkeit, an Modellen aus durchsichtigen, isotropen Stoffen die Verteilung von Spannungen in den verschiedenartigsten Versuchskörpern unter den mannigfaltigsten Beanspruchungsbedingungen zu ermitteln. Es handelt sich dabei einmal darum, bestimmte Beispiele von Beanspruchungsverteilungen, die auf Grund von elastizitätstheoretischen Ansätzen errechnet worden sind, einer experimentellen Prüfung zu unterziehen, als auch besonders um das Studium von solchen Fällen, die einer theoretischen Behandlung infolge der komplizierten Gestalt der zu untersuchenden Modelle nicht exakt zugänglich sind. Andere experimentelle Prüfungen, wie Bruch- oder Zerreißversuche, sind in den meisten Fällen nicht geeignet, sichere Schlüsse über die Verteilung von Spannungen bei normalen Belastungsbedingungen zu gestatten, da die Verteilung der Spannungen beim Bruch meist eine ganz andere ist als bei den technisch zulässigen Belastungen. In manchen Fällen lassen sich weiterhin aus Oberflächenerscheinungen von beanspruchten polierten Metallteilen, aus den sog. Fließfiguren gewisse Schlüsse über die Spannungsverteilung ziehen (z. B. Hartmann (43)). Doch kommt diesem Verfahren keine solche Bedeutung zu wie den optischen Methoden, da es sich dabei vorwiegend um Studien über das Verhalten von Oberflächenpartien handelt und die Fließfiguren erst bei sehr starker Beanspruchung (meist Überschreiten der Elastizitätsgrenze) auftreten, also unter Bedingungen, die auch für die meisten praktischen Belastungsfälle ohne Interesse sind. Da es sich bei den Konstruktionsteilen, in denen man die Spannungsverteilung kennen will, größtenteils um Körper aus Metall oder anderen undurchsichtigen Materialien handelt, so muß man für die optische Prüfung, die durchsichtige Stoffe erfordert, die Modelle aus anderen Materialien herstellen. Doch läßt sich zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Spannungsverteilung im Modell und im eigentlichen Konstruktionsstück ähnlich bleibt.

Die Anwendung der polarisations-optischen Spannungsuntersuchung ist grundsätzlich auf die Prüfung ebener Spannungszustände beschränkt, denn nur dann, wenn auf dem Wege,

den ein Lichtstrahl durch den Körper nimmt, überall die gleichen Kräfte und damit auch die gleiche Doppelbrechung vorhanden ist, ist eine völlig eindeutige Bestimmung der Spannungen möglich. Ein dreidimensionaler Spannungszustand scheidet daher für diese Untersuchung aus.

Wie in der Elastizitätstheorie gezeigt wird, ist ein beliebiger räumlicher Spannungszustand völlig bestimmt, wenn man für jeden Punkt die Komponenten der Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z, und der Tangentialspannungen τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} angeben kann. Der ebene Spannungszustand z. B. in der XY-Ebene geht nun aus den dreidimensionalen Verhältnissen hervor, wenn von den 6 obigen Bestimmungsgrößen die Größen σ_z und τ_{yz}, τ_{zx} den Wert Null annehmen.

b) Über die Ähnlichkeit des Spannungszustandes im durchsichtigen Modell und im eigentlichen Konstruktionsteil.

Die Frage, inwieweit die an einem Modell aus einem durchsichtigen isotropen Material auf optischem Wege ermittelte Spannungsverteilung Schlüsse auf die Verteilung in Körpern aus technischen Materialien gestattet, bildet die wichtigste Grundlage für die praktische Anwendungsmöglichkeit dieser Methode. Mesnager (73, 74), Coker (19) und Filon (37) haben diese Bedingungen untersucht. Im Fall einer dreidimensionalen Beanspruchung zeigt sich, daß die Spannungsverteilung von der Poissonschen Konstanten abhängt. Beim ebenen Problem dagegen besteht im allgemeinen keine Abhängigkeit von einer Materialkonstanten. Den Nachweis hierfür brachte Mesnager auf folgende Weise.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungskomponenten reduzieren sich für das ebene Problem (in der XY-Ebene) zu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy} &= 0 \\ \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Bestimmungsgleichungen der Spannungskomponenten, die die Beziehung zu den Dilatationen ξ, η darstellen, vereinfachen sich zu:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) + 2\mu\frac{d\xi}{dx} \\ \sigma_y &= \lambda\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) + 2\mu\frac{d\eta}{dy} \\ \tau &= \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei sich die Koeffizienten λ und μ durch die Materialkonstanten E (Elastizitätsmodul) und m (Poissonsche Konst.)[1]) darstellen lassen, als:

$$\mu = \frac{E}{2\left(\frac{1}{m} + 1\right)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E}{\left(\frac{1}{m} + 1\right)} \cdot \frac{1}{m - 2}$$

Bildet man von σ_x und σ_y die 2. Ableitungen nach x und y, und bezeichnet die Summe davon mit $\Delta_2(\sigma_x + \sigma_y)$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{d^2\sigma_x}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_y}{dy^2} + \frac{d^2\sigma_y}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_x}{dy^2} \\ &= (\lambda + 2\mu)\frac{d^3\xi}{dx^3} + \frac{d^3\eta}{dy^3} + \frac{d^3\xi}{dx\,dy^2} + \frac{d^3\eta}{dy\,dx^2}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Andrerseits folgt aber aus den Gleichungen (1) durch Differentiation der ersten Gleichung nach x und der zweiten nach y und Addition:

$$\frac{d^2\sigma_x}{dx^2} + \frac{2\,d^2\tau}{dx\,dy} + \frac{d^2\sigma_y}{dy^2} = 0.$$

Setzt man hierin die Werte von σ_x und σ_y aus den Gleichungen (2) ein, so ergibt sich:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d^3\xi}{dx^3} + \frac{d^3\eta}{dy^3} + \frac{d^3\xi}{dx\,dy^2} + \frac{d^3\eta}{dx\,dy^2} = 0.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (3):

$$\Delta_2(\sigma_x + \sigma_y) = 0\,.$$

Diese Gleichung, die zusammen mit Gleichungen (1) und den Randbedingungen die ebene Spannungsverteilung vollständig bestimmt, ist unabhängig von einer Materialkonstanten[2]).

Da bei den Modellen ein ebener Spannungszustand infolge der endlichen Begrenzung der Versuchsstücke nicht streng zu realisieren ist, so ist die Frage zu prüfen, ob eine Dickenänderung eventuell die Verhältnisse verändert. Im allgemeinen zeigt sich nun, daß es zulässig ist, auch ein solches Problem als zweidimensionales zu behandeln.

c) Über die Eigenschaften verschiedener Modellmaterialien.

Unter der Voraussetzung, daß der durchsichtige Körper, aus dem man Modelle für die polarisationsoptischen Spannungsstudien herstellen will, isotrop ist und das Hookesche Ge-

1) $\frac{1}{m} = \frac{\text{Querkontraktion}}{\text{Längsdilatation}}$.

2) Zunächst ist hierbei ein einfach zusammenhängender Rand (also das Fehlen von Löchern usw. im Innern) vorausgesetzt. Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen verschwinden die Elastizitätskonstanten nicht aus den Gleichungen, es lassen sich aber Korrektionen angeben, so daß die optische Methode auch in solchen Fällen anzuwenden ist. (Siehe Filon (37).)

Tabelle I.

Material	Spez. Doppelbrechung $G_p = G/E$ $G\left[\frac{n_a - n_o}{l/L}\right]$	$G_p\left[\frac{n_a - n_o}{\text{kg/cm}^2}\right]$	Elastizitätsmodul E [kg/cm²]	Elastizitätsgrenze [kg/cm²]
Glas (Kronglas, je nach Zusammensetzung)	König (61) 160 bis 180 $\times 10^{-3}$	2,0 bis 3,6 $\times 10^{-7}$ [1]	500 bis 800 $\times 10^3$	
	Heymans u. Allis (47)	2,51 $\times 10^{-7}$	731 $\times 10^3$	320
Zelluloid	Ramspeck (78) 5 bis 46 $\times 10^{-3}$ (50 Proz. / 0 Proz. Kampfer)	2,1 / 19,0 $\times 10^{-7}$	22,5 — 23,3 $\times 10^3$	350
	Heymans u. Allis (47)	12,1 $\times 10^{-7}$	25,5 $\times 10^3$	274
Bakelith	Arakrawa (8) 190 bis 270 $\times 10^{-3}$	ca. 50 $\times 10^{-7}$	38 bis 53,8 $\times 10^3$	
Phenolith	Tuzi (93) ca. 180 $\times 10^{-3}$	ca. 50 $\times 10^{-7}$	36,8 $\times 10^3$	300 Bruch
Geschmolzener Quarz	Heymans u. Allis (47) 239 $\times 10^{-3}$	3,4 $\times 10^{-7}$	703 $\times 10^3$	428
Gelatine verschiedener Konzentration (in Wasser)	Leick (69) 0,4 bis 2,2 $\times 10^{-3}$ (10 Proz. / 45 Proz.)	1,65 bis 0,75 $\times 10^{-3}$	242 bis 2944 $\times 10^{-3}$	
	König (62) 0,19 bis 0,25 $\times 10^{-3}$			

setz befolgt, ist nach den bisherigen Ausführungen jedes Material zur Untersuchung ebener Spannungsverteilungen prinzipiell geeignet. Es würden also u. a. Glas, geschmolzener Quarz, Gelatine, Zelluloid, Zellon, Bakelith, Phenolith in Betracht kommen. Früher verwandte man ausschließlich Glas, aber vorwiegend zwei weitere Anforderungen, die man an das Material stellte, eine möglichst große spezifische Doppelbrechung und eine leichtere Bearbeitbarkeit waren der Grund, auch andere Körper auf ihre Eignung hin zu untersuchen. Während Gelatine nur für spezielle Untersuchungen benutzt wurde, ist das Zelluloid in neuerer Zeit in großem Maße gebraucht worden. Besonders die bequeme Herstellung von Versuchskörpern komplizierter Gestalt, die aus Glas anzufertigen schwierig und kostpielig ist, hat zu der großen Verbreitung beigetragen. Da nun aber das Zelluloid ein Mischkörper aus zwei entgegengesetzten kristallinischen Komponenten ist, so zeigt es, insbesondere bei starker Dehnung keinen einfachen Verlauf der Doppelbrechung als Funktion der Dehnung. Dadurch können unter Umständen Verhältnisse entstehen, bei denen die Ähnlichkeit in der Abbildung der Spannungsverteilung in Frage gestellt wird.

Über die Eigenschaften der verschiedenen Materialien erhält man aus der obenstehenden Tabelle einen Überblick.

Gelatine, die den größten Wert von G_p hat, eignet sich nur für spezielle Untersuchungen, bei denen nur sehr geringe Kräfte auftreten dürfen. Im allgemeinen kommt sie für die Herstellung von Modellen wegen ihrer geringen Festigkeit und ihres inkonstanten Verhaltens (infolge Wasserabgabe usw.) praktisch nicht in Betracht.

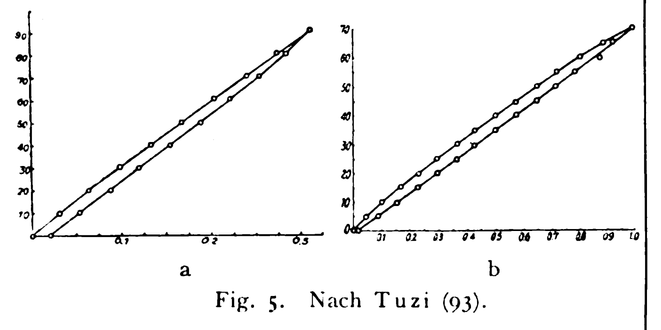
Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Doppelbrechung und Deformation bzw. Spannung, innerhalb der Elastizitätsgrenze ist

1) Diese Werte sind unter Zugrundelegung der Werte von E (nach Kohlrausch) berechnet. Sie können also nur als Abschätzungen betrachtet werden, da für die Glaswerte für die G bestimmt wurde, E nicht angegeben ist.

insbesondere an Glas von den verschiedensten Autoren untersucht worden und immer konnte ein proportionaler Zusammenhang festgestellt werden. An Zelluloid konnte Rossi (80a), Ramspeck (78), Filon und Jessop (40), Coker (19), an Phenolith Tuzi (93), an Gelatine Leick (69), König (62) denselben einfachen Verlauf bestätigen.

Die Materialien Zelluloid, Gelatine, Phenolith und Bakelith zeigen im Gegensatz zu Glas Zeit- und Resteffekte. Nach den Untersuchungen von Hartmann und Ramspeck (78) tritt beim Anlegen der Spannung beim Zelluloid die Doppelbrechung nicht sofort wie beim Glas in ihrem endgültigen Wert auf, sondern erreicht erst nach einer bestimmten Zeit den Endwert, und zwar nimmt die Doppelbrechung bei konstanter Belastung mit der Zeit ab, bei konstanter Dehnung dagegen zu. Die Veränderung erfolgt innerhalb der Elastizitätsgrenze nach Ramspeck nach einem Exponentialgesetz, während Filon und Jessop (40) keine so einfache Beziehung finden konnten. Wird ferner nach länger andauernder Belastung diese plötzlich entfernt, so klingt die Doppelbrechung allmählich ab. Filon und Jessop konnten beobachten, daß nach einiger Zeit, „das Kriechen“ praktisch aufhörte und ein Grenzwert angenommen wurde, während Ramspeck eine solche Feststellung nicht machen konnte. Seine Streifen zeigten bei konstanter Belastung auch nach 8 Tagen noch eine geringe Zunahme der Doppelbrechung.

Neben diesem Zeiteffekt zeigen die Körper auch, wenn sie belastet und dann wieder entlastet werden, meist noch eine Restdeformation und die Kurve, die die Spannung als Funktion der Verlängerung darstellt, fällt bei Belastung und Entlastung nicht genau zusammen, wie das z. B. bei Glas der Fall ist. Fig. 5a und b zeigt diese Resultate an Phenolith und Zelluloid nach Tuzi (93). (Als Ordinate ist die Belastung in kg, als Abszisse die Verlängerung in Proz. aufgetragen.)



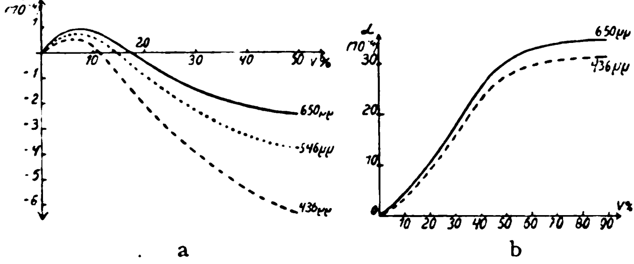
a b

Fig. 5. Nach Tuzi (93).

Wendet man stärkere Deformationen, bei denen die Elastizitätsgrenze überschritten wird, an, so besteht im allgemeinen kein einfacher Zusammenhang mehr zwischen Doppelbrechung und Deformation bzw. Spannung. Glas scheidet jetzt aus den Betrachtungen aus, da es keine bleibenden Verlängerungen gestattet. Die bei den anderen Körpern früher zunächst gestellte Frage, ob jetzt Proportionalität mit der Dehnung oder der Spannung besteht, läßt im allgemeinen keine einfache Beantwortung mehr erwarten, da es sich bei den meisten Körpern um Gele mit kristallinen „Bausteinen“ handelt. Bei Gelatine fanden Leick (69) und Rossi (17), daß die Doppelbrechung proportional mit der Verlängerung wächst; Bjerkén (81) dagegen konnte keinen einfachen Zusammenhang feststellen. Bei Kautschuk fand Rossi Proportionalität mit dem Zug, Bjerkén dagegen auch wieder keinen einfachen Zusammenhang.

Beim Zelluloid konnten Rossi und Bjerkén gleichfalls keinen einfachen Zusammenhang finden. Durch die Arbeiten von Ambronn (4), die er, veranlaßt durch einige merkwürdige Beobachtungen, die Aue im Verlauf seiner Arbeit machte, aufnahm und bei denen er sich nicht nur auf eine phänomenologische Untersuchung beschränkte, sondern in das Wesen der Doppelbrechung dieses Mischkörpers einzudringen versuchte, wurde einleuchtend, daß ein einfacher Verlauf der Doppelbrechung hier nicht zu erwarten ist. Das Zelluloid besteht bekanntlich aus Nitrozellulose, die bei der Fabrikation innig mit Kampfer vermischt wird. Das Vorzeichen der Doppelbrechung, die diese Nitrozellulose zeigt, ist positiv, die Kampferkristalle dagegen sind negativ doppelbrechend. Es war daher naheliegend, aus diesem Aufbau eine Deutung für das merkwürdige optische Verhalten zu geben. Ambronn fand nämlich, daß das Zelluloid bei schwacher Deformation positiv in bezug auf die Dehnungsrichtung doppelbrechend wird, bei stärkerer Dehnung hingegen das entgegengesetzte Vorzeichen der Doppelbrechung zeigt. Bei schwachen Dehnungen war annähernd normale Dispersion der Doppelbrechung vorhanden, bei größeren Dehnungsstufen dagegen lagen ganz anomale Verhältnisse, wie sie für Mischkörper aus zwei optisch entgegengesetzten Komponenten charakteristisch sind (3) vor. Die Vermutung, den eigentümlichen Sachverhalt aus dem Zusammenwirken der beiden Komponenten, die im undeformierten Material als submikroskopische Teilchen völlig regelloser Orientierung als Gesamtwirkung Isotropie ergeben, aber durch starke Dehnung gerichtet werden, zu erklären, wurde durch eine weitere Beobachtung gefestigt. Wird der Kampfer herausgelöst, so zeigt sich positive Doppelbrechung, die durch Einlagerung von Kampfer wieder negativ gemacht werden kann. Quantitativ ist der Verlauf vom Ver-

fasser (96) untersucht worden. Fig. 6a zeigt das Beobachtungsresultat an „unentkampfertem Zelluloid", Fig. 6b stellt die Kurve des mit „Xylol entkampferten" dar. Wenn das Material über die Elastizitätsgrenze gedehnt ist und gleichzeitig noch unter der Einwirkung einer äußeren Kraft steht, die bei den obigen Messungen da-



a b

Fig. 6. Nach Wächtler (96).

durch eliminiert war, daß nur Streifen, die nach der Dehnung aus der Dehnungsvorrichtung entfernt und längere Zeit sich selbst überlassen waren, untersucht wurden, so wird sich dieser Spannungseinfluß noch überlagern und den Kurvenverlauf verändern. Wie im einzelnen die Kurven verlaufen, hängt von der chemischen Zusammensetzung, insbesondere vom Kampfergehalt, der bei den verschiedenen Zelluloidsorten sehr verschieden sein kann, ab. Je kampferärmer das Zelluloid ist, desto mehr verlaufen die Kurven im positiven Gebiet. Genauere Untersuchungen liegen hierüber noch nicht vor. Fig. 7 zeigt die Beobachtungsresultate an der von A. Ramspeck untersuchten Zelluloidsorte.

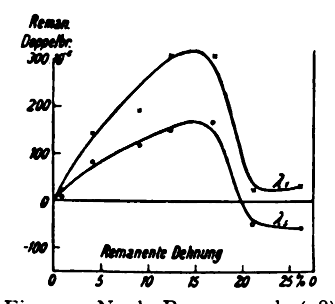


Fig. 7. Nach Ramspeck (78).

Im Anschluß an die von mir auf Grund der beschriebenen Beobachtungen erhobenen Bedenken (97) gegen die Verwendung von Zelluloid zu Modellen, wenigstens in den Fällen, bei denen eine stärkere Belastung, die zu bleibenden Dehnungen führen kann, möglich ist, hat Savur (82) an dem von Coker zu seinen Untersuchungen verwandten Xylonit (d. i. eine Zelluloidart) ähnliche Versuche wiederholt. Dabei hat er gefunden, daß bei seinem Material die Kurve der Doppelbrechung als Funktion der bleibenden Verlängerung stets ansteigt, mit größerer Deformation allerdings immer weniger. Ein Umbiegen oder gar einen Vorzeichenwechsel konnte er nicht feststellen. Dieses Resultat ist nach allen an deutschen Zelluloidsorten gemachten Beobachtungen zunächst ganz unerklärlich. Die Möglichkeit, die Savur erwähnt, um die Differenz der Resultate zu erklären, daß unsre Messungen vielleicht auf einer falschen Meßmethode beruhen, kann keine Klarheit bringen. Sowohl Ambronn wie ich haben eine einwandfreie Meßmethode angewandt. Die Messungen wurden im monochromatischen Licht vorgenommen und die Ordnung der Gangdifferenz wurde dadurch bestimmt, daß die Streifen mit einem Keil versehen wurden, um die Ordnung abzuzählen. Es bleibt also im Augenblick nur übrig, den Grund in verschiedenen Materialeigenschaften zu suchen. (Vielleicht ist das Xylonit praktisch so kampferarm, daß seine Kurve der des „entkampferten" Zelluloids ähnlich verläuft.)

Wenn auch ohne weiteres zugegeben werden kann, daß die Verwendung von Zelluloidmodellen bei mäßiger Beanspruchung, wobei eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze ausgeschlossen ist, einwandfreie Resultate liefert und eine Ähnlichkeit der Spannungsverteilung gewährleistet, so sind doch die auf Grund der verschiedenen Anomalien erhobenen Bedenken verständlich. Das trifft besonders zu, wenn komplizierte Versuchskörper studiert werden, deren Spannungsverteilung noch so unbestimmt ist, daß infolge starker Spannungskonzentration an manchen Stellen bleibende Deformation eintreten kann. Auf Grund allgemeinerer Überlegungen hat zuerst Pockels (76_3) solche Bedenken geäußert. Mesnager (74) hat dann bei seinen umfangreichen Arbeiten auch das Zelluloid, das meines Wissens zuerst von Hönigsberg (52) gelegentlich verwandt wurde, in dem Bestreben ein leichter zu bearbeitendes Material zu finden, näher untersucht. Er fand aber kein Material, das ihm genügte und blieb deshalb bei Glasmodellen. Im Anschluß an seine Arbeit hat auch A. Ramspeck Bedenken geäußert. Diese Einwände hat Heymans (51) in einer Erwiderung zu zerstreuen gesucht. Dazu hat W. König (67) nochmals ausführlich Stellung genommen und den Sachverhalt genau klargestellt. Neuerdings ist auch von anderer Seite (Tuzi) versucht worden, an Stelle von Zelluloid ein anderes Material (Phenolith) für die Modelle zu verwenden.

d) Über die Methoden zur völligen Bestimmung der Spannungen auf Grund der Messungen im polarisierten Licht.

Für einen Punkt P der XY-Ebene ist der Spannungszustand völlig bestimmt, wenn man zu

jedem beliebigen Linienelement ds durch P die Spannung nach Größe und Richtung angeben kann. Das ist bei Kenntnis der drei Komponenten σ_x, σ_y, τ der Fall. Läßt man nun ds einen Winkel von 360° durchlaufen und trägt die zu jeder Stellung zugehörigen Spannungswerte ihrem Absolutwert nach den entsprechenden Winkelstellungen von ds gemäß, von P aus auf, so liegen die Endpunkte der absoluten Spannungswerte auf einer Ellipse. Es gibt also für jeden Punkt P von sämtlichen Richtungen, die die Spannung hier haben kann, zwei ausgezeichnete aufeinander senkrechte, in denen die Spannung ihren Maximal- bzw. Minimalwert hat. In diesen Richtungen, die man als Hauptspannungsrichtungen bezeichnet, sind die Spannungen reine Normalspannungen. Es ist also hier $\tau = 0$. Man nennt diese Spannungen die Hauptspannungen. Diese Hauptspannungen σ_1 und σ_2 bestimmen ebenfalls bei Angabe des zugehörigen Winkels der Hauptspannungsrichtung gegen eine Koordinatenachse vollständig den Spannungszustand in P. Man kann also auch an Stelle der Angabe der drei Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 und den Winkel φ zur völligen Bestimmung des Spannungszustandes in P benutzen. Sind letztere Bestimmungsstücke gegeben, so kann man z. B. nach der von Mohr angegebenen Methode (vgl. z. B. Föppl, III. Bd, S. 31) mit Hilfe des Spannungskreises für jede Richtung die Komponenten σ und τ ermitteln.

Die analytische Beziehung, die zwischen den beiden Darstellungsarten des ebenen Spannungszustandes besteht, ergeben sich folgendermaßen:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi,$$
$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2\varphi + \sigma_2 \cos^2\varphi,$$
$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Hierbei bedeutet σ_1 den Absolutwert der größten der beiden Hauptspannungen und φ ihren Winkel gegen die positive X-Achse.

Wenn man in einer genügend großen Zahl von Punkten der XY-Ebene die Richtungen der Hauptspannungen durch Einzeichnen des entsprechenden Achsenkreuzes der „Indexellipse" markiert, so kann die XY-Ebene mit einem System sich orthogonal schneidender Kurven bedeckt werden, die in jedem Punkt durch die Richtung ihrer Tangenten die Hauptspannungsrichtung angeben. Man bezeichnet diese Kurven als Spannungstrajektorien. Die Ermittlung dieser Trajektorien bildet den einen Teil der Aufgabe mit Hilfe der polarisationsoptischen Methode die Spannungszustände zu bestimmen. Der andere besteht in der Ermittlung der absoluten Beträge der Hauptspannungen.

Wenn man von einer punktweisen Bestimmung der optischen Eigenschaften (vgl. z. B. Steinheil und Rieth) absieht, sondern eine Registrierung der beweglichen „Nullinien" (vgl. S. 501) vornimmt, erhält man nicht unmittelbar die Trajektorien, sondern zunächst eine andere Kurvenschar, aus der die Trajektorien dann konstruiert werden können. Diese Kurven sind die Linien gleicher Neigung der Hauptspannungsrichtungen, die sog. „Isoklinen". Die Isoklinen, über deren Bestimmung bereits gesprochen wurde, liefern somit ein Richtungsfeld, zu dem die Trajektorienscharen zu suchen sind. Diese Aufgabe löst man mit Hilfe der Methoden zur graphischen Integration linearer Differentialgleichungen. So erhält man z. B. eine Schar der Hauptspannungsrichtungslinien folgendermaßen: Es seien in Fig. 8 AB und CD zwei benachbarte

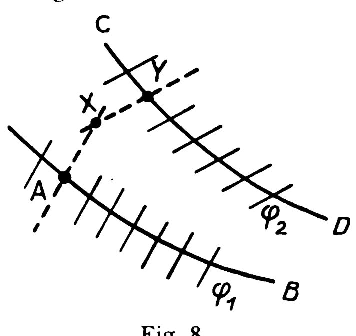


Fig. 8.

Isoklinen mit den in gleichen Abständen unter den gemessenen Winkeln (φ_1 und φ_2) aufgetragenen Richtungselementen. Von A auf dem durch diesen Punkt gehenden Richtungselement vorwärtsschreitend, gelangt man zum Nachbarpunkt X und dann zu Y, indem man zu den Richtungselementen von CD eine Parallele durch einen Punkt Y zieht, der so gewählt werden muß, daß $AX = XY$ wird, usw. Die andere Schar der Trajektorien wird dann so konstruiert, daß die Kurven derselben diejenigen der ersten Schar senkrecht schneidet.

Zur Bestimmung des Absolutwertes der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 wird zunächst die algebraische Differenz der Hauptspannungswerte $\sigma_1 - \sigma_2$ nach Größe und Vorzeichen bestimmt. Darauf muß noch die Summe der Hauptspannungen $\sigma_1 + \sigma_2$ festgelegt werden. Während die erste Bestimmung leicht und nach einer Methode ausgeführt wird, ist die Ermittlung der zweiten Größe nicht immer einfach und es sind eine ganze Reihe von Verfahren dafür ausgebildet worden. In zahlreichen Fällen, in denen man nur spezielle Untersuchungen vornimmt und nicht an einer völligen Ermittlung des Spannungszustandes interessiert ist, sieht man daher von der Bestimmung von $\sigma_1 + \sigma_2$ ab. So ist z. B. aus den obigen Gleichungen

ersichtlich, daß die Schubspannungskomponente τ bereits durch den Winkel φ und die Größe $\sigma_1 - \sigma_2$ bestimmt ist; wenn also bei einer bestimmten Problemstellung nur die Schubspannungskomponente studiert werden soll, so erübrigt es sich $\sigma_1 + \sigma_2$ zu ermitteln.

Um die Größe $\sigma_1 - \sigma_2$ zu erhalten, bedient man sich der empirisch gefundenen Beziehung, wonach die akzidentelle Doppelbrechung eines isotropen Körpers bei Beanspruchung innerhalb der Elastizitätsgrenze proportional der Hauptspannungsdifferenz ist. Es ist also: $\gamma = C(\sigma_1 - \sigma_2)\,d$, wobei γ wieder die Phasendifferenz zwischen außerordentlichem und ordentlichem Strahl, d die Dicke der durchstrahlten Schicht und C eine Materialkonstante ist. Wenn es sich also nur darum handelt, die relative Spannungsverteilung über eine bestimmte Fläche zu untersuchen, so kann direkt die Phasendifferenz als Maß für den absoluten Betrag des Spannungszustandes in den einzelnen Punkten aufgetragen werden.

Im weißen Licht werden zwischen gekreuzten Nicols diejenigen Stellen für die $\sigma_1 - \sigma_2$ von Null verschieden ist (und die nicht mit den Polarisationsrichtungen parallele Hauptspannungsrichtungen haben) bestimmte Interferenzfarben zeigen. Ist die Beanspruchung hinreichend groß, so wird das Gesichtsfeld von einer Anzahl Kurven verschiedener Farbe erfüllt sein. Die Kurven gleicher Farbe, die sog. „Isochromaten", verbinden Punkte gleicher Hauptspannungsdifferenz. Ihre Aufnahme gestaltet sich besonders zweckmäßig im zirkularpolarisierten Licht, weil dabei die Isoklinen nicht auftreten. Für quantitative Messungen kann man die Isochromaten meist nicht direkt aus den Interferenzlinien ermitteln, da die Unterscheidung der Farbnuancen oft schwierig ist und in vielen Belastungsfällen auch keine so starken Beanspruchungen vorkommen, daß verschiedenfarbige Interferenzfarben auftreten, sondern nur eine verschieden starke Aufhellung des Gesichtsfeldes eintritt. In solchen Fällen muß man daher $\sigma_1 - \sigma_2$ mit einem Kompensator bestimmen und aus den für die einzelnen Punkte erhaltenen Werten dann die Isochromaten aufzeichnen, wenn ihre Kenntnis notwendig ist.

Das eine Verfahren zur Bestimmung der Summe $\sigma_1 + \sigma_2$ ist von Mesnager verwandt worden. Es beruht auf der Tatsache, daß man die Summe der durchschnittlichen Werte der Hauptspannungen in einer ebenen Platte durch Ermittlung der Querkontraktion der Platte an der Beobachtungsstelle feststellen kann. Bei einer elastischen Deformation erfährt die Platte eine Querkontraktion von $\Delta D = (\sigma_1 + \sigma_1) : mE$. Sind die Größen m und E bekannt, so ist zur Bestimmung von $\sigma_1 + \sigma_2$ nur die Dickenänderung festzustellen. Diese Größe ist sehr klein (z. B. bei einer Glasplatte von 10 mm Dicke und bei einer Belastung von $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ kg ist, wenn $m = 4$ und $E = 5000$ angenommen wird $\Delta D = 2\,\mu$), ihre Messung also sehr schwierig. Mesnager, der für seine Modelle Glasplatten verwandte, nahm sie mit Hilfe einer Interferenzmethode vor. Da diese aber genau planparallele polierte Oberflächen der Modelle erfordert, eine Bedingung, die im allgemeinen von den Versuchskörpern nicht in so vollkommener Weise erfüllt wird, hat sich das Interferenzverfahren nicht eingeführt. Viel bequemer ist die Messung mit Hilfe eines mechanischen Dickenmessers, den Coker (24) in einer sehr empfindlichen Form ausgeführt hat. Fig. 9 zeigt den Apparat.

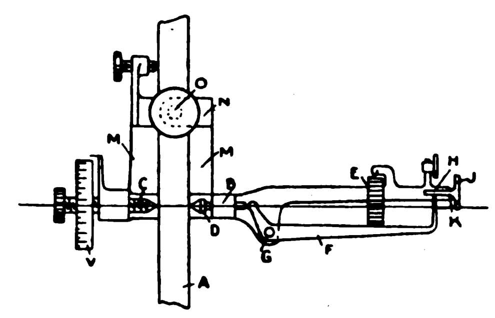


Fig. 9. Nach Coker (24).

Der zu messende Körper A befindet sich zwischen zwei Spitzen C und D, von denen C mit einem Mikrometer eingestellt werden kann, während D leicht an den Körper gepreßt wird vermittels einer Feder E, die über einen Hebel F angreift. Dieser wirkt auf einen zweiten H, der mit einem Spiegel J verbunden ist. Eine geringe Verschiebung von D bewirkt eine Veränderung eines Lichtzeigers, der durch J übertragen wird. Der Apparat gestattet z. B. bei einer Dicke von $^1/_4$ Zoll (6,35 mm) eine Dickenänderung von ca. $^1/_2\,10^{-6}$ Zoll noch zu messen. (Siehe auch (45), S. 124.)

Die Bestimmung mit Hilfe des Cokerschen Apparates bedeutet gegenüber der Interferenzmethode eine wesentliche Erleichterung. Viele Arbeiten von Coker und seiner Schule sind auch so ausgeführt worden. Es ist aber andererseits erwünscht, zu prüfen, ob man nicht durch rein optische Methoden zu einer völligen Spannungsbestimmung kommen kann; denn das beschriebene Verfahren erfordert die Herstellung eines besonders empfindlichen mechanischen Meßapparates, sowie die Kenntnis der Materialkonstanten, die durch besondere Versuche zu bestimmen bzw. durch Vergleichsmessungen zu eliminieren sind (vgl. z. B. (45), S. 125). Die Frage nach einer völligen Spannungsbestimmung

auf rein optischem Wege ist bereits von Maxwell behandelt und ferner von Coker und Filon ausführlich untersucht worden. Drei verschiedene Verfahren hierfür sollen kurz skizziert werden.

Das erste Verfahren beruht auf der Erkenntnis, daß die Isoklinen zusammen mit den Randbedingungen die Spannungsverteilung völlig bestimmen. Zur praktischen Anwendung dieser Methode ist es erforderlich, die analytische Gleichung der Isoklinen aufzustellen. Das ist aber im allgemeinen nicht möglich bzw. außerordentlich schwierig, so daß dieses Verfahren kaum in Betracht kommt.

Die zweite Methode (Filon und Coker) zeigt, daß bei Kenntnis der Isoklinen und der Isochromaten sowie der Randbedingungen durch graphische Integration σ_x, σ_y, τ erhalten werden kann. Es wird dabei Gebrauch gemacht von den oben genannten Gleichgewichtsbedingungen für ein kleines rechteckiges Element, wonach

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \text{ und } \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

ist. Hieraus ergibt sich:

$$\sigma_x = -\int \frac{\partial \tau}{\partial y} dx + C_1; \quad \sigma_y = -\int \frac{\partial \tau}{\partial x} dy + C_2.$$

Hierbei sind die Konstanten C_1 und C_2 die X- bzw. Y-Komponente der Spannungen am Rande, die nach Voraussetzung bekannt sein müssen. Die Größe τ war ferner bereits durch die Gleichung

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi$$

bestimmt (vgl. S. 510). Die Schwierigkeiten dieses Verfahrens hinsichtlich seiner praktischen Verwendbarkeit besteht vorwiegend darin, daß die Bestimmungen der Größen $\frac{d\tau}{dx}$ und $\frac{d\tau}{dy}$ oft nicht hinreichend genau erfolgen kann, weil die Bestimmungsgleichung für τ die Beobachtung des Winkels φ erfordert, dessen Messung wegen der endlichen Breite der Isoklinen oft unsicher ist.

Filon (38) hat nun vor einigen Jahren eine dritte rein optische Methode entwickelt, die diese Schwierigkeiten zu vermeiden sucht. Das Verfahren, dessen Resultate kurz angegeben werden sollen, geht von zwei Gleichungen, die die Gleichgewichtsbedingungen eines Elementes, das von Hauptspannungslinien begrenzt ist, darstellen, aus und die von Mesnager angegeben worden sind. Es ist:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} = 0 \text{ und } \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \varrho_2}{r_1} = 0,$$

wobei r_1 und r_2 die Krümmungsradien der beiden Hauptspannungslinien s_1 und s_2 die Bögen, gemessen auf den Hauptspannungslinien sind. Diese Gleichungen sind wie Filon betont, unabhängig von der Beziehung zwischen Spannung und Deformation, so daß sie die Grundlage eines Verfahrens bilden können, das auch für Körper, die eine Abweichung vom Hookeschen Gesetz zeigen, gilt, während gerade diese Einschränkung für die beschriebene mechanische Bestimmung von $\sigma_1 + \sigma_2$ gemacht werden mußte. Durch Integration von einem Punkt o aus längs den entsprechenden Hauptspannungslinien nach einem Punkte A bzw. B erhält man nun

$$\sigma_1 = \sigma_{1_0} - \int_0^A \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} ds_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2_0} - \int_0^B \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_1} ds_2,$$

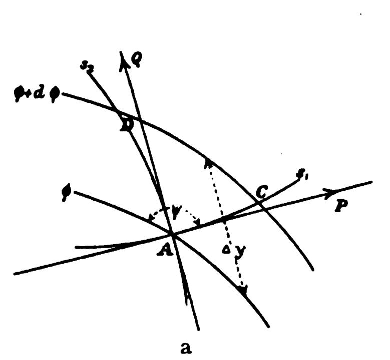
wobei σ_{1_0} und σ_{2_0} die Hauptspannungswerte im Punkte o, die gegeben sein sollen, sind. Nach dem die Größen r und s noch durch Φ und ψ ersetzt werden, folgt als Endresultat:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{1_0} + \int_{\Phi_0}^{\Phi} (\sigma_1 - \sigma_2) \cot \psi \, d\Phi \\ \text{und} \quad & \\ \sigma_2 &= \sigma_{2_0} + \int_{\Phi_0}^{\Phi} (\sigma_2 - \sigma_1) \cot \psi_1 \, d\Phi, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

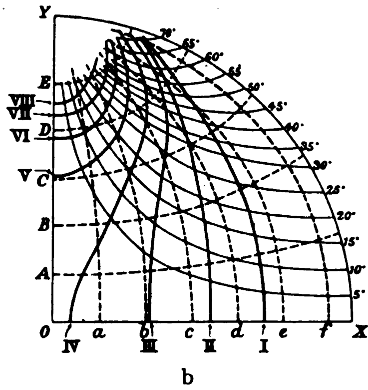
wobei Φ den Parameter der Isoklinen, ψ, ψ_1 die Neigungen der Hauptspannungslinien gegen die Isoklinen bedeuten. Für den Fall, daß ψ klein ist, daß also die Isoklinen fast in die gleiche Richtung wie eine Hauptspannungsrichtung fallen, liefert die Formel (1) für σ_1 zu ungenaue Werte, weshalb man dann das Integral der Gleichung auf anderem Wege bestimmt. Es ergibt sich dann:

$$* \quad \sigma_1 = \sigma_{1_0} + \Delta \Phi \int_0^A \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\Delta y} ds_1, \quad (2)$$

wenn Δy der Abstand zweier benachbarter Isoklinen, gemessen nach der in Fig. 10a eingezeichneten Weise ist. An einem Beispiel, das Filon gegeben hat, soll die praktische Anwendung des Verfahrens gezeigt werden. Der Versuchskörper ist eine Kreisscheibe ($r = 3^1/_4$ inch [82,6 mm]) aus Bakelith, die an zwei diametral gelegenen Punkten mit der Einheit der Spannung belastet wird. Fig. 10b zeigt nur einen Quadranten, woraus aus Symmetriegründen der Verlauf in der ganzen Scheibe erhalten werden kann. Die durch das Experiment gefundenen Isoklinen und Isochromaten sind durch starke und schwächer gezeichnete Linien angegeben. Die römischen Ziffern geben die Ordnung der Iso-



a



b

Fig. 10. Nach Filon (38).

chromaten an. Der Rand der Scheibe ist als Isochromate nullter Ordnung zu betrachten. Die Hauptspannungslinien, durch Konstruktion aus den Isoklinen erhalten, sind punktiert gezeichnet.

Der erste Schritt zur Bestimmung der Größen σ_1 und σ_2 besteht in der Ermittlung dieser Werte längs der Strecke OX. In diesem Fall ist die Gleichung (2) zu verwenden, und zwar wird zuerst $\sigma_1 - \sigma_2$ an den Schnittpunkten der 4 Isochromaten mit dem Radius bestimmt und daraus dann die Werte $\sigma_1 - \sigma_1$ längs r im Abstand von $r/10$. Die Werte Δy, die Abstände der Isoklinen $\Phi = 5^0$ und $\Phi = -5^0$, gemessen senkrecht zur x-Achse wurden für die in 10 Teile geteilte x-Achse bestimmt. $\Delta\Phi$ ist somit, da Δy von -5^0 bis $+5^0$ gemessen ist, arc 10^0. Damit können nun die Werte σ_1 und σ_2 durch graphische Integration bestimmt werden. In der ersten Tabelle sind diese in der ersten Spalte von σ_1 und σ_2 zusammengestellt.

Tabelle I nach Filon (38).

x/r	$\sigma_1 - \sigma_2$	Δy (Zoll)	$\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\,\text{Arc}\,10^0}{\Delta y}$	σ_1 exp.	σ_1 theor.	σ_2 exp.	σ_2 theor.
0,0	4,08	∞	0	0,84	1,06	— 3,24	— 3,18
0,1	3,94	3,05	0,226	0,81	1,02	— 3,13	— 3,10
0,2	3,53	2,03	0,304	0,72	0,90	— 2,81	— 2,86
0,3	3,04	1,45	0,366	0,61	0,74	— 2,43	— 2,51
0,4	2,53	1,08	0,409	0,48	0,56	— 2,05	— 2,09
0,5	2,03	0,88	0,403	0,35	0,38	— 1,68	— 1,66
0,6	1,50	0,74	0,354	0,23	0,24	— 1,27	— 1,23
0,7	1,00	0,65	0,269	0,13	0,12	— 0,87	— 0,85
0,8	0,60	0,59	0,178	0,06	0,05	— 0,54	— 0,52
0,9	0,28	0,59	0,083	0,01	0,01	— 0,27	— 0,23
1,0	0	0,60	0	0	0	0	0

Nunmehr erfolgt die Bestimmung von σ_1 und σ_2 längs der Trajektorien A, B, C, D unter Anwendung der Formel (1). σ_1 ist am Rand Null; die Werte sind jetzt für die Schnittpunkte der vier Trajektorien mit den einzelnen Isoklinen bestimmt, siehe Tabelle II. Hiermit ist die Aufgabe, die Hauptspannungen für eine beliebige Anzahl von Punkten der Scheibe

Tabelle II nach Filon (38).

	Φ beob. °	ψ beob. °	$\sigma_1-\sigma_2$ beob.	$(\sigma_1-\sigma_2)$ cot ψ	σ_1	σ_2
A	17,0	—	0,0	0,0	0,0	0,0
A	15,0	161,5	0,40	1,20	0,02	— 0,38
A	10,0	157,5	1,50	3,62	0,18	— 1,32
A	5,0	151,5	2,72	5,00	0,56	— 2,16
A	0,0	90,0	4,20	0,0	0,93	— 3,27
B	32,5	—	0,0	0,0	0,0	0,0
B	30,0	144,5	0,28	0,39	0,01	— 0,27
B	25,0	144,0	0,89	1,23	0,06	— 0,82
B	20,0	143,0	1,60	2,13	0,21	— 1,39
B	15,0	137,5	2,50	2,72	0,42	— 2,08
B	10,0	131,0	3,27	2,84	0,67	— 2,60
B	5,0	124,0	3,91	2,62	0,92	— 2,99
B	0,0	90,0	4,35	0,0	1,06	— 3,29
C	48,0	—	0,0	0,0	0,0	0,0
C	45,0	134,0	0,43	0,42	0,01	— 0,42
C	40,0	131,0	0,83	0,72	0,06	— 0,77
C	35,0	129,0	1,44	1,17	0,14	— 1,30
C	30,0	129,5	2,00	1,64	0,27	— 1,74
C	25,0	124,0	2,90	1,94	0,42	— 2,48
C	20,0	121,0	3,60	2,16	0,60	— 3,00
C	15,0	122,0	4,15	2,57	0,80	— 3,35
C	10,0	115,5	4,55	2,18	1,02	— 3,53
C	5,0	108,0	4,82	1,54	1,18	— 3,64
C	0,0	90,0	4,85	0,0	1,25	— 3,60
D	63,0	—	0,0	0,0	0,0	0,0
D	60,0	128,0	0,75	0,58	0,01	— 0,74
D	55,0	118,0	1,90	1,01	0,08	— 1,82
D	50,0	114,0	2,85	1,27	0,17	— 2,68
D	45,0	113,0	3,40	1,44	0,29	— 3,11
D	40,0	113,0	3,90	1,65	0,42	— 3,48
D	35,0	113,0	4,25	1,80	0,57	— 3,68
D	30,0	115,0	4,70	2,19	0,74	— 3,96
D	25,0	114,0	5,15	2,29	0,93	— 4,22
D	20,0	108,0	5,55	1,80	1,12	— 4,43
D	15,0	105,0	5,90	1,58	1,27	— 4,63
D	10,0	101,5	6,15	1,25	1,39	— 4,76
D	5,0	97,0	6,30	0,77	1,48	— 4,82
D	0,0	90,0	6,40	0,0	1,50	— 4,90

anzugeben, gelöst. Es ist mit diesem Beispiel gleichzeitig gezeigt, daß das auf Grund von Messungen auf rein optischem Wege möglich ist. Die in der ersten Tabelle in den Rubriken für σ_1 und σ_2 angegebene zweite Zahlenreihe gibt die Werte an, wie sie sich auf Grund einer theoretischen Berechnung ergeben [vgl. z. B. Love (71), Art. 155]. Die Abweichungen zwischen den theoretisch und experimentell ermittelten Werten führt Filon darauf zurück, daß bei der Ausführung seiner Versuche die Voraussetzungen der Theorie nicht ganz erfüllt werden konnten, insbesondere plattete sich die Scheibe an den Angriffspunkten der Kraft etwas ab, so daß der Druck auf einem ziemlich breiten Bogenstück angriff und nicht, wie die Theorie erfordert, in einem Punkte.

2. Anwendungen auf einfache Belastungsfälle.

a) Reine Normalbeanspruchung. Reine Biegung.

Die Spannungsverhältnisse, die bei der Biegung eines Balkens mit rechtwinkligem Querschnitt auftreten, sind in zahlreichen Arbeiten im polarisierten Licht untersucht worden. Es sind da Untersuchungen von Wilson, Hönigsberg, König, Coker, Mesnager, Aue, Ambronn, Asch, Tuzi zu nennen. Der Zweck der einzelnen Arbeiten war zum Teil recht verschieden; so beschränken sich welche darauf, unter dem Einfluß verschiedener Belastung die neutrale Zone sichtbar zu machen oder nur den Verlauf der Trajektorien zu ermitteln, während andere mehr analysierender Natur sind und die Erforschung der verschiedenen Spannungsanteile zum Gegenstand haben. Auch der Einfluß der Auflager ist in manchen Arbeiten näher studiert worden.

Im allgemeinen wirken bei einer Biegung z. B. bei einem einseitig eingemauertem Balken, der am freien Ende belastet ist, auf den Querschnitt sowohl Normalspannungen (Zug oder Druck) und Schubspannungen. Das Bild zwischen gekreuzten Nicols ist dann eine Resultierende aus beiden Wirkungen. Da nun aber gerade die Größe und das Zusammenwirken der beiden Spannungsarten von Interesse ist, so muß man nach Versuchsbedingungen suchen, die eine getrennte Beobachtung gestatten. Für das Studium der Normalkräfte, das rein an einem gleichförmig gedehnten Stab erfolgen kann, liefert die reine Biegung eine Möglichkeit, gleichzeitig verschiedene Dehnungsstufen zu prüfen. Das Studium der Wirkung von Scherkräften kann bei der Biegung nur an bestimmten ausgezeichneten Stellen des Stabes, in denen diese Kräfte rein auftreten, erfolgen. Es kann aber in einem besonderen Versuch reine Scherung untersucht werden und die dabei gewonnenen Erkenntnisse dann beim Studium des Einflusses der Schubkräfte bei der Biegung verwandt werden.

Der Fall der reinen, d. h. der scherungsfreien Biegung wird bekanntlich dadurch erreicht, daß man über zwei parallele Schneiden, die senkrecht zur Stabkante angeordnet sind, biegt. Das innerhalb der beiden Auflager gelegene Stück des Stabes zeigt dann in einiger Entfernung von den Auflagestellen reine Biegung, die Krümmungslinie ist also kreisförmig. Der Spannungszustand ist in diesem Teil des Stabes in der ganzen Länge der gleiche, das Biegungsmoment ist konstant. Es treten nur die durch die Krümmung bedingten Zug- und Druckspannungen auf, die parallel zu den Kanten des Stabes verlaufen. Vertikalspannungen sind nicht vorhanden. Die neutrale Faser, die das Zug- und Druckgebiet voneinander trennt, verläuft genau in der Mitte zwischen den beiden Kanten. Diese Feststellungen finden in dem optischen Befund ihre Bestätigung. Der Streifen zeigt zwischen gekreuzten Nicols im weißen Licht in der Diagonalstellung ein System von parallel zur Kante verlaufenden Interferenzstreifen, die genau symmetrisch zu einem schwarzen Streifen in der Mitte angeordnet sind. Bei geringerer Beanspruchung und bei einem Körper mit kleinerer spezifischer Doppelbrechung verschwinden die Streifen und es ist nur noch eine auf beiden Seiten der neutralen Faser gleichmäßige Aufhellung zu erkennen. Der Abstand der Streifen ist bei jeder Lage zu den Nicols der gleiche, nur die Intensität nimmt beim Herausdrehen aus der Diagonalstellung ab. Fällt der Streifen in eine der beiden Polarisationsrichtungen, dann erscheint er völlig dunkel. Dieses Ergebnis bestätigt die Tatsache, daß die Hauptspannungen überall die gleiche Richtung haben, und zwar parallel zur Stabkante verlaufen. Voraussetzung für einwandfreie optische Versuchsergebnisse ist, daß die Auflager sorgfältig abgeglichen sein müssen. Ist das nicht völlig der Fall, so treten schwache Scherkräfte auf, die sich dadurch bemerkbar machen, daß das Gesichtsfeld nicht völlig dunkel zu erhalten ist. Vgl. z. B. König (61), S. 844.

Bei der reinen Biegung fallen die Isochromaten und die Trajektorien also in dieselbe Richtung, in der auch die Isoklinen, die zu einem breiten, die ganze Fläche des Stabes ausfüllendem Band zusammengefallen sind, verlaufen.

Die Verteilung der Zug- und Druckspannungen über einen Querschnitt ist linear. Das erkennt man qualitativ sofort an dem Verlauf des Nullstreifens eines Kompensators, der, wenn

er beim unbelasteten Balken senkrecht zur Stabachse über die Breite des Stabes verläuft, nach der Belastung unter einem bestimmten Winkel zur Achse sich einstellt, ohne die ursprünglich gerade Form zu ändern. Quantitativ hat Asch (9) an einem Zelluloidstreifen den Spannungsverlauf bei reiner Biegung, ermittelt. Fig. 11 gibt als gestrichelte Linie den theoretisch geforderten Spannungsverlauf an, während die ausgezogene Linie die experimentell gefundenen Werte zeigt. Die im Zuggebiet auftretenden merklichen Abweichungen, die bei mehreren Versuchen sich ergaben, haben nach Asch vermutlich ihren Grund in der Tatsache, daß bei diesen Spannungen und der verwandten Zelluloidsorte infolge der Eigenschaften des Zelluloids Unregelmäßigkeiten vorkommen können.

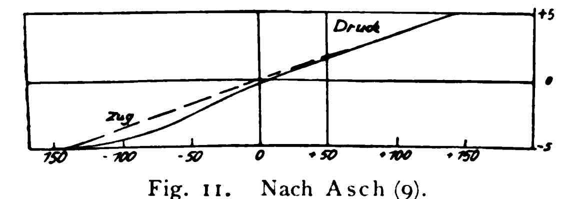


Fig. 11. Nach Asch (9).

b) Reine Scherung.

Mit den optischen Erscheinungen im Fall reiner Scherung befaßt sich eine Arbeit von König (62) und eine von Coker (22). Das Ziel, unter dem diese beiden Arbeiten unternommen sind, ist aber bei jeder ein ganz verschiedenes. Die Untersuchungen von König waren durch seine früheren Beobachtungen an gebogenen und schwingenden Glasplatten über das z. T. recht komplizierte Zusammenwirken von Zug- bzw. Druckspannungen und Schubspannungen veranlaßt und bezweckten das Studium der jeder der beiden Spannungsarten zugeordneten Doppelbrechungs-Erscheinungen an einfachen Versuchsverhältnissen. Die Arbeit von Coker dagegen war durch ein rein technisches Problem, die Kräfteverteilung in Dämmen, veranlaßt und untersucht an einer einfachen Anordnung den Spannungsverlauf einer Platte bei reiner Schubbeanspruchung.

König machte seine Untersuchung an Blöcken einer besonders präparierten erstarrten Gelatinelösung. Ein Klotz von parallelepipedischer Gestalt war mit einer Fläche auf einer horizontalen Unterlage festgekittet, während die gegenüberliegende Fläche an einen horizontal verschiebbaren Schlitten mit Meßvorrichtung gekittet war. Die Beobachtung erfolgte zwischen gekreuzten Nicols in einer zur Schiebungsebene senkrechten Richtung. Bei einer Schlittenverschiebung konnte nun in den mittleren Teilen des Blockes reine Schubbeanspruchung erzielt werden, die auftretende Doppelbrechung hat somit eine Achsenrichtung von 45° zur Schiebungsrichtung. Wird nun mit A der Abstand zweier paralleler horizontaler Striche, mit S die gemessene Verschiebung bezeichnet, so gibt $S/A = s$ die Größe der Schiebung an. Auf Grund des Neumannschen Ansatzes läßt sich nun für die beobachtete Gangdifferenz Δ_s als Funktion der Schiebung s folgende Beziehung entwickeln:

$$\Delta_s = \frac{D_s N^2}{\lambda_0 v_0} (p - q) s,$$

darin bedeutet D_s die Dicke der Platte in Richtung des Lichtstrahls, N den Brechungsexponenten der Gelatine, λ_0, v_0 die Wellenlänge und die Geschwindigkeit des Beobachtungslichtes bezogen auf das Vakuum, $p - q$ eine Körperkonstante (vgl. S. 499). Wird nun mit G_0 das Verhältnis von Δs zur Schiebungsgröße s bezeichnet und mit G die spezifische Doppelbrechung, so ergibt sich, da aus reinen Dehnungsversuchen die Beziehung

$$G = \frac{N^2}{v_0} (p - q)(1 + \mu)$$

hergeleitet werden konnte, der Zusammenhang $G = G_0(1 + \mu)$, worin μ das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdilatation $\left(\text{S. } 506 \frac{1}{m}\right)$ ist. Diese Gleichung konnte durch Versuche befriedigend bestätigt werden. Eine Möglichkeit für eine neue Bestimmungsmethode der Größe μ aus Doppelbrechungsbeobachtungen für reine Dehnung und reine Schiebung wird noch erwähnt.

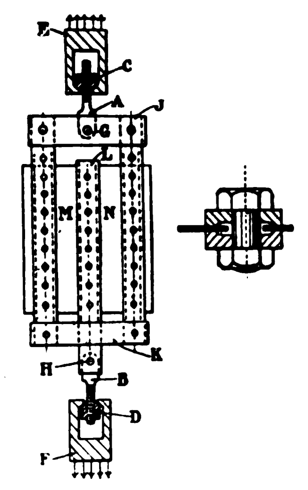


Fig. 12. Nach Coker (22).

Die Versuchsanordnung von Coker, die er zur Scherung benutzte, zeigt Fig. 12. In einem Stahlrahmen wird eine Zelluloidplatte an ihrer linken und rechten Seite in der Weise eingespannt,

daß sie am Rande mit je einer Reihe Löcher versehen wird und zwischen den doppelten senkrechten Schienen des Rahmens mit Bolzen befestigt ist. Die Einspannung muß sehr sorgfältig und gleichmäßig erfolgen. Die Figur zeigt auch ein Einspannbolzenpaar im Querschnitt. Die Mitte der Platte wird gleichfalls mit einer doppelten Schiene versehen, die aber frei durch den unteren Querbalken des Rahmens hindurchgeht. Wenn nun bei E und F Kräfte angreifen, dadurch, daß der Rahmen in einer Dehnungsmaschine angebracht wird, so werden die Teile M und N der Platte in gleicher Weise einer reinen Scherung, wenigstens in den mittleren Teilen unterworfen. Die aufgenommenen Isoklinen zeigt Fig. 13a, die daraus konstruierten Trajektorien gibt Fig. 13b für einen der beiden Teile

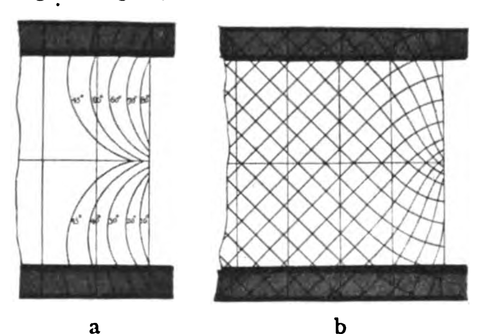


Fig. 13. Nach Coker (22).

M oder N wieder. Die Figur läßt den für die Scherung charakteristischen Verlauf der Hauptspannungsrichtungen (45^0 gegen die Mittellinie) deutlich erkennen. Eine Abweichung davon durch den Einfluß der freien Kanten ist nur in der Nähe der Enden bemerkbar, und zwar konnte Coker die Entfernung von der Endkante, bei der eine Abweichung erkennbar wird, als angenähert proportional der Breite des Streifens beobachten.

Die Bestimmung der Größe der Spannungen erfolgte mit Hilfe eines Zelluloidkompensators, der direkt in einem Kraftmaß (lbs/square inch) geeicht war.

In der Elastizitätstheorie wird für die Verteilung der Schubspannung über dem Querschnitt eines gebogenen Balkens ein parabolisches Gesetz abgeleitet, z. B. für einen einseitig eingemauerten Balken:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{w}{b h}\left(1 - \frac{4 y^2}{h^2}\right)$$

hierbei bedeutet h die Höhe, b die Dicke des Balkens und w das am freien Ende angreifende Gewicht. Diese parabolische Verteilung der Schubspannung über den Querschnitt gilt praktisch in den Fällen, wo die Länge des Balkens groß im Vergleich zu seinen Querdimensionen angenommen werden kann. Wenn aber, wie bei den obigen Versuchsbedingungen die Platte eine kleine Entfernung der beiden Begrenzungsquerschnitte, die gegeneinander verschoben werden, gegenüber der Ausdehnung in der Verschiebungsrichtung hat und ferner die wirksamen äußeren Kräfte möglichst gleichmäßig längs der ganzen Verschiebungslinie angreifen (die Versuchsbedingungen, die bei Dämmen vorliegen, sind ähnliche), so ist abgesehen vom Einfluß der Enden ein im wesentlichen gleichmäßiger Verlauf der Schubspannung über die ganze Schiebungsrichtung zu erwarten. Eine in dieser Richtung liegende theoretische Untersuchung von Andrade (7) konnte den Verlauf der Scherungs-

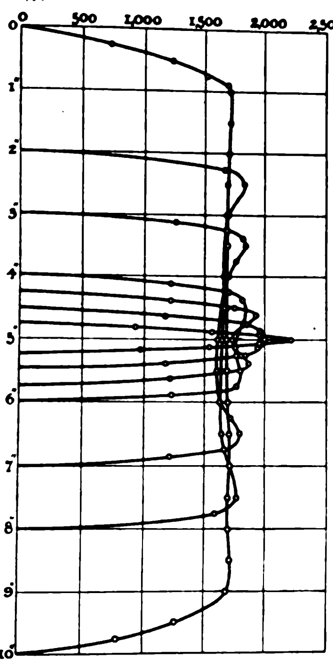


Fig. 14. Nach Coker (22).

spannung analytisch darstellen, wobei sich als wesentliches Resultat zeigte, daß dieselbe an den Enden der Platte maximale Werte annahm und längs des mittleren Teiles einige Maxima und Minima von geringer Bedeutung hatte (vgl. Coker (22), S. 302).

Fig. 14 zeigt den Verlauf der Schubspannung, wie er sich aus den Beobachtungen von Coker an einem Streifen, dessen freie Breite $^1/_2$ Zoll (12,7 mm), dessen Dicke 0,18 Zoll (4,58 mm) war, ergab. Als Abszisse ist die Spannung in lbs/square inch, wie sie am Kompensator abgelesen wurde, als Ordinate die Länge des Streifens aufgetragen[1]). Die verschiedenen Kurven entsprechen den verschiedenen Plattenlängen, die untersucht wurden.

1) 1 lbs/square inch = 0,0696 kg/cm².

Bis auf die beiden mittleren Kurven läßt der Verlauf erkennen, daß die Schubspannung am Ende schnell wächst und dann über die ganze Länge im wesentlichen denselben Wert behält. Wenn die Länge so weit vermindert wurde, daß sie nur noch gleich der doppelten Breite des Streifens war, wurde eine prinzipielle andere Spannungsverteilung gemessen, insofern, als jetzt in der Mitte ein Maximum erreicht wird. Bei gleicher Länge und Breite ergibt sich ein fast streng parabolischer Verlauf. (Über einen speziellen Fall von Torsion, der sich auch als zweidimensionales Problem behandeln läßt, siehe Balinkin (11).)

c) Allgemeine ebene Biegung.

Nachdem die optischen Wirkungen der beiden Grundarten von Spannungszuständen unter einfachen Versuchsbedingungen gesondert beobachtet werden konnten, kann ihr Zusammenwirken bei der allgemeinen ebenen Biegung eines Stabes studiert werden.

Mit Hilfe der beschriebenen Methoden lassen sich für jeden Punkt des gebogenen Stabes die einzelnen Spannungskomponenten aus den resultierenden Doppelbrechungserscheinungen berechnen und ein Teil der Arbeiten befaßt sich auch mit solchen Untersuchungen. Es gelingt aber auch, Versuchsbedingungen zu schaffen, die die Wirkungen der beiden Spannungsanteile bereits in ihren Doppelbrechungserscheinungen getrennt zu beobachten, gestatten. Während die den Zug- und Druckspannungen zugeordneten Doppelbrechungserscheinungen bereits seit Brewster (18) bekannt sind, ist die in ihrer Wirkung wesentlich schwächere von den Schubkräften herrührende Doppelbrechung erst von König (61) bei der Biegung rein beobachtet worden.

Veranlaßt wurden diese Untersuchungen an statisch gebogenen Glasstreifen durch vorangehende Arbeiten über die Doppelbrechungserscheinungen an transversalschwingenden Glasplatten (60). Bei diesen Versuchen ist eine solche getrennte Beobachtung auch möglich. Eine lange Glasplatte, die so zu Transversalschwingungen angeregt wurde, daß längs der Platte sich 4 Knoten ausbildeten, war in den beiden äußeren Knoten unterstützt und in geeigneter Weise wagerecht aufgestellt. Die Beobachtung in einem Schwingungsknoten wurde in einem der beiden mittleren völlig frei schwingenden vorgenommen. Im polarisierten Licht zeigt sich, daß die Platte doppelbrechend ist, und zwar ist die Doppelbrechung in den verschiedenen Teilen verschiedener Natur. Eine Art tritt rein im Schwingungsbauch, die andere im Schwingungsknoten auf, während an allen anderen Stellen sich beide Arten überlagern.

Die im Schwingungsbauch beobachtete Erscheinung entspricht der Doppelbrechung einer Glasplatte bei reiner Biegung. Die Achsen der Doppelbrechung sind parallel und senkrecht zu den Kanten der Platte gerichtet, so daß also die stärkste Aufhellung bei Stellung der Platte unter 45^0 zu den Polarisationsebenen der Nicols auftritt. Die Mittellinie ist neutral, die Gangdifferenz nimmt proportional mit der Entfernung von der Mittellinie zu. Das Vorzeichen der Doppelbrechung ist in der oberen Hälfte der Platte positiv, wenn sie nach oben schwingt und negativ, wenn sie nach unten schwingt. Als Gleichung für die Isochromaten, die mit Hilfe eines Fallpendels analysiert und photographisch registriert sind, ergibt sich: $y = \frac{\Delta}{D \sin x} + a \sin x$, wobei a und D für eine gegebene Schwingung Konstanten sind. Es läßt sich hieraus auch eine Methode zur Bestimmung der spezifischen Doppelbrechung des Glases herleiten.

In einem Schwingungsknoten dagegen ergibt die Doppelbrechung ein ganz anderes Bild. Es zeigt sich zwischen gekreuzten Nicols eine über die ganze Dicke der Platte ziemlich gleichmäßige Aufhellung, die nach den Rändern hin in ihrer Intensität etwas abnimmt. Diese Aufhellung ist am stärksten, wenn die Polarisationsebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte orientiert sind. Die Achsen der Doppelbrechung sind also jetzt unter 45^0 zur Längsrichtung geneigt. Der Betrag der Doppelbrechung ist gering, es zeigt sich bei stärkster Schwingung höchstens ein Weiß erster Ordnung, während im Schwingungsbauch Brewstersche Streifen auftraten. Die Doppelbrechung im Knoten wird während der Schwingung gleichzeitig mit der im Bauch Null und erreicht auch mit dieser ihr Maximum. Die in dem Bauch auftretende Doppelbrechung hat ihren Grund in den dort durch die Verbiegung entstehenden Zug- und Druckkräften, die in dem Knoten dagegen wird durch scherende Kräfte erzeugt. Das Verhältnis der Größe der Doppelbrechung in Knoten und Bauch ergibt sich in ziemlich guter Übereinstimmung mit einem theoretisch errechneten Wert, zu dem man unter Zugrundelegung der von Saint-Venant für die scherenden Kräfte bei statischer Deformation entwickelte Theorie gelangt. Auch die qualitativ festgestellte Abnahme der Doppelbrechung im Knoten nach den Rändern zu, würde damit im Einklang stehen. Die an einer zwischen Knoten und Bauch liegenden Stelle der Platte auftretenden Erscheinungen resultieren als Überlagerung der beiden verschiedenen Grundarten.

Einem eingehenderen Studium waren diese beiden Doppelbrechungsarten bei statisch ge-

bogenen Glasplatten zugänglich (König (61)). Wird eine Glasplatte nach dem in Fig. 15 angegebenen Schema belastet, so wird sie an den Stellen 2 und 4 nach unten, an den Stellen 1, 3, 5 nach oben gedrückt. Zwischen 2 und 3 und zwischen 3 und 4 hat die Platte also je einen Wendepunkt.

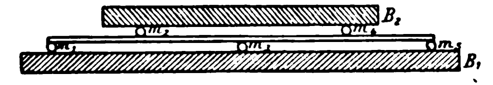
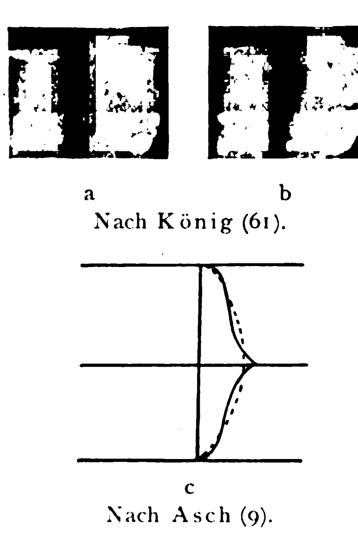


Fig. 15. Nach König (61).

In diesen Punkten ist die Krümmung Null. Im polarisierten Licht sind keine Interferenzstreifen an diesen Stellen zu beobachten, da die Normalspannungen verschwinden und nur reine Schubspannungen auftreten. Die Doppelbrechungserscheinungen, die eine solche Stelle zeigt, ist also derselben Art wie in den Knotenpunkten der schwingenden Platte. In der Diagonalstellung erscheint die Platte dunkel unter der Voraussetzung, daß es sich um eine aus gut gekühltem Glas hergestellte Platte handelt, sonst treten die auf S. 504 beschriebenen Doppelbrechungserscheinungen hier auf. Bei paralleler Richtung der Platte mit einer der Polarisationsebenen zeigen die Wendepunkte Aufhellung mit nach dem Rande abnehmender Intensität. Der Verlauf der Schubspannung über dem Querschnitt läßt sich qualitativ in ähnlicher Weise direkt sichtbar



a b
Nach König (61).

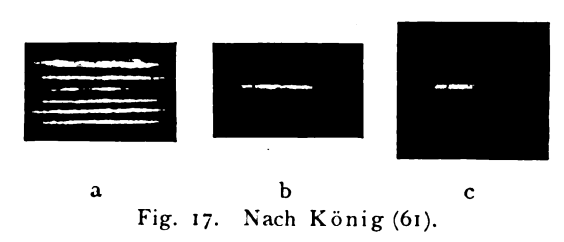
c
Nach Asch (9).

Fig. 16.

machen wie das für die Normalspannungen auf S. 514 erwähnt wurde. Fig. 16a zeigt einen Kompensator Nullstreifen, über die ungebogene Platte Fig. 16b denselben nach der Biegung im Wendepunkt.

Fig. 16c zeigt auf Grund der Messungen von Asch (9) an einem gebogenen Zelluloidstreifen den Verlauf der Schubspannungen über den Querschnitt (ausgezogen), die punktierte Linie gibt die theoretisch geforderte Kurve. Bezüglich der Differenzen ist vielleicht auch hierfür das Verhalten des Zelluloids maßgebend (vgl. S. 515).

Die optische Wirkung der Scherkraft bei der allgemeinen ebenen Biegung rein zu beobachten, ist außer in den Wendepunkten auch noch in der neutralen Faser möglich, in der doch auch bei der allgemeinen Biegung keine Normalspannungen auftreten. Bei paralleler Orientierung von Glasplatte und Polarisationsebene erscheint daher nicht wie im Fall der reinen Biegung der Streifen völlig dunkel, sondern es erstreckt sich jetzt vom Wendepunkt aus, wo die Platte in ihrer ganzen Breite erhellt ist, nach beiden Seiten in der neutralen Faser bis zu dem Auflager hin, eine Aufhellung. Fig. 17b zeigt in einer photographischen Aufnahme diese Erscheinungen, während Fig. 17a denselben Teil der Platte in dre



a b c
Fig. 17. Nach König (61).

Diagonalstellung zeigt. Wenn an einem Auflager reine (scherungsfreie) und gewöhnliche Biegung zusammenstoßen, so kann man direkt beobachten, wie die Gebiete, in denen Scherung vorhanden ist (links), aufgehellt sind und in den scherungsfreien Teil (rechts) am Auflager übergehen, Fig. 17c. Aus den Beobachtungen läßt sich ferner feststellen, daß die von der Scherung herrührende Doppelbrechung über die ganze Länge der neutralen Faser konstant ist, was im Einklang mit der Theorie der Biegung steht.

An einer beliebigen Stelle (es werden jetzt nur Fälle betrachtet, die nicht in der unmittelbaren Nähe der Auflager liegen) eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes ist die auftretende Spannung eine Resultierende aus den Normal- und Tangentialspannungen. Ausnahmestellen, wo nur eine der beiden Spannungsarten auftritt, sind außer den besprochenen nur die obere und die untere Kante des Stabes, in denen nur Längsspannungen wirksam sind.

Die Richtung der Hauptspannungen ergibt sich folgendermaßen. Aus den Gleichungen auf Seite 510 folgt zunächst noch ganz allgemein für jeden ebenen Spannungszustand:

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi$$

und

$$2\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi,$$

daraus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

als Gleichung für die Hauptspannungsrichtungen und für die Werte der Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}.$$

Für den Fall des ebenen gebogenen Balkens, der mit seiner Längsachse in der X-Achse orientiert ist, wird $\sigma_y = 0$ und σ_x und τ erhalten, wie in der Theorie der Biegung gezeigt wird, folgende Werte:

$$\sigma_y = E \cdot y \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{ED^2}{12} \frac{dy^2}{dx^2}\left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right),$$

woraus sich für den Fall einer Biegung mit Wendepunkt ergibt

$$\sigma = \frac{-3aE}{x_0^3} xy$$

$$\tau = -\frac{3}{8} \frac{aED^2}{x_0^3}\left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right),$$

wobei a die Verbiegung im Auflager, x_0 die Entfernung des Wendepunktes vom Auflager, D die Dicke der Platte bedeutet. Setzt man diese Werte in die Gleichung für die Hauptspannungsrichtungen ein, so erhält man:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D^2}{4xy}\left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right) \qquad (1)$$

oder auch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D}{2x\eta}(1 - \eta^2), \qquad (2)$$

wenn $\eta = y : \frac{D}{2}$ gesetzt ist. Die letzte Gleichung zeigt, daß die Hauptspannungsrichtung überall unabhängig von der Größe der Verbiegung ist. Bei der schwingenden Platte konnten sie deshalb auch während der Schwingung immer an der gleichen Stelle beobachtet werden. Ferner zeigt sie, daß für einen Wendepunkt ($x = 0$) und in der neutralen Faser ($\eta = 0$) $\varphi = 45^0$ ist. Neben der Bestätigung dieser Achsengleichung für die genannten Spezialfälle zeigt sie auch im allgemeinen gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Betrachtet man in Gleichung (1), $\operatorname{tg} 2\varphi$ als Parameter, dem man nacheinander bestimmte φ-Werte gibt, so stellt die Gleichung die Isoklinenschar dar. Man erkennt, daß die Isoklinen Hyperbeln sind, deren Asymptoten durch die Gleichungen

$$y = 0 \text{ und } y + x \operatorname{tg} 2\varphi = 0$$

bestimmt sind. Die Hyperbeln gehen alle durch die Punkte $y = \pm \frac{D}{2}$ und $x = x_0$. Einen quantitativen Vergleich der Beobachtung und der Rechnung hat Filon (37) an einem Glasbalken aus gutgekühltem, praktisch spannungsfreiem Glas vorgenommen. Er fand eine befriedigende Übereinstimmung. Bereits qualitativ sieht man eine gute Übereinstimmung, aus der in Fig. 18 nach Filon gegebenen Gegenüberstellung von

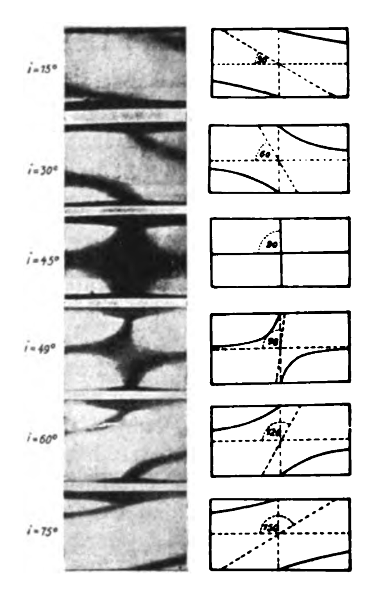
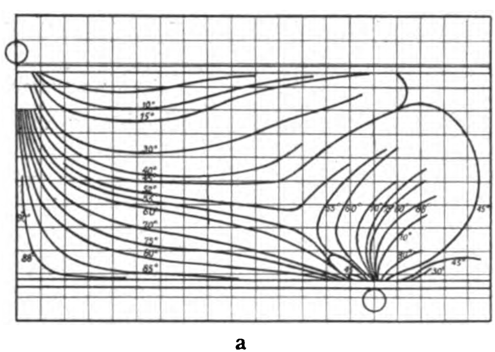
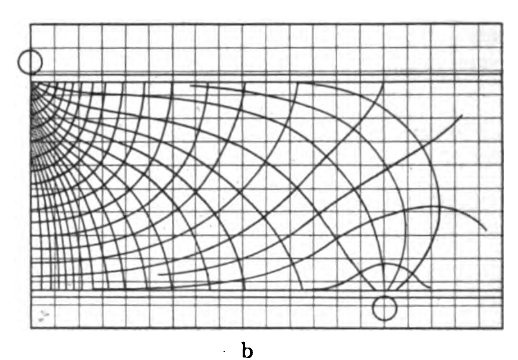


Fig. 18. Nach Filon (37).

6 photographisch ermittelten Isoklinen mit den zugehörigen auf Grund der Rechnung konstruierten Hyperbeln.

König (61) hat für die Gleichung (2) dadurch eine Kontrolle vorgenommen, daß er für einen bestimmten Schnitt senkrecht zur neutralen Achse also für x-const den Verlauf von φ als Funktion von η bestimmt hat. Dieser Zusammenhang ist merklich verschieden, je nachdem in welcher Entfernung vom Wendepunkt der betrachtete Schnitt liegt. Bei starker Krümmung, also bei einem größeren Abstand vom Wendepunkt sind die Abweichungen gegenüber dem Verlauf bei reiner Biegung nur noch in den Zentralpartien vorhanden. Um eine genaue quantitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erzielen, mußte König ein Korrektionsverfahren, durch das er der bei seinen Versuchen vorhandenen natürlichen Doppelbrechung der Glasplatte Rechnung trug, anwenden. Eine ähnliche Prüfung für einen bestimmten Schnitt nahm auch Asch (9) für seinen gebogenen Zelluloidbalken vor.

Einen vollständigen Überblick über den Spannungsverlauf eines auf zwei Stützen ruhen-

a b

Fig. 19. Nach Wilson (101).

den, zentralbelasteten Glasbalkens hat C. Wilson (101) durch Aufnahme der Isoklinen und der daraus konstruierten Trajektorien gegeben (Fig. 19a und 19b). Die allgemeinen Verhältnisse hat er nicht weiter diskutiert, wohl aber hat er spezielle Studien über den Spannungsverlauf in einem durch den Lastangriffspunkt gehenden Querschnitt ausgeführt. Seine Resultate stehen in guter Übereinstimmung mit den hierfür von Flammant aufgestellten Rechnungen.

Die Versuche von Wilson sind später von Filon (37) unter erweiterten Gesichtspunkten fortgesetzt worden, insbesondere hat er auch theoretisch und experimentell den Einfluß der Auflager auf den allgemeinen Spannungsverlauf ausführlich behandelt und eine gute Brauchbarkeit seiner für diesen Einfluß aufgestellten Theorie gefunden.

Gleichfalls unter Berücksichtigung der Auflagereinflüsse und unter Hinzuziehung der exakten Lösung des Problems für den gebogenen Balken, die seine Begrenzungen beachtet, hat Asch einen Zelluloidbalken bei reiner und bei allgemeiner Biegung untersucht. Er liefert nicht nur den Trajektorienverlauf (Fig. 20), sondern

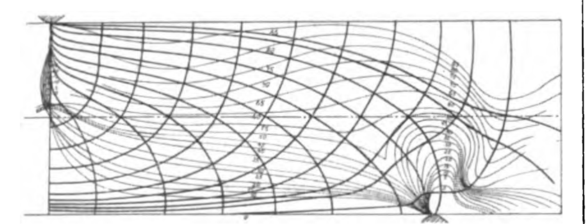


Fig. 20. Nach Asch (9).

gibt auch eine völlige Ausmessung der Spannungskomponenten längs bestimmter Querschnitte. Die Abweichung, die er an gewissen Stellen zwischen den theoretischen und gemessenen Werten findet, wurde bereits kurz erwähnt, und die Möglichkeit einer Ursache von Asch angegeben. Die nach der Theorie geforderten 5 singulären Punkte, in denen sich die Isoklinen schneiden (je einen an den drei Auflagern und zwei weitere in der Symmetrielinie der Belastung) konnten beobachtet und ihre Lagen in befriedigender Übereinstimmung mit den aus der Theorie gefolgerten Stellen gebracht werden.

Die ersten photographischen Aufnahmen im polarisierten Licht von verschiedenartigen Beanspruchungsfällen sind m. W. von Hönigsberg (52) gebracht worden, der auch eine einfache Methode zur Konstruktion von Trajektorien angegeben hat.

Mesnager (74) hat im Zusammenhang mit seinen Arbeiten über die in allen Einzelheiten ausgeführte Spannungsbestimmung für eine Brücke auch den Fall eines gebogenen beiderseitig eingeklemmten Balkens untersucht.

d) Spezieller Biegungsfall nach F. Neumann.

Einen besonderen Fall der Biegung eines geraden Stabes, bei der drei neutrale Fasern entstehen, hat F. Neumann (75) beschrieben und gleichfalls dafür die im polarisierten Licht zu erwartenden Erscheinungen angeführt. Er sagt (S. 468): „Wenn z. B. ein gradliniger Stab über eine gewisse Grenze hinaus gekrümmt wird, so kehrt er nach Aufhebung der krümmenden Kraft nicht vollständig zur geradlinigen Gestalt zurück; er hat eine bleibende Krümmung erlitten. Einige seiner Teile haben in der vorübergehenden Krümmung die Grenze der Elastizität überschritten; die Wirkung dieser Teile teils aufeinander, teils auf diejenigen, welche ihre Grenze der Elastizität noch nicht überschritten haben, bestimmt die Größe der bleibenden Krümmung. Könnte man die ersten Teile, welche permanente Dilatationen erlitten haben, von den letzteren, welche solche nicht erlitten haben, trennen, so würden diese letzteren zu der ursprünglichen gradlinigen Lage wieder zurückkehren. Im polarisierten Lichte würde ein permanent gekrümmter Stab ein System bleibender Farben zeigen, welches sehr verschieden ist von demjenigen, welches aus der vorübergehenden Krümmung entsteht. Auf jeder Seite der Mittelebene des Stabes würde man ein doppeltes System Farben



beobachten, ein positives und ein negatives, die durch eine neutrale Zone getrennt sind. Hier würden also drei neutrale Zonen vorhanden sein, während bei der vorübergehenden Krümmung nur eine solche Zone da ist."

Die beiden äußeren neutralen Zonen sind natürlich nicht wie die mittlere undeformiert. Ihre optische Nullwirkung kommt vielmehr nur daher, weil sich in diesen Bezirken die Zug- und Druckspannungen kompensieren. Eine experimentelle Bestätigung des von ihm vorhergesagten Verhaltens, konnte Neumann selbst nicht geben, da Glas, mit dem er seine Versuche ausführte, eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze nicht zuläßt. Dieser Versuch gelingt aber, wie H. Ambronn (2) zeigen konnte, gut an einem Streifen aus völlig ausgetrockneter Gelatine. Zwischen gekreuzten Nicols zeigt sich auch das von Neumann vorhergesagte Resultat. Fig. 21a gibt die von Ambronn angegebene Skizze nach seinen Beobachtungen. Die Achsenrichtung der einzelnen Partien hat er durch Einzeichnen der Indexellipse markiert. Die Ausführung des Versuches wird auch mit einem Streifen aus einem anderen Material als ausgetrockneter Gelatine gelingen. Wird aber ein Zelluloidstreifen gewählt, so kann man mit diesem auch das Auftreten von drei neutralen Fasern demonstrieren. Diese haben aber, abgesehen von der mittleren, eine ganz andere Ursache und sind lediglich durch die optisch-anomalen Eigenschaften des Zelluloids bedingt. Sie entsprechen nämlich denjenigen Deformationsstufen, bei denen das Zelluloid gerade seinen optischen Charakter umkehrt. (Vgl. Fig. 6a und 7.) Sie sind also nur als optisch neutrale Zonen zu betrachten. Im monochromatischen Licht lassen sich diese Erscheinungen von den von Neumann vorausgesagten und von Ambronn an der Gelatine demonstrierten nicht unterscheiden, im weißen Licht dagegen ist das infolge der bereits erwähnten anomalen Dispersion des Zelluloids leicht möglich. Fig. 21b stellt den Doppelbrechungsverlauf am Zelluloid für drei Wellenlängen schematisch nach Ambronn (4) dar und läßt die starke Dispersion in den stark gedehnten Zonen deutlich erkennen.

Wenn auch eine so starke Deformation bei der Prüfung von technischen Spannungszuständen kaum vorkommen dürfte, so sollte doch an diesem Beispiel noch einmal deutlich gemacht werden, zu welchen Fehlschlüssen in der Spannungsbeurteilung man bei extremen Beanspruchungen geführt werden kann, wenn man zu den Modellen ein Material mit optischen so anomalen Eigenschaften, wie sie das von Ambronn und dem Verfasser untersuchte Zelluloid besitzt, benutzt. Erwähnt sei noch, daß Aue (10) im Verlauf seiner Vorversuche das Auftreten mehrerer neutraler Fasern am Zelluloid verifiziert hat und daß auch er seine Resultate falsch deutete. Damals waren aber die optischen Eigenschaften des Zelluloids noch nicht bekannt, ihre Erforschung durch Ambronn wurde vielmehr erst durch verschiedene, bei den Versuchen Aues beobachtete Merkwürdigkeiten im optischen Verhalten veranlaßt. Die eigentlichen Resultate von Aue werden aber dadurch in keiner Weise beeinträchtigt, da er seine messenden Versuche sämtlich an Glas ausgeführt hat.

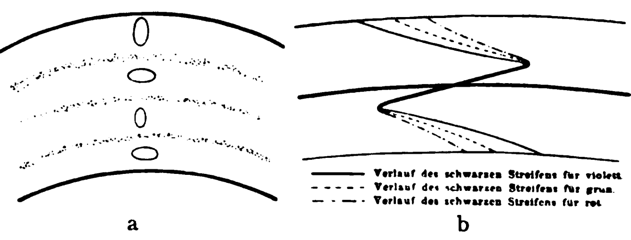


Fig. 21. Nach Ambronn (2 und 4).

e) Biegung gekrümmter Stäbe.

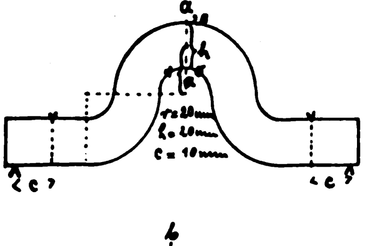
Während für die Biegung eines geraden Stabes im wesentlichen eine einheitliche Theorie besteht und die optische Methode eine Bestätigung geliefert hat, liegen bei Stäben die bereits vor der Belastung eine gekrümmte Mittellinie haben, die Verhältnisse wesentlich anders. Hier bestehen zwei Möglichkeiten zur Berechnung, von denen jede auf Voraussetzungen beruht, die zunächst als Festsetzungen hingenommen werden müssen und einer unmittelbaren Prüfung nicht zugänglich sind. Die eine Theorie nimmt an, daß während der Biegung über den Querschnitt eine geradlinige Spannungsverteilung besteht, während die andere ein Ebenbleiben des Querschnitts annimmt. Bei einem geraden Stab sind diese beiden Annahmen bekanntlich gleichzeitig erfüllt.

Wegen der bereits erwähnten Nachteile kommen gewöhnliche Festigkeits- und Bruchversuche für eine Entscheidung zwischen den beiden Theorien nicht in Betracht, wohl aber ist von Aue (10) mit Hilfe der polarisationsoptischen Methode eine solche zu treffen versucht worden.

Da eine Grundvoraussetzung beider Theorien ist, daß das Material isotrop und frei von inneren Spannungen ist, so verwandte Aue für seine Modelle durch eingehende Vorversuche sorgfältig ausgewählte gutgekühlte Gläser. Untersucht wurden zunächst zwei gekröpfte Stäbe verschiedener Krümmung, die auf reine Biegung beansprucht wurden (Fig. 22.) Die Berechnung wurde nach den verschiedenen Methoden ausgeführt und als Vergleichswerte die Kantenspannungen errechnet, die mit den experimentell

Modell 1, $r = 20$ mm

Werte nach der Theorie von Föppl	Bach	Pfleiderer	Exakte Theorie mit Hilfe d. Spannungsfunktion	Experimentell gefundene Werte
1 : 1	1 : 1,62	1 : 1,94	1 : 1,99	1 : 2
Modell 2, $r = 12$ mm				
1 : 1	1 : 5,11	1 : 4,21	1 : 3,99	1 : 4



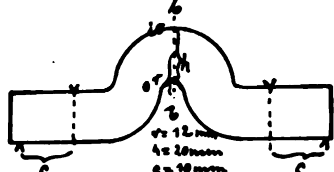


Fig. 22. Nach Aue (10).

gefundenen Werten in der obigen Tabelle zusammengestellt sind.

An zwei *U*-förmigen Balken wurde ferner ein dem obigen analoges Ergebnis erzielt. Einer weiteren Prüfung wurden zwei kreisförmige Glasringe (Ring 1, $r_i = 10$ mm, $r_a = 20$ mm; Ring 2 $r_i = 20$ mm, $r_a = 30$ mm) unterzogen.

Die Tabelle enthält wieder die nach den verschiedenen Theorien ermittelte und die experimentell bestimmte Kantenspannung als Vergleich.

Föppl	Bach	Pfleiderer	Experim. ermitt.
Ring 1			
1 : 1,805	1 : 3,004	1 : 2,94	1 : 2,76
Ring 2			
1 : 2,35	1 : 5,76	1 : 6,83	1 : 6,4

Zusammenfassend stellt Aue fest: „Unsere Versuche haben also ergeben, daß wir an der Bachschen Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte festhalten können, besonders dann, wenn es sich um stark gekrümmte Stäbe handelt, wobei die Föpplsche Theorie entschieden zu großer Unterschätzung in der Festigkeit führt."

f) Kreisscheiben mit verschiedener Randbelastung.

Bereits in einem vorangehenden Abschnitt wurde bei den Methoden der Spannungsbestimmung aus Isochromaten und Isoklinen der Fall einer kreisförmigen Platte, die an den Enden eines Durchmessers von zwei Druckkräften beansprucht wird, erwähnt. Es soll jetzt dieses Problem sowie noch andere Belastungsfälle der Kreisplatte kurz behandelt werden. W. König (63) hat später im Anschluß an einen besonderen Fall allseitiger Randbeanspruchung, der noch besprochen wird, auch die Doppelbrechung und Spannungsverhältnisse in einer kreisförmigen Scheibe bei verschiedener äußerer Beanspruchung theoretisch untersucht und eine Berechnung der Spannungszustände durch Reihenentwicklung gegeben. H. Rieth (80) hat dann gezeigt, daß man die entsprechenden Gleichungen für die drei folgenden Fälle auch durch verhältnismäßig einfache Ausdrücke endlich geschlossener Form darstellen kann.

Bei der Belastung einer Kreisscheibe durch 2 an den Endpunkten eines Durchmessers senkrecht zum Rande angreifende Druckkräfte, ein Fall, der auch bereits von Mesnager (73) behandelt wurde, ergibt die Rechnung für die Hauptspannungsrichtung:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\varrho^2 \sin 2\psi (\cos 2\varepsilon - \varrho^2 \cos 2\psi)}{1 - 2\varrho^2 \cos 2\psi \cos 2\varepsilon + \varrho^4 \cos 4\psi},$$

hierin bedeutet ϱ das Verhältnis vom Radius eines beliebigen Plattenpunktes r zum Radius der Platte r_0, ψ den Winkel zwischen vertikaler Druckachse und dem Radius r des zu untersuchenden Punktes. Da sich die Forderung der Theorie, daß die beiden Druckkräfte in je einem Punkt des Randes angreifen sollen, experimentell nicht erfüllen läßt und so eine Prüfung der Theorie nicht ohne weiteres möglich ist, so ist die Berechnung erweitert worden unter der Berücksichtigung, daß die Kraft in einem kleinen Winkelbereich von der Breite 2ε angreift. Für den Fall, daß $\varepsilon =$ Null ist, geht also die Gleichung für die Streckenbelastung in die für Punktbelastung über. Für die relative Phasendifferenz eines beliebigen Punktes bezogen auf diejenige im Mittelpunkt, die ein Maß der relativen Spannungsverteilung ist, ergibt die Rechnung den Ausdruck:

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{1 - \varrho^2}{\sqrt{[1 - 2\varrho^2 \cos(2\psi + 2\varepsilon) + \varrho^4][1 - 2\varrho^2 \cos(2\psi - 2\varepsilon) + \varrho^4]}}.$$

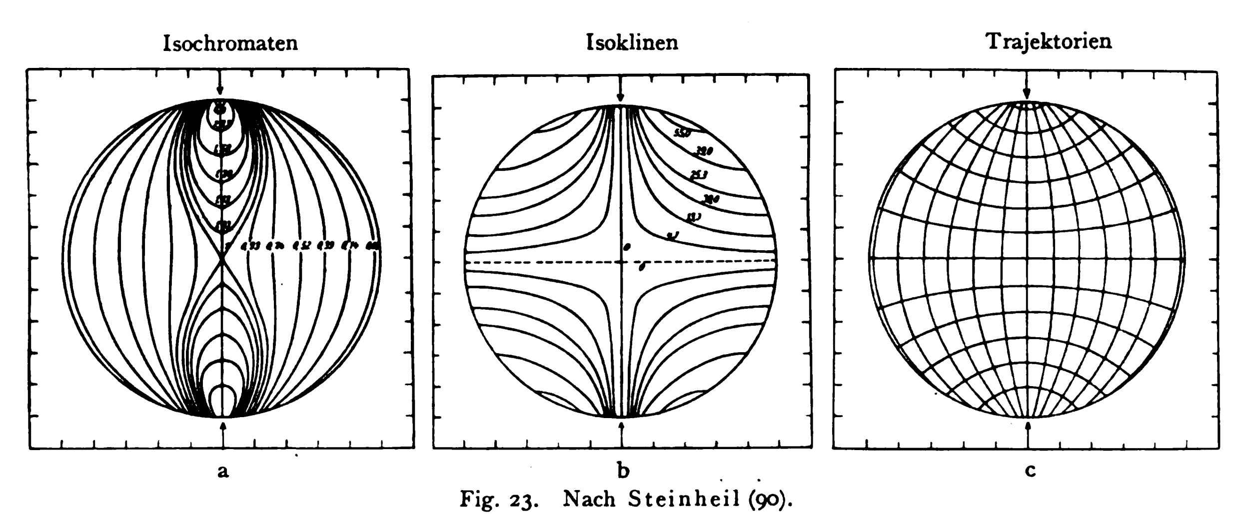


Fig. 23. Nach Steinheil (90).

Die Messungen von H. Steinheil (90) an einer Spiegelglasplatte von 50 mm Durchmesser und 7,7 mm Dicke ergab Werte, die mit der Rechnung in guter Übereinstimmung stehen. Fig. 23a—c gibt eine Übersicht über die Erscheinung durch Angabe der charakteristischen Kurven. Bemerkt sei hier noch, daß die Bestimmung der Isoklinen nicht durch Aufzeichnen der schwarzen Linie, die im geradlinig-polarisierten Licht den Polarisationsrichtungen parallel verlaufen, erfolgte, sondern durch eine punktweise Bestimmung der maximalen Aufhellung. Diesem etwas mühsamen Verfahren ist in manchen Fällen aber der Vorzug zu geben, da sich durch die bequeme Aufzeichnung der schwarzen Linien infolge deren Breite oft Ungenauigkeiten ergeben. Der Einfluß der Streckenbelastung ist in einiger Entfernung von den Druckpunkten nur noch unmerklich, so daß dann bereits mit der Formel, die eine punktförmige Belastung annimmt, gute Übereinstimmung zu erzielen ist (vgl. (57)). Für einen wagerechten, also zur Druckrichtung senkrechten Radius sind in der folgenden Tabelle berechnete und beobachtete Werte gegenübergestellt:

ϱ	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,80	0,88	0,96
Gemessen Δ/Δ_0	1	0,99	0,92	0,84	0,74	0,62	0,52	0,40	0,31	0,20	0,14	0,09	0,03
Berechnet Δ/Δ_0	1	0,98	0,93	0,84	0,74	0,63	0,53	0,40	0,30	0,22	0,13	0,07	0,02

Über den Einfluß der Streckenbelastung erhält man durch die nächste Tabelle, die die Werte Δ/Δ_0 für einen Radius in der Druckachse zusammenstellt, eine Übersicht:

ϱ	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,80	0,88	0,96
Gemessen Δ/Δ_0	1	1,01	1,03	1,09	1,13	1,16	1,28	1,40	1,58	1,84	2,29	2,93	3,97
Berechnet Δ/Δ_0	1	1,01	1,03	1,07	1,11	1,19	1,28	1,45	1,69	2,07	2,78	4,42	6,—
Δ/Δ_0	Berechnet unt. Berücksichtigung d. Streckenbelastung							1,41	1,58	1,83	2,32	3,01	4,—

Man ersieht daraus, daß von einer Entfernung vom Druckpunkt an, die etwa gleich dem halben Radius ist, der Einfluß der Streckenbelastung sich nicht mehr geltend macht. Die Berücksichtigung dieses Einflusses, in der in der Theorie angenommenen Weise für die Druckpunktnähe, liefert gute Übereinstimmung mit der Beobachtung.

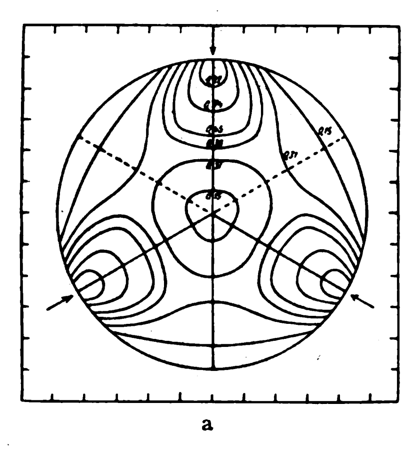
Während beim obigen Belastungsfall keine Stelle der Platte, abgesehen vom Rande, die Phasendifferenz Null hatte, kommen bei einer an drei Stellen symmetrisch am Rande gedrückten Platte solche Punkte vor und die Doppelbrechung erleidet jetzt auch einen Vorzeichenwechsel.

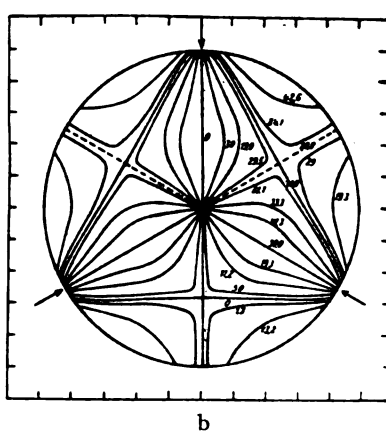
Die Gleichungen für die Hauptspannungsrichtungen und die relative Phasendifferenz ergeben sich nach H. Rieth (80) als:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\sin\psi - 2\varrho^3 \sin 2\psi \cos 3\varepsilon - \varrho^6 \sin 5\psi}{\cos\psi + 2\varrho^3 \cos 2\psi \cos 3\varepsilon + \varrho^6 \cos 5\psi}$$

und

$$\Delta/\Delta_0 = \frac{(1-\varrho^2)\,\varrho}{\sqrt{[1 + 2\varrho^3 \cos(3\psi + 3\varepsilon) + \varrho^6]\,[1 + 2\varrho^3 \cos(3\psi - 3\varepsilon) + \varrho^6]}},$$


a


b

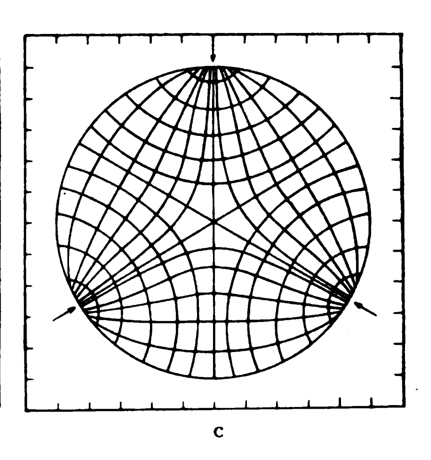

c

Fig. 24. Nach Steinheil (90).

hierbei ist der Bezugspunkt, für den $\Delta/\Delta_0 = 1$ ist, aber nicht der Mittelpunkt, da ja hier die Gangdifferenz Null ist, sondern ein Punkt, der auf dem durch die Druckpunkte gehenden Durchmesser liegt. Fig. 24a zeigt für diesen Fall die Isochromaten. Durch die drei in der Richtung der äußeren Drucke liegenden Durchmesser wird die Platte in 6 symmetrische Teile geteilt, so daß es zur völligen Beschreibung des Spannungszustandes genügt, sich auf einen solchen Sextanten zu beschränken. Auf jedem dieser Durchmesser findet auch ein Vorzeichenwechsel der Doppelbrechung statt, was leicht verständlich ist. da man vom Druckpunkt ausgehend, zunächst nur Gebiete durchschreitet, die unter dem Einfluß des radialen Druckes stehen. Jenseits des Mittelpunktes machen sich aber die Querdrucke, die von den anderen beiden Stellen herrühren, bemerkbar und es gibt einen Punkt, in dem sich der Radialdruck und die Querdrucke kompensieren. Weiterhin überwiegt dann sogar der Einfluß der Querdrucke, so daß ein Druckzustand mit entgegengesetztem Vorzeichen herrscht, der ein Maximum erreicht und dann nach dem Rand zu abfällt. Fig. 25 gibt den Spannungsverlauf für einen solchen Durchmesser nach den Messungen von Steinheil wieder. Als Ordinaten sind hier nur die Absolutwerte der Spannungen aufgezeichnet, so daß die Kurve unter Berücksichtigung des Vorzeichens, nachdem sie die Abszissenachse getroffen hat, im negativen Gebiet einen Verlauf nehmen müßte, der durch Spiegelung an der x-Achse aus dem gezeichneten hervorgeht. Der Verlauf der Isoklinen und der Trajektorien ist in Fig. 24b und c dargestellt, die Auswertung im einzelnen ergab auch wieder eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung.

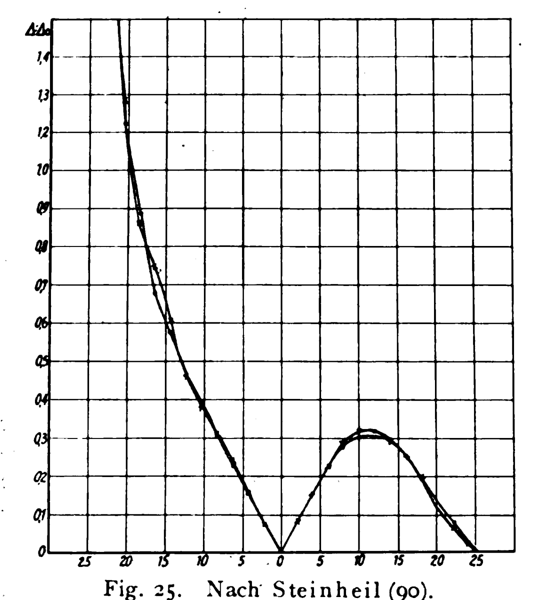


Fig. 25. Nach Steinheil (90).

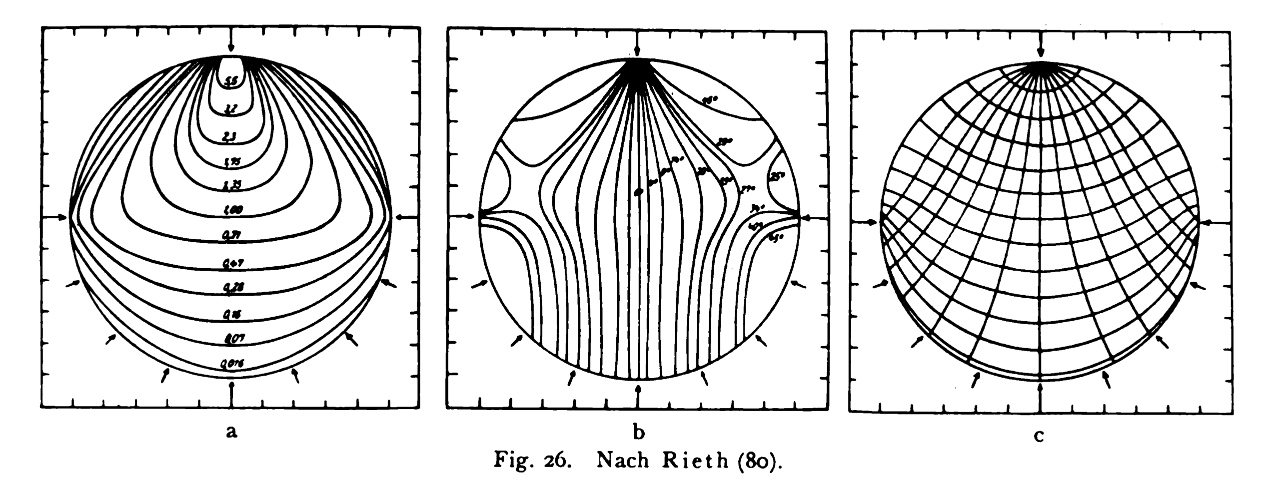
Bei einer Belastung, die auf der einen Hälfte der Platte in einer durch gleichmäßige radiale Druckkräfte über einen Halbkreis und in einer an einem Peripheriepunkt, der senkrecht über dem Mittelpunkt des Halbkreises liegt, radial angreifende Druckkraft besteht, ergibt sich nach H. Rieth: für

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\varrho \sin\psi \cos\varepsilon + 2\varrho^2 \sin 2\psi + 2\varrho^3 \sin 3\psi \cos\varepsilon + \varrho^4 \sin 4\psi}{1 + 2\varrho \cos\psi \cos\varepsilon + 2\varrho^2 \cos 2\psi + 2\varrho^3 \cos 3\psi \cos\varepsilon + \varrho^4 \cos 4\psi}$$

und für

$$\Delta/\Delta_0 = \frac{1 - \varrho^2}{\sqrt{[1 + 2\varrho\cos(\psi+\varepsilon) + \varrho^2][1 + 2\varrho\cos(\psi-\varepsilon) + \varrho^2][1 + 2\varrho^2\cos 2\psi + \varrho^4]}},$$

hierin ist Δ_0 wieder die Phasendifferenz im Mittelpunkt der Platte.



a b c

Fig. 26. Nach Rieth (80).

Die experimentelle Prüfung dieses Falles, die auch von H. Rieth vorgenommen wurde, ist wegen eines geeigneten gleichmäßigen Druckes auf den Halbkreis schwierig. Bei geeigneter Vorsicht läßt sich aber auch hier eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie erzielen (Fig. 26a—c). Eine quantitativ bessere Übereinstimmung mit der Theorie ergaben die Messung von Bell (13), da er günstigere Versuchsbedingungen anwenden konnte.

Einen eigenartigen Fall allseitiger Belastung am Rande, der einen einfachen Verlauf der Isochromaten zeigt, hat W. König (63) an Gelatinezylindern realisiert und sowohl theoretisch wie experimentell genau untersucht. Die Belastung wird auf folgende Weise erreicht. Ein elastischer kreisförmiger Ring z. B. aus Zelluloid wird durch schwachen Druck auf zwei diametral gelegene Randpunkte zu einer angenähert elliptischen Form mit geringer Exzentrizität gedrückt. Dieser Ring wird dann mit einer geeigneten Gelatinelösung ausgegossen und dann nach deren Erstarren mit einer Hilfsvorrichtung in die ursprünglich kreisförmige Gestalt gedrückt. Auf diese Weise ist in dem Zylinder ein Spannungszustand geschaffen, bei dem die Hauptspannungsrichtungen in allen Zylinderpunkten gleich sind. Zwischen gekreuzten Nicols in geradlinigpolarisiertem Licht erscheint daher die Scheibe, wenn die Achsen der früheren Ellipse, also die Zug- und Druckrichtungen, parallel zu den Polarisationsrichtungen liegen, völlig dunkel. In der Diagonalstellung dagegen zeigt sich ein konzentrisches Ringsystem als Isochromaten, die nach dem Zentrum zu steigende Gangdifferenz haben (Fig. 27). Im Gegensatz zu einem ähnlichen Verlauf der Isochromaten, den man bei radialbeanspruchten Kreisringen hat, besteht der Unterschied hier darin, daß beim Kreisring die konzentrisch verlaufenden Interferenzlinien von einem in den Polarisationsrichtungen liegenden schwarzen Kreuz durchsetzt sind, da die Hauptspannungsrichtungen radial und tangential sind.

Die Verteilung der Spannungen über einen Durchmesser erfolgt nach einem parabolischen Gesetz. In einer ausführlichen Bearbeitung wird dann von König eine vollständige Theorie der Erscheinungen mit Randbedingungen in verschiedener Annäherung und Berücksichtigung

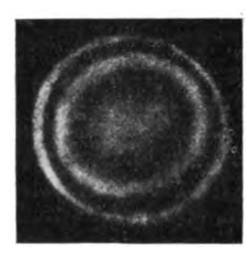


Fig. 27. Nach König (63).

der Dickenveränderung nebst einer Lösung durch Reihenentwicklung gegeben.

Die Veranlassung, einen solchen Beanspruchungsfall herzustellen, wurde durch ein von Ambronn (6) angegebenes Verfahren zur Messung der Differenz der Suszeptibilitäten von Stoffen mit künstlicher Anisotropie gegeben. Dieses Verfahren wurde von König weiter entwickelt und ist dann von Braunbeck und Steitz (15) (91) zu Messungen verwandt worden.

Eine kreisförmige Scheibe, die an ihrem äußeren Rande gleichförmig von radialgerichteten Kräften beansprucht wird, zeigt keinerlei Doppelbrechung, wohl aber ein Kreisring (vgl. später). Man kann aber auch bei einer Vollscheibe ganz analoge Doppelbrechungserscheinungen wie bei mechanisch beanspruchten Kreisringen beobachten, wenn in der Scheibe ein radiales Temperaturgefälle erzeugt wird. Diese Erscheinungen sind bereits von F. Neumann (75) ausführlich beschrieben worden. Man kann so-

wohl die Fälle einer von innen nach außen, als auch einer von außen nach innen gerichteten radialen Beanspruchung durch geeignete Temperaturfelder erzielen. Der vollständigen Analogie der Erscheinungen wegen mit den nun folgende Erörterungen über die Kreisringe soll auf diese Versuche, die auch von W. König (66) noch einmal kurz zusammengestellt worden sind, nicht weiter eingegangen werden.

g) Radialbeanspruchte Kreisringe.

Die Frage nach der Spannungsverteilung in der Wandung eines Hohlzylinders bei radialem inneren oder äußeren Druck ist von großer Bedeutung für technische Probleme z. B. für den Bau von hydraulischen Druckzylindern oder von Geschützrohren. Theoretisch ist die Spannungsverteilung in der Wand von Geschützrohren von Gadolin und unabhängig von Boltzmann untersucht worden. Die Theorie zeigt, daß in einem zylindrischen Rohr, das einem starken inneren Überdruck ausgesetzt ist, die größte Spannung unmittelbar an der Innenwand des Rohres herrscht und sehr rasch nach außen hin abnimmt, so daß also diese Partien nur noch unwesentlich an der Festigkeit des Rohres mitwirken können. Eine Vergrößerung der Wandstärke erhöht somit praktisch die Festigkeit des Rohres nicht wesentlich. Für die Konstruktion von Geschützrohren hat man daher aus dieser Erkenntnis ein Herstellungsverfahren zugrunde gelegt, bei dem man die Rohre aus zwei oder mehreren Zylindern, die in heißem Zustande übereinander geschoben werden, herstellt. Nach dem Erkalten versetzt das äußere Rohr das innere unter einen starken Außendruck, wodurch die Festigkeit sehr erhöht werden kann. Ganz analog liegen die Verhältnisse, wenn ein Rohr einem äußeren Überdruck ausgesetzt ist. Der Charakter der Spannung ist dann aber entgegengesetzt dem bei innerem Überdruck.

Eine direkte Prüfung der von der Theorie geforderten Abhängigkeit konnte König (64)[1] durch die Messung der Doppelbrechungserscheinungen an Gelatine- und Glasringen vornehmen. Die Theorie ergibt für die beiden Spezialfälle, daß auf den Ring nur ein innerer oder nur ein äußerer Druck wirkt, als wesentlichstes, daß die Gangdifferenz umgekehrt proportional dem Quadrat des Radius ist. In beiden Fällen ist das Vorzeichen der Doppelbrechung entgegengesetzt und bei gleichen P_i und P_a hat sie den gleichen absoluten Betrag.

Fig. 28 zeigt das prinzipielle Bild zwischen gekreuzten Nicols. Zur eigentlichen Messung wurden aber nicht so starke Drucke angewandt, so daß die Gangdifferenzen die erste Ordnung nicht überschritten.

Mit welcher Genauigkeit das theoretisch ge-



Fig. 28. Nach König (64).

forderte Gesetz der quadratischen Beziehung zwischen Δ und r sich bei entsprechender Sorgfalt bestätigt, zeigt die folgende Tabelle:

r	8,85	9,85	10,85	11,85	12,85	13,85
Δ	0,578	0,468	0,387	0,324	0,237	0,241
Δr^2	45,3	45,4	45,5	45,6	45,0	46,2

Weitere Messungen über die Spannung in Glasringen sind von Bell (13) in seiner noch nicht veröffentlichten Gießener Dissertation ausgeführt worden.

h) Zugstäbe mit diskontinuierlichen Stellen im Innern (Kreisloch, elliptisches Loch, Risse).

Eine Anzahl Arbeiten von Coker und seinen Schülern beschäftigt sich mit dem Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern, die mit Löchern versehen sind. Solche Beanspruchungsfälle sind technisch von großem Interesse.

Das einfachste von Coker (19) untersuchte

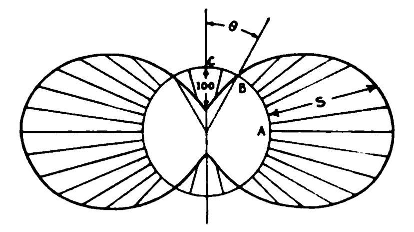


Fig. 29. Nach Coker (19).

Beispiel behandelt einen gleichförmig gedehnten Streifen der zentral mit einem kreisförmigen Loch versehen ist. Zur vollständigen Bestimmung der Spannungsverhältnisse ist die Ermittlung der Trajektorien und Isochromaten erforderlich. Über den Spannungsverlauf am Rande des Loches ist aber sofort, bereits durch Bestimmung der Phasendifferenz in den einzelnen Randpunkten ein Überblick zu erreichen. In Fig. 29 sind nach Coker zu jedem Radiusvektor vom Lochzentrum

1) Wie ich nachträglich feststellen konnte, ist auch bereits von Maxwell (72) das Problem vom optischen Standpunkte aus behandelt worden.



aus die jedem Winkel Θ (gemessen von der Zugrichtung aus) zugehörigen Spannungswerte durch die Verhältnisse der mit S bezeichneten Geraden angegeben. An den beiden Randstellen für die $\Theta = 90^0$ ist, hat die Zugspannung ihr Maximum, und zwar ist dieser Wert etwa 3 mal so groß als der mittlere angewandte Zug. Je mehr der Radiusvektor sich aus der 90^0-Lage in die Dehnungsrichtung nähert, nimmt die Zugspannung ab, und bei $\Theta =$ ca. 30^0 ist der Rand spannungslos. (Was sich zwischen gekreuzten Nicols unmittelbar durch das Auftreten einer isotropen Stelle zeigt.) In dem Winkelbereich von $\Theta = \pm 30^0$ herrscht Druckspannung, die in der Zugrichtung ihren maximalen Wert hat, der etwa gleich dem mittleren angewandten Zug ist.

Für den Spannungsverlauf in den übrigen Teilen der Platte zeigt Fig. 30a den Isoklinenverlauf und Fig. 30b den daraus konstruierten Trajektorienverlauf.

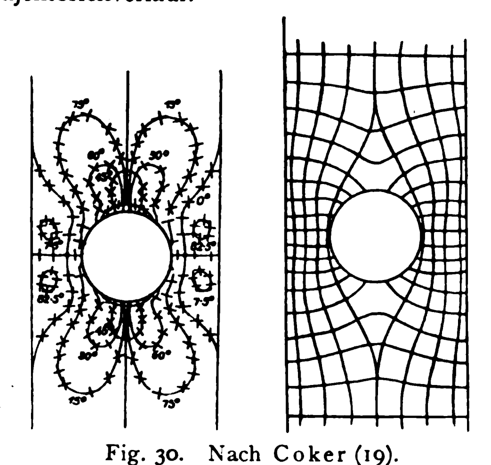


Fig. 30. Nach Coker (19).

Ein Vergleich der experimentell ermittelten Werte mit den von der Theorie geforderten, liefert eine gute Übereinstimmung. Für eine sehr große Platte mit einem Loch vom Radius a ergibt sich theoretisch die Spannung in Polarkoordinaten (vgl. z. B. Föppl (42), 5. Bd., S. 349):

$$\sigma_r = \frac{p}{2}\left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\Theta\right]$$

$$\sigma_t = \frac{p}{2}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\Theta\right]$$

$$\tau_{rt} = \frac{p}{2}\left(-1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\Theta$$

und für den Spezialfall des kleinsten Querschnittes vereinfachen sich die Gleichungen zu:

$$\sigma_r = \frac{3p}{2}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{p}{2}\left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)$$

$$\tau_{rt} = 0.$$

Da die Formeln für eine unendlich ausgedehnte Platte ausgerechnet sind, so ist für den Vergleich mit dem Experiment eine Korrektion erforderlich.

Wird das Loch im Vergleich zur Breite des Streifens vergrößert, so ändert sich die Spannungsverteilung, wenn auch nicht in ihrem prinzipiellen Charakter. Fig. 31 gibt ein Bild des Spannungsverlaufes über den kleinsten Querschnitt und längs der Kanten in der Nähe des Loches für einen Streifen von 1 Zoll (25,4 mm) Breite mit einem Loch von $^1/_2$ Zoll (12,7 mm) Durchmesser. Mit zunehmendem Lochdurchmesser wird der Winkel für den die Randspannung Null ist,

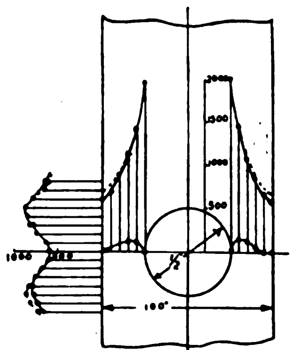


Fig. 31. Nach Coker (19).

größer. Der maximale Wert der Zugspannung, der bei einem kleinen Loch das Dreifache der angewandten Spannung war, nimmt allmählich ab, in dem in der Fig. dargestellten Fall ist er noch etwa 3fach. Die Spannungsverteilung an den Kanten des Stabes, die bei einem kleinen Loch fast konstant ist, erhält bei zunehmendem Lochdurchmesser an der Stelle des kleinsten Querschnittes ein ausgesprochenes Minimum und an zwei symmetrisch nach oben und unten entfernten Stellen ein Maximum. Die Differenz der Kantenspannung beträgt bei dem in Fig. 31 dargestellten Fall etwa 40 Proz., wächst aber mit zunehmendem Lochdurchmesser erheblich und ist z. B. bei einem Streifen von 1,1 Zoll (28 mm) Breite und einem Lochdurchmesser von 0,88 Zoll (22,4 mm) 3 mal so groß, wie der Wert der Kantenspannung im mittleren Querschnitt.

Ein Schüler Cokers, Satake (siehe 19) hat für einen speziellen Fall an einem Stahlblock durch Messungen der Querkontraktion die Spannungsverteilung beim Vorhandensein eines Kreisloches bestimmt und mit guter Übereinstimmung zu den optisch ermittelten Ergebnissen gefunden. (Vgl. auch D. Rühl (82).)

Die Untersuchung der Veränderung der Spannungsverteilung beim Vorhandensein eines elliptischen Loches, hat gewöhnlich kein unmittelbares praktisches Interesse, da solche Löcher bei Konstruktionen seltener vorkommen. Die

Kenntnis dieser Veränderungen ist aber wichtig, weil die Spannungsverteilung in der Nähe von Sprüngen und Rissen, die häufig als Grenzfälle einer Ellipse mit sehr großer Exzentrizität aufgefaßt werden können, praktisch von großer Bedeutung ist.

Coker und Kimball (25) haben hierüber Untersuchungen angestellt. Bei einem elliptischen Loch in einer großen Platte, das mit seiner großen Achse senkrecht zur Dehnungsrichtung orientiert ist, zeigt sich im polarisierten Licht unmittelbar das Auftreten starker Zugspannungen an den Enden der großen Achse. Fig. 32 gibt

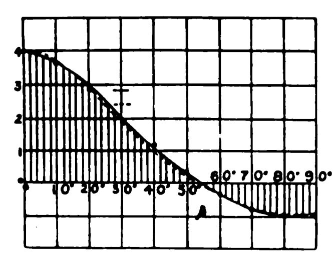


Fig. 32. Nach Coker (19).

einen quantitativen Überblick für den Verlauf der Randspannungen einer Ellipse mit einem Achsenverhältnis 3/2. Die Spannung an den Enden der großen Achse ist etwa von der vierfachen Größe der äußeren angewandten, während an den Enden der kleinen Achse, also in der Zugrichtung ein Druck von der gleichen Größe des äußeren Zuges herrscht. Die gemessenen Werte sind in guter Übereinstimmung mit den von Inglis (56) theoretisch berechneten, die für eine Maximalspannung die Größe $R(1 + 2a/b)$, wobei R der äußere aufgewandte Zug und a/b das Achsenverhältnis ist, ergeben. Aus dieser Beziehung ist auch ersichtlich, daß man zu extrem hohen Spannungen kommt, wenn man in einem gedehnten Stab senkrecht zur Dehnungsrichtung einen schmalen Schlitz anbringt. Es ist eine bekannte Beobachtung, daß nach dem Auftreten solcher Risse bei der Dehnung eines Körpers sehr schnell Bruch erfolgt.

Um die bei dem Auftreten eines Risses entstehenden gefährlichen Spannungen in ihrer Wirkung herabzusetzen, wendet man in der Praxis das Verfahren an, daß man die Enden des Risses durch Aufbohren zu einem kreisförmigen Loch erweitert. Eine systematische Prüfung dieser Fragen ließ Coker (23) eine Methode finden, um die Spannungen noch mehr zu reduzieren, es geschieht das nämlich dadurch, daß man an Stelle der kreisförmigen Erweiterung an den Enden des Risses eine elliptische anbringt. Die Fig. 33 zeigt die Spannungsverminderung für drei verschiedene Behandlungen der Enden des Risses.

Sind die Achsen der Ellipse gegen die Dehnungsrichtung geneigt, so entsteht eine Maximalspannung an den Stellen des Randes, die eine zur Dehnungsrichtung parallele Tangentenrichtung aufweisen. Fig. 34 stellt in der einen Hälfte den Verlauf der Isoklinen, in der anderen den der Trajektorien dar, für eine unter 49° gegen die Drehrichtung geneigte große Achse.

i) Diskontinuierliche Stellen an den Kanten (Einkerbungen, Ecken — scharfe und abgerundete —).

Bei Dehnungs- und Zerreißproben zur Vergleichung verschiedener Materialien spannt man bekanntlich einen prismatischen oder zylindrischen Stab gleichmäßig an beiden Enden ein und setzt ihn einem wachsenden Zug aus, bis der Bruch erfolgt. Um brauchbare Vergleichswerte der verschiedenen Proben erhalten zu können, muß man sicher sein, daß die an der Zerreißungsmaschine gemessene Spannung auch tatsächlich auf den betrachteten Teil des Probekörpers wirken. Damit man im mittleren Teil eines Probekörpers möglichst gleichmäßige Spannungsverteilung erhält, versieht man die Probestücke mit verstärkten Enden. Es kommt aber ganz auf die Verhältnisse des verbreiterten zu dem mittleren

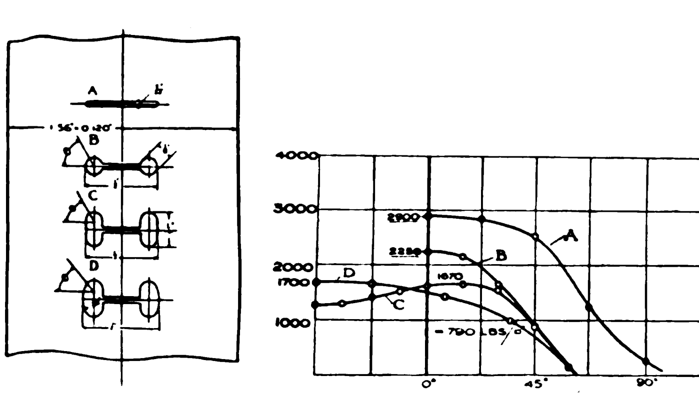


Fig. 33. Nach Coker (23).

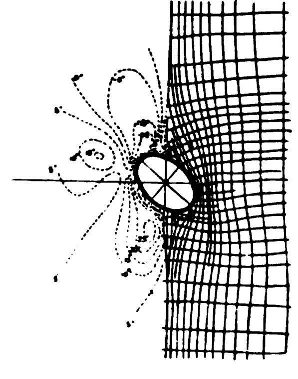
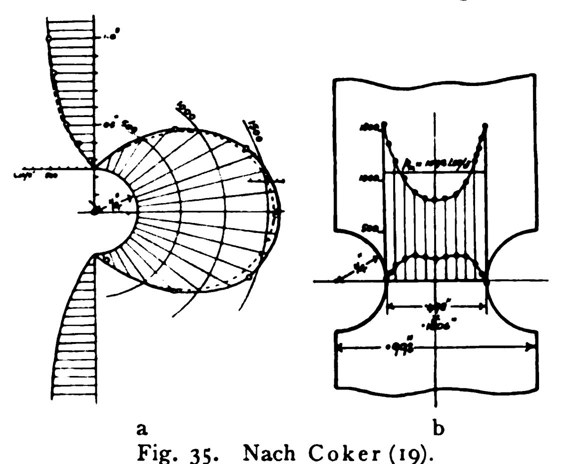


Fig. 34. Nach Coker (19).

Teil sowie auf die Art des Übergangs beider Teile ineinander an, um eine möglichst gleichmäßige Spannungsverteilung zu erhalten.

Coker (26) untersucht zunächst die Verteilung der Spannung in einem gleichförmig gedehnten Balken, der an jeder Seite symmetrisch zur Mittellinie mit einer halbkreisförmigen Aus-



a b
Fig. 35. Nach Coker (19).

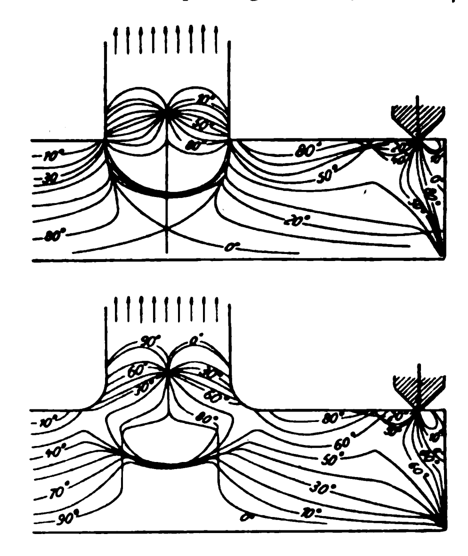
sparung versehen ist. Bei einer Platte von 1 Zoll Breite und einem Lochradius von $^1/_4$ Zoll zeigt sich bei einem mittlerem angewandten Zug von 1092 lbs/square inch der in Fig. 35a angegebene Verlauf der Kantenspannung. Die Spannung an der tiefsten Stelle der Aussparung ist fast 50 Proz.

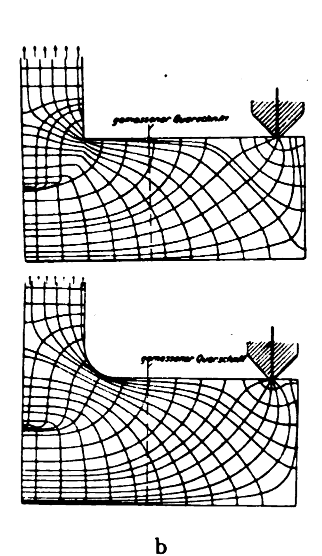
Eine exakte mathematische Lösung des obigen Problems liegt nicht vor, wohl aber ist für den Fall einer einzelnen halbkreisförmigen Einkerbung in einer sehr großen Platte von Léon (70) ein Näherungsverfahren gegeben worden. Wendet man dieses auf den vorliegenden Fall an, so ergibt sich zwischen Rechnung und Beobachtung eine gute Übereinstimmung.

Aus der besprochenen Form leitet Coker die Form eines Prüfstückes ab, indem er zwischen die beiden Hälften, die er durch einen durch den minimalen Querschnitt geführten Schnitt erhält, ein paralleles Stück von der Breite des kleinsten Querschnittes einsetzt. Er untersucht ausführlich die verschiedenen Arten so erhaltener Probekörper unter anderem auch den „British Standard Test Bar for Plates".

Über den Spannungsverlauf bei Einkerbungen verschiedener Form an der Kante eines Zugstabs haben Coker und Heymans (27) ausführliche Untersuchungen angestellt (vgl. dazu auch (50)).

Mit der Ermittlung der Spannungsverhältnisse in *L*- und *T*-Stücken befassen sich Arbeiten von Tuzi (93), Birnbaum (16), sowie eine kurze nicht publizierte Untersuchung aus dem physikalischen Institut der Universität Gießen von Kämmerer (58), die auf Veranlassung von Herrn Geheimrat König unternommen worden ist[1]). Birnbaum, der die Spannungsverteilung der durch Zentrifugalkraft beanspruchter





a b
Fig. 36. Nach Birnbaum (16).

größer als der mittlere angewandte Zug. Eine gleichförmige Beanspruchung ist erst in einem Abstand, der ungefähr gleich dem vierfachen Radius ist, vom kleinsten Querschnitt zu beobachten. Der Spannungsverlauf über den kleinsten Querschnitt ist durch Fig. 35b dargestellt.

Schaufelfüße von Turbinen studieren will, führt die ersten messenden Versuche an belasteten *T*-

1) Herrn Geh. Rat König möchte ich auch an dieser Stelle für die mir liebenswürdigerweise zur Publikation überlassenen Figuren von Herrn Kämmerer danken.



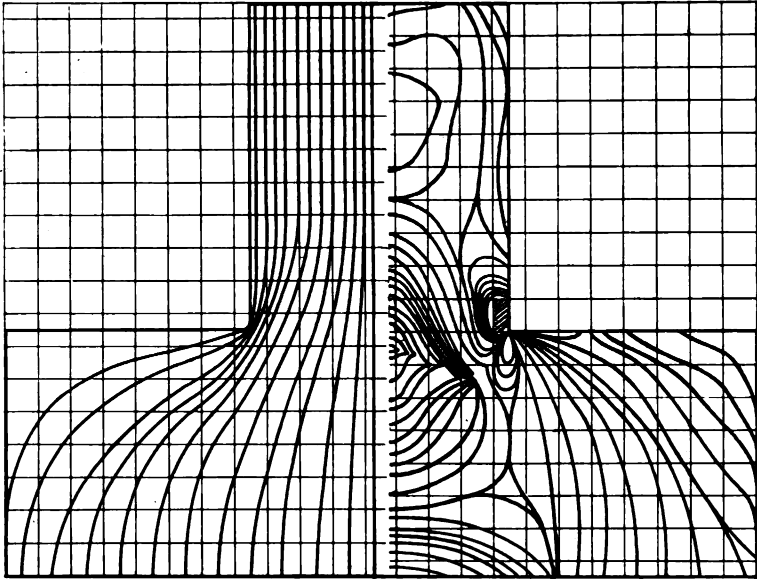
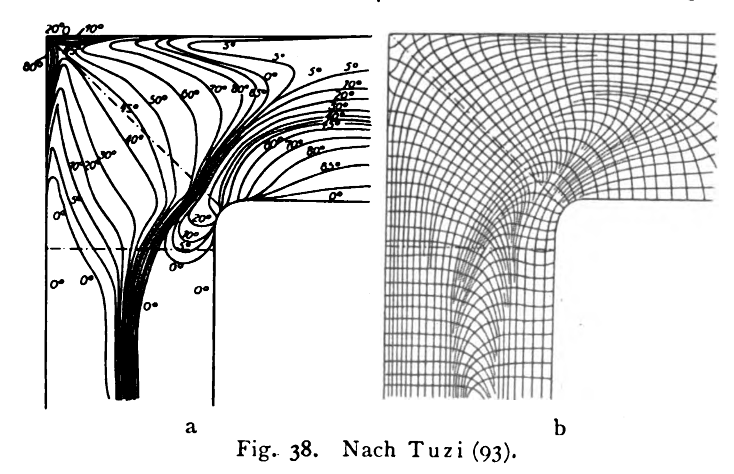


Fig. 37. Nach Kämmerer (58).

Stücken mit scharfen und abgerundeten Ecken (5 mm Radius) aus, die auf parallelen Schneiden aufliegen. Er verwendet Zelluloidmodelle, bei denen sich an den Stellen großer Spannungskonzentration bleibende Aufhellungen zeigten. Bis auf diese Stellen erhielt er aber mit der Theorie übereinstimmende Werte. Die völlige Berechnung der Spannungen für einzelne Querschnitte wurde nach dem 2. Verfahren (Seite 512) durchgeführt. Fig. 36a u. b zeigt Isoklinen- und Trajektorienverlauf in beiden Fällen.

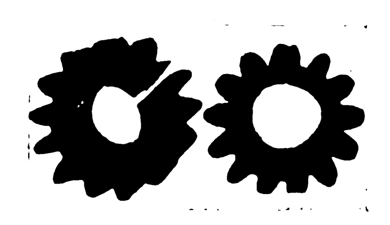
Eine ungefähre Übersicht über den Trajektorienverlauf in einem Schaufelfuß, der zunächst der Einfachheit halber nicht im Zentrifugalfeld, sondern unter der Wirkung einer Zugkraft vorgenommen wurde, konnte er durch die Beobachtung erhalten. Eine exakte Bestimmung hatte gewisse Schwierigkeiten, da einmal ein gleichmäßiger Auflagerdruck auf den Schultern infolge der flächenhaften Auflager nicht zu erzielen war, und ferner die Zelluloidmodelle bei der Herstellung beträchtliche Vorspannungen, also bleibende Aufhellungen erhalten hatten. Die Untersuchung von Kämmerer wurde an einem Glasmodell mit punktweiser Ausmessung (S. 511) ausgeführt. Die Belastung erfolgte durch einen gleichmäßigen Druck auf den schmalen Arm des T-Stückes, das mit seiner breiten Seite gleichmäßig auflag. Auch hierbei ergaben sich bezüglich einer gleichmäßigen Lagerung und Belastung gewisse Schwierigkeiten, doch waren keine nennenswerten bleibenden Aufhellungen von vornherein vorhanden. Fig. 37 zeigt in der rechten Hälfte die Kurven gleicher Drucke, während die linke Hälfte den Verlauf der einen Trajektorienschar wiedergibt.

Tuzi (93) untersucht um die Eignung des von ihm studierten Materials für optische Spannungsmessungen zu zeigen, die Spannungsverteilung eines L-förmigen Balkens mit ab-



a b

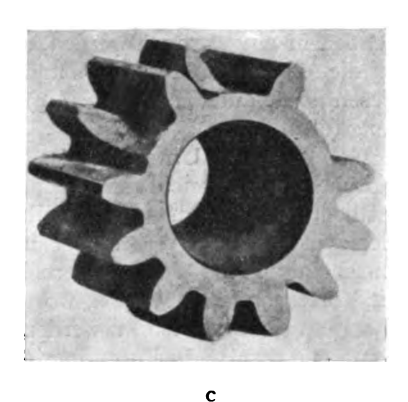
Fig. 38. Nach Tuzi (93).



a



b



c

Fig. 39. Nach Heymans u. Kimball (48).

gerundeter Ecke, (5 mm Radius), der am wagerechten Arm belastet ist an einem Phenolith-Modell. Fig. 38a zeigt die Isoklinen, Fig. 38b die Trajektorien. Längs der Querschnitte *AA* und *BB* nimmt er nach der zweiten Methode (Seite 512) eine vollständige Bestimmung der einzelnen Spannungskomponenten vor, wobei sich eine gute Übereinstimmung mit der Theorie ergab. Ob in den Ecken bleibende Aufhellung beobachtet wurde, teilt der Verfasser nicht mit. Sollte diese nicht nennenswert sein, so würde auch daraus ein gewisser Vorteil dieses Materials an Stelle von Zelluloid zu Modellen zu verwenden, hervorgehen.

3. Über ein spezielles technisches Beispiel. (Spannungen in Zahnrädern.)

Eine Untersuchung über die Ursache der Brüche von Zahnrädern elektrischer Bahnmotoren bildet den Gegenstand einer interessanten Arbeit von Heymans und Kimball (48). Die technisch gebräuchlichen Berechnungsmethoden der Spannungen in einem in Betrieb befindlichen Zahnrad können oft die tatsächlichen Verhältnisse nicht richtig erfassen, da die verschiedensten Faktoren die Spannungsverteilung und damit die Maximalspannung beeinflussen, so daß häufig Materialfehler für Brüche verantwortlich gemacht werden, wo es sich aber nur um eine unerwartete Spannungskonzentration handelt. Die optischen Studien haben nun wichtige Resultate für die Beurteilung der Beanspruchungsverteilung ergeben, die zum Teil ganz neu waren. Versuche an Stahlmodellen, die bis zum Bruch belastet wurden, konnten auf Grund des optischen Befundes in ihren Ergebnissen vorausbestimmt werden.

Ein sehr wichtiger die Spannungsverteilung beeinflussender Faktor ist die Montage der Zahnräder auf der Achse. Normalerweise geschieht diese so, daß die Räder, die eine schwach konische Bohrung besitzen und einen Lochdurchmesser haben, der etwas geringer als der der Achse ist, in heißem Zustand (bei der Temperatur von siedendem Wasser) leicht auf die Achse gebracht werden können, auf der sie dann nach der Abkühlung festsitzen. Wenn nun aber die Montage nicht so vorschriftsmäßig ausgeführt wird, sondern die Räder z. B. mit großer Gewalt bei höherer Temperatur auf eine möglichst starke Achse aufgetrieben werden, um eine Loslösung während des Betriebes zu verhindern, so können dadurch zu starke radiale Drucke erzeugt werden, die im Verlaufe des Betriebes zum Bruch führen.

Eine Untersuchung von Zahnradmodellen aus Zelluloid, die auf einer Achse montiert waren, ergaben nun, daß die Spannung an denjenigen Stellen maximale Werte hatte, wo die Radien nach der Mitte der Zähne den inneren Randumfang schneiden. Versuche an Stahlzahnrädern, die auf radialen Druck beansprucht waren, ergaben nun auch Bruch längs dieser Radien, also mitten durch einen Zahn, wie es Fig. 39a an zwei Beispielen zeigt. Dieses Resultat, was zunächst völlig überraschend ist, ist durch die optische Methode vorausgesagt worden, und gibt einen sehr guten Beweis für den Nutzen dieses Verfahrens.

Des weiteren wurde die Spannungsverteilung unter zusammengesetzter Beanspruchung studiert. So ergab sich bei einem normal übertragenen Drehmoment und starker radialer Beanspruchung ein Spannungszustand, der einen Bruch, wie ihn Fig. 39b zeigt, vorauszusagen gestattete. Der Bruch ist in Form einer *V*-förmigen Einkerbung erfolgt. Die Öffnung dieser Einkerbung nimmt mit zunehmendem radialem Druck ab. Fig. 39c zeigt einen Bruch bei schwacher radialer Beanspruchung, der ein glattes Abspringen der Zähne erkennen läßt. Als anderer extremer Fall, der *V*-förmigen Einkerbung bei höchster radialer Beanspruchung ist der in Fig. 39a bereits besprochene aufzufassen. Durch systematische Studien sind die verschiedenen Übergänge in dem *V*-förmigen Bruch zu beobachten. Auf weitere Einzelheiten, insbesondere auf die eigentliche Spannungsanalyse soll hier

nicht mehr eingegangen werden, sondern es wird auf die Arbeit von Heymans und Kimball verwiesen (siehe auch Heymans (49) und Kronenberg (68)).

Gerade diese Untersuchung zeigt, daß die optische Methode nicht nur gestattet eine elastizitätstheoretische Spannungsverteilung zu prüfen oder zwischen zwei verschiedenen Theorien eine Entscheidung zu fällen, sondern besonders auch mit Vorteil angewandt wird, wo eine brauchbare Theorie nicht aufgestellt werden kann. Heymans bemerkt am Schluß seiner Arbeit (49) auch sehr treffend, „daß es wenig zweifelhaft scheint, daß Brüche, deren Ursache einem Materialfehler zugeschrieben wird oder rätselhaft bleibt, oft ihre Erklärung finden werden, durch eine bessere Kenntnis der Spannungen, die tatsächlich in einer Konstruktion herrschen und nicht der Spannungen, die existieren würden, wenn die idealen Bedingungen oder die vereinfachten Hypothesen unserer Rechnung sich verwirklicht finden würden."

Literaturverzeichnis[1]).

1) Adams, L. H. u. Williamson, E. D., Journ. of the Washington Acad. of Sciences, Vol. **9**, Nr. 20, 1919, und Phys. Rev. **14**, 99, 1919.

2) Ambronn, H., Über die Anomalien bei der akzidentellen Doppelbrechung. Berichte d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Kl. **50**, 1—31, 1898.

3) — Über die Dispersion der Doppelbrechung in den Mischkristallen von Strontium- und Bleidithionat. Zeitschr. f. Kristallogr. u. Min. **52**, 48—57, 1913.

4) — Über anomale Doppelbrechung beim Zelluloid. Berichte d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Kl. **63**, 249—257 u. 402—406, 1911.

5) — u. Frey, A., Das Polarisationsmikroskop, Leipzig 1926 in Kolloidforschung in Einzeldarstellungen, herausgeg. v. R. Zsigmondy, Bd. 5.

6) — Über das Verhalten doppelbrechender Gelatineplatten gegen Magnetismus und Elektrizität. Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Kl. **43**, 394 bis 398, 1891.

7) Andrade, The Distribution of Slide in a Right Six Face subjekt to Pure Shear. Roy. Soc. Proc. A. **85**, 1911.

8) Arakawa, I., On the Determination of Stress-optical Coefficient of Bakelite with Initial Stress Proc. of Physico-Math. Soc. of Japan, **8**, 1923; Ser. 3, Vol. V, Nr. 9—11; Some Adventages obtained from Bakelite in Photo-Elastic Observation 1925, Vol. VII, Nr. 11.

9) Asch, E., Untersuchung der Spannungen des gebogenen Balkens im polarisierten Licht. Zeitschr. f. techn. Phys. **3**, 294—305, 1922.

[1]) Herrn Prof. Dr. W. Eitel, Berlin-Dahlem, Herrn Direktor Dr. Fleischmann von der A.E.G. Berlin und Herrn Geh. Rat. Prof. Dr. W. König, Gießen, bin ich für die Überlassung von teilweise schwer zugänglicher Literatur zu großem Dank verpflichtet.

10) Aue, J., Zur Berechnung der Spannungen in gekrümmten Stäben (mit Hilfe der optischen Methode). Diss. Jena 1909.

11) Balinkin, Isay A., An optical determination of axial stresses in long rectangular plates under torsion, Phys. Rev. **30**, 520—526, 1927.

12) Bach, C., Elastizität und Festigkeit. 9. Aufl. gem. mit R. Baumann, Berlin 1924.

13) Bell, Gießener Dissertation 1926. Noch nicht veröff. (Über Doppelbrechung in Glasringen.)

14) Berndt, G., Zeitschr. f. Instr. **40**, 2c—27, 37—42, 56—61, 70—75, 1920.

15) Braunbeck, C., Über die magnetischen Eigenschaften von Stoffen mit künstlicher Anisotropie, Diss. Gießen 1918.

16) Birnbaum, W., Optische Untersuchung des Spannungszustandes in Maschinenteilen mit scharfen und abgerundeten Ecken, Zeitschr. f. techn. Phys. **5**, 143—149, 1924.

17) Bjerkén, Wied. Ann. 808 u. f., 1891.

18) Brewster, D., On the communication of the structure of doubly refracting crystals to glass, muriale of soda, fluors squere, and other substances, by mechanical compression and dilatation, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 156—178, 1816.

19) Coker, E. G., Photo Elasticity for Engineers, Gen. Elec. Rev. 1. Teil: Vol. **23**, Nr. 11, 870—877, 1920; 2. Teil: Vol. **23**, Nr. 12, 966—973, 1920; 3. Teil: Vol. **24**, Nr. 1, 82—88, 1921.; 4 Teil: The Use of Photo-Elastic Methods in the Design of the Elements of Machines and Structures, Vol. **24**, Nr. 3, 222—226, 1921; 5. Teil: The Stress-Strain Properties of Nitro-Cellulose and the Law of its Optical Behaviour, Vol. 24, Nr. 5, 455—466, 1921.

20) — The optical Determination of Stress. Phil. Mag. **20**, 740 u. f., 1910.

21) — The Effects of Holes and Semicircular Notches on the Distribution of Stress in Tension Members. Proceedings of the Physical Society of London, **25**, 95—105, 1913.

22) — An optical Determination of the Variation Stress in a Thin Rectangular Plate subjected to shear. Proc. of the Roy. Soc. ser. A, **86**, 291—319, 1912.

23) — The Determination by Photo Elastic Methods of the Distribution of Stress in Plates variable Section, with some Application to Ships' Plating. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1911.

24) — und Scoble, W. A., The Distribution of Stress due to a Rivet in a Plate. Ebenda, **55**, 207—218, 1913.

25) — und Kimball, A. L. jun., The Effects of Holes, Cracks and other Discontinuities in Ship's Plating. Ebenda, **62**, 117—123, 1920.

26) — Photo Elastic Measurements of the Stress Distribution in Tension Members used in the Testing of Materials. Minutes of the Proc. Inst. Civil Eng., London 1921.

27) — und Heymans, P., Stress Concentrations due to Notches and like Discontinuities. Report of the British Association for the Advancement of Science, **89**, 291—299, 1921.

28) — und Filon, L. N. G., Experimental Determination of Stress and Strain in Solids. Ebenda, 201—210, 1914.

29) — und Thompson, The Design and Construction of large Polariskopes. Engineering **94**, 134—135, 1912.



30) Coker, E. G., u. Thompson, Some Engineering Problems of Stress Distribution. Proc. of. the First Internat. Congress for Applied Mechanics, Delft, 18—38, 1924.
31) — The Determination of Stresses at a Point in a Plate. Engineering **116**, 512—513, 1923.
32) Czapsky, S., Wied. Ann. **42**, 319 u. f., 1890.
33) Drude, P. und Werthauer, A., Akzidentelle Doppelbrechung in Gehrcke Handb. der phys. Optik, Bd. **1**, 866—882, 1927, Leipzig.
34) Delanghe, G., La Photo-Elasticimétrie, ses applications et ses méthodes. Génie civil, **91**, 243—249, 271—275, 297—304, 1927.
35) English, S. und Turner, W., Journ. Soc. Glass-Techn. **2**, 90, 1920.
36) Filon, N. G. L., The Investigation of Stresses in a Rectangular Bar by Means of polarized light. Phil. Mag. **23**, 1—25, 1912.
37) — On Stresses in Multiply-connected Plates. Rep. Brit. Assoc. f. Advanc. of Science **89**, 305—316, 1921.
38) — On the Graphical Determination of Stress from Photo-Elastic Observations. Engineering, **116**, 511—512, 1923.
39) — u. Coker, siehe unter Coker.
40) — und Jessop, H. T., On the Stress-optical Effect in Transparent Solids Strained beyond the Elastic Limit. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **101**, 165—169, 1922, und Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A **223**, 89—125, 1923.
41) Fletcher, L., Die optische Indicatrix (Deutsche Übers. aus dem Engl. von H. Ambronn und W. König). Leipzig 1893.
42) Föppl, A., Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. **3** und Bd. **5**. Leipzig und Berlin, 10. Aufl. 1927 und 4. Aufl. 1922.
43) Hartmann, L. Distribution des Déformations dans les Métaux soumis à les Efforts. Paris 1896.
44) Haupt, K. und Wächtler, M., Die Homogenität des Kasein-Kunsthorns. „Kunststoffe" **15**, 129—131, 1925.
45) Heymans, P., La Photo-Elasticimétrie, ses Principes, ses Méthodes et ses Applications. Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et des Industriels. **2**, 99—214, 1921, Brüssel.
46) — Photo-Elasticity and its Applications to Engeneering Problems, Tech. Eng. News Mass. Inst. Technology, 80—85, Mai 1922.
47) — und Allis, W. P., The Photoelastic Constants of Celluloid, Glass and Fused Ouartz. Bulletin, Massachusetts Institute of Technology **59**, Nr. 64, 216—233, 1924.
48) — und Kimball, A. L., Stress Distribution in Electric Railway Motor Pinions as Determined by the Photo-elastic Method. General Electric Rev. **26**, Nr. 3, 143—153, 1923.
49) — Étude des causes de rupture de constructions-, métalliques au moyen de la lumière polarisée. Revue universelle des mines, (7) **4**, 207—211, 1925.
50) — La Détermination par la Photo-élasticimétrie des Surtensions Dues à certaines Discontinuités Internes et ... Brüssel 1921.
51) — Bemerkung zur Arbeit des Herrn A. Ramspeck: „Anomalien der akzidentellen Doppelbrechung beim Zelluloid. Ann. d. Phys. (4) **77**, 587—588, 1925.
52) Hönigsberg, O., Über unmittelbare Beobachtung der Spannungsverteilung und Sichtbarmachung der neutralen Schichte an beanspruchten Körpern. Zeitschr. d. östr. Ing. u. Archit.-Vereins Nr. 11, 1904.
53) Hönigsberg. O., Einrichtung für Versuche an beanspruchten durchsichtigen Körpern in polarisiertem Lichte. Ebenda, 1906, Nr. 35.
54) — Unmittelbare Abbildung der neutralen Schichte bei Biegung durchsichtiger Körper in zirkularpolarisiertem Licht. Nichtoffizieller Bericht, internationaler Verband für die Materialprüfungen der Technik. Brüsseler Kongreß 1906.
55) — und Dimmer, G., Interferenzfarben beanspruchter durchsichtiger Körper. Ebenda.
56) Inglis, C. E., Stresses in a Plate due to the Presence of Cracks and sharps Cornes. Transaction of the Institution of Naval Architects **55**, 219—230, 1913.
57) Jakson, A., Spannungslinien bei Berücksichtigung der lokalen Pressung mit Anwendungen für die Praxis. Diss. Karlsruhe 1916.
58) Kämmerer, W., Spannungsmessungen an einer T-förmigen Glasplatte. Staatsexamenarbeit, Phys. Institut Gießen 1927.
59) Köhler, W., Über eine neue Methode zur Messung der Dispersion der Doppelbrechung. Diss. Gießen 1921.
60) König, W., Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten. Ann. d. Phys. (4) **4**, 1—40, 1901.
61) — Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung. Ann. d. Phys. (4) **11**, 842—866, 1903.
62) — Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elastizität. Boltzmann-Festschrift 832—838, 1904.
63) — Über einige Fälle künstlicher Doppelbrechung in zylindrischen Körpern. Ann. d. Phys. (4) **52**, 553—607, 1917.
64) — Nachweis elastischer Spannungen in ringförmigen Körpern mit Hilfe künstlicher Doppelbrechung. Elster- u. Geitel-Festschrift 368 bis 380, 1915.
65) — Die Untersuchung von Gläsern in polarisiertem Lichte. Deutsch. opt. Wochenschr. Nr. 1/2, 1—6, 1918.
66) — Einige Beobachtungen über künstliche Doppelbrechung durch Temperaturungleichheit. Physik. Zeitschr. **26**, 45—47, 1925.
67) — Erwiderung auf die Bemerkung des Herrn Paul Heymans zur Arbeit des Herrn A. Ramspeck (51), Ann. d. Phys. **79**, 757—760, 1926.
68) Kronenberg, Referat über die Arbeit (48) von Heymans und Kimball. Zeitschr. d. V. D. I. 641 u. f. 1926.
69) Leick, A., Über künstliche Doppelbrechung und Elastizität von Gelatineplatten. Diss. Greifswald 1903.
70) Léon, Oesterreich. Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst **14**, 1908.
71) Love, A. E. H., Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe, Leipzig u. Berlin, 1907.
72) Maxwell, Cl., On the Equilibrium of Elastic Solids. The Scientific Papers, Vol. I.
73) Mesnager, M., Contribution à l'étude de la Déformation Élastique des Solides. Annales des Ponts et Chausseés **4**, 128—190, 1901.
74) — Détermination complète sur un Modèle réduit des Tensions qui se produiront dans un Ouvrage. Utilisation de la Double Réfraction accidentelle du verre à l'étude des efforts intérieurs dans les solides. Ebenda, **16**—**18**, 133—186, 1913.

75) Neumann, F., Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in komprimierten oder ungleichförmig erwärmten unkristallinischen Körpern. Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. **54**, 449—476, 1841, u. Ber. d. Verh. d. Berl. Akad. 330—353, 1841.
76) Pockels, F., Über die Änderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation. Ann. d. Phys. (4) **7**, 745 bis 771, 1902; — Lehrbuch der Kristalloptik Leipzig, Berlin 1906; — Referat über die Arbeit (20) von Coker. Beibl. zu den Ann. d. Phys. **35**, 136, 1911.
77) Preston, F. W., A Note on Stress Systems and Photo-elastic Phenomena. (A Contribution to the General Discussion on the Annealing of Glass.) Journ. of the Society of Glass. Technology **11**, 23—29, 1927.
78) Ramspeck, A., Anomalien der akzidentellen Doppelbrechung beim Zelluloid. Ann. d. Phys. (4) **74**, 722—742, 1924. Diss. Gießen.
79) Reeb, O., Über eine Methode zur Messung der Dispersion der künstlichen Doppelbrechung. Ann. d. Phys. (4) **71**, 427—456, 1923. Diss. Gießen.
80) Rieth, H. (geb. Marx), Über die künstliche Doppelbrechung in zylindrischen Glaskörpern bei Einwirkung äußerer Drucke. Ann. d. Phys. (4) **79**, 145—176, 1926. Diss. Gießen.
81) Rossi, P., Rend. d. R. Acad. Napoli 1910.
82) Rühl, D., Experimentelle Ermittlung ebener Verschiebungs- und Spannungszustände auf neuem Wege und Anwendung auf eine durch zwei Nietbolzen gespannte Platte. Forschungsarb. auf dem Geb. d. Ing.-Wes., Heft 221, 1920, V. D. I. Berlin.
83) Savur, S. R., On the Stress Optical Effect in Permanently Overstrained Celluloid. Proc. Roy. Soc. A. **109**, 338—350, 1925.
84) — On the Stress Optical Coefficients for Direct Tension and Pressure measured in the case of Glass. Phil. Mag. Vol. **50**, 453—463, 1925.
85) Schultz, H., Die Bestimmungen der Spannungen in beanspruchten Körpern mit Hilfe polarisierten Lichtes. Der Betrieb, **3**, 405—412, 1921.
86) — Zeitschr. f. Instr. **33**, 205 und 247, 1913.
87) Seebeck, A., Schweigers Journ. VII, 1813, XI, XII, 1814.
88) Siedentopf, H., Über direkte Sichtbarmachung der neutralen Schichten an beanspruchten Körpern. Zeitschr. d. östr. Ing. u. Archit. Vereins **33**, 469—471, 1906.
89) — Mikroskopokular mit Quarzheilkompensator. Zentralbl. f. Mineral. **23**, S. 745, 764, 1906.
90) Steinheil, H., Einige Fälle von Doppelbrechung in kreisförmigen Glasscheiben. Diss. Gießen 1920.
91) Steitz, K., Bestimmung der Differenz der Suszeptibilitäten von Gelatinezylindern mit künstlicher Anisotropie. Diss. Gießen 1922.
92) Szivessy, G., Stand der experimentellen Forschung über die optischen Wirkungen des elektrischen Feldes (mit Ausschluß des Starkeffektes). Jahrb. für Radioaktivität u. Elektronik **16**, 241—283, 1920.
93) Tuzi, Z., A New Material for the Study of Photo-Elasticity. Scientific Papers of the Institut of Physical and Chemical Research, Tokio **7**, 79—96, 1927.
94) — Photo-Elastic Study of Stress on a specimen of three dimensional Form. Ebenda **7**, 97—103, 1927.
95) — Photo-Elastic Study of Stress in heat-treaded Column. Ebenda **7**, 104—120, 1927.
96) Wächtler, M., Über die Beziehung zwischen Doppelbrechung und Dauerdeformation in einigen Gelen. Kolloidchem. Beihefte **20**, 158—208, 1924.
97) — Eine Bemerkung über die optischen Methoden zur Prüfung von Materialbeanspruchungen insbesondere bei Verwendung von Zelluloid. Zeitschr. für techn. Phys. **5**, 418—423, 1924.
98) — Über die Doppelbrechungserscheinungen in Kolloiden. Fortschr. d. Min. **12**, 119—192, 1927.
99) Weidert u. Berndt, Zeitschr. f. techn. Phys. **1**, 51—58, 1920.
100) Weigert, Berichte d. deutsch. phys. Gesellsch. **21**, 479, 615, 623, 1919.
101) Wilson, C., The Influence of Surface Loading on Flexure of Beams. Phil. Mag. **32**, 481—503, 1891.
102) Wyss, Th., Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktische Anwendung. Berlin 1926.

(Eingegangen 6. März 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eisenhaltige Ringe geringer wirksamer Permeabilität.

Von U. Retzow.

In den letzten Jahren ist unsere Kenntnis auf dem Gebiete des Magnetismus durch mehrere bemerkenswerte Feststellungen erweitert worden, ohne daß dabei diese Beobachtungen geeignet sind, dem noch recht wenig einheitlichen Bilde über das Wesen der magnetischen Vorgänge und Zusammenhänge neues Beweismaterial in der einen oder anderen Richtung zuzufügen. Es liegt also auch hier ein Fall vor, in dem die theoretische Behandlung der praktischen Erkenntnis folgen muß.

Hatten bereits seiner Zeit vor ungefähr 30 Jahren die unter diesem Namen bekannten Heuslerschen Aluminium-Mangan-Bronzen[1])

1) F. Heusler, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1904, S. 156; E. Take, Ann. d. Phys. **20**, 849, 1906; Schriften der Marburger Ges. **15**, 299, 1906. — Aus neuerer Zeit: F. Heusler, Zeitschr. f. Phys. **10**, 403, 1922. — M. Ostmann, Dissert. Aachen 1927.



(Legierungsbestandteile: *Cu*, *Mn*, *Al*[1])) berechtigtes Aufsehen erregt, die in magnetischer Hinsicht zwar zu keiner praktischen Bedeutung gelangt sind, so muten die in dieser Zeitschrift kürzlich wiedergegebenen und die Angaben von G. Elmen[2]) bestätigenden Hystereseschleifen von U. Meyer[3]) recht eigenartig an. Der auffallende Kurvenverlauf dieses Materials (Legierungsbestandteile: *Ni*, *Fe*, *Co*) ist in diesem Falle durch den Umstand bedingt, daß die Permeabilität beispielsweise bei der angegebenen Legierung von 50 Proz. *Ni*, 30 Proz. *Co* und 20 Proz. *Fe* noch bis zu einer Feldstärke von ungefähr 4 Gauß praktisch als konstant anzusehen ist. Eine technische Anwendung derartiger Legierungen glaubt Elmen nach der angeführten belgischen Patentschrift für einige Sonderausführungen auf dem Gebiete der Niederfrequenz- und Hochfrequenztechnik zu finden. Es wäre auch denkbar, schwach erregte Verstärkertransformatoren auf dieser Grundlage zu entwerfen, die der Einwirkung äußerer Felder entzogen werden sollen.

Den Materialien dieser Gruppe, deren magnetische Eigenschaften durch die Legierung mehrerer paramagnetischer Metalle zustande kommen, stehen die beiden anderen Gruppen gegenüber, bei denen das Eisen zum mindesten einen großen Teil der magnetischen Erregbarkeit übernimmt. Ein grundlegender Unterschied kennzeichnet aber schon von vornherein das verschiedenartige magnetische Verhalten dieser beiden Gruppen: auf der einen Seite die hochpermeablen Legierungen, auf der anderen Seite aber die nur schwach erregbaren Ringe und Massekörper.

Verweilen wir zunächst ganz kurz bei den hochpermeablen Eisen—Nickel-Legierungen, über deren magnetisches Verhalten und technische Ausnutzung uns bereits eine Anzahl von Veröffentlichungen unterrichtet, von denen die bemerkenswertesten in der Fußnote[4]) aufgeführt werden. Dabei stehen wir gleichzeitig vor der auffallenden Erscheinung, daß ungefähr dieselbe Legierungsreihe, die den früher im Schiffs- und Uhrenbau so sehr geschätzten, sogenannten unmagnetischen Nickelstahl[1]) (mit ungefähr 25 bis 27 Proz. *Ni*) liefert, bei größerem Nickelzusatz zu Stoffen der höchsten bisher bekanntgewordenen Permeabilität führt. Die bekanntesten dieser Materialien sind ungefähr die folgenden: das Permalloy[2]) mit 78,2 *Ni* und 21,3 Proz. *Fe*, das englische Mumetall[3]) mit 74 Proz. *Ni*, 20 Proz. *Fe*, 5 Proz. *Cu* und 1 Proz. *Mn*, das amerikanische Nicaloy mit 51 Proz. *Fe* und 49 Proz. *Ni*, das Invariant[4]) mit 47 Proz. *Ni*, das Kruppsche *Br* 50 mit ungefähr gleichem Eisen- und Nickelgehalt, das Hypernik[5]), dessen nähere Zusammensetzung in der genannten Arbeit nicht näher angegeben ist. — Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß diese Materialien einer sehr sorgfältigen Warmbehandlung unterworfen werden müssen, um die günstigsten Eigenschaften in magnetischer Hinsicht zu erzielen.

Die hohe Maximalpermeabilität dieser Materialien, die lediglich durch den Umstand bedingt ist, daß die (nicht allzu hohe) magnetische Sättigung bereits bei sehr geringer Feldstärke, die noch unterhalb der des Erdfeldes liegt, erreicht wird, eignet sich besonders für alle die Fälle, bei denen man es mit sehr geringen erregenden Feldstärken zu tun hat; und diese liegen bekanntlich in der Fernmeldetechnik bei der Überbrückung größerer Reichweiten vor. Hier aber findet sich zugleich auch der Zusammenhang, der die soeben erwähnten hochpermeablen Legierungen mit der folgend zu besprechenden Gruppe verbindet. Denn beide Gruppen, so wesentlich verschieden sie auch in ihren Grundeigenschaften

1) Das *Al* kann auch durch eine Reihe anderer Metalle ersetzt werden.
2) G. Elmen, Belgische Patentschrift 336226.
3) U. Meyer, Physik. Zeitschr. **28**, 919, 1927.
4) T. Yensen, Transact. Amer. Inst. Electr. Eng. 1920, S. 791. — L. Mac Keehan, Phys. Rev. 1923, Nr. 23. — Elektr. Nachr. Techn. 1924, S. 114. — M. Deloraine, Journ. Phys. et Radium **6**, 20, 1925. — K. W. Wagner, Elektrot. Zeitschr. 1925, S. 1581. — J. Würschmidt, Kruppsche Monatshefte 1925, Heft 9, 11, 12. — Elektrot. Zeitschr. 1925, S. 1630. — Bell System Techn. Journ. 1925, S. 355. — Journ. scient. instr. **3**, 24, 1925. — W. Griffiths, The Electrician **97**, 612, 618, 1926. — R. Hiecke, Elektrot. u. Masch.-Bau 1926, S. 49. — W. Kawakami, Scient. Rep. Tohoku Univ. **15**, 215, 1926. — F. Ribbeck, Zeitschr. f. Phys. **38**, 772, 1926. — T. Spooner, Journ. Amer. Inst. Electr. Eng. 1926, S. 540. — A. Jung, Zeitschr. f. Krist. **65**, 309, 1927. — R. Appleyard, Electr. Rev. **102**, 715, 1928. — Electr. Rev. **102**, 816, 1928. — Iron Age **121**, 534, 1928.

1) Ch. Guillaume, Les aciers au nickel et leurs applications à l'horlogerie. Paris 1912. — Tätigkeitsbericht der Physikal.-Techn. Reichsanstalt vom Jahre 1913 u. 1914.
2) T. Yensen, a. a. O. — H. Arnold u. G. Elmen, Journ. Franklin Inst. **195**, 621, 1923. — H. Arnold, The Electrician **96**, 669, 672, 1923. — E. Crapper, Engineering 1924, S. 452. — D. Binnie, Journ. Roy. Techn. Coll. Glasgow 1925, Dez. — O. Buckley u. L. Mac Keehan, Phys. Rev. **26**, 261, 1925. — K. W. Wagner, a. a. O. — T. Yensen, Journ. Franklin Inst. **199**, 333, 1925. — Elektrot. Zeitschr. 1925, S. 1630. Elektrot. Anzeiger 1925, S. 331. — R. Forster, Physik. Zeitschr. **27**, 829, 1926. — H. Freese, Zeitschr. f. Hochfrequenztechnik **27**, 86, 1926. — W. Griffiths, a. a. O. — J. Gilbert, Bell System Techn. Journ. 1927, Heft 3. — L. Mac Keehan u. P. Cioffi, Phys. Rev. **28**, 146, 1926. — L. Mac Keehan, Phys. Rev. **28**, 158, 1928.
3) H. Freese, a. a. O. — W. Philips, The Electrician **98**, 92, 1927. — K. Edgcumbe u. F. Ockenden, Journ. Inst. Electr. Eng. **65**, 553, 1927.
4) K. W. Wagner, a. a. O.
5) Spooner, a. a. O.

Tabelle I.
Magnetische Aufnahme verschiedener Pupinspulen.

Feldstärke	Ringdrahtkern				Massekern				Querdraht-Kern	
	7) weicher Eisendraht		6) harter Stahldraht		4) mech. zerkl. Eisen		2) elektrolyt. Eisen		10) harter Stahldraht	
$\mathfrak{H}$ cgs	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ
0,5	57	125	39	78	26	52	20	40		
1,0	160	160	83	83	53	53	41	41	11	11,4
3,0	1170	390	306	102	165	55	129	43	34	11,5
5,0	3200	639	665	133	295	59	225	45	58	11,6
10	6240	624	3630	363	750	75	510	51	118	11,8
15	7140	483	6370	425	1500	100	840	56	180	12,0
20	7900	395	7700	385	2280	114	1200	60	241	12,0
40	8800	220	9520	238	4640	116	2720	65	470	11,8
60	9300	155	10260	171	6180	103	3780	63	695	11,6
80	9600	120			7200	90	4880	61		
60	9490				6650		4150			
40	9100		9980		5780		3510		499	
20	8520		9160		4500		2720		283	
15	8220		8820		4070		2180		227	
10	7750		8390		3550		1830		166	
5,0	7040		7730		2950		1480		107	
3,0	6620		7490		2690		1370		80	
1,0	6030		7140		2400		1240		58	
0,5	5850		7030		2340		1190		50	
0	5630		6900		2270		1130		44	
— 0,5	5380		6840		2200		1090		39	
— 1,0	5070		6760		2120		1050		32	
— 3,0	2600		6310		1770		880		10	
— 5,0	— 3100		5680		1400		720		— 28	
— 10	— 6200		— 990		360		— 40		— 102	
— 15	— 7200		— 5970		— 610		— 480		— 165	
— 20	— 7860		— 7610		— 1630		— 1000		— 230	
— 40	— 8800		— 9520		— 4610		— 2650		— 470	
— 60	— 9300		— 10260		— 6180		— 3780		— 695	
— 80	— 9600				— 7200		— 4880			

sind, werden in technischer Hinsicht derselben Aufgabe dienstbar gemacht, nämlich für die Verbesserung der Nachrichtenübermittelung auf weite Entfernungen.

Zur Erreichung dieses Zieles sucht man die Dämpfung der Leitung dadurch herabzusetzen, daß man der Leitung bzw. dem Kabel eine zusätzliche Selbstinduktion gibt in dem Maße, daß die Dämpfung bei Berücksichtigung des zusätzlichen Wirkwiderstandes der Selbstinduktion nahezu den günstigsten Wert erreicht. Zu diesem Zwecke wird nach den von Krarup aufgestellten Grundsätzen das Kabel mit einem dünnen Eisendraht oder -band aus magnetisch weichem Material umwickelt; dieses Verfahren[1]), für das gerade die Verwendung der hochpermeablen Legierungen ganz wesentliche Vorteile bietet, hat besonders im transozeanischen Kabelverkehr recht umfangreiche Verwendung gefunden. Auf ganz anderer Grundlage wird die erforderliche Erhöhung der Selbstinduktion in der Ausführung von Pupin erreicht. In die pupinisierten Leitungen und Kabel werden in regelmäßigen Abständen besondere eisenhaltige Induktionsspulen eingeschaltet, wofür sich in neuerer Zeit die sogenannten Massekerne sehr gut bewährt haben.

Welche Gesichtspunkte den Praktiker zu der umfangreichen Verwendung dieser Massekerne geführt haben, wurde von W. Ehlers[1]) in der untenbezeichneten Arbeit mit großer Offenheit dargelegt. Soweit aber bekannt, sind bisher Einzelheiten über die magnetischen Eigenschaften derartiger Ringkörper noch nicht veröffentlicht worden. Hierzu dürfte aber die folgende Auswahl aus recht umfangreichen Versuchsreihen um so geeigneter sein, als die Ergebnisse zugleich in gewisser Weise auch den Einfluß des verwendeten Materials für die betreffende Anordnung erkennen lassen.

Von den untersuchten Ringkörpern besaßen die Proben 7) und 6) einen kreisförmigen Querschnitt von 8,4 cm² bei 12 cm mittleren Durchmessers, die Proben 4) und 2) 7,6 cm² und 8,1 cm

1) Salinger, Arch. f. Elektrot. 12, 268, 1923. — K. W. Wagner, a. a. O. — J. Gilbert, a. a. O.

1) W. Ehlers, Zeitschr. techn. Phys. 1924, S. 589; AEG-Mitteilg. 1925, S. 240; Elektr. Nachr. Techn. 1925, S. 121.

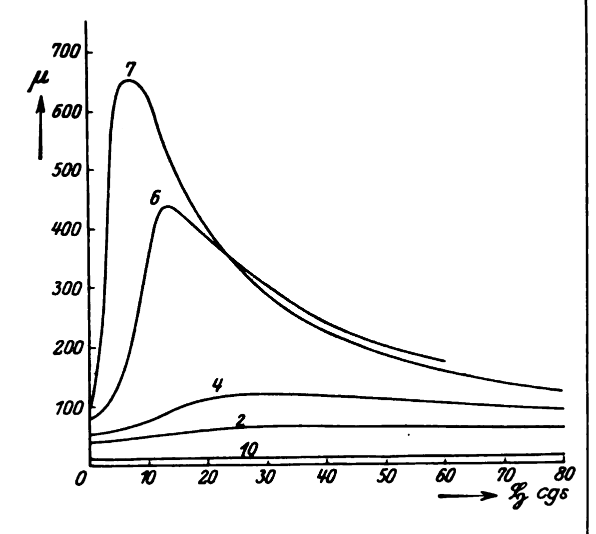


Tabelle II.

Wirksame Maximalpermeabilität von hochpermeablen Legierungen, Draht- und Massekernen.

Gruppe	Bezeichnung	Bestandteile	Größenordnung der maximalen Permeabilität
I.	Eisen—Nickel-Legierungen	*Ni, Fe,* [*Cu, Mn*]	$x \cdot 10^4$
II.	a) Elmen-Bronzen	*Ni, Co, Fe,* [*Mn*]	$x \cdot 10^3$
	b) Heusler-Bronzen	*Cu, Al, Mn*	$x \cdot 10^1 \div x \cdot 10^2$
III.	a) Ringdraht-Kerne	Eisen- und Stahldraht	$x \cdot 10^2$
	b) Masse-Kerne	Eisenpulver in isolierender Substanz	$x \cdot 10^1 \div x \cdot 10^2$
	c) Querdraht-Kerne	Eisen- und Stahldraht	$x \cdot 10^1$

und die Probe 10) 8,6 cm² und 17 cm. Die magnetische Aufnahme der Hystereseschleife geschah nach dem bekannten ballistischen Verfahren und zeitigte Werte, die im einzelnen aus der beigefügten Tabelle I zu entnehmen sind. Neben diesen Zahlenwerten veranschaulicht die in der Figur



gegebene zeichnerische Darstellung der wirksamen Permeabilität in augenfälliger Weise die großen Unterschiede, die zwischen den hier behandelten Pupinspulen bestehen.

Gehen wir nun zu den Ergebnissen im einzelnen über, so tritt zunächst bei den früher üblichen Ringdrahtkernen, bei denen der verwendete Eisendraht ringförmig in der Richtung der erzeugenden Feldlinien liegt, der Einfluß eines magnetisch weichen Materials ohne weiteres in die Erscheinung. Der Prüfkörper 7), der aus weichgeglühtem Eisendraht von 0,15 mm Durchmesser mit einem Kohlenstoffgehalt von 0,05 bis 0,1 Proz. besteht, weist im Gegensatz zu dem aus magnetisch hartem Material bestehendem Prüfkörper 6), für den harter Stahldraht gleicher Stärke mit einem Kohlenstoffgehalt bis zu 1 Proz. zur Verwendung kam, eine viel geringere Koerzitivkraft auf, daher auch eine höhere wirksame Maximalpermeabilität, die bei geringerer Feldstärke erreicht wird. Die Tatsache, daß sich die beiden Vergleichskörper auf Material derselben Stärke beziehen, macht den Vergleich noch offensichtlicher.

Die Werte der Maximalpermeabilität und auch der erreichbaren Sättigung liegen bei den Ringdrahtkernen noch verhältnismäßig hoch, da man es hier mit Körpern zu tun hat, bei denen der Eisenweg noch ein geschlossenes Ganzes bildet und daher der Einfluß der Streuung keine ausschlaggebende Rolle spielt. Herabsetzend auf die Größe der Sättigung wirkt lediglich der Umstand, daß nicht ein massiver Eisenring vorliegt, sondern der sogenannte Füllfaktor den tatsächlichen Anteil des Eisendrahtes zu dem in Rechnung gesetzten Ringquerschnitt bestimmt.

Wesentlich geringer fallen die magnetischen Eigenschaften der sogenannten Massekerne auf. Das Material dieser Körper besteht aus sehr fein verteiltem Eisenpulver, dessen Einzelteile mit einer dünnen isolierenden Schicht aus Harz oder Glas überzogen und dadurch der direkten Berührung entzogen sind. Unter Anwendung hohen Druckes[1]) wird diese Masse in die gewünschte Form gepreßt, die eine für diese Verhältnisse recht hohe innere Festigkeit besitzt. Weitere Einzelheiten über die Fertigung dieser Massekerne mögen aus der bereits erwähnten Veröffentlichung von W. Ehlers[2]) entnommen werden. In diesen Massekernen liegt nun ein geschlossener Eisenweg überhaupt nicht mehr vor; die Folge ist ein überwiegender Einfluß der Streuung auf die magnetischen Werte, die keine hohe Sättigung mehr erreichen läßt und dadurch auch die maxi-

1) W. Ehlers, Zeitschr. techn. Phys. 1924, S. 589; AEG-Mitteilg. 1925, S. 240; Elektrot. Nachr. Techn. 1925, S. 121.

2) W. Ehlers u. F. Falkenberg, Elektrot. Nachr. Techn. 1926, S. 281.

male Erregbarkeit auf ziemlich geringe Beträge herabsetzt. In der beigefügten Tabelle findet man eine Gegenüberstellung der magnetischen Werte solcher Massekörper bei Verwendung von mechanisch zerkleinertem Eisenpulver (Probekörper 4) und elektrolytisch niedergeschlagenem Eisen (Probe 2). Ein Vergleich der betreffenden Spalten dieser Tabelle läßt vom rein magnetischen Standpunkt aus betrachtet das etwas hochwertigere Verhalten des auf mechanischem Wege zerkleinerten Eisenpulvers erkennen. Will man hieraus einen Rückschluß auf die Formgebung der betreffenden Eisenteilchen zulassen, so nötigt die Auffassung über die Streuung zu der Ansicht, daß das elektrolytisch niedergeschlagene Eisen in kleineren Einzelteilchen zur Verarbeitung kommt als das auf mechanischem Wege zerkleinerte Eisenpulver.

Den günstigsten Fall in bezug auf die Streuung stellen nun ohne Zweifel die sogenannte Querdrahtkerne dar, bei denen der verwendete Eisendraht gewissermaßen in Form einzelner Stäbchen senkrecht zur erregenden Feldrichtung steht. Sowohl der oben erwähnte Füllfaktor wie auch der Entmagnetisierungsfaktor der im Verhältnis zu ihrem Durchmesser recht kurzen Stäbchen spielt hierbei die ausschlaggebende Rolle. Die erreichbare Sättigung ist nicht viel mehr als proportional der erregenden Feldstärke, die wirksame Permeabilität aber in dem untersuchten Gebiet mit großer Annäherung als konstant zu betrachten. Auf die Weise sind derartige Spulen geeignet, den Einfluß äußerer Felder unschädlich zu machen, da wesentliche Induktionsänderungen der Spulen vermieden werden.

Bei den durchgeführten Untersuchungen konnte ein Unterschied zwischen verschiedenem Drahtmaterial bei den Querdrahtkernen nicht mehr mit Sicherheit festgelegt werden und hat daher auch in der Tafel keinen Platz gefunden. Der Probekörper 10) bestand aus dem gleichen Drahtmaterial wie die Probe 6) mit einem Drahtdurchmesser von 0,1 mm.

Einen zusammenfassenden Überblick über die hier erwähnten Materialien gewährt die vorstehende Tabelle II, in der die einzelnen Gruppen der Größenordnung ihrer maximalen Erregbarkeit nach aufgeführt sind und x jedesmal einen einstelligen Beiwert bedeutet.

(Eingegangen 21. Mai 1928.)

Über eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität.

Von Kanae Hattori.

Übersicht.

Durch formale Erweiterung der kovarianten Ableitung wird ein Tensor, welcher die Maxwellsche Feldgleichung erfüllt, gefunden und mit dem elektromagnetischen Tensor identifiziert. Das Gesetz der mechanischen Wirkung des Elektromagnetismus usw. wird durch geeignete Variationsgleichungen abgeleitet. Die Form der Feldgleichung usw. ist von der gewöhnlichen etwas verschieden, doch wird sie durch geeignete Umformung auf die gewöhnliche gebracht.

Einleitung.

Die weitere Verallgemeinerung der heute allgemein als „allgemeine Relativitätstheorie“ bezeichneten Theorie ist heute noch nicht vollständig geleistet. Der schwierige Punkt des Problems liegt in dem Mangel der physikalischen Hypothese, welche zur Erweiterung der Theorie führt. In der Tat hat die Äquivalenzhypothese bei der Erweiterung von der beschränkten auf die allgemeine Theorie große Dienste geleistet. Da wir aber bei der weiteren Verallgemeinerung der Theorie, heute keine leitende physikalische Hypothese zur Hand haben, bleibt uns nichts anderes übrig, als die Methode der formalen Erweiterung. Die Richtung der Erweiterung ist daher nicht eindeutig bestimmt, und manche Theorien wurden auf verschiedenen Wegen durch H. Weyl[1]), A. Eddington[2]), A. Einstein[3]), E. Reichenbächer[4]) und Th. Kaluza[5]) entwickelt.

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem auf dem formalen aber etwas von den obigen Werken abweichendem Wege behandelt.

In dieser Arbeit wird angenommen, daß der physikalische Zustand eines Weltpunktes durch 16 Größen $h_{\lambda\mu}$ vollständig bestimmt wird, welche

1) H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **59**, 101, 1919.

2) A. S. Eddington, A Generalisation of Weyl's theory usw. Proc. Roy. soc. **99**, 104. 1921.

3) A. Einstein, Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Berliner Berichte 1925, S. 414—419.

4) E. Reichenbächer, Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und Gravitation. Ann. d. Phys. **52**, 134, 1917.

E. Reichenbächer, Eine neue Erklärung des Elektromagnetismus. Zeitschr. f. Phys. **13**, 221, 1923.

E. Reichenbächer, Die Mechanischen Gleichungen im elektromagnetischen Felde. Zeitschr. f. Phys. **33**, 916, 1925.

5) Th. Kaluza, Zum Unitätsproblem der Physik. Berliner Berichte 1921, S. 966.

sich bei der Koordinatentransformation wie ein Tensor verhalten. Hier bedeutet $g_{\lambda\mu}$ (der symmetrische Teil von $h_{\lambda\mu}$) wie gewöhnlich das Gravitationspotential, dagegen identifizieren wir $f_{\lambda\mu}$ (den antisymmetrischen Teil von $h_{\lambda\mu}$) nicht mit dem elektromagnetischen Tensor. In bezug auf den Tensor $f_{\lambda\mu}$ ist in dieser Theorie vorläufig nichts anderes vorausgesetzt, als daß er einen dynamischen Zustand (im Gegensatz zur Annahme, daß $g_{\lambda\mu}$ eine geometrische, kinematische Größe ist) darstellt.

Der Ausgangspunkt dieser Theorie ist eine formale Erweiterung der kovarianten Differentiation durch den Gebrauch von $h_{\lambda\mu}$ anstatt $g_{\lambda\mu}$. Durch die Anwendung dieser Differentiation wird ein Tensor $H^{\varepsilon}_{\lambda\mu\nu}$, sowie sein verjüngter Tensor $H_{\lambda\mu}$ gebildet. Die hier erweiterte kovariante Differentiation ist ein mathematisches Hilfsmittel für die Bildung neuer Welttensoren und keine geometrische Interpretation wird berücksichtigt.

Der antisymmetrische Teil von $H_{\lambda\mu}$ (mit $F_{\lambda\mu}$ bezeichnet) erfüllt ein Gleichungssystem, welches als erweiterte Maxwellsche Feldgleichung interpretiert wird, und diesen antisymmetrischen Teil haben wir aus diesem Grunde mit dem elektromagnetischen Tensor identifiziert. Die Form der Feldgleichung ist in dieser Theorie von der gewöhnlichen verschieden, doch kann sie durch geeignete Umformung auf die gewöhnliche Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke werden einige Sätze über antisymmetrische Tensoren aufgestellt. Der Materie-Energie-Tensor wird durch die Hamiltonsche Methode ($g_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable genommen) abgeleitet. In dieser Theorie ist es festgestellt, daß die Materie elektromagnetischen Ursprungs ist, und daher ist es nur künstlich, daß wir den Materie-Energie-Tensor in zwei Teile teilen. Aber wir haben ihn in die mechanischen und elektromagnetischen Teile geteilt, wie man dies gewöhnlich tut. Auf diese Weise wird die Eigenschaft des Materie-Energie-Tensors, divergenzfrei zu sein, als Gesetz der mechanischen Wirkung des Elektromagnetismus aufgefaßt.

Durch weitere Anwendung der Hamiltonschen Methode ($f_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable angenommen) wird eine Gleichung abgeleitet, welche elektromagnetische Tensoren miteinander verbindet. Dieses Ergebnis kann man nicht direkt durch das Experiment prüfen, aber dies wird erst nötig sein, wenn wir das Problem des Elektrons studieren.

1. Die verallgemeinerten Dreiindizessymbole und die verallgemeinerte kovariante Differentiation.

Wir erweitern das Dreiindizessymbol erster Art durch die Formel:

$$*[\lambda\mu,\nu] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}\right). \quad (1.1)$$

Sein Transformationsgesetz läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$*[\lambda\mu,\nu]' = *[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}. \quad (1.2)$$

was bewiesen werden kann:

Da

$$h'_{\nu\lambda} = h_{\gamma\alpha}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} \qquad h'_{\mu\nu} = h_{\beta\gamma}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu}$$

$$h'_{\mu\lambda} = h_{\beta\alpha}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}$$

sind, so haben wir

$$\frac{\partial h'_{\nu\lambda}}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial h_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial x'_\nu \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} + h_{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu}. \quad (1.3)$$

Nach zyklischer Vertauschung der Summationsbuchstaben α, β, γ in den letzten zwei Gliedern der rechten Seite:

$$\frac{\partial h'_{\nu\lambda}}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial h_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}.$$

In ähnlicher Weise haben wir:

$$\frac{\partial h'_{\mu\nu}}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\nu \partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \quad (1.4)$$

und

$$\frac{\partial h'_{\mu\lambda}}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\nu \partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}. \quad (1.5)$$

Aus (1,3), (1,4), (1,5) und (1,1) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
*[\lambda\mu,\nu]' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x_\gamma}\right)\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} \\
&+ h_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\right) \\
&= *[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} \\
&+ \tfrac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha})\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \\
&= *[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu},
\end{aligned}$$

da

$$\tfrac{1}{2}(h_{\alpha\beta}+h_{\beta\alpha})=g_{\alpha\beta}$$

ist.

Dann definieren wir das Dreiindizessymbol zweiter Art durch die Formel:

$$*\{\lambda\mu,\nu\}=g^{\varrho\nu}*[\lambda\mu,\varrho]\,. \qquad (1.6)$$

Unter Heranziehung obiger Relation wollen wir die verallgemeinerten kovarianten Ableitungen definieren. Aus (1,2) erhalten wir, indem wir die beiden Seiten mit $g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}$ multiplizieren.

$$*[\lambda\mu,\varrho]'g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g_{\alpha\beta}g'^{\varrho\nu}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}+*[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}g'^{\varrho\nu}\,.$$

Da

$$g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g^{\beta\varepsilon}\qquad g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g^{\gamma\varepsilon}$$

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\varepsilon}=g^{\varepsilon}_{\alpha}$$

sind, so bekommen wir mit Rücksicht auf (1,6)

$$*\{\lambda\mu,\nu\}'\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g^{\varepsilon}_{\alpha}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}+*\{\alpha\beta,\varepsilon\}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}$$

$$=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}+*\{\alpha\beta,\varepsilon\}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} \qquad (1.7)$$

Bezeichnet man nun irgendeinen kovarianten Vektor mit A_λ, so haben wir

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}A_\varepsilon+\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\varkappa}\,,$$

weil

$$A'_\lambda=\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda}A_\varepsilon$$

ist. Durch Änderung der Summationsbuchstaben in dem letzten Glied der rechten Seite, bekommen wir:

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}A_\varepsilon+\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\varkappa}\,.$$

Aus (1.7)

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\varkappa}-*\{\varrho\varkappa,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)+*\{\lambda\mu,\nu\}'A_\varepsilon\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}\,.$$

Daher gilt die Relation

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}-*\{\lambda\mu,\nu\}'A'_\nu=\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\varkappa}-*\{\varrho\varkappa,\varepsilon\}A_\varepsilon\right), \qquad (1.8)$$

wobei wir die Relation

$$A'_\nu=\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}A_\varepsilon$$

benutzten. Benutzen wir die Bezeichnung

$$*\nabla_\mu A_\lambda=\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}-*\{\lambda\mu,\nu\}A_\nu \qquad (1.9)$$

so erhalten wir aus (1,8)

$$*\nabla_\mu A'_\lambda=\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}*\nabla_\varkappa A_\varrho\,.$$

Daher ist $*\nabla_\mu A_\lambda$ ein Tensor, welcher als die verallgemeinerte kovariante Ableitung von A_λ bezeichnet wird. Man kann leicht beweisen, daß die verallgemeinerte kovariante Ableitung eines Tensors eine ähnliche Form wie die gewöhnliche kovariante Ableitung besitzt, zum Beispiel[1]):

$$*\nabla_\nu T_{\lambda\mu}=\frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-*\{\lambda\nu,\varrho\}T_{\varrho\mu}-*\{\mu\nu,\varrho\}T_{\lambda\varrho}\,. \qquad (1.10)$$

2. Der verallgemeinerte Riemann-Christoffelsche Tensor.

Bezeichnet man irgendeinen kovarianten Vektor mit A_λ, so bekommen wir aus (1.9) und (1.10):

$$*\nabla_\nu *\nabla_\mu A_\lambda=\frac{\partial *\nabla_\mu A_\lambda}{\partial x_\nu}-*\{\lambda\nu,\varrho\}*\nabla_\mu A_\varrho-*\{\mu\nu,\varrho\}*\nabla_\varrho A_\lambda\,. \qquad (2.1)$$

$$*\nabla_\nu *\nabla_\mu A_\lambda=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}-*\{\lambda\mu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\lambda\nu,\varrho\}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\mu}-*\{\varrho\mu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\mu\nu,\varrho\}*\nabla_\varrho A_\lambda\,.$$

Durch Vertauschung der Zeiger μ und ν erhalten wir:

$$*\nabla_\mu *\nabla_\nu A_\lambda=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}-*\{\lambda\nu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\lambda\mu,\varrho\}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\nu}-*\{\varrho\nu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\nu\mu,\varrho\}*\nabla_\varrho A_\lambda \qquad (2.2)$$

Aus (2.1) und (2.2) bekommen wir

$$(*\nabla_\nu *\nabla_\mu-*\nabla_\mu *\nabla_\nu)A_\lambda=-(*\{\mu\nu,\varrho\}-*\{\nu\mu,\varrho\})*\nabla_\varrho A_\lambda+\Big(*\{\lambda\nu,\varrho\}*\{\varrho\mu,\varepsilon\}-*\{\lambda\mu,\varrho\}*\{\varrho\nu,\varepsilon\}+\frac{\partial}{\partial x_\mu}*\{\lambda\nu,\varepsilon\}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}*\{\lambda\mu,\varepsilon\}\Big)A_\varepsilon\,. \qquad (2.3)$$

Nun wollen wir zeigen, daß der Koeffizient von A_ε in (2.3) ein Tensor ist. Betrachten wir zuerst $*\{\mu\nu,\varrho\}$, dann ergibt sich die folgende Relation durch Trennung von $h_{\lambda\mu}$ in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil[1]),

$$*\{\mu\nu,\varrho\}=g^{\varrho\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x_\varepsilon}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_\varepsilon}\right)\right],$$

1) Siehe Anhang.

wegen Antisymmetrie von $f_{\mu\nu}$, bekommen wir

$$\begin{aligned}{}^*\{\mu\nu,\varrho\} &= g^{\varrho\varepsilon}\left\{[\mu\nu,\varepsilon] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\varepsilon}+\frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial f_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}\right)\right\} \\ &= \{\mu\nu,\varrho\}+\tfrac{1}{2}f_{\mu\nu}{}^{\varrho},\end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei

$$f_{\mu\nu\varepsilon} = \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\varepsilon}+\frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial f_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}$$

und

$$f_{\mu\nu}{}^{\varrho} = g^{\varrho\varepsilon}f_{\mu\nu\varepsilon}$$

gesetzt werden. Aus (2.4) haben wir

$${}^*\{\mu\nu,\varrho\} - {}^*\{\nu\mu,\varrho\} = \tfrac{1}{2}(f_{\mu\nu}{}^{\varrho}-f_{\nu\mu}{}^{\varrho}) = f_{\mu\nu}{}^{\varrho}.$$

Da $f_{\mu\nu\varepsilon}$ ein Tensor ist, und $f_{\mu\nu}{}^{\varrho}$ folglich ein Tensor ist, so ist das erste Glied in der rechten Seite von (2.3) auch ein Tensor. Die linke Seite ist ein Tensor, und daher ist der Koeffizient von A_ε auch ein Tensor. Wir wollen ihn mit $H^{\varepsilon}_{\lambda\mu\nu}$ bezeichnen, das heißt:

$$\begin{aligned}H^{\varepsilon}_{\lambda\mu\nu} &= {}^*\{\lambda\nu,\varrho\}{}^*\{\varrho\mu,\varepsilon\} - {}^*\{\lambda\mu,\varrho\}{}^*\{\varrho\nu,\varepsilon\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}{}^*\{\lambda\nu,\varepsilon\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}{}^*\{\lambda\mu,\varepsilon\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Der verjüngte Riemann-Christoffelsche Tensor wird gebildet, indem man $\varepsilon=\nu$ in (2.5) setzt. Er wird mit $H_{\lambda\mu}$ bezeichnet, das heißt:

$$\begin{aligned}H_{\lambda\mu} &= {}^*\{\lambda\nu,\varrho\}{}^*\{\varrho\mu,\nu\} - {}^*\{\lambda\mu,\varrho\}{}^*\{\varrho\nu,\nu\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}{}^*\{\lambda\nu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}{}^*\{\lambda\mu,\nu\}\end{aligned} \tag{2.6}$$

ist[1]). Durch Trennung von $h_{\lambda\mu}$ in $g_{\lambda\mu}$ und $f_{\lambda\mu}$ bekommen wir nach (2.4)

$$\begin{aligned}H_{\lambda\mu} &= [\{\lambda\nu,\varrho\}+\tfrac{1}{2}f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}][\{\varrho\mu,\nu\}+\tfrac{1}{2}f_{\varrho\mu}{}^{\nu}] \\ &- [\{\lambda\mu,\varrho\}+\tfrac{1}{2}f_{\lambda\mu}{}^{\varrho}][\{\varrho\nu,\nu\}+\tfrac{1}{2}f_{\varrho\nu}{}^{\nu}] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}[\{\lambda\nu,\nu\}+\tfrac{1}{2}f_{\lambda\nu}{}^{\nu}] \\ &- \frac{\partial}{\partial x_\nu}[\{\lambda\mu,\nu\}+\tfrac{1}{2}f_{\lambda\mu}{}^{\nu}].\end{aligned}$$

Da wegen Antisymmetrie von $f_{\lambda\nu\varrho}$

$$f_{\lambda\nu}{}^{\nu} = g^{\varrho\nu}f_{\lambda\nu\varrho} = 0$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}H_{\lambda\mu} &= \{\lambda\nu,\varrho\}\{\varrho\mu,\nu\} - \{\lambda\mu,\varrho\}\{\varrho\nu,\nu\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\nu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\lambda\mu,\nu\} + \tfrac{1}{4}f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}f_{\varrho\mu}{}^{\nu} \\ &- \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}f_{\lambda\mu}{}^{\nu} + \{\varrho\nu,\nu\}f_{\lambda\mu}{}^{\varrho} - \{\lambda\nu,\varrho\}f_{\varrho\mu}{}^{\nu}\right. \\ &\left. - \{\varrho\mu,\nu\}f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}\right] = R_{\lambda\mu}+\tfrac{1}{4}K_{\lambda\mu}+\tfrac{1}{2}F_{\lambda\mu},\end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei

$$\begin{aligned}R_{\lambda\mu} &= \{\lambda\nu,\varrho\}\{\varrho\mu,\nu\} - \{\lambda\mu,\varrho\}\{\varrho\nu,\nu\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\nu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\lambda\mu,\nu\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$K_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}f_{\varrho\mu}{}^{\nu} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}F_{\lambda\mu} &= -\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}f_{\lambda\mu}{}^{\nu} + \{\varrho\nu,\nu\}f_{\lambda\mu}{}^{\varrho}\right. \\ &\left. - \{\lambda\nu,\varrho\}f_{\varrho\mu}{}^{\nu} - \{\varrho\mu,\nu\}f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}\right] \\ &= -\nabla_\nu f_{\lambda\mu}{}^{\nu}\end{aligned} \tag{2.10}$$

gesetzt, und mit ∇_ν die gewöhnlichen kovarianten Ableitungen bezeichnet werden.

3. Der elektromagnetische Tensor.

Da nach (2.10)

$$\begin{aligned}F^{\lambda\mu} &= g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}F_{\alpha\beta} = -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}\nabla_\nu f_{\alpha\beta}{}^{\nu} \\ &= -\nabla_\nu f^{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}f^{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu}\end{aligned}$$

ist, so bekommen wir wegen Antisymmetrie von $f^{\lambda\mu\nu}$ die folgende Relation

$$\begin{aligned}\nabla_\mu F^{\lambda\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}(\sqrt{-g}f^{\lambda\mu\nu}) = 0.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Setzen wir zunächst

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = F_{\lambda\mu\nu}, \tag{3.2}$$

so ist $F_{\lambda\mu\nu}$ ein vollständig antisymmetrischer Tensor, welcher nur vier unabhängige Komponenten besitzt. Der Tensor erfüllt die folgende Relation, welche nichts anderes als das Erhaltungsgesetz ist[1]).

$$-\frac{\partial F_{123}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{234}}{\partial x_1}-\frac{\partial F_{341}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{412}}{\partial x_3} = 0. \tag{3.3}$$

Im Falle der ebenen Raumzeit gehen die Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) in die elektromagnetischen Feldgleichungen der speziellen Relativitätstheorie über, wenn wir mit $F_{\lambda\mu}$ den elektromagnetischen Tensor und mit $F_{\lambda\mu\nu}$ die Tensoren der Strom-Ladungsdichte bezeichnen, wie wir später sehen werden. Überdies spielen diese Tensoren dieselbe Rolle wie die elektromagnetische Kraft und der elektrische Strom im Gesetz der mechanischen Wirkungen des elektromagnetischen Feldes, wie wir später beweisen werden. Aus obigem Grunde identifizieren wir $F_{\lambda\mu}$ und $F_{\lambda\mu\nu}$ bzw. mit dem elektromagnetischen und dem Tensor der elektrischen Stromladungsdichte,

1) $h_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}+f_{\lambda\mu}$.

1) Laue, Die Relativitätstheorie Bd. II, S. 84, 1921.

und interpretieren die Gleichungen (3.1) und (3.2) als Feldgleichungen. Der elektromagnetische Tensor ist in dieser Arbeit nicht aus dem Vektorpotential ableitbar, wie in der gewöhnlichen Theorie, sondern aus dem Tensorpotential $f_{\lambda\mu}$.

4. Das Wirkungsprinzip I.

Mit dem Tensor $H_{\lambda\mu}$ und dem Tensor $(g^{\lambda\mu} + \alpha^2 F^{\lambda\mu})$ bilden wir die folgende Invariante W, wobei α^2 eine Konstante ist:

$$W = (g^{\lambda\mu} + \alpha^2 F^{\lambda\mu}) H_{\lambda\mu} \tag{4.1}$$

nach (2.7)

$$= g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{4} g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}.$$

Nun wollen wir das Gravitationsgesetz, das Gesetz der mechanischen Wirkungen des elektromagnetischen Feldes und den Materie-Energie-Tensor durch die Annahme

$$\delta \int W \sqrt{-g}\, d\tau = 0 \text{ [1]} \tag{4.2}$$

ableiten, wobei $g_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable angenommen und festgesetzt wird, daß ihre Variation am Rande verschwindet. Nun wollen wir die Gleichung (4.2) gliedweise berechnen.

Zuerst betrachten wir das zweite Glied von (4.2)

$$\delta \int g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau = \int \{ K_{\lambda\mu} \delta (g^{\lambda\mu} \sqrt{-g}) + g^{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, \delta K_{\lambda\mu} \} d\tau. \tag{4.3}$$

Da

$$\delta \sqrt{-g} = \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \tag{4.a}$$

und

$$\delta g^{\lambda\mu} = - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \delta g_{\alpha\beta} \tag{4.b}$$

sind[2]), so haben wir

$$K_{\lambda\mu} \delta (g^{\lambda\mu} \sqrt{-g}) = \tfrac{1}{2} K_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta}$$

$$= -(K^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} K) \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta}, \tag{4.4}$$

wobei $K = g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu}$ gesetzt wird.

Aus (2.9) erhalten wir

$$\delta K_{\lambda\mu} = \delta (f_{\lambda\nu}{}^{\varrho} f_{\varrho\mu}{}^{\nu}) = \delta (g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\varkappa} f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa})$$
$$= (g^{\varrho\varepsilon} \delta g^{\nu\varkappa} + g^{\nu\varkappa} \delta g^{\varrho\varepsilon}) f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa}.$$

Nach (4b)

$$= -(g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} + g^{\nu\varkappa} g^{\varrho\alpha} g^{\varepsilon\beta}) f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta g_{\alpha\beta}.$$

Folglich ergibt sich die Relation

$$g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} = - g^{\lambda\mu} (g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} + g^{\nu\varkappa} g^{\varrho\alpha} g^{\varepsilon\beta}) f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta g_{\alpha\beta}$$
$$= -(g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} f_{\nu\lambda}{}^{\varrho} f_{\varrho\varkappa}{}^{\lambda} + g^{\varrho\alpha} g^{\varepsilon\beta} f_{\nu\varepsilon}{}^{\mu} f_{\varrho\mu}{}^{\nu}) \delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.5}$$

Nach Änderung der Summationsbuchstaben $(\varrho\varepsilon\mu\nu)$ in $(\nu\varkappa\lambda\varrho)$ in dem zweiten Glied der Klammer

$$g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} = -2 g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} f_{\nu\lambda}{}^{\varrho} f_{\varrho\varkappa}{}^{\lambda} \delta g_{\alpha\beta}$$

nach (2.9)

$$= -2 g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} K_{\nu\varkappa} \delta g_{\alpha\beta}$$
$$= -2 K^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}.$$

Aus den Gleichungen (4.3), (4.4), (4.5) erhalten wir

$$\tfrac{1}{4} \delta \int K \sqrt{-g}\, d\tau = -\tfrac{1}{4} \int (3 K^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} K) \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta}\, d\tau; \tag{4.6}$$

wir betrachten dann das dritte Glied von (4.2)

$$\delta \int F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau.$$

Das obige Glied läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\delta \int F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau = \int \delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g})\, d\tau$$
$$= \int \delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d\tau + \int g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \delta \sqrt{-g}\, d\tau$$
$$+ \int g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} \delta (F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{4.7}$$

Die rechte Seite der obigen Gleichung berechnen wir gliedweise.

Das erste Glied wird wie folgt berechnet:

$$\delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} = (g_{\lambda\alpha} \delta g_{\mu\beta} + g_{\mu\beta} \delta g_{\lambda\alpha}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta}.$$

Nach Vertauschung der Summationsbuchstaben $(\lambda\alpha)$ und $(\mu\beta)$ im zweiten Glied in der Klammer

$$\delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} = 2 g_{\lambda\alpha} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta}$$
$$= 2 g_{\lambda\varrho} F^{\lambda\alpha} F^{\varrho\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 2 F_{\varrho}{}^{\alpha} F^{\varrho\beta} \delta g_{\alpha\beta},$$

wobei die Summationszeiger (α, μ) in (ϱ, α) geändert werden. Folglich haben wir

$$\int \delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d\tau = 2 \int F_{\varrho}{}^{\alpha} F^{\varrho\beta} \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta}\, d\tau. \tag{4.8}$$

Das zweite Glied läßt sich nach einfacher Rechnung wie folgt schreiben:

$$\int g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \delta \sqrt{-g}\, d\tau = \frac{1}{2} \int g^{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{4.9}$$

Endlich wollen wir das dritte Glied berechnen. Nach der Definition von $F^{\alpha\beta}$ haben wir

$$\delta F^{\alpha\beta} = -\delta \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu}}{\partial x^{\nu}} \right)$$
$$= -\frac{\delta \sqrt{-g}}{g} \frac{\partial \sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \delta (\sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu})}{\partial x^{\nu}}$$
$$= \frac{\delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \delta (\sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu})}{\partial x_{\nu}} = -\frac{\delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \delta (\sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu})}{\partial x_{\nu}}. \tag{4.10}$$

---

1) $d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$.

2) Eddintgon, Mathematical theory of Relativity S. 74, 1923.

Wegen der Symmetrie von $g_{\lambda\alpha}$ erhalten wir

$$g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}) = 2g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}F^{\lambda\mu}\delta F^{\alpha\beta}$$
$$= 2F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta} \qquad (4.11)$$

Aus (4.10) und (4.11) erhalten wir

$$\int g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu})\sqrt{-g}\,d\tau = \qquad (4.12)$$
$$-2\int\left\{F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\delta\sqrt{-g} + F_{\alpha\beta}\frac{\partial\,\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})}{\partial x_\nu}\right\}d\tau.$$

Durch partielle Integration und nach (4a)

$$\int g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu})\sqrt{-g}\,d\tau =$$
$$-\int g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$+2\int\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})\,d\tau,$$

weil

$$\int\frac{\partial F_{\alpha\beta}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})}{\partial x_\nu}d\tau = 0$$

ist.

Nun wollen wir das zweite Glied der Gleichung (4.12) weiter reduzieren. Da

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}) = \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})$$
$$= \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})$$

ist, so haben wir

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}) \qquad (4.13)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}\right)\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})$$

nach Definition von $F_{\alpha\beta\nu}$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}) = \frac{1}{3}F_{\alpha\beta\nu}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}),$$

folglich

$$2\int\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})\,d\tau$$
$$= \frac{2}{3}\int F_{\alpha\beta\nu}\delta(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu})\,d\tau \qquad (4.14)$$
$$= \frac{2}{3}\int F_{\alpha\beta\nu}(f^{\alpha\beta\nu}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\delta f^{\alpha\beta\nu})\,d\tau$$
$$= \frac{1}{3}\int F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$+\frac{2}{3}\int F_{\alpha\beta\nu}\delta f^{\alpha\beta\nu}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Das zweite Glied obiger Gleichung kann man wie folgt berechnen. Da

$$\delta f^{\alpha\beta\nu} = \delta(g^{l\alpha}g^{m\beta}g^{n\nu}f_{lmn})$$
$$= (\delta g^{l\alpha}g^{m\beta}g^{n\nu} + g^{l\alpha}\delta g^{m\beta}g^{n\nu}$$
$$+ g^{l\alpha}g^{m\beta}\delta g^{n\nu})f_{lmn} \quad \text{ist,}$$

so erhält man

$$F_{\alpha\beta\nu}\delta f^{\alpha\beta\nu} = 3F_{\alpha\beta\nu}g^{m\beta}g^{n\nu}f_{lmn}\delta g^{l\alpha} \qquad (4.15)$$
$$= -3F_{\alpha\beta\nu}f_l{}^{\beta\nu}g^{li}g^{\alpha j}\delta g_{ij}.$$

Nach Änderung der Summationsbuchstaben

$$F_{\alpha\beta\nu}\delta f^{\alpha\beta\nu} = -3F_{\lambda\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$
$$= -3F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu}\delta g_{\alpha\beta}$$
$$= -\tfrac{3}{2}(F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu} + F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu})\delta g_{\alpha\beta}.$$

Nach (4.12), (1.14) und (4.15) ergibt sich

$$\int g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu})\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$= -\int g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau \qquad (4.16)$$
$$+\tfrac{1}{3}\int F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$-\int(F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu} + F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu})\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Aus den Gleichungen (4.7), (4.8), (4.9) und (4.16) bekommen wir endlich

$$\delta\int\tfrac{1}{2}\alpha^2F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = \int\alpha^2\{F_{\varrho}{}^{\alpha}F^{\varrho\beta}$$
$$-\tfrac{1}{4}g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{6}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu} \qquad (4.17)$$
$$-\tfrac{1}{2}(F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu} + F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu})\}\,\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Da aber nach einer bekannten Formel das zweite Glied von (4.2)

$$\delta\int g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$= -\int(R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)\,\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau\,[1]$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (4.2) und (4.6) die folgende:

$$\int\{-(R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)$$
$$-\alpha^2(M^{\alpha\beta} + E^{\alpha\beta})\}\,\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau = 0 \qquad (4.18)$$

wobei

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\alpha^2}(3K^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}K) - \tfrac{1}{6}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu}$$
$$+\tfrac{1}{2}(F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu} + F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu}) \qquad (4.19)$$

und

$$E^{\alpha\beta} = -F_{\varrho}{}^{\alpha}F^{\varrho\beta} + \tfrac{1}{4}g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} \qquad (4.20)$$

gesetzt wird.

Nach (4.18) bekommen wir endlich die folgende Relation, welche das Gravitationsgesetz darstellt[2])

$$R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = -\alpha^2T^{\alpha\beta},$$

wobei

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + E^{\alpha\beta}$$

gesetzt wird.

Der Tensor $T^{\alpha\beta}$ wird als der Materie-Energie-Tensor bezeichnet.

Nun wollen wir durch Divergenzbildung von T^{β}_{α} das Gesetz der mechanischen Wirkung des elektromagnetischen Feldes ableiten.

Da $R^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}g^{\beta}_{\alpha}R$ divergenzfrei ist[3]), so muß T^{β}_{α} auch divergenzfrei sein, daher gilt die folgende

---

1) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 139. 1923.

2) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 119.

3) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 115.

Relation:

$$\nabla_\beta T^\beta_\alpha = \nabla_\beta M^\beta_\alpha + \nabla_\beta E^\beta_\alpha = 0, \quad (4.21)$$

folglich

$$\nabla_\beta M^\beta_\alpha = -\nabla_\beta E^\beta_\alpha. \quad (4.22)$$

Die obige Gleichung stellt die Bewegungsgleichung dar, wenn wir unter M^β_α den mechanischen Energie-Tensor und unter E^β_α den elektromagnetischen Energie-Tensor verstehen[1]).

Nun wollen wir die Gleichung (4.22) weiter reduzieren. Nach (4.20) haben wir

$$\begin{aligned} -\nabla_\beta E^\beta_\alpha &= \nabla_\beta (F_{\varrho\alpha} F^{\varrho\beta} - \tfrac{1}{4} g^\beta_\alpha F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) \\ &= \nabla_\beta F_{\varrho\alpha} . F^{\varrho\beta} + F_{\varrho\alpha} \nabla_\beta F^{\varrho\beta} \\ &\quad - \tfrac{1}{4} g^\beta_\alpha (F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu} + \nabla_\beta F^{\lambda\mu} . F_{\lambda\mu}) \\ &= \nabla_\beta F_{\varrho\alpha} . F^{\varrho\beta} + F_{\varrho\alpha} \nabla_\beta F^{\varrho\beta} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} g^\beta_\alpha F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu} . \end{aligned}$$

Da nach (3.1) $\nabla_\beta F^{\varrho\beta} = 0$ ist, so erhalten wir nach Änderung der Summationsbuchstaben im ersten Gliede

$$\begin{aligned} -\nabla_\beta E^\beta_\alpha &= \tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\mu F_{\lambda\alpha} + \tfrac{1}{2} F^{\mu\lambda} \nabla_\lambda F_{\mu\alpha} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\alpha F_{\lambda\mu} \\ &= -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} (\nabla_\alpha F_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda F_{\mu\alpha} \\ &\quad + \nabla_\mu F_{\alpha\lambda}) \\ &= -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_{\alpha\lambda}}{\partial x_\mu} \right) \end{aligned}$$

nach (3.2)

$$= -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\alpha} .$$

Daraus erhalten wir die Gleichung

$$\nabla_\beta M^\beta_\alpha = -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\alpha} , \quad (4.23)$$

welche nichts anderes als die Bewegungsgleichung ist.

5. Das Wirkungsprinzip II.

Im vorigen Abschnitte haben wir die Relationen, welche zwischen symmetrischen Tensoren bestehen, bekommen. Damals haben wir $g_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable angenommen. Was können wir aus (4.2) gewinnen, wenn wir als unabhängige Variable $f_{\lambda\mu}$ annehmen? Dieses Problem wird in diesem Abschnitte behandelt.

Nach (4.1) und (4.2) haben wir

$$\delta \int (g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{4} g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) \sqrt{-g}\, d\tau = 0.$$

Da $f_{\lambda\mu}$ nicht in $R_{\lambda\mu}$ und in $\sqrt{-g}$ enthalten ist, so erhalten wir

$$\int \{\tfrac{1}{4} g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 \delta (F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu})\} \sqrt{-g}\, d\tau = 0. \quad (5.1)$$

1) Eddington Mathematical theory of Relativity S. 181.

Diese Gleichung wollen wir gliedweise berechnen. Aus (2.9) erhält man

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} &= g^{\lambda\mu} \delta (g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\varkappa} f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa}) \quad (5.2) \\ &= g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\varkappa} (\delta f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa} + f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa}). \end{aligned}$$

Nach Vertauschung der Summationszeiger $(\lambda, \nu, \varepsilon)$ und $(\varrho, \mu, \varkappa)$, haben wir

$$g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\varkappa} f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa} = g^{\varrho\nu} g^{\lambda\varkappa} g^{\mu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} .$$

Weiter nach der Vertauschung von (μ, ν) und $(\varkappa, \varepsilon)$

$$g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\varkappa} f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa} = g^{\varrho\varepsilon} g^{\lambda\mu} g^{\varkappa\nu} f_{\varrho\varkappa\mu} \delta f_{\lambda\varepsilon\nu} .$$

Wegen Antisymmetrie von $f_{\lambda\mu\nu}$

$$g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\varkappa} f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa} = g^{\varrho\varepsilon} g^{\lambda\mu} g^{\varkappa\nu} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} .$$

Mit obigem Resultate haben wir nach (5.2)

$$g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} = 2 g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\nu\varkappa} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} = 2 f^{\varepsilon\lambda\nu} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} .$$

Wegen Antisymmetrie von $f^{\varepsilon\lambda\nu}$

$$g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} = 2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} .$$

Diese Gleichung wollen wir weiter reduzieren. Nach der Definition von $f_{\lambda\nu\varepsilon}$ bekommen wir

$$2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} = 2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta \left(\frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\varepsilon} + \frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\varepsilon\lambda}}{\partial x_\nu} \right) \quad (5.3)$$

wegen vollständiger Antisymmetrie von $f^{\lambda\nu\varepsilon}$

$$2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} = 6 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta \left(\frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\varepsilon} \right) = 6 f^{\lambda\nu\varepsilon} \frac{\partial\, \delta f_{\lambda\nu}}{\partial x_\varepsilon} .$$

Aus (5.3) erhält man durch partielle Integration

$$\begin{aligned} &\int g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau \\ &= -6 \int \delta f_{\lambda\nu} . \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\sqrt{-g} f^{\lambda\nu\varepsilon}) d\tau \\ &= -6 \int \delta f_{\lambda\nu} . \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\sqrt{-g} f^{\lambda\nu\varepsilon}) \sqrt{-g}\, d\tau, \end{aligned}$$

weil das Flächenintegral verschwindet[1]).

Nach der Definition von $F^{\lambda\mu}$ haben wir

$$\int g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau = 6 \int F^{\lambda\nu} \delta f_{\lambda\nu} \sqrt{-g}\, d\tau. \quad (5.4)$$

Nun betrachten wir das zweite Glied der Gleichung (5.1).

Da

$$F^{\lambda\mu} \delta F_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu} \delta F^{\lambda\mu}\ ^{2)}$$

ist, so haben wir

$$\sqrt{-g}\, \delta (F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) = 2 F_{\lambda\mu} \delta F_{\lambda\mu} . \sqrt{-g} .$$

Nach der Definition von $F^{\lambda\mu}$

$$\begin{aligned} &\sqrt{-g}\, \delta (F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) \\ &= -2 F_{\lambda\mu} \delta \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} f^{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right\} \sqrt{-g} \\ &= -2 F_{\lambda\mu} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \delta f^{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu} . \end{aligned}$$

1) Da angenommen wird, daß $\delta f_{\lambda\nu}$ am Rande verschwinden.

2) $F^{\lambda\mu} \delta F_{\lambda\mu} = F_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \delta F_{\lambda\mu} = F_{\alpha\beta} \delta (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} F_{\lambda\mu}) = F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta}$.

Aus obiger Relation ergibt sich durch partielle Integration

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = 2\int\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}\,\delta f^{\lambda\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Wegen vollständiger Antisymmetrie von $f^{\lambda\mu\nu}$

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$=\frac{2}{3}\int\left(\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}\right)\delta f^{\lambda\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Nach Definition von $F_{\lambda\mu\nu}$ haben wir

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau=\tfrac{2}{3}\int F_{\lambda\mu\nu}\delta f^{\lambda\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau. \tag{5.5}$$

Weiter ist

$$\delta f^{\lambda\mu\nu}=g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}\,\delta f_{\alpha\beta\gamma}, \tag{5.6}$$

folglich nach der Definition von $f_{\alpha\beta\gamma}$

$$\delta f^{\lambda\mu\nu}=g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}\,\delta\left(\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial f_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\right).$$

Nach (5,5) und (5,6) erhalten wir

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$=\frac{2}{3}\int F_{\lambda\mu\nu}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}\left(\frac{\partial\,\delta f_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial\,\delta f_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\,\delta f_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\right)\sqrt{-g}\,d\tau. \tag{5.7}$$

Nach gleichzeitiger zyklischer Vertauschung von $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ und $(\lambda\,\mu\,\nu)$ in den letzten zwei Gliedern

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau=2\int F^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\,\delta f_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Weiter durch partielle Integration

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau=-2\int\delta f_{\alpha\beta}.\frac{\partial\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma}\,d\tau$$

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$=-2\int\delta f_{\alpha\beta}.\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$=-2\int\nabla_\gamma F^{\alpha\beta\gamma}.\delta f_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau,$$

weil das Flächenintegral verschwindet.

Aus (5.1), (5.4) und (5.7) ergibt sich endlich

$$\int\left(\tfrac{3}{2}F^{\alpha\beta}-\alpha^2\nabla_\gamma F^{\alpha\beta\gamma}\right)\delta f_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau=0.$$

Folglich entsteht die Relation

$$F^{\alpha\beta}=\tfrac{2}{3}\alpha^2\nabla_\gamma F^{\alpha\beta\gamma}. \tag{5.8}$$

Die obige Gleichung zeigt, daß sich die elektrische Ladung und der elektrische Strom überall verteilen, wo das elektromagnetische Feld existiert. Diese Gleichung verbindet $F^{\alpha\beta}$ und $F^{\alpha\beta\gamma}$ miteinander und kann daher als eine neue Feldgleichung angesehen werden.

Verbinden wir (3.2) und (5.8) so entsteht die Relation

$$\frac{2}{3}\alpha^2\left(\frac{\partial\nabla_\varepsilon F_{\alpha\beta}{}^\varepsilon}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial\nabla_\varepsilon F_{\beta\gamma}{}^\varepsilon}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\nabla_\varepsilon F_{\gamma\alpha}{}^\varepsilon}{\partial x_\beta}\right)=F_{\alpha\beta\gamma},$$

welche weiter auf die folgende Form gebracht werden kann,

$$\tfrac{2}{3}\alpha^2\left(\nabla_\gamma\nabla_\varepsilon F_{\alpha\beta}{}^\varepsilon+\nabla_\alpha\nabla_\varepsilon F_{\beta\gamma}{}^\varepsilon+\nabla_\beta\nabla_\varepsilon F_{\gamma\alpha}{}^\varepsilon\right)=F_{\alpha\beta\gamma}, \tag{5.9}$$

weil für beliebigen antisymmetrischen Tensor $A_{\alpha\beta}$ die Relation

$$\nabla_\gamma A_{\alpha\beta}+\nabla_\alpha A_{\beta\gamma}+\nabla_\beta A_{\gamma\alpha}=\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial A_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial A_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}$$

gilt.

Das obige Resultat besagt, daß die Verteilung der Elektrizität nicht beliebig sein kann, sondern nach (5.9) eingeschränkt wird. Nach der Definition von $F^{\alpha\beta}$ und aus (5.8) erhalten wir die folgende Relation

$$\nabla_\gamma\left(f^{\alpha\beta\gamma}+\tfrac{2}{3}\alpha^2F^{\alpha\beta\gamma}\right)=0.$$

Für das Bestehen obiger Gleichung ist es hinreichend, daß

$$f^{\alpha\beta\gamma}=-\tfrac{2}{3}\alpha^2F^{\alpha\beta\gamma} \tag{5.10}$$

ist. Wir beschränken uns im folgenden nur auf diesen Fall. Aus (4.19) und (5.10) bekommen wir das folgende Ergebnis.

$$M^{\alpha\beta}=\alpha^2\left\{\tfrac{1}{18}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\mu\nu}F^{\lambda\mu\nu}-\tfrac{1}{3}F^\alpha{}_{\mu\nu}F^{\beta\mu\nu}\right\}. \tag{5.11}$$

Daraus folgt

$$M=g_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}=-\tfrac{1}{9}\alpha^2F_{\lambda\mu\nu}F^{\lambda\mu\nu}. \tag{5.12}$$

Dies zeigt, daß die Materie ohne Elektrizität nicht gebildet werden kann.

6. Einige Sätze über antisymmetrische Tensoren.

Wir wollen einige Sätze in bezug auf die antisymmetrischen Tensoren aufstellen, um die elektromagnetischen Grundgleichungen auf andere Formen zu bringen.

Satz A: Sind $A_{\lambda\mu\nu}$ und $B^{\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrische Tensoren, und denken wir uns solche Komponenten für welche $(\lambda\,\mu\,\nu\,\xi)$ gerade bzw. ungerade ist (ξ ist der übrigbleibende Zeiger von $\lambda\,\mu\,\nu$), so transformieren sich die Größen $A_{\lambda\mu\nu}/\sqrt{-g}$ und $\sqrt{-g}\,B^{\lambda\mu\nu}$ bzw. wie kontra- und kovariante Vektoren, für die Transformationsgruppe, für welche $J>0$ ist.

Der Beweis ist wie folgt ausführbar. Da nach

dem Transformationsgesetz von $A_{\lambda\mu\nu}$

$$A'_{\lambda\mu\nu} = A_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} = \frac{1}{3!}A_{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} & \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} & \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda} \\ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} & \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} & \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\mu} \\ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} & \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} & \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} \end{vmatrix}$$

ist, so haben wir

$$a'^{\xi} = l^{\xi}_{\delta}\, a^{\delta}, \qquad (6.1)$$

wobei

$$\pm a'^{\xi} = A'_{\lambda\mu\nu}, \quad \pm a^{\delta} = A_{\alpha\beta\gamma}$$

obere Zeichen für die Fälle wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = gerade
untere Zeichen für die Fälle, wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = ungerade

$$l^{\xi}_{\delta} = \text{Unterdeterminante von } \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi} \text{ in } J$$

$$J = \frac{\partial(x_1x_2x_3x_4)}{\partial(x'_1x'_2x'_3x'_4)}$$

bezeichnet wird. Nun ist $dx_\delta = \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}\, dx'_\xi$ und wenn man das Gleichungssystem in bezug auf dx'_ξ aufgelöst, so haben wir

$$dx'_\xi = l^{\xi}_{\delta}\, dx\delta / J, \qquad (6.2)$$

andererseits ist aber $dx'_\xi = \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta} dx_\delta$, daraus folgt die Relation

$$l^{\xi}_{\delta} = J\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}. \qquad (6.3)$$

Da aber $J^2 g = g'$[1]) und folglich

$$J\sqrt{-g} = \sqrt{-g'} \quad \text{für} \quad J > 0 \qquad (6.4)$$

ist, so bekommen wir aus (6.1), (6.3), (6.4) die Relation

$$\mathfrak{A}'^{\xi} = \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}\mathfrak{A}^{\delta} \qquad (6.5)$$

wobei $\mathfrak{A}^{\xi} = a^{\xi}/\sqrt{-g}$ gesetzt wird.

Damit ist die eine Hälfte des Satzes bewiesen; die andere Hälfte läßt sich wie folgt nachweisen. Da

$$B'^{\lambda\mu\nu} = B^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma} = \frac{1}{3!}B^{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\beta} & \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\gamma} \\ \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} & \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\gamma} \\ \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} & \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma} \end{vmatrix}$$

1) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 109.

ist, erhalten wir die folgende Relation

$$b'_\xi = l'^{\delta}_{\xi}\, b_\delta, \qquad (6.6)$$

wobei

$$B'^{\lambda\mu\nu} = \pm b'_\xi, \quad B^{\alpha\beta\gamma} = \pm b_\delta,$$

obere Zeichen für die Fälle wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = gerade
untere Zeichen für die Fälle wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = ungerade

$$l'^{\delta}_{\xi} = \text{Unterdeterminante von } \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta} \text{ in } J'$$

$$J' = \frac{\partial(x'_1x'_2x'_3x'_4)}{(\partial x_1x_2x_3x_4)}$$

gesetzt wird.

Nun ist $dx'_\xi = \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta} dx_\delta$ und wenn wir die Gleichungen in bezug auf dx_δ auflösen, so bekommen wir

$$dx_\delta = l'^{\delta}_{\xi}\, dx'_\xi / J'.$$

Andererseits ist aber $dx_\delta = \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi} dx_\xi$, so ergibt sich

$$l'^{\delta}_{\xi} = J'\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}. \qquad (6.7)$$

Nach (6.6) entsteht daher die Relation

$$b'_\xi = b_\delta \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi} J'.$$

Da aber $g = J'^2 g'$ und folglich

$$\sqrt{-g} = J'\sqrt{-g'} \quad \text{für} \quad J' = \frac{1}{J} > 0 \qquad (6.8)$$

ist, so bekommen wir

$$\mathfrak{B}'_\xi = \mathfrak{B}_\delta \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}, \qquad (6.9)$$

wobei $\mathfrak{B}_\xi = \sqrt{-g}\, b_\xi$ gesetzt wird.

Zusatz: Seien $A_{\lambda\mu\nu}/\sqrt{-g} = \mathfrak{A}^{\xi}$ und $\sqrt{-g}\, A^{\lambda\mu\nu} = \mathfrak{A}_\xi$, so entsteht die Relation

$$\mathfrak{A}^{\xi} = -\overline{\mathfrak{A}}^{\xi} \; (= g^{\xi\delta}\overline{\mathfrak{A}}_\delta). \qquad (6.10)$$

Beweis:
Da

$$A_{\lambda\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}g_{\gamma\nu}A^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3!}A^{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} g_{\alpha\lambda} & g_{\alpha\mu} & g_{\alpha\nu} \\ g_{\beta\lambda} & g_{\beta\mu} & g_{\beta\nu} \\ g_{\gamma\lambda} & g_{\gamma\mu} & g_{\gamma\nu} \end{vmatrix}$$

ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{A}^{\xi} = -\frac{\Delta_{\delta\xi}}{g}\overline{\mathfrak{A}}_\delta = -g^{\delta\xi}\overline{\mathfrak{A}}_\delta = -\overline{\mathfrak{A}}^{\xi}$$

wobei $\Delta_{\xi\delta}$ = Unterdeterminante von $g_{\delta\xi}$ in g gesetzt wird.

Satz B. Ist $C_{\lambda\mu}$ ein antisymmetrischer Tensor, so transformieren sich die Größen $\sqrt{-g}\, C^{\lambda\mu}$ und

$C_{\lambda\mu}/\sqrt{-g}$ bzw. wie ko- und kontravariante Tensoren, für die Transformationsgruppe, für welche $J > 0$ ist.

Der Beweis lautet folgendermaßen.

Bezeichnen wir die ergänzende Unterdeterminante von

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_m}{\partial x'_{m'}} & \frac{\partial x_n}{\partial x'_{m'}} \\ \frac{\partial x_m}{\partial x'_{n'}} & \frac{\partial x_n}{\partial x'_{n'}} \end{vmatrix}$$

in J, mit $l^{mn}_{m'n'}$, und die ergänzende von

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'_{m'}}{\partial x_m} & \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial x'_{m'}}{\partial x_n} & \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

in J', mit $l'^{mn}_{m'n'}$ so haben wir nach einem Satze der Determinantentheorie sowie nach (6.3)

$$J \begin{vmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial x'_{p'}} & \frac{\partial x_q}{\partial x'_{p'}} \\ \frac{\partial x_p}{\partial x'_{q'}} & \frac{\partial x_q}{\partial x'_{q'}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l^{m'}_m & l^{m'}_n \\ l^{n'}_m & l^{n'}_n \end{vmatrix} = J^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_{m'}}{\partial x_m} & \frac{\partial x'_{m'}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_m} & \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Daher gilt die Relation

$$l^{mn}_{m'n'} = J l'^{pq}_{p'q'}, \qquad (6.11)$$

wobei $(m\,n\,p\,q)$, und $(m'\,n'\,p'\,q')$ die geraden Permutationen sind.

Nun haben wir nach (6.11)

$$f'_{\nu\xi} = C'^{\lambda\mu} = C^{\alpha\beta}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2!} f_{\gamma\delta}\, l'^{\gamma\delta}_{\lambda\mu}$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{1}{J} f_{\gamma\delta}\, l^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = \frac{1}{J} f_{\gamma\delta}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi} \qquad (6.12)$$

wobei $\pm f_{\gamma\delta} = C^{\alpha\beta}$ gesetzt wird[1]). Daraus folgt aus (6.4)

$$\mathfrak{F}'_{\nu\xi} = \mathfrak{F}_{\gamma\delta}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi} \qquad (6.13)$$

wobei $\mathfrak{F}_{\nu\xi} = \sqrt{-g}\, f_{\nu\xi}$ gesetzt wird, w. z. b. w.

In ähnlicher Weise haben wir

$$v'^{\nu\xi} = C'_{\lambda\mu} = C_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} = \frac{1}{2!} v^{\gamma\delta}\, l^{\gamma\delta}_{\nu\xi}$$

$$= \frac{1}{2!} J v^{\gamma\delta}\, l'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = J v^{\gamma\delta}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta},$$

wobei $\pm v^{\gamma\delta} = C_{\alpha\beta}$ gesetzt wird. Daher gilt die Relation mit der Bezeichnung

$$\mathfrak{B}^{\nu\xi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} v^{\nu\xi}$$

$$\mathfrak{B}^{\nu\xi} = \mathfrak{B}^{\gamma\delta}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}, \qquad (6.14)$$

1) Obere Zeichen für die Fälle wo $(\alpha\beta\gamma\delta)$ gerade ist, untere Zeichen für die Fälle, wo $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ungerade ist, und $(\lambda\mu\nu\xi)$ ist gerade.

Aus obigen Resultaten ergibt sich der folgende Zusatz:

$$\mathfrak{F}_{\nu\xi} = -\mathfrak{B}_{\nu\xi} = (g_{\gamma\nu}\, g_{\delta\xi}\, \mathfrak{B}^{\gamma\delta}).$$

Denn da

$$f_{\nu\xi} = C^{\lambda\mu} = g^{\lambda\alpha} g^{\mu\varkappa} C_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{g^2}\triangle_{\lambda\alpha}\triangle_{\mu\beta} C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!}\frac{1}{g^2}\, g \begin{vmatrix} g_{\nu\gamma} & g_{\nu\delta} \\ g_{\xi\gamma} & g_{\nu\delta} \end{vmatrix} v^{\gamma\delta}$$

ist, so entsteht die Relation

$$\mathfrak{F}_{\nu\xi} = \sqrt{-g}\, f_{\nu\xi}$$

$$= -\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} g_{\nu\gamma} & g_{\nu\delta} \\ g_{\xi\gamma} & g_{\xi\delta} \end{vmatrix} v^{\gamma\delta}/\sqrt{-g}$$

$$= -g_{\nu\gamma}\, g_{\xi\delta}\, \mathfrak{B}^{\gamma\delta} = -\mathfrak{B}_{\nu\xi}. \qquad (6.15)$$

7. Andere Form für die Grundgleichungen.

Obgleich die Grundgleichungen (3.1), (3.2), (3.3) und (4.22) von denen der gewöhnlichen Theorie verschieden erscheinen, kann man sie doch mit Hilfe der Sätze des vorigen Abschnittes auf die gewöhnliche Form bringen.

Wir betrachten zuerst die Gleichung (3.2). Nach den Sätzen A und B können wir sie auf die folgende Form bringen.

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\,\mathfrak{B}^{\nu\xi}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g}\,\mathfrak{B}^{\lambda\xi}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \sqrt{-g}\,\mathfrak{B}^{\mu\xi}}{\partial x_\mu},$$

$$= \sqrt{-g}\, S^\xi$$

wobei

$$\sqrt{-g}\,\mathfrak{B}^{\nu\xi} = F_{\lambda\mu}, \sqrt{-g}\, S^\xi = F_{\lambda\mu\nu}$$

(λ, μ, ν sind keine Summationsbuchstaben) gesetzt werden. Die obige wird durch den Gebrauch des Summationszeigers ε weiter vereinfacht wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}\,\mathfrak{B}^{\varepsilon\xi}}{\partial x_\varepsilon} = S^\xi$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}\,\mathfrak{F}^{\xi\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} = S^\xi, \qquad (7.1)$$

wo $\mathfrak{F}^{\xi\varepsilon} = \mathfrak{B}^{\varepsilon\xi}$ gesetzt wird.

Zunächst betrachten wir die Gleichung

$$F^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}\, f^{\lambda\mu\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon}.$$

Ist $(\lambda\,\mu\,\nu\,\xi)$ die gerade Permutation, so ist $(\lambda\,\mu\,\xi\,\nu)$ die ungerade, daher wenn $\sqrt{-g}\, f^{\lambda\mu\nu} = \varphi_\xi$ gesetzt wird, so muß $\sqrt{-g}\, f^{\lambda\mu\xi} = -\varphi_\nu$ sein. Setzt man ferner $\sqrt{-g}\, F^{\lambda\mu} = \mathfrak{F}_{\nu\xi}$, so geht die obige Gleichung in die folgende Form über.

$$\mathfrak{F}_{\nu\xi} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\xi} - \frac{\partial \varphi_\xi}{\partial x_\nu}. \qquad (7.2\text{a})$$

Daraus folgt die Relation

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (7.2\text{b})$$

Die Gleichung (3.3), welche das Erhaltungsgesetz der Elektrizität darstellt, geht durch einfache Rechnung in die folgende Form über:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}\,S^\xi}{\partial x_\xi} = \nabla_\xi S^\xi = 0 .$$

Nun betrachten wir die Bewegungsgleichung (4.22).

Da $F^{\lambda\mu} = \mathfrak{F}_{\nu\xi}/\sqrt{-g}$ und $F_{\lambda\mu\nu} = \sqrt{-g}\,S^\xi$ sind, so haben wir

$$\frac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\nu} = \mathfrak{F}_{\nu\xi} S^\xi .$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\nabla_\varepsilon M^\varepsilon_\nu = -\mathfrak{F}_{\nu\xi} S^\xi \quad \text{od.} \quad \nabla_\varepsilon M^{\nu\varepsilon} = -\mathfrak{F}^\nu{}_\xi S^\xi . \tag{7.3}$$

Der Tensor $f_{\lambda\mu\nu}$ erfüllt nach seiner Definition die folgende Relation:

$$-\frac{\partial f_{123}}{\partial x_4} + \frac{\partial f_{234}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{341}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{412}}{\partial x_3} = 0 ,$$

welche nach einfacher Rechnung in die folgende Form übergeht.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}\,\varphi^\xi}{\partial x_\xi} = \nabla_\xi \varphi^\xi = 0 .$$

Wenn die $g_{\lambda\mu}$ die konstanten Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

annehmen, gehen die Gleichungen (7.1), (7.2) und (7.3) in die folgende über

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{F}^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{14}}{\partial x_4} &= S^1 \\
\frac{\partial \mathfrak{F}^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{24}}{\partial x_4} &= S^2 \\
\frac{\partial \mathfrak{F}^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{34}}{\partial x_4} &= S^3 \\
\frac{\partial \mathfrak{F}^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{F}^{43}}{\partial x_3} &= S^4 .
\end{aligned} \tag{7.1'}$$

Oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + i$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho ,$$

wobei

$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{F}^{41} = F_{32}$, $\mathfrak{E}_y = \mathfrak{F}^{42} = F_{13}$, $\mathfrak{E}_z = \mathfrak{F}^{43} = F_{21}$

$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{F}^{23} = F_{14}$, $\mathfrak{H}_y = \mathfrak{F}^{31} = F_{24}$, $\mathfrak{H}_z = \mathfrak{F}^{12} = F_{34}$

$i_x = S^1 = F_{432}$, $i_y = S^2 = F_{413}$,

$i_z = S^3 = F_{421}$, $\varrho = S^4 = F_{123}$

sind.

$$\mathfrak{F}_{14} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{F}_{24} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_2}$$

$$\mathfrak{F}_{34} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_3}, \quad \mathfrak{F}_{23} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \tag{7.2'a}$$

$$\mathfrak{F}_{31} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}, \quad \mathfrak{F}_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$$

oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\psi^{1)}$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} ,$$

wobei

$\mathfrak{A}_x = -\varphi_1 = f^{423}$, $\mathfrak{A}_y = -\varphi_2 = f^{431}$,

$\mathfrak{A}_z = -\varphi_3 = f^{412}$, $\psi = \varphi_4 = f^{123}$

$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{F}_{14} = F^{23}$, $\mathfrak{E}_y = \mathfrak{F}_{24} = F^{31}$, $\mathfrak{E}_z = \mathfrak{F}_{34} = F^{12}$

$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{F}_{23} = F^{14}$, $\mathfrak{H}_y = \mathfrak{F}_{31} = F^{24}$, $\mathfrak{H}_z = \mathfrak{F}_{12} = F^{34}$

sind.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{F}_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{31}}{\partial x_2} &= 0 \\
\frac{\partial \mathfrak{F}_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{42}}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial \mathfrak{F}_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{31}}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{14}}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial \mathfrak{F}_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{24}}{\partial x_1} &= 0
\end{aligned} \tag{7.2'b}$$

oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{14}}{\partial x_4} &= \mathfrak{F}^{12} S^2 + \mathfrak{F}^{13} S^3 - \mathfrak{F}^{14} S^{4\,2)} \\
\frac{\partial M^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{24}}{\partial x_4} &= \mathfrak{F}^{21} S^1 + \mathfrak{F}^{23} S^3 - \mathfrak{F}^{24} S^4 \\
\frac{\partial M^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{34}}{\partial x_4} &= \mathfrak{F}^{31} S^1 + \mathfrak{F}^{32} S^2 - \mathfrak{F}^{34} S^4 \\
\frac{\partial M^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{44}}{\partial x_4} &= \mathfrak{F}^{41} S^1 + \mathfrak{F}^{42} S^2 + \mathfrak{F}^{43} S^3 .
\end{aligned} \tag{7.3'}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
P^1 &= \mathfrak{F}^{12} S^2 + \mathfrak{F}^{13} S^3 - \mathfrak{F}^{14} S^4 \\
P^2 &= \mathfrak{F}^{21} S^1 + \mathfrak{F}^{23} S^3 - \mathfrak{F}^{24} S^4 \\
P^3 &= \mathfrak{F}^{31} S^1 + \mathfrak{F}^{32} S^2 - \mathfrak{F}^{34} S^4 \\
P^4 &= \mathfrak{F}^{41} S^1 + \mathfrak{F}^{42} S^2 + \mathfrak{F}^{43} S^3
\end{aligned}$$

wobei: P^λ = Vierer Kraft

---

1) ψ ist ein skalares Potential.

2) $F^1{}_2 = g_{22} F^{12} = -F^{12}$ usw.
$F^1{}_4 = g_{44} F^{14} = F^{14}$ usw.

oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$\mathfrak{K} = \varphi \mathfrak{E} + [\mathfrak{i}\mathfrak{H}]$ $\mathfrak{K}$ = Kraftdichte

$W = (\mathfrak{i}\mathfrak{E})$ W = Leistung der Kraftdichte.

Anhang.

Mit Hilfe der Gleichung (1.9) kann man die verallgemeinerte Ableitung eines kovarianten Tensors zweiten Ranges definieren. Da jeder kovariante Tensor zweiten Ranges sich als Summe von Tensoren vom Typus $A_\lambda B_\mu$ darstellen läßt, so wird es genügen, den Ausdruck der Ableitung für einen solchen speziellen Tensor abzuleiten. Nach (1.9) sind die Ausdrücke

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} - *\{\lambda\,\nu, \sigma\}\, A_\sigma$$

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - *\{\mu\,\nu, \sigma\}\, B_\sigma$$

Tensoren. Durch äußere Multiplikation des ersten mit B_μ, des zweiten mit A_λ erhält man je einen Tensor dritten Ranges, deren Addition den folgenden Tensor dritten Ranges ergibt

$$*\triangle_\nu (A_\lambda B_\mu) = \frac{\partial (A_\lambda B_\mu)}{\partial x_\nu} - *\{\lambda\,\nu, \sigma\}\, A_\sigma B_\mu - *\{\mu\,\nu, \sigma\}\, A_\lambda B_\sigma\,.$$

Daraus folgt, daß

$$*\nabla_\nu T_{\lambda\mu} = \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} - *\{\lambda\,\nu, \sigma\}\, T_{\sigma\mu} - *\{\mu\,\nu, \sigma\}\, T_{\lambda\sigma}$$

ein Tensor ist, welcher als verallgemeinerte kovariante Ableitung von $T_{\lambda\mu}$ bezeichnet wird.

Zum Schluß spreche ich den Herren Professoren Iwao Kobayashi, Tadahiko Kubota und Mituo Yamada für ihre wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aus.

Sendai, Physikalisches Institut der Tohoku Universität.

(Eingegangen 21. Oktober 1927.)

Messung der Lebensdauer metastabiler *Hg*-Atome.

Von T. Asada, R. Ladenburg und W. Tietze.

(Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem.)

Bei allen bisherigen Messungen der Lebensdauer metastabiler Atome werden die Atome elektrisch angeregt[1]); daher unterliegen diese Messungen mehr oder weniger dem Einwand, daß zugleich Ionen von relativ großer Lebensdauer entstehen und daß die nach einer gewissen „Schonzeit" nachgewiesenen metastabilen Atome wenigstens z. T. aus den Ionen nachgeliefert werden, ohne die Schonzeit überlebt zu haben[2]).

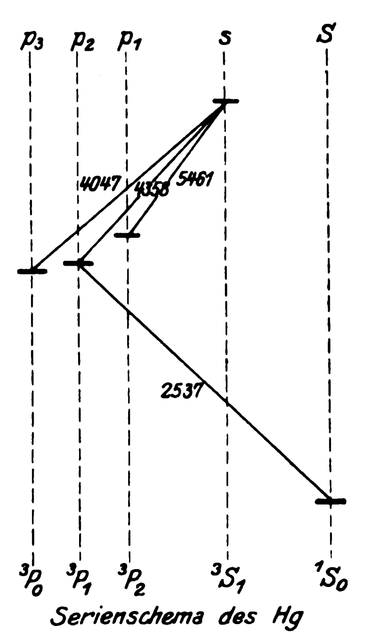


Fig. 1.

Dieser Einwand kommt nur bei sauberer optischer Anregung nicht in Betracht[3]). Diese ist grundsätzlich möglich bei der von Füchtbauer entdeckten stufenweisen Anregung des *Hg*; hier werden bekanntlich die instabilen $^3P_1$-Atome durch die ultraviolette Resonanzlinie 2537 geschaffen, und diese angeregten oder die aus ihnen durch Zusammenstöße gebildeten benachbarten metastabilen $^3P_0$- und $^3P_2$-Atome werden nunmehr z. B. durch die sichtbare Linie 4358 bzw. durch 4047 bzw. durch 5461 zur Fluoreszenz angeregt; und zwar entsteht durch Absorption einer dieser drei Linien der höhere 2^3S_1-Zustand, der spontan unter Emission jeder dieser drei Linien zerfallen kann (s. Serienschema). Bisher schien

1) Vgl. F. M. Kannenstine, Astroph. J. **55**, 343, 1922; **59**, 133, 1924; H. W. Webb, Phys. Rev. **21**, 719, 1923; L. C. Hayner, ebenda **26**, 364, 1925; K. W. Meißner, Ann. d. Phys. **76**, 124, 1925; Physik. Zeitschr. **26**, 687, 1925; K. B. Dorzelo, Physica **5**, 429, 1925; Zeitschr. f. Phys. **34**, 766, 1925; M. W. Zemansky, Phys. Rev. **29**, 513, 1927.

2) Vgl. C. Eckardt, Phys. Rev. **26**, 454, 1925; M. L. Pool, Phys. Rev. **30**, 848, 1927.

3) Bei den neuen Versuchen von Meißner u. W. Graffunder (Ann. d. Phys. **84**, 1009, 1927) ist dieser Einwand wahrscheinlich auch nicht berechtigt, da bei ihnen mit Sicherheit kein „Nachleuchten" eintrat.

allerdings die stufenweise Anregung zu wenig ergiebig, um Lebensdauermessungen auszuführen. Gelegentlich einer Doktorarbeit des einen von uns (W. T.) über den Absorptionskoeffizienten des *Hg* für die Resonanzlinie 2537 zeigte sich jedoch, daß man bei Stickstoffzusatz nach Woods Vorschrift und bei geeigneter Anordnung die Linien der stufenweise erregten Fluoreszenz weit von der erregenden *Hg*-Lampe entfernten Resonanzgefäßes z. T. in $^1/_5$ Sek. photographieren kann und daß eine einwandfreie Lebensdauermessung mit rotierender Scheibe möglich ist. Die Scheibe wird dabei unter 45^0 zum erregenden

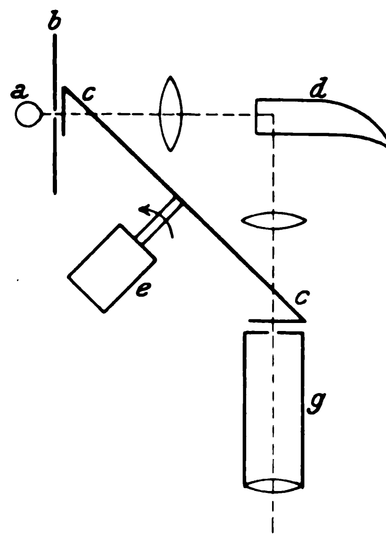


Fig. 2.

Versuchsanordnung.

a *Hg*-Lampe
b Blende
c—c rotierende Scheibe
d Fluoreszenzkammer
e Motor
g Kollimator

Strahlenbündel aufgestellt und durchschneidet gleichzeitig das erregende Licht und das senkrecht dazu aus der Fluoreszenzkammer austretende Fluoreszenzlicht (vgl. den Strahlengang in der Figur 2). Durch enge Öffnungen in der Scheibe (vgl. Fig. 3) wird der *Hg*-Dampf der Fluoreszenzkammer *d* zunächst mit dem gesamten Licht einer *Hg*-Lampe beleuchtet und dann nach einer Dunkelzeit von etwa 10^{-4} Sek. durch ein Violettfilter hindurch nur mit den Linien 4047 und 4358 bestrahlt. Hierdurch werden die aus $^3P_1$ durch Zusammenstöße gebildeten metastabilen $^3P_0$-Atome, die die Dunkelzeit überlebt haben, angeregt und das von ihnen ausgesandte Fluoreszenzlicht wird gleichzeitig mit der Einstrahlung der violetten Linie durch ein Grünfilter hindurch photographiert (oder anderweitig gemessen), das nur die Linie 5461 durchläßt. Durch diese Anordnung und einige andere einfache Hilfsmittel gelingt es, jegliches störende falsche Licht vollständig fernzuhalten. Daher ist die relative Intensität der so aufgenommenen Linie 5461 ein Maß der Lebensdauer der metastabilen $^3P_0$-Atome. Die bisherigen Messungen ergaben für diese Lebensdauer bei Zusatz von einigen mm Stickstoff einen Wert von etwa $15 \cdot 10^{-4}$ Sek. Es scheint möglich, auf diese Weise die Abhängigkeit der Lebensdauer von äußeren Einflüssen zu untersuchen und die von Foote neulich angestellten diesbezüglichen Überlegungen zu prüfen[1]); vielleicht läßt sich auch die in letzter Zeit verschiedentlich aufgeworfene Frage entscheiden, ob man die Lebensdauer der durch

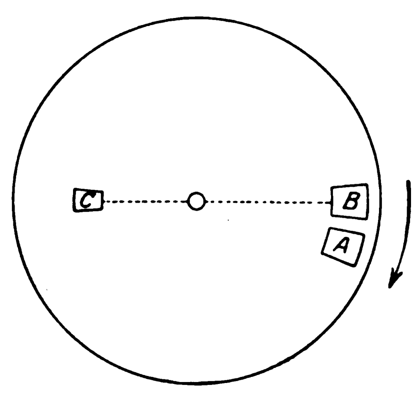


Fig. 3.

Rotierende Scheibe (schematisch).

A Offen
B Fenster mit Blaufilter
C Fenster mit Grünfilter

Wandstöße vernichteten metastabilen Atome durch Zusatz indifferenter Edelgase vergrößern kann, indem infolge der Zusammenstöße mit den Edelgasatomen der Weg der metastabilen Atome zur Wand und dadurch ihr „Leben" verlängert wird. Die Versuche werden auch auf andere metastabilen Atome ausgedehnt.

Dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik sei auch an dieser Stelle für die Gewährung von Mitteln zur Anschaffung eines lichtstarken Spektrographen bestens gedankt.

1) P. D. Foote, Phys. Rev. **30**, 288, 1927.

(Eingegangen 12. Juni 1928.)

BESPRECHUNGEN.

L. Gay, Les mathématiques du chimiste. Gr. 8⁰. VII und 208 S. Mit 63 Fig. Paris, Librairie scientifique J. Hermann, 1926. M. 3.50 (i. J. 1926).

Wie bei uns, so scheint erst recht in Frankreich die Aufgabe besonders dringlich zu sein, dem Chemiestudierenden ein Lehrbuch der Mathematik für seine Zwecke in die Hand zu geben. Das Mißtrauen, mit dem der Durchschnittschemiker vielfach noch der physikalischen Chemie begegnet, beruht ausschließlich auf ihrer ihm unsympathischen mathematischen Sprache. Das Buch befolgt ungefähr die Linie unseres „Nernst-Schönfließ", d. h. unter Verzicht auf eine für den Nichtmathematiker übertriebene Gründlichkeit der Beweise wird mehr Wert auf begriffliches Verständnis und auf zahlenmäßige Anwendungen gelegt. Das letztere erscheint besonders verdienstvoll, denn gerade in der Übertragung der abstrakten Schulmathematik auf konkrete Begriffe liegen erfahrungsgemäß für den jungen Chemiker die Schwierigkeiten. Alles, was in der Chemie keine Rolle spielt, wird weggelassen; vorausgesetzt werden Kenntnisse über Gleichungssysteme ersten Grades und über die einfache quadratische Gleichung. Der Inhalt ist: Potenzen und Wurzeln. Logarithmen. Funktionen einer Variabeln. Funktionen mehrerer Variabeln. Differentiale. Ableitungen von Funktionen einer Variabeln. Ableitungen von Funktionen mehrerer Variabeln. Integrale von Funktionen einer Variabeln. Integrale von Differentialen, die von mehreren Variabeln abhängen.

Die Darstellungsweise hält die Mitte zwischen dem volkstümlichen Tone von Thomson und nüchterner Wissenschaftlichkeit. Wer das Französische genügend beherrscht, um Nutzen von dem Buch zu haben, sei auf dasselbe aufmerksam gemacht.

G.-M. Schwab.

Alfred Schmid, Die Diffusionsgaselektrode. Gr. 8⁰. 57 S. Mit 17 Abb. Stuttgart, F. Enke. 1923.

Auf Grund von Studien über Sorptions- und Diffusionsvorgänge von Wasserstoff in Platinelektroden wird eine neue Diffusionsgaselektrode konstruiert, bei der durch metallisches, aber poröses Platin auf einer Kohleunterlage das Gas vom Innern der Elektrode an die Oberfläche diffundiert und sich dort elektromotorisch betätigt. Das Verhalten solcher Elektroden wird nach verschiedenen Methoden beobachtet und in einer Chlor-Wasserstoffkette studiert.

Eine hübsche experimentelle Arbeit — nur schade, daß der Verf. später (s. Besprechung von A. Schmid: „Die kinetische Katalyse" in Physik. Zeitschr. **28**) eine falsche Theorie der Katalyse auf seine Versuche aufbaut. G.-M. Schwab.

A. Eucken und R. Suhrmann, Physikalisch-chemische Praktikumsaufgaben. Gr. 8⁰. X u. 240 S. Mit 103 Fig. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft m. b. H. 1928. M. 13.—, geb. M. 14.—.

Dieses Buch bringt eine Sammlung von 97 Praktikumsaufgaben aus allen Gebieten der physikalischen Chemie, gegliedert in I. Grundlegende physikalische Meßmethoden, II. Physikalisch-chemische Analyse und III. Bestimmung physikalisch-chemischer Konstanten. Der jeder Aufgabe vorausgeschickte Abschnitt „Grundlagen" erläutert in Kürze die jeweils benutzten Gesetze und Formeln und schlägt somit eine Brücke vom Lehrbuch zur reinen Arbeitsvorschrift. Die klare Darstellung der Versuchsanordnung und -ausführung wird durch zahlreiche Figuren unterstützt. Neben den älteren allgemein gebräuchlichen Praktikumsaufgaben enthält das Werk eine Fülle moderner Meßmethoden: Interferometrische, spektrographische und potentiometrische Messungen, Bestimmungen von Konstanten der Atomphysik (el. Elementarquantum u. e/m).

Das Buch wird sowohl in der Hand des Hochschullehrers, der aus der Menge des Stoffes eine weise Auswahl zu treffen hat, als auch in der des Studierenden ein wertvolles Hilfsmittel für den physikalisch-chemischen Unterricht sein.

Druck und Figuren sind vom Verlag mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

Dr. E. Schwamberger.

P. Pascal, Synthèses et Catalyses Industrielles. Fabrications Minérales. 8⁰. 449 S. Paris, J. Hermann. 1925.

Der Inhalt dieses Buches ist wesentlich spezieller als sein Titel erwarten läßt. Es werden behandelt: Das Stickstoffproblem, die Schwefelsäureindustrie und die Industrie des Chlors und der Salzsäure.

Wie der Verfasser im Vorwort erwähnt, stellt das Buch den fast unveränderten Abdruck von Vorlesungen dar, die er in den Jahren 1919 und 1922 an der Universität Lille gehalten hat. Dies mag die Tatsache erklären, daß der Inhalt noch teilweise unter dem Einfluß der Kriegsstimmung steht, was besonders deutlich bei der Besprechung des Stickstoffproblems zum Ausdruck kommt.

Von solchen Stellen, die hoffentlich in einer neuen Auflage nicht mehr zu finden sein werden, abgesehen, handelt es sich um eine ausführliche, sachgemäße und moderne Besprechung der heute im Vordergrunde des Interesses stehenden Prozesse zur Darstellung der genannten Stoffe. H. v. Halban.

W. Tafel, Wärme und Wärmewirtschaft der Kraft- und Feuerungs-Anlagen in der Industrie mit besonderer Berücksichtigung der Eisen-, Papier- und chemischen Industrie. 8⁰. XII u. 363 S. Mit 123 Abb. u. 2 Zahlentafeln. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1924. Geh. M. 9.50, geb. M. 11.—.

In dem vorliegenden Buch macht der Verfasser den Versuch, die Wärmewirtschaft der Kraft- und Feuerungsanlagen für Leser darzustellen, die mit technischen Anlagen zu tun haben, ohne selbst Maschineningenieure zu sein, also vor allem für in der Industrie beschäftigte Chemiker, Physiker usw.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß für eine solche Darstellung ein starkes und immer noch wachsendes Bedürfnis besteht. Denn Chemiker, Physiker und besonders auch Hüttenleute kommen häufig in die Lage, sich ein Urteil über Kraft- und

Wärmeanlagen bilden, und z. B. zwischen verschiedenen Vorschlägen entscheiden zu müssen. Daß hier Kraft- und Feuerungsanlagen gemeinsam behandelt werden, ist neu und bietet deutliche Vorteile.

Der Inhalt des Buches zerfällt in je einen Abschnitt über Kraftanlagen, Feuerungsanlagen und Anwendungen auf einige Sonderindustrien. In diesem letzten Abschnitt werden die eigentliche Hüttenindustrie und die chemische Industrie, mit besonderer Berücksichtigung der Papierindustrie, ausführlich, andere Industriezweige kürzer behandelt. Ein Anhang bringt wertvolle Zahlentafeln.

Der Verfasser hat es verstanden, durch Weglassung unnötiger Einzelheiten und scharfes Herausarbeiten der wichtigsten Gesichtspunkte ein sehr klares und übersichtliches Bild der behandelten Fragen zu geben.

Das Buch kann allen, die sich mit Wärmewirtschaftsfragen beschäftigen müssen, entschieden empfohlen werden. H. v. Halban.

L. de Broglie, Untersuchungen zur Quantentheorie. Übersetzt von Dr. W. Becker. Gr. 8⁰. 88 S. Mit 6 Fig. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1927. M. 5.80.

Der deutsche Leser wird es mit Freude begrüßen, die berühmt gewordenen, aber nicht immer leicht zugänglichen de Broglieschen Untersuchungen nun in flüssiger deutscher Übersetzung vorzufinden. Als Einführung in die moderne Quantentheorie, insbesondere in die Gedankenwelt Schrödingers, dürfte kaum etwas Geeigneteres zu empfehlen sein, als das Lesen der de Broglieschen Originalarbeiten. Die Ausführungen sind durchweg von mustergültiger Klarheit und Verständlichkeit. Hervorzuheben ist die besonders schön gelungene Darstellung der Quantenbedingungen in der von Einstein gegebenen invarianten Formulierung, ihre Spezialisierung für den Fall quasiperiodischer Bahnen und ihre frappierend einfache Interpretation als Resonanzbedingung der Phasenwelle. Lanczos.

N. R. Campbell, Théorie quantiques des spectres. La relativité. Übersetzt von A. Corvisy. 237 S. Paris, J. Hermann. 1924. 18 Fr.

Das Buch stellt einen Ergänzungsband dar zu dem Werk des Verf. über die moderne Elektrizitätslehre. Der erste Teil bringt die Bohrsche Theorie der Spektren in klarer übersichtlicher Darstellung. Trotzdem auf leichte Verständlichkeit Wert gelegt ist, schreckt der Verf. vor schwierigeren mathematischen Entwicklungen wie der Theorie der bedingtperiodischen Systeme und ihrer Anwendung auf den Stark-Effekt nicht zurück. Allerdings ist vielfach nur der Gang der Rechnung angegeben. Dem Erscheinungsjahr entsprechend fehlen naturgemäß die großen Fortschritte der Atomtheorie, die in den letzten Jahren erzielt wurden, doch behält das Buch als klare Einführung in die Bohrsche Theorie seinen Wert.

Im zweiten Teil wird eine schöne Darstellung der Grundlehren der Relativitätstheorie gegeben. Es wird weniger Wert auf die Vollständigkeit der mathematischen Entwicklung als auf die Überzeugungskraft der Gedankengänge gelegt, doch findet sich z. B. noch die Tensordarstellung der allgemeinen R.T. Die in vielen Punkten originellen Ausführungen sind fesselnd geschrieben. Joos.

J. Plassmann, Himmelsalmanach für das Schaltjahr 1928. 8⁰. 66 S. Mit einer Zeichnung der Mondform Helicon von Ph. Fauth, einer Sonnenfinsterniskarte sowie Tafeln für die Monde der Planeten. Berlin u. Bonn, Ferd. Dümmler 1928. Kart. M. 3.50.

Das kleine Jahrbuch ist für Liebhaberastronomen und Schulen bestimmt und dürfte sich in seiner geschickten Zusammenstellung als recht brauchbar erweisen. A. Kopff.

Tagesereignisse.

Technischer Literatur-Kalender 1929. Unter Befürwortung durch den Deutschen Verband technisch-wissenschaftlicher Vereine soll Anfang 1929 im Verlage R. Oldenbourg, München und Berlin, die 3. Ausgabe des Technischen Literatur-Kalenders erscheinen. Die bereits in der zweiten Ausgabe verzeichneten Autoren erhalten die Fragebogen zur Ergänzung unaufgefordert zugesandt. Fehlende technische Schriftsteller wollen sich im Interesse der Vollständigkeit des Werkes mit der Schriftleitung, Oberbibliothekar Dr. Otto, Berlin W 57, Bülowstr. 74, in Verbindung setzen. Die in die 3. Ausgabe aufgenommenen Schriftsteller erhalten bei Vorausbestellung das Werk mit einem Preisnachlaß von $^1/_4$ des Ladenpreises, also voraussichtlich für etwa 18 Mark.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Franz Skaupy für Physik.

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen Dr. Johann Radon in gleicher Eigenschaft an der Universität Breslau.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 16. Ausgegeben am 15. August 1928. 29. Jahrgang.
Nr. 764. Printed in Germany.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 16 | 15. August 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 18 am 10. September 1928.

INHALT:

BERICHT ÜBER DIE ANLÄSSLICH DER LEIPZIGER UNIVERSITÄTSWOCHE (18.—23. JUNI 1928) GEHALTENEN VORTRÄGE: QUANTENTHEORIE UND CHEMIE.

Von H. Falkenhagen[1]).

W. Kossel, Die Molekularkräfte beim Kristallwachstum.

Die regelmäßige äußere Gestalt der Kristalle hat zuerst die Aufmerksamkeit auf die Eigenart dieser Körper gelenkt; an der äußeren Gestalt sind zunächst die wichtigsten Begriffe der Kristalltheorie entwickelt worden. Nachdem wir heute über die Anordnung der Atome im Kristall vermöge der Röntgenstrahlen weitgehend Aufschluß erhalten haben, liegt die Annahme nahe, es werde möglich sein, das Auftreten ebener Grenzflächen und die Regelmäßigkeiten des Wachstums aus der Kenntnis des Gitters zu verstehen. Indes zeigt sich diese Aufgabe als sehr verwickelt. Der Redner gab, nach einer historischen Einleitung, die Grundlinien einer molekulartheoretischen Auffassung des Wachstums wieder, die bereits kurz (Gött. Nachr. 1927, S. 135) mitgeteilt worden ist. Dazu muß man voraussetzen, daß das Wachstum äußerst langsam vor sich geht. Es gibt erst sehr wenig Material, das dem genügt. Johnsen und Spangenberg sowie ihren Schülern ist es gelungen, Kristalle außerordentlich langsam wachsen zu lassen (um etwa einige μ pro Tag). Es herrscht dann ständig nahezu Gleichgewicht des Kristalls mit der Lösung. Die bei Steinsalz leicht auftretenden selbständigen Keime, die sich auf den Kristallflächen auflagern können, können nicht mehr auftreten. (Versuche von Neuhaus und Günther.) Besonders brauchbar sind Versuche, bei denen alle Flächenarten freigelegt sind: es wird eine Kugel von dem zu untersuchenden Kristall gedreht und nun das Anwachsen verfolgt. Günther wählte Kalium-Chrom-Alaun; man erkennt sehr schön die allmähliche Ausbildung der Oktaederflächen, der Würfel- und Rhombendodekaederflächen. Am stärksten treten schließlich die Oktaederflächen hervor. Neuhaus führte solche Kugelwachstumsversuche an Stein-

1) Fellow of the International Education Board. Mein Bericht wurde den Herren Vortragenden zur Durchsicht eingesandt und mit ihrem Einverständnis gedruckt.

salz aus; hier bildeten sich sehr schön die Würfelflächen aus. Man nimmt dabei, wie bei allen bisherigen Versuchen an, daß die im Innern des Gitters bestehende Anordnung der Atome bis zur Oberfläche reicht; diese Annahme läßt sich auf Grund von Untersuchungen von Madelung an *NaCl* rechtfertigen. Die neu beim Wachsen des Kristalls angelagerten Atome sollen genau das Gitter fortsetzen. Nun werde vor allem festgestellt, welche Energiemengen zu den verschiedenen am Kristall möglichen Anlagerungen der Atome gehören. Die Kinetik des Wachsens werde roh dadurch ersetzt, daß man annimmt, die größten Energien seien statistisch bevorzugt. Eine ganz einfache Feststellung werde vorausgeschickt: Denken wir uns, wir könnten den Prozeß des Wachsens in lauter gleichartigen Schritten ausführen, so zerfällt die Energiemenge U, die frei wird, wenn wir ein Mol eines Kristalles aufbauen, in L einander gleiche Energieportionen u:

$$U = L u. \quad (1)$$

(L die Loschmidtzahl pro Mol).

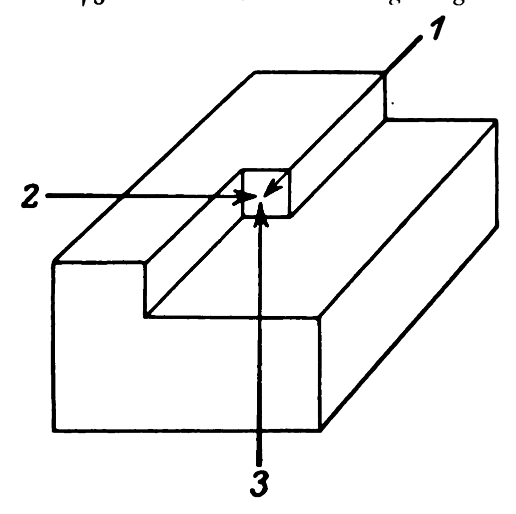
Diese Menge u ist für jeden Schritt, dessen Wiederholung den ganzen Kristall ergibt, dieselbe. Derlei Schritte gibt es aber von verschiedener Art: man kann durch regelmäßige Schritte längs jeder Netzebene (Würfel, Rhombendodekaeder) schließlich den Kristall erhalten; jeder solche Schritt bringt dieselbe Energie u. Man darf also die Bedingungen für die Unterschiede der Flächen beim Wachsen nicht in Energieunterschieden beim regelmäßigen Fortbauen suchen.

Um die Grundidee verständlich zu machen, wählen wir einige Beispiele. Wir beschränken uns auf ein einfaches Würfelgitter.

I. Homöopolare Kristalle: Zunächst sei das Gitter homöopolar. Der kürzeste Abstand zweier Atome sei a. Wir wollen annehmen, daß das Kraftgesetz zwischen zwei anziehenden Atomen so rasch mit der Entfernung abfällt, daß wir im Würfelgitter nur die nächsten 26 Nachbarn eines Atoms zu berücksichtigen brauchen. Es kommen also nur die Abstände a; $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$ vor. Zu diesen Abständen gehören drei Energiebeiträge: ε_a; $\varepsilon_{a\sqrt{2}}$; $\varepsilon_{a\sqrt{3}}$. In der folgenden Symbolik geben wir einfach an, wieviel Nachbarn der ersten, zweiten und dritten Art in Frage kommen, oder wie groß die Zahl dieser Energieeinheiten ist. Ohne die spezielle Form des Kraftgesetzes zu kennen, können wir folgendes überlegen. Wir bauen zunächst eine der Würfelkante parallele Kette von Teilchen, aus lauter solchen Ketten nebeneinander eine Netzebene und schließlich aus den Netzebenen den Kristall. Die entsprechenden Energien, die sich einmal auf die Anlagerung eines Atoms an eine unvollständige Kette oder an eine unvollständige Ebene oder an einen unvollständigen Block beziehen, sind in der eben auseinandergesetzten Symbolik

$$\begin{aligned} \Phi' &= 1 \mid 0 \mid 0 \\ \Phi'' &= 1 \mid 2 \mid 0 \\ \Phi''' &= 1 \mid 4 \mid 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Denn beim ersten Schritt ist nur ein Nachbar im Abstand a vorhanden. Bei Φ'' kommen noch zwei Nachbarn im Abstand $a\sqrt{2}$ hinzu und schließlich beim dritten Schritt sind ein Nachbar im Abstand a, vier im Abstand $a\sqrt{2}$ und vier im Abstand $a\sqrt{3}$ vorhanden. Bei Anlagerung eines



Atoms in der in der Figur wiedergegebenen Weise, ist die Energie

$$\Phi' + \Phi'' + \Phi''' = 3 \mid 6 \mid 4 = \Phi_0 \quad (3)$$

notwendig. Die Figur ist typisch für den Anlagerungsvorgang. Die drei Pfeilspitzen treffen sich an der Stelle, an welcher sich das Atom anlagert. Der Pfeil 1 weist auf die Anlagerung an das Ende einer Kette hin, wofür der Energiebeitrag Φ' maßgebend ist; Pfeil 2 deutet auf die Anlagerung an die Kante des ebenen Gitters hin; dem entspricht der Energiebeitrag Φ'' und schließlich kennzeichnet Pfeil 3 die Anlagerung auf die Oberfläche des räumlichen Gitters; dazu gehört die Energie Φ'''. Bemerkenswert ist, daß

$$\Phi' < \Phi'' < \Phi''' \quad (4)$$

ist. Die ganz entsprechenden Überlegungen kann man leicht auch für eine Rhombendodekaederfläche machen. Es ergibt sich ohne weiteres

$$\begin{aligned} \Phi' &= 1 \mid 0 \mid 0 \\ \Phi'' &= 0 \mid 1 \mid 2 \\ \Phi''' &= 2 \mid 5 \mid 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Verteilung der Energieelemente ist, wie ein Vergleich mit (2) ergibt, anders als für den zuerst besprochenen Fall. Wieder aber gilt die Beziehung (3); wie wir also auch den Kristall auf-

bauen, für jeden Schritt wird die freiwerdende Energie dieselbe; nur ist die Verteilung eine andere, was sich eben dann im Wachstum äußert. Man übersieht sofort auf Grund von (5) und (2), daß für das angenommene homöopolare Gitter statistisch die Rhombendodekaederflächen schneller wachsen als die Würfelflächen. Die letzteren werden also schließlich übrig bleiben müssen.

II. Heteropolare Kristalle vom Steinsalztyp.

Wir wollen jetzt die analogen Erwägungen für heteropolare Kristalle vom Typus des *NaCl* ausführen. Die Geometrie ist dieselbe wie in I, aber das Kraftgesetz hat sich geändert. Die Verschiedenheit des Vorzeichens der Ladungen ergibt hier ganz andere Verhältnisse als in I. Wir unterscheiden wieder die Energieeinheiten, je nachdem wir ein Ion an eine unvollständige Kette oder Netzebene oder einen Block anlagern. Sei e die Ladung des Ions, a der kleinste Abstand zweier entgegengesetzt geladener Ionen, so gilt für den Energiebetrag u^* für jede Art der Anlagerung

$$u^* = \Phi \frac{e^2}{a} \tag{6}$$

(wobei $\Phi = \Phi'$ bzw. Φ'' bzw. Φ''' ist).

Nehmen wir wieder eine Kette längs einer Gitterkante des Steinsalzes. Diese Kette werde weitergebaut. Wir gewinnen die Energie $\Phi' \frac{e^2}{a}$, wobei Φ' nach (7) gegeben ist. Es folgt die Anlagerung eines Ions neben einer Kette in einer Netzebene. Das Potential einer solchen Kette fällt sehr rasch ab; wir brauchen nur die drei ersten Ketten zu berücksichtigen und erhalten für Φ'' den in (7) angegebenen Wert. Noch stärker ist der Abfall des Potentials in der Nähe einer Würfelebene. Befindet man sich im Abstand $2a$, so ist das Potential schon unter die letzte hier gegebene Stelle gesunken. Man erhält für Φ''' den in (7) aufgeführten Wert.

$$\begin{aligned} \Phi' &= l_n 2 = 0{,}6932 \\ \Phi'' &= 0{,}1144 \\ \Phi''' &= 0{,}0662\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Es zeigt sich gegenüber dem homöopolaren Kristall ein typischer Unterschied. Beim homöopolaren Kristall ist die zu gewinnende Energie um so stärker, je größer die Menge von Atomen ist, mit der wir es zu tun haben. Für heteropolare Kristalle ist es gerade umgekehrt. Hier ist

$$\Phi''' < \Phi'' < \Phi'\,. \tag{8}$$

Für die Anlagerung eines Ions entsprechend der Figur an ein Würfelgitter folgt

$$\Phi' + \Phi'' + \Phi''' = 0{,}8738 = \Phi_0 \tag{9}$$

Pro Mol ergibt sich die Energie, wie bereits von Madelung gefunden ist, zu

$$2\Phi_0 L = 1{,}7476 \cdot L\,. \tag{10}$$

Der Faktor 2 in (10) erklärt sich aus der Tatsache, daß Natrium und Chlor bei der Anlagerung jeweils die Einheit Φ_0 liefert. Aus den, aus dem Vorhergehenden sich ergebenden energetischen Überlegungen ergibt sich, daß das normale Fortwachsen des Kristalls längs einer Kette im ebenen Netz vor sich gehen wird, wenn man von den Vorgängen des Randes absieht. Wenn eine Netzebene abgeschlossen ist, beginnt die nächste sich allmählich aus den einzelnen Ketten aufzubauen. So weist die Abstufung der Energiewerte darauf hin, daß der Kristall vor allem dazu neigen wird, abgeschlossene Würfelebenen nach außen hin zu zeigen.

Man kann nun dieselben, eben für eine Würfelebene ausgeführten Überlegungen, für eine Rhombendodekaederfläche machen. Es zeigt sich dann, daß sie nicht als molekular exakte 110-Fläche, sondern als ein parallel zur Würfelkante gestreiftes Feld herauskommen sollte. In der Tat zeigt sich 110 experimentell sehr leicht mit der erwähnten Streifung. Wir können das hier der Kürze halber nicht im einzelnen weiter verfolgen, auch nicht insbesondere auf die Ausbildung der Würfelstufen im einzelnen eingehen. Die Fläche des Pyramidenwürfels 210 kann sich wieder als echte Netzebene ausbilden und zeigt sich dem entsprechend beim Wachstum wohl ausgebildet.

Eine besondere Aufgabe bietet die Oktaederfläche des Steinsalzes und andere ihresgleichen, deren Netzebenen jeweils aus gleich geladenen Ionen bestehen. Es ist nicht anzunehmen, daß hier Netzebenen die Oberfläche bilden, da sie dann abwechselnd entweder ganz positiv oder ganz negativ geladen sein müßte. Von den Lösungsmöglichkeiten, an die hier gedacht werden kann und die zum Teil schon rechnerisch behandelt sind, werden zwei im Bilde vorgeführt. Ebenso wurde die Frage nach der Wirkungsweise von „Lösungsgenossen", die bekanntlich die Ausbildung der Flächen beeinflussen (z. B. Harnstoff bei Kochsalz) kurz berührt und eine von Sorensen-Kiel entwickelte Vorstellung über den Zusammenhang beider Aufgaben angegeben.

Interessant ist es noch, Wachstum und Auflösung miteinander zu vergleichen. Der Vortragende entwickelte hier einen „Reziprioritätssatz", dessen nähere Darstellung einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben soll.

C. N. Hinshelwood, Probleme der Energieübertragung in der chemischen Reaktionskinetik.

Die Reaktionskinetik ist ein Grenzgebiet der Chemie und der reinen Physik. Ihre Aufgabe ist es, die Bedingungen für die Energieübertragung z. B. durch Stoß der Moleküle oder Absorption der Temperaturstrahlung zu untersuchen. Die Energie der Moleküle und ihre Übertragung spielt bei den chemischen Reaktionen die Hauptrolle. Viele chemische Reaktionen verlaufen mit meßbarer Geschwindigkeit; daher können nicht alle Moleküle zu einer bestimmt vorgegebenen Zeit gleich reaktionsfähig sein. Die Reaktionsgeschwindigkeit k wird für eine große Zahl von Reaktionen durch das Arrheniussche Gesetz angegeben:

$$k = A e^{-E/RT} \qquad (1)$$

(E = Aktivierungswärme; R = universelle Gaskonstante; T = absolute Temperatur). A hängt nicht von der Temperatur ab. Man muß im Sinne dieses Gesetzes annehmen, daß die allein reagierenden aktivierten Moleküle durch Stoß oder Strahlung gewöhnlich einen beträchtlichen Überschuß an Energie über den mittleren Energiegehalt der Moleküle erhalten haben. Dieser Energieüberschuß wird als Aktivierungswärme bezeichnet. Besonders einfache Verhältnisse ergeben sich für die Gasreaktionen. Hier sind auf Grund der kinetischen Gastheorie Stoßzahl und ähnliche Größen bekannt. Für bimolekulare Reaktionen ist fast ausnahmslos die Zahl der pro Sekunde reagierenden Moleküle größenordnungsmäßig gleich der Zahl Z der in der Zeiteinheit in Stoß geratenen Moleküle multipliziert mit $e^{-E/RT}$. Da bei verschiedenen Gasen die Stoßzahl nicht viel mit der Temperatur variiert, so findet man, daß bei Temperaturen gleicher Reaktionsgeschwindigkeit $e^{-E/RT}$ nahezu konstant ist; d. h. zu hohen Temperaturen gehört eine große Aktivierungswärme, während die Aktivierungswärme bei niedriger Temperatur klein ist. In einfachen Fällen ist also die Aktivierung eine notwendige und hinreichende Bedingung chemischer Umwandlung. Bei termolekularen Reaktionen z. B. der Reaktion $2\,NO + Cl_2 = 2\,NOCl$ ist die Stoßzahl viel geringer; folglich sollten termolekulare Reaktionen, die bei einer gegebenen Temperatur mit meßbarer Geschwindigkeit verlaufen, mit entsprechend kleineren Aktivierungsenergien verknüpft sein, was die Erfahrung im allgemeinen auch bestätigt. Die experimentelle Anwendbarkeit der Gleichung

Reaktionsgeschwindigkeit = Stoßzahl $\times\, e^{-\frac{E}{RT}}$

für bimolekulare Reaktionen beweist, daß auch der Mechanismus der Aktivierung verhältnismäßig einfach ist. Denn die Formel beruht auf dem Maxwell-Boltzmannschen Prinzip unter der Annahme, daß die Energie der Moleküle auf zwei Quadratterme der Energie verteilt ist, was für einen Aufprall zweier Moleküle von genügender Heftigkeit exakt gelten würde. Reaktionen, die so verlaufen, daß kein längeres Zeitintervall zwischen dem Stoß und der eigentlichen chemischen Umwandlung vergeht, müssen rein bimolekular sein. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist für diesen Fall proportional dem Quadrat des Gasdruckes.

Es gibt aber auch ganz anders verlaufende Reaktionen, die man quasi-monomolekulare nennt und die wir jetzt interpretieren müssen. Da in diesem Fall die Energie auf viele Freiheitsgrade verteilt werden kann, so ist das Zeitintervall der Reaktion eines Moleküls länger als das mittlere Intervall zwischen zwei Stößen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das aktivierte Molekül seine Energie wieder durch einen Stoß verlieren wird, ehe es in die reaktionsfähige Phase gerät, ist recht beträchtlich. Daher wird die gegenseitige Aktivierung und Deaktivierung der Moleküle sehr rasch stattfinden im Vergleich zur eigentlichen vollendeten chemischen Umwandlung. Die Reaktion stört kaum das statistische Gleichgewicht zwischen energiereicheren und energieärmeren Molekülen. Folglich ist die Reaktionsgeschwindigkeit verschieden von der Aktivierungsgeschwindigkeit. Sie ist jetzt

$$k = N \times f(E) \times \chi, \qquad (2)$$

worin N die Gesamtzahl der Moleküle bedeutet, $f(E)$ den Bruchteil der Moleküle angibt, die ausreichend Energie besitzen und χ ein kleiner Bruchteil, d. h. ein reiner Wahrscheinlichkeitsfaktor ist. Da die Energieverteilung unabhängig vom Druck ist, ist auch die Reaktionsgeschwindigkeit k hiervon unabhängig. Diese so gekennzeichneten Reaktionen, die unabhängig von der Stoßzahl, aber nicht von den Stößen, wenn auch anscheinend unabhängig von den Stößen verlaufen, kann man daher quasimonomolekular nennen. Folgende Tabelle I gibt eine Übersicht über einige bimolekulare und quasimonomolekulare Zersetzungen:

Bei niedrigen Drucken, bei denen die freie Weglänge groß wird, wird das statistische Gleichgewicht zwischen energiereicheren und energieärmeren Molekülen merklich gestört. Die Reaktion zeigt keinen quasimonomolekularen Gang mehr. Der Reaktionsgeschwindigkeitskoeffizient k nimmt von nun an mit dem Druck ab. (Beispiel: Zersetzung von Dimethyläther) vgl. Figur. Auf Grund der Annahme, daß im Druckgebiet, wo die Abnahme von k eben beginnt, die Stöße gerade noch ausreichen, um die Reaktions-

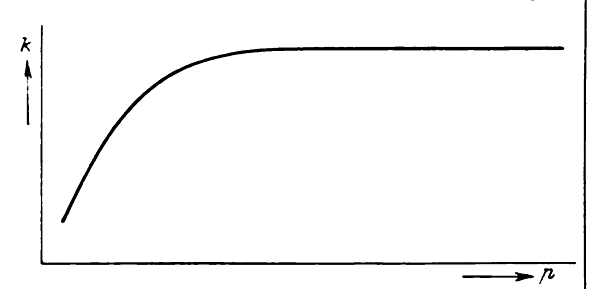
Tabelle I.

Bimolekulare Zersetzung von	Quasimonomolekulare Zersetzung von
2 HJ	N_2O_5
2 N_2O	$CH_3CO\,CH_3$
2 Cl_2O	C_2H_5CHO
2 O_3	$C_2H_5OC_2H_5$
2 CH_3CHO	CH_3OCH_3
Wenig Freiheitsgrade.	$CH_3N = NCH_3$
Aktivierung und sofortige Umwandlung.	$C_3H_7N = NC_3H_7$
Fortdauernde Störung des statistischen Gleichgewichts.	Viele Freiheitsgrade.
	Viel Deaktivierung, keine Umwandlung, bevor das Molekül in die günstige Phase geraten ist. Geringes Stören des statistischen Gleichgewichts.
	Druckunabhängigkeit.

geschwindigkeit aufrecht zu erhalten, kann man die Aktivierungsgeschwindigkeit berechnen; man findet sie um mehrere Zehnerpotenzen größer als das Produkt Stoßzahl $\times e^{-\frac{E}{RT}}$; sie ist gleich

$$\frac{Ze^{-E/RT}}{\left(\frac{1}{2}n-1\right)!}\left(\frac{E}{RT}\right)^{\frac{1}{2}n-1}, \tag{3}$$

worin n die Zahl der Quadratterme bedeutet. Für die Ätherzersetzung ist n: 8 bis 12. Die Zahl der aktivierenden Stöße wird infolge der Energie-



verteilung auf mehrere Freiheitsgrade und der ungeheueren Zahl der Permutationen um Zehnerpotenzen vervielfacht. Der Parallelismus zwischen Aktivierungswärme und Temperatur bei gleicher Reaktionsgeschwindigkeit ist verwaschener als bei bimolekularen Reaktionen (vgl. z. B. Tabelle II).

Wir wollen jetzt die noch ungelösten Probleme betrachten, die mit den vorhergehenden Überlegungen im Zusammenhang stehen. Bei fast allen monomolekularen Reaktionen gelang es, die Abnahme des Geschwindigkeitskoeffizienten bei geringen Drucken nachzuweisen. Indessen ist sie noch nicht bei N_2O_5 gelungen. Sie müßte für die Drucke $< \frac{1}{100}$ mm bestehen.

Tabelle II.

Reaktion Zersetzung oder Umwandlung von	Temperatur gleicher Reaktionsgeschwindigkeit	Aktivierungswärme
N_2O_5	328°	24700 Cal.
$C_3H_7N = NC_3H_7$	545°	40900 ,,
$C_{10}H_{16}$	556°	43700 ,,
$CH_3N = NCH_3$.	599°	51200 ,,
C_2H_5CHO	792°	54000 ,,
CH_3OCH_3	800°	58500 ,,
$C_2H_5OC_2H_5$ . . .	812°	53000 ,,
CH_3COCH_3 . . .	835°	68500 ,,

Die maximal berechnete Aktivierungsgeschwindigkeit ist viel kleiner als die beobachtete Reaktionsgeschwindigkeit. Man kann zur Erklärung der Tatsache, daß die reagierenden Moleküle eine beträchtliche Energie irgendwoher bekommen, verschiedene Annahmen machen. Man kann z. B. annehmen, daß der Molekülquerschnitt der angeregten Moleküle weit größer ist als für Moleküle im Normalzustand, was sehr unwahrscheinlich ist. Oder man kann sich vorstellen, daß der Molekülquerschnitt für die Aktivierung weit größer sei als der aus der inneren Reibung oder Wärmeleitfähigkeit berechnete. Diese Annahme hängt mit der Wirkung ähnlicher Moleküle zusammen (Beispiele sind: Dämpfung der polarisierten Quecksilberfluoreszenz, Zersetzung des Azetaldehyds nach der Gleichung

$$2\,[CH_3\,CHO \rightarrow CH_4 + CO],$$

für welche Stöße zwischen zwei Aldehydmolekülen zehnmal so wirksam sind, wie Stöße zwischen Aldehydmolekülen und Stickstoff- oder Wasserstoffmolekülen). Die eingehende Diskussion dieser Verhältnisse unter Zuhilfenahme der neueren Quantentheorie ist sehr erwünscht.

Es gibt auch auffallende Beispiele spezifisch physikalischer Wechselwirkungen bei unähnlichen Molekülen (z. B. bei der Chlorknallgasvereinigung wirkt Sauerstoff hemmend, also deaktivierend auf die Chlormoleküle. Bei den quasimonomolekularen Reaktionen besitzt H_2 eine spezifisch aktivierende Wirkung im schon wiederholt genannten Gebiete kleiner Drucke).

Sehr interessant sind in bezug auf photochemische sowohl als auch auf thermische Reaktionen die Kettenreaktionen. Es gibt photochemische Reaktionen, bei welchen viele Moleküle pro Lichtquant reagieren. Diese Abweichung vom Einsteinschen Gesetz kann man wohl kaum anders erklären, als daß die in der primären Lichtreaktion gebildeten Moleküle ihre Aktivierungsenergie an Moleküle des Anfangsstoffs übertragen und diese unmittelbar aktivieren, wobei eine Kette aufgestellt wird. Die Kettenreaktion ist für die Lösung des N_2O_5-Problems

wahrscheinlich auch von Bedeutung, wo die beobachtete Reaktionsgeschwindigkeit die mögliche Aktivierungsgeschwindigkeit zu übersteigen scheint; durch unmittelbare Übertragung der ursprünglichen Aktivierungsenergie werden neue Moleküle aktiviert, bei denen die Aktivierung sonst nicht hätte stattfinden können. Hemmende Stoffe unterbrechen die Reaktionskette. Es können bei N_2O_5 die aktivierten Moleküle nach der Annahme von Christiansen und Kramers ihre Energie nur geeigneten Molekülarten überreichen. Das bestätigen neue Versuche über die Gasreaktion von O_2 und H_2 von Hinshelwood und seinen Mitarbeitern, aus denen das Bestehen einer ziemlich großen Wahrscheinlichkeit dafür hervorgeht, daß die aktivierten Moleküle bei der Fortpflanzung von Reaktionsketten eine größere Anzahl von Stößen überleben können, ohne Einbuße ihrer Aktivierungsenergie, bis sie diese Energie schließlich geeigneten Molekülen übertragen. Zwischen 540° und 590° verlief die Reaktion im Gasraum; eine Vergrößerung der Oberfläche ergab keine Beschleunigung, sondern eine Hemmung der Reaktion. Die Vergrößerung der Oberfläche bewirkt eine Verkürzung der Ketten. Die Wirkung verschiedener Gase ist fördernd oder hemmend, je nachdem ihre Moleküle elastisch oder unelastisch mit den aktivierten Molekülen zusammenstoßen. Die Reihenfolge der beschleunigenden Wirkungen ist dieselbe, wie die der reziproken Diffusionskoeffiezienten und entspricht also der relativen Verlängerung der Ketten. Diese beschleunigenden Wirkungen verhalten sich wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} He & : & N_2 & : & A & : & H_2O \\ = 1 & : & 3 & : & 4 & : & 5 \end{array}$$

Zum Schlusse wollen wir noch einige interessante Fragen stellen, deren Lösung für die Chemie von großer Wichtigkeit wäre.

1. Sehr wesentlich wäre eine vollständige Ausarbeitung des Moleküldurchmesserproblems nach der neuen Quantentheorie. Es müßte Regeln geben, die angeben, wie und wann der „gewöhnliche" Molekülradius modifiziert werden muß.

2. Eine weitere grundlegende Frage ist die vollständige Dynamik der chemischen Bindungselektronen. So hat man es z. B. bei chemischen thermisch verlaufenden Zersetzungsreaktionen wohl mit Kernschwingungen zu tun. Bei photochemischen Reaktionen dagegen wird das Elektron aktiviert. Welche inneren Beziehungen bestehen zwischen diesen zwei Vorgängen? Wie aktiviert man eine chemische Bindung?

3. Im intimen Zusammenhang mit der ersten Frage steht die „Spurenkatalyse", die wohl darauf beruht, daß der Zusatz einer ganz geringen Zahl von Fremdmolekülen eine weit stärkere Entropieänderung bewirkt, als man für möglich gehalten hätte. Es würde nützlich sein, etwa unter Zugrundelegung der neuen Quantenmechanik zu untersuchen, ob diese Spurenkatalyse überhaupt möglich ist.

Literatur.

C. N. Hinshelwood, Reaktionskinetik gasförmiger Systeme. Übersetzt und erweitert von Dr. E. Pietsch und Dr. G. Wilke.

C. N. Hinshelwood und H. W. Thompson, Proc. Roy. Soc. A **118**, 170, 1928.

C. H. Gibson und C. N. Hinshelwood, Proc. Roy. Soc. A **119**, 591. 1928.

F. London, Quantentheorie und chemische Bindung.

Wir wollen versuchen zu schildern, welche Anschauungen die Quantenmechanik von Heisenberg und Schrödinger entwickelt hat, um jene Wechselwirkungen zwischen den Atomen zu erfassen, welche die Chemie in ihrer Sprache als das Betätigen und Absättigen von sogenannten Valenzkräften beschreibt. Für einen Teil der chemischen Verbindungen, die sog. heteropolaren Bindungen, war bereits im Zusammenhang mit dem Bohrschen Atommodell ein gewisses Verständnis durch die Theorie von Kossel gewonnen, in welcher elektrostatische Kräfte für die Bindung als ausschlaggebend erkannt wurden.

Theoretisch schwerer verständlich sind die sog. homöopolaren Verbindungen, wie z. B. CH_4 oder O_2, H_2, NH_3 usf. Es scheint, daß die Quantenmechanik von Heisenberg-Schrödinger imstande ist, das chemische Kräftespiel zwischen neutralen Atomen zu erfassen. Wir wollen die Verhältnisse zunächst an dem Beispiel der Wechselwirkung von zwei Wasserstoffatomen entwickeln.

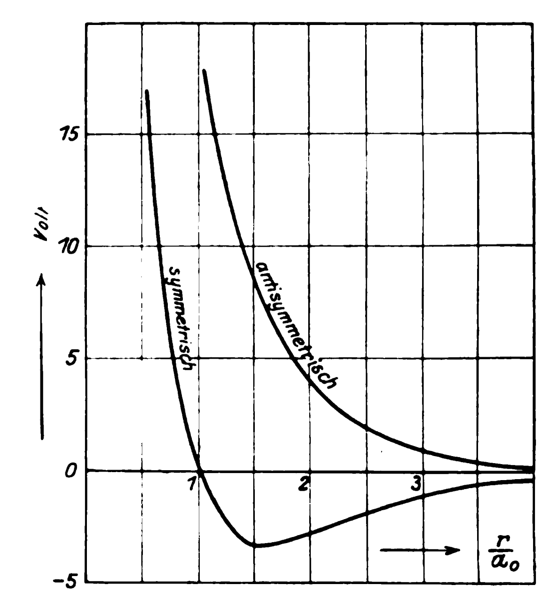
Nach der alten Quantentheorie war das Problem der Wechselwirkung zweier H-Atome nicht determiniert: Wenn man sich im Sinne der Bohrschen Theorie zwei getrennte H-Atome vorstellt, jeden H-Kern umgeben von einem Elektron, das auf Kreisbahnen um den Kern rotiert, so ist hiermit noch nicht festgelegt, in welchen Phasenbeziehungen die beiden Elektronen in ihren Bahnen zueinander stehen. Eine weitere Schwierigkeit bestand in dem Umstand, daß neutrale Atome unmittelbar überhaupt keine festen Kraftzentra darstellen und erst unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sie sich gegenseitig deformieren und Bevorzugungen bestimmter Phasen im Sinne eines Richteffektes eintreten, konnte von einer Kraft der Atome aufeinander geredet werden.

In der neuen Quantenmechanik ist kein Platz für derartige Phasenbeziehungen. Sämtliche Phasen sind gleichsam alle auf einmal realisiert und werden durch ein Kontinuum, die Schrödingersche „Ladungswolke", zusammengefaßt. Die Angabe der Quantenzahlen bestimmt das H-Atom hier bereits eindeutig, während die gewöhnliche Mechanik zur Festlegung des Zustandes noch eine zweite Reihe von Integrationskonstanten, die Phasen, verlangte. Infolgedessen ist die Wechselwirkung zwischen zwei Atomen in der Quantenmechanik ein vollkommen determiniertes Problem.

Die elektrische Ladungsdichte der Elektronenwolke um den ersten Kern, welchen wir in den Koordinatennullpunkt legen, klingt proportional wie $e^{-\alpha|\mathfrak{r}_1|}$ ab, wenn $\mathfrak{r}_1$ den Radiusvektor vom ersten H-Kern zum Elektron 1 bedeutet. Ebenso wird der zweite H-Kern von einer Elektronenwolke eines zweiten Elektrons umgeben sein, deren Ladungsdichte proportional $e^{-\alpha|\mathfrak{R}-\mathfrak{r}_2|}$ ist. ($\mathfrak{R}$ bedeutet den Radiusvektor vom ersten H-Kern zum zweiten H-Kern, und $\mathfrak{r}_2$ ist der Radius vom ersten H-Kern zum Elektron 2). Diese Wolken sind die Amplituden eines Schwingungsvorganges für jedes H-Atom einzeln. Die Quantenmechanik lehrt: man hat, wenn man die beiden noch ungekoppelten Atome zu einem System zusammendenkt, als Gesamtschwingung das Produkt dieser beiden angegebenen Funktionen anzusehen. Entsprechend den beiden Möglichkeiten, die beiden Elektronen auf die H-Kerne zu verteilen, erhält man zwei solche Schwingungen bei gleicher Energie und Frequenz des Gesamtsystems.

Bei Berücksichtigung der Wechselwirkung der beiden H-Atome tritt eine „Resonanzverstimmung" dieser beiden gleich frequenten Schwingungen ein; dieselben sind nicht mehr stationär, sondern bilden Resonanzschwebungen (ähnlich wie bei gekoppelten Systemen der gewöhnlichen Mechanik), welche sich als Superposition von zwei stationären Hauptschwingungen etwas verschiedener Frequenz und Energie auffassen lassen, welche ihrerseits einzeln die stationären Zustände des Gesamtsystems darstellen. Und zwar sind diese Hauptschwingungen einerseits eine in den Elektronen symmetrische (knotenlose), anderseits eine antisymmetrische (mit Knoten behaftete) Gesamtschwingung, deren Energien sich infolge der Resonanzverstimmung sehr charakteristisch unterscheiden.

Das Resultat der Rechnungen, welche bisher nur bis zur ersten Näherung ausgeführt wurden und die daher nur approximative Genauigkeit beanspruchen, ist in der Figur aufgetragen. Die Energien der beiden Hauptschwingungen sind als Funktion des Kernabstandes dargestellt. Man sieht, daß die zur symmetrischen Grundschwingung gehörende Energie ein ausgeprägtes Minimum besitzt, und zwar ist dieses hinsichtlich Größe (3,2 Volt) und Lage ($r = 0,80$ Å) in sehr befriedigender Übereinstimmung mit der bei H_2 gemessenen Dissoziationsenergie (4,3 Volt) und dem Kernabstand ($r = 0,76$ Å) der Molekel. Die andere Schwingung, welche antisymmetrisch in den Elektronen ist, liefert beständig Abstoßung. Beide Reaktionsweisen



kommen vor, je nach der zufällig vorliegenden relativen Einstellung der Elektronendrallvektoren, und zwar verhalten sich ihre statistischen Gewichte wie 1 : 3.

Nachdem sich so gezeigt hat, daß die Quantenmechanik den Bindungsprozeß von zwei Wasserstoffatomen wiederzugeben vermag, sind diese Überlegungen auf beliebige Atome ausgedehnt worden. Wenn man beachtet, daß das Pauli-Prinzip verlangt, daß nicht mehr als zwei Elektronen in äquivalenter (symmetrischer) Weise in die Beschreibung eines Zustandes eingehen, so sieht man, daß beim Hinzutreten eines dritten Wasserstoffatoms ein Zustand, in welchem alle drei Elektronen gleichberechtigt sind, auszuschließen ist. Nur wenn die ersten beiden H-Atome nicht symmetrisch verbunden wären (Abstoßung! Figur), kann das Dritte angezogen werden.

Diese Überlegung enthüllt in sehr sinnfälliger Weise, daß das Pauli-Prinzip befähigt ist, die Tatsache der Betätigung und Absättigung von „Valenzen" zu erfassen; diese Tatsache hat in der Sprache der chemischen Symbole ihren so prägnanten Ausdruck gefunden.

Es liegt nahe anzunehmen, daß immer, wenn zwei Elektronen von verschiedenen Atomen zu einer symmetrischen Schrödingerschwingung sich vereinen, eine Bindung eingegangen wird; und diese Auffassung hat sich präzisieren und weitgehend an der Erfahrung bestätigen lassen.

Man kann die Symmetriemöglichkeiten des Schrödingerschen Schwingungsvorganges, welche das charakteristische quantenmechanische Verhalten von zwei beliebigen miteinander reagierenden Atomen beherrschen, auf Grund von mathematischen Methoden, die ich hier nicht darstellen möchte, erschöpfend übersehen und die energetischen Verhältnisse bis zur ersten Näherung prinzipiell angeben (d. h. auf Quadraturen zurückführen). Ich möchte nur das Ergebnis schildern:

Jedes einzelne der beiden Atome besteht infolge des Pauli-Prinzips aus einer Anzahl höchstens paarweise äquivalent gebundener Elektronen und einer Anzahl nichtäquivalenter Elektronen. Beim Zusammenbringen der beiden Atome können nun — genau wie wir es bei H_2 gesehen haben — durch das Entstehen neuer „Hauptschwingungen" Elektronen, die verschiedenen Atomen angehörten und die nicht bereits äquivalent gebunden sind, zu einer neuen symmetrischen Hauptschwingung Anlaß geben, und diesen Fall möchten wir als das Betätigen und Absättigen einer homöopolaren Valenz deuten. Ein Atomelektron, welches noch nicht einem äquivalenten Paar angehört, wird man daher als „Valenzelektron" bezeichnen. Die Anzahl der nicht äquivalent gebundenen Elektronen eines Atoms gibt dementsprechend seine Wertigkeit an.

Die mathematische Untersuchung hat nun für ganz beliebige in diesem Sinne hinsichtlich ihrer Valenzeigenschaften charakterisierte Atome ergeben, daß sich ihre Reaktionsweisen eindeutig auf die durch die Valenzsymbolik der Chemie beschriebenen abbilden läßt. Es gibt je einen einzigen Zustand mit „Einfachbindung", „Doppeltbindung" usw. bis die Valenzen mindestens eines der Atome abgesättigt sind, und außerdem noch einen Zustand, in welchem keine Valenz abgesättigt wird (vgl. die hierin als Spezialfall enthaltenen Resultate bei H_2). Der letztere Zustand ist der einzige, der bei abgesättigten Verbindungen und Edelgasen in Frage kommt; bei *He* ist er berechnet worden, und es hat sich dabei ergeben, daß sich zwei *He*-Atome im Grundzustande nicht zu einer Molekel vereinigen können.

Es ist von Interesse nachzuprüfen, ob die vorgeschlagene Deutung des Valenzbegriffes zu denjenigen Valenzzahlen führt, welche die Chemie auf Grund ihrer reichen Erfahrungen den Atomen des periodischen Systems beigelegt hat. In der Tat finden wir weitgehende Übereinstimmung. Beschränkt man sich auf diejenigen Zustände, welche vom Grundzustand aus ohne Sprung der Hauptquantenzahl zu erreichen sind, so erhält man so die 1-, 3-, 5-, 7-Wertigkeit der Halogene mit einziger Ausnahme von *F*, welches sich nur als einwertig ergibt und auch tatsächlich nie anders gefunden wurde. Entsprechend resultiert für die Stoffe der Sauerstoffreihe 2-, 4-, 6-Wertigkeit, mit Ausnahme von Sauerstoff selbst, welcher — ebenfalls in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung — sich auf 2-Wertigkeit beschränken muß; die Reihe unter Stickstoff ergibt sich 3- und 5-wertig, die unter Kohlenstoff als 2- und 4-wertig.

Man kann auch die Grenze zu den polaren Bindungen einigermaßen befriedigend angeben, insbesondere ergeben sich die Wasserstoffhalogenide vor allem *HJ* und *HBr* auch *HCl* als wesentlich nichtpolare Verbindungen, wie es aus andern Überlegungen bereits von Franck und Kuhn gefolgert wurde.

Die freien Valenzen eines Systems lassen sich spektroskopisch kontrollieren: Die Wertigkeit ist um 1 kleiner als die Multiplizität des betreffenden Atom- bzw. Molekülzustands und gleich dem resultierenden Elektronendrall im schwachen Felde, gemessen in Einheiten $\frac{h}{4\pi}$. Bei der Absättigung einer Valenz vermindert sich der Elektronendrall des bindenden und des gebundenen Systems je um eine Einheit. Die homöopolaren Valenzen sind abgesättigt, wenn die Resultierende des Eigenimpulses der Elektronen des ganzen Systems Null ist, also ein Singulettspektrum vorliegt.

Während nach der klassischen Mechanik neutrale Atome überhaupt erst nach gegenseitiger Deformation durch Polarisation im Mittel aufeinander Anziehungskräfte ausüben können (als Energiestörung 2. Ordnung), möchte ich es als sehr charakteristisch hervorheben, daß die durch quantenmechanische Resonanz beschriebenen unterschiedlichen Reaktionsweisen, welche wir auf die Betätigungsformen der Valenzkräfte abbildeten, sich bereits als Energiestörungseffekte 1. Ordnung äußern, also bereits ohne Berücksichtigung der Polarisation zum Vorschein kommen, als ein unmittelbarer Ausdruck der Symmetrieeigenschaften der noch ungestörten Atome. Die Erscheinungen der Physik der Aggregatzustände überlagern sich den chemischen Reaktionsweisen erst als Störungseffekte höherer Ordnung (Polarisationseffekte, van der Waalssche Kräfte) und dieser Umstand gibt somit Rechenschaft davon, weshalb im allgemeinen

chemische Verbindungen unabhängig vom Aggregatzustande nebeneinander in fester, flüssiger und gasförmiger Gestalt fortbestehen.

Literatur.

W. Heitler u. F. London, Zeitschr. f. Phys. **44**, 455, 1927.
Y. Sugiura, Zeitschr. f. Phys. **45**, 484, 1927.
E. U. Condon, Proc. Nat. Acad. **13**, 466, 1927.
F. London, Zeitschr. f. Phys. **46**, 455, 1928.
W. Heitler, Zeitschr. f. Phys. **47**, 835, 1928.
L. Pauling, Proc. Nat. Acad. **14**. 359, 1928.
L. Pauling, Chemic Rev. **5**, 173, 1928.
F. London, Zeitschr. f. Phys. im Erscheinen.

In weiterem Zusammenhang hiermit stehen:

W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **38**, 411, 1926; **39**, 499, 1926; **41**, 239, 1927.
E. Wigner, Zeitschr. f. Phys. **40**, 883; **43**, 624, 1927.
W. Heitler, Zeitschr. f. Phys. **46**, 47, 1927.
M. Born u. J. R. Oppenheimer, Ann. d. Phys. **84**, 457, 1927.
F. Hund, Zeitschr. f. Phys. **40**, 742; **42**, 93; **43**. 805, 1927.
A. Unsöld, Zeitschr. f. Phys. **43**, 563, 1927.
L. Pauling, Proc. Roy. Soc. London A **114**, 181, 1927.
O. Burrau, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddelser VII, 14, 1927.

P. A. M. Dirac, Über die Quantentheorie des Elektrons.

Das Problem, welches uns hier interessiert, befaßt sich mit der Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen elektromagnetischen Feld. Eine nicht-relativistische Theorie existiert seit einiger Zeit; ihre Schöpfer sind Heisenberg und Schrödinger. Sie lieferte nur die Hälfte der stationären Zustände eines Elektrons in einem Zentralfeld, welche vom Experiment gefordert werden. Z. B. gibt sie für Natrium ein Singulett-Spektrum anstatt des bekannten Dublett-Spektrums. Um diese Schwierigkeiten zu beheben, führten Uhlenbeck und Goudsmit die Annahme ein, daß das Elektron (Masse m, Ladung $-e$) einen Spin besitzt, d. h. ein mechanisches Drehmoment von der Größe $\frac{h}{4\pi}$ und ein magnetisches Moment $\frac{eh}{m \cdot c}$ (h = Plancksche Konstante, c = Lichtgeschwindigkeit) wenn man e in Heavisideeinheiten mißt. In einem äußeren magnetischen Feld stellt sich der Spin ihm parallel oder antiparallel. Für die antiparallele Lage liegen beide Momente in entgegengesetzter Richtung. Der Quotient $\frac{\text{magnetisches Moment}}{\text{Drehimpuls}}$ für den Spin ist das Doppelte von dem Wert, welcher für ein sich in einer Bahn bewegendes Elektron resultiert. Diese Tatsache wird auch durch den anomalen Zeeman-Effekt gefordert. Der Spin ist von Pauli und Darwin in die Quantenmechanik eingeführt. Ihre Theorie gibt die genaue Zahl der stationären Zustände des Elektrons im Atom und damit den richtigen anomalen Zeeman-Effekt wieder, ist jedoch nicht mit dem Relativitätsprinzip in Einklang. Gordon und Klein ist eine relativistische Theorie des Elektrons ohne Berücksichtigung des Spins gelungen, indem sie die Schrödinger-Gleichung in einer gegenüber der Lorentz-Transformation invarianten Form schrieben. Diese Theorie ist jedoch nicht im Einklang mit den allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik. Man zeigt leicht, daß der Gordon-Kleinsche Ausdruck für die Ladungsdichte nicht der Bedingung genügt, daß in irgendeinem Raumgebiet die Gesamtladung entweder Null oder $-e$ sein muß. In einer richtigen Theorie muß die elektrische Ladungsdichte dieser Forderung entsprechen. Man wird also von einer Theorie erwarten müssen, daß aus ihr einmal die Invarianz gegenüber einer Lorentz-Transformation, sodann das oben charakterisierte Spinphänomen ohne irgendeine spezielle für diesen Zweck notwendige Annahme folgen. In der nicht-relativistischen Theorie ist die Wellengleichung linear in dem Operator $\frac{\partial}{\partial t}$ (t bedeutet die Zeit). In der Theorie von Gordon und Klein ist sie hingegen quadratisch in $\frac{\partial}{\partial t}$. Aus der eben genannten Forderung für die elektrische Ladungsdichte folgt, daß die Wellengleichung notwendigerweise linear in $\frac{\partial}{\partial t}$ sein muß. Man kann das leicht in folgender Weise übersehen. Wenn die Wellengleichung linear in $\frac{\partial}{\partial t}$ ist, ist die ihr genügende Wellenfunktion ψ für eine bestimmte Zeit und alle späteren gegeben. Ist die Gleichung hingegen quadratisch in $\frac{\partial}{\partial t}$, so ist $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, wenn ψ für eine bestimmte Zeit bekannt ist, zu dieser Zeit ganz willkürlich und damit ist ψ für eine etwas spätere Zeit ebenfalls willkürlich. Da die elektrische Dichte nur eine Funktion von ψ allein ist, bedeutet dies, daß sie, wenn sie zu einer fixierten Zeit bekannt ist, eine kurze Zeit später ganz beliebig ist. Damit würde das Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität verletzt sein. Folglich muß die Wellengleichung linear in $\frac{\partial}{\partial t}$ sein und entsprechend linear in jedem der Operatoren: $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ (x_1, x_2, x_3 bedeuten die



Koordinaten des Elektrons). Die Wellengleichung hat daher die Form

$$\left[\frac{W}{c} + \sum_r \alpha_r p_r + \beta\right]\psi = 0 \quad (r = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

W und p_r sind die Operatoren

$$W = ih\frac{\partial}{\partial t}; \quad p_r = -ih\frac{\partial}{\partial x_r}. \qquad (2)$$

Die α_r und β sind Operatoren, die W oder p_r nicht enthalten. Wenn kein elektromagnetisches Feld wirksam ist, sind alle Punkte der vierdimensionalen Raum—Zeit-Mannigfaltigkeit äquivalent. Folglich hängen die α_r und β Operatoren nicht von x_1, x_2, x_3 oder t ab. Wir müssen daher eine neue Variable einführen. Es genügt eine neue Variable ξ anzunehmen, so daß ψ als eine Funktion von x_1, x_2, x_3, t, ξ angesehen werden kann und die α_r und β auf ξ anzuwenden sind. Die relativistische Wellengleichung

$$\left[\frac{W^2}{c^2} - p^2 - m^2c^2\right]\psi = 0 \qquad (3)$$

wird erfüllt dadurch, daß wir auf (1) den Operator

$$\left(\frac{W}{c} - \sum_r \alpha_r p_r - \beta\right)$$

anwenden und die Beziehungen fordern

$$\begin{aligned} \alpha_r^2 &= 1; \quad \alpha_r\alpha_s = -\alpha_s\alpha_r \text{ für } r \neq s \\ \beta^2 &= m^2c^2; \quad \alpha_r\beta = \beta\alpha_r. \end{aligned} \qquad (4)$$

Es ist leicht, Operatoren zu erhalten, welche diese Bedingungen (4) erfüllen. Sie können durch Matrizen, die vier Reihen und vier Kolonnen enthalten, dargestellt werden. Die Variable ξ, auf welche die Operatoren α_r und β anzuwenden sind, kann vier Werte annehmen. Diese vier Werte von ξ liefern die vier Komponenten der Wellenfunktion ψ. Man zeigt leicht, daß die früher skizzierten Prinzipien erfüllt sind.

Um diese Theorie auf den Fall eines wirksamen elektromagnetischen Feldes zu verallgemeinern, nehmen wir an, daß die Potentiale in derselben Weise in die Theorie eingehen, wie das in der klassischen Theorie angenommen wurde. D. h. man hat nur p_r durch $p_r + \frac{e}{c}A_r$ und W durch $W + eA_0$ zu ersetzen, worin A_0 das skalare Potential und A_r die drei Komponenten des Vektorpotentials bedeuten. Bedenkt man noch, daß sie den allgemeinen Quantenprinzipien und der Invarianzforderung gegenüber der Lorentz-Transformation zu genügen haben, so erhält man das Phänomen des Spins. Wendet man den Operator

$$\left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c}A_0\right) - \sum \alpha_r\left(p_r + \frac{e}{c}A_r\right) - \beta \qquad (5)$$

auf

$$\left[\left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c}A_0\right) + \sum \alpha_r\left(p_r + \frac{e}{c}A_r\right) + \beta\right]\psi = 0$$

an, so erhält man einen quadratischen Ausdruck in W und p_r, der gegenüber der Gordon-Kleinschen Theorie zwei besondere Terme aufweist, die gerade die Energie eines magnetischen Moments eines Bohrschen Magnetons in einem magnetischen Felde bzw. die Energie eines elektrischen Momentes eines Bohrschen Magnetons multipliziert mit der imaginären Einheit i im elektrischen Felde bedeutet. Es ist zweifelhaft, ob dem imaginären elektrischen Moment eine physikalische Realität zukommt. Die erstgenannte Energie liefert sofort die Interpretation des bekannten Stern-Gerlach-Versuchs.

Wir wollen jetzt die neue Theorie auf die Spektren der Alkalielemente anwenden. Die Rechnungen der Bewegung eines Elektrons in einem Zentralfeld sind sehr einfach und ergeben folgendes Resultat. Der Drehimpuls[1]) $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ ($\times$ bedeutet Vektorprodukt) bleibt nicht mehr konstant, jedoch findet man eine Konstante der Bewegung, wenn man zu dem Bahn-Impulsmoment einen gewissen Term, dessen Eigenwerte $+\frac{1}{2}h$ und $-\frac{h}{2}$ sind, addiert. Dieser Zusatzterm ist gerade das Spin-Impulsmoment. In der gegenwärtigen Theorie variieren Richtung und Größe von k (früher azimutale Quantenzahl genannt) und die Richtung von s und k ergeben die Resultante j; aber die Größe von s bleibt konstant. Eine Folge hiervon ist, daß k, welches das resultierende Bahn-Impulsmoment bestimmt, nicht für die Klassifikation der Spektralterme verwandt werden darf. Die gegenwärtige Theorie liefert eine Klassifikation der Spektrallinienterme für die Alkalielemente, welche gegenüber der früher benutzten Vorteile bietet. Sie gestattet, die Formeln einfach auszudrücken. Die Werte, die j annehmen kann, sind

$$\begin{array}{lcccccccc} j = & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 \\ & S & & P & & D & & F \\ g = & 2 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{6}{7} & \frac{8}{7} \end{array} \qquad (6)$$

$j = 0$ darf nicht auftreten. Trotzdem k nicht konstant ist[2]), was für die früherern Auswahlregeln von Bedeutung war, zeigen die Rechnungen jedoch dieselben Auswahlregeln und -werte der

1) Die fetten Buchstaben bedeuten gewöhnliche Vektoren.

2) Eine private Diskussion von Dirac und Heisenberg ergab, daß k von der Ordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ variabel sei.

relativen Intensitäten der Multipletts. Die Auswahlregel lautet

$$j \rightarrow -j \text{ oder } j \rightarrow j \pm 1 .$$

Sie stimmt mit der alten Theorie überein. Soweit man sieht, gibt es keinen einfachen Grund für diese Übereinstimmung. Sie scheint ganz zufällig zu sein. Man erhält auch für die anomalen Zeeman-Effekte Übereinstimmung mit dem, was man früher wußte. Die g-Formeln vgl. (6) für schwache Magnetfelder lauten

$$g = \frac{j}{j + \frac{1}{2}} . \qquad (7)$$

Diese neue Formel (7) ist einfacher als die frühere. Nach Gordon und Darwin liefert die neue Theorie auch die Sommerfeldschen Feinstrukturformeln.

Zum Schluß wollen wir noch kurz auf die Schwierigkeiten hinweisen, welche der gegenwärtigen Theorie anhaften und die noch keineswegs gelöst sind. Wenn wir in der Wellengleichung $-e$ statt e schreiben, sollte man infolge des nun ganz anders lautenden physikalischen Problems eine wesentlich verschiedene Wellengleichung erhalten, während sich nichts Neues ergibt. Es würde nichts schaden, wenn wir die Lösungen der Wellengleichung in zwei Gruppen teilen, von denen die eine sich auf die Ladung $+e$ und die andere sich auf die Ladung $-e$ bezieht, vorausgesetzt, daß keine Übergänge zwischen Zuständen, welche der einen Gruppe entsprechen, und solchen, die zur anderen Gruppe gehören, statthaben. Im allgemeinen ist dies nicht möglich. Die Theorie gestattet Übergänge, für welche $+e$ in $-e$ übergeht. Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit für diese Übergänge außerordentlich klein (von der Größenordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^4$; c = Lichtgeschwindigkeit; v = Geschwindigkeit des Elektrons). Folglich ist die gegenwärtige Theorie eine Annäherung. Es scheint, daß diese Schwierigkeit nur durch eine fundamentale Änderung unserer bisherigen Vorstellungen behoben werden kann, und vielleicht im Zusammenhang steht mit dem Unterschied zwischen Vergangenheit und Zukunft.

Literatur.

G. E. Uhlenbeck und S. Goudsmit, Naturwissensch. **47**, 953, 1925. Nature **117**. 264, 1926.
W. Pauli, Zeitschr. f. Phys., **43**, 601, 1927.
C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. A **115**, 1, 1927. **116**, 227, 1927. **118**, 654. 1928.
W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **40**, 117, 1926. **48**, 11, 1928.
O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **41**, 407, 1927.
P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **117**, 610. **118**, 351, 1928.

A. Eucken, Wärmeleitfähigkeit von Nichtmetallen und Metallen.

I. Wärmeleitfähigkeit von Nichtmetallen.

Die wichtigsten Ergebnisse über die Wärmeleitfähigkeit, die im Verein mit der spezifischen Wärme für das Problem des festen Aggregatzustandes von Bedeutung ist, aus den Jahren 1910/11, lassen sich folgendermaßen formulieren. Kristalle zeigen eine sehr gute Wärmeleitfähigkeit, die mit sinkender Temperatur stark zunimmt, während amorphe Körper (z. B. Glas) mit sinkender Temperatur eine Abnahme der Wärmeleitfähigkeit aufweisen. So leitet z. B. ein Quarzkristall (seine Wärmeleitfähigkeit λ in $\frac{\text{cal}}{\text{grad cm sec}}$ beträgt bei 273^0 C 0,0173 oder 0,073 $\frac{\text{Watt}}{\text{grad cm}}$) bei Zimmertemperatur etwa fünfmal besser als Quarzglas, während er bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs eine etwa 500mal größere Wärmeleitfähigkeit zeigt als das Glas bei dieser Temperatur. Denkt man sich den Festkörper als System miteinander gekoppelter schwingender Massenpunkte, so wird die Energieübertragung eines solchen Massenpunktes auf seinen benachbarten proportional ihrer Energiedifferenz sein. Folglich sollte der Wärmeübergang proportional $\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dT}\frac{dT}{dx} = c_v \frac{dT}{dx}$ sein, wenn c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bedeutet. Das Wärmeleitvermögen müßte demnach, da es den Wärmeübergang für das Temperaturgefälle $\frac{dT}{dx} = 1$ mißt, c_v proportional sein. Da nun die zwischen den Atomen und Molekülen wirkenden Kräfte, die den Wärmeübergang bedingen, praktisch temperaturunempfindlich sind, sollten Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärme c_v einander proportional sein. Da hiervon keine Rede sein kann, muß für den Wärmeübergang noch ein anderer Effekt von Wichtigkeit sein, der durch einen sehr stark mit abnehmender Temperatur steigenden Faktor bedingt ist. Es gelang Debye die eben skizzierten Schwierigkeiten auf Grund folgender Vorstellung zu überwinden: Der Festkörper ist ein System von gekoppelten Resonatoren; den raschen Schwingungen der Atome und Moleküle überlagern sich infolge der Koppelung sehr viele langwellige Schwingungen, die als stationäre Schallwellen von gegenüber normalen Schallwellen geringer Wellenlänge für die Wärmeübertragung der Kristalle ausschlaggebend sind. Derartige Wellenzüge können sich nur in Kristallen richtig ausbilden, wie unmittelbar einleuchtet. In Glas, wo die Moleküle ungeordnet sind, können diese

Wellenzüge nicht entstehen. Ein Wellenzug würde durch den ganzen Körper hindurchlaufen, wenn keine Störungen vorhanden wären. Eine sehr wichtige Störung, die gerade die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitung bedingt, besteht in der Wärmebewegung selbst. Es ist niemals ein Wellenzug allein da; sie laufen kreuz und quer und überlagern sich. Wäre die Wellenbewegung rein harmonisch, so würden sie sich nicht stören. Für die Theorie des Festkörpers ist es aber wesentlich, daß die Schwingungen unharmonisch verlaufen, wodurch eine gegenseitige Störung auftritt. Mit sinkender Temperatur werden diese Hemmungen für die Ausbreitung der längeren Schwingungen immer geringer; die Folge hiervon ist, das Steigen der Wärmeleitung mit abnehmender Temperatur. Es spielt daher für die Wärmeleitung die mittlere Reichweite $\bar{l}$ der Wärmewellen eine Rolle, die definiert ist als diejenige Strecke, auf der die Intensität einer Welle auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes herabgesetzt wird. Ist $\bar{l}$ groß, so leitet der Kristall gut, ist l klein, so leitet er die Wärme schlecht. In voller Analogie zur Wärmeleitung der Gase ergibt die Debyesche Theorie für die Wärmeleitung λ den Ausdruck

$$\lambda = \frac{1}{4} \varrho \bar{l} \bar{w}_s c_v . \qquad (1)$$

Hierin bedeuten ϱ die Dichte, c_v die spezifische Wärme, w_s die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit der elastischen Wellen und $\bar{l}$ die eben definierte Reichweite der relativ langen thermisch-elastischen Wellen. Die Grundvorstellung Debyes ist gerade heute von besonderem Interesse, weil sie zeigt, daß man im Prinzip eine Energieübertragung durch Wellenzüge formal ebenso behandeln kann, wie durch Korpuskularteilchen, wenn man an die weitgehende Übereinstimmung der Wärmeleitungsgleichung in Kristallen mit der in Gasen denkt. In der de Broglieschen Auffassung der Quantenmechanik sind ja auch Phasenwellen und Korpuskelbewegung sehr intim miteinander verknüpft.

Die Debyesche Theorie mußte naturgemäß wieder auf das Experiment befruchtend wirken und zu Anregungen Anlaß geben. Dabei schien es erwünscht, sich möglichst auf die Grundformel (1) zu stützen. Für Temperaturen, für die das Dulong-Petitsche Gesetz der spezifischen Wärme erfüllt ist, ergab die Theorie ohne weiteres die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit umgekehrt proportional der absoluten Temperatur. Wenn man wieder an die Analogie zu den Vorgängen bei Gasen denkt, bei denen im verdünnten Zustand an der Grenze von zwei Gasen das Temperatursprungphänomen auftritt, so wird man an der Grenze zweier Kristalle ebenfalls einen Temperatursprung ΔT_s erwarten. Dieser kann genau wie bei Gasen geschrieben werden

$$\Delta T_s = \frac{\bar{l} \Delta T_0}{f'} = B \Delta T_0 . \qquad (2)$$

Hierin bedeuten $\bar{l}$ die freie Weglänge, ΔT_0 die beim Wärmedurchgang im Abstand von 1 cm herrschende Temperaturdifferenz und f' einen Faktor, der ein Maß für die Durchlässigkeit der Wärmewellen durch die Grenzfläche ist. f' ist wahrscheinlich von der Temperatur unabhängig und hängt nur von der Art der Grenzflächen ab; für gleichartige Flächen ist er relativ groß, während er für zwei kristallographisch verschiedene Flächen relativ klein ist. Man vermag auf diese Weise wenigstens Relativwerte von l zu ermitteln, indem man die Wärmeleitfähigkeit von kristallinischem Material mißt. Wenn nämlich beim Durchgang der Wärmemenge durch ein solches auf 1 cm n Temperatursprünge vorkommen, schreibt sich die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{nB + 1} . \qquad (3)$$

Hierin ist λ_0 die Wärmeleitfähigkeit eines einheitlichen Kristalles. In der Tat fand man entsprechend Gl. (3) bei kristallinischem Material die Wärmeleitfähigkeit gegenüber dem Kristall verringert. Z. B. führte eine systematische Untersuchung an Kalkspat als Kristall und als kompaktem kristallinischem Material (Marmor) zu einer guten Bestätigung der Formel (3). Interessant ist, daß B für 83^0 etwa zehnmal so groß ist wie bei 273^0. Unter Heranziehung von (2) sollte gemäß (1) $\frac{B c_v}{\lambda}$ temperaturunabhängig sein, was experimentell bestätigt werden konnte und als eine gute Bestätigung der Debyeschen Grundgleichung (1) angesehen werden kann.

Bei kristallinischen Aggregaten von regulär kristallisierenden Kristallen, die in Gestalt von synthetischen Körpern am einfachsten als Preßkörper hergestellt wurden, trat kein derartiger „Korngrößeneffekt" auf[1]); hier erleiden die Wärmewellen beim Durchgang durch die Grenzflächen eben keine Störung. Merklich war dagegen der Korngrößeneffekt bei einem Gemenge von Kriställchen, die fest gepreßt wurden, z. B. KCl und NaBr; recht interessante Ergebnisse finden sich für die Reihe der Alkalihalogenide, bei denen dort, wo die Atome ungefähr gleich schwer sind (NaF, KCl, RbBr),

1) Näheres hierüber sowie über die folgenden Ergebnisse in der kürzlich gemeinsam mit G. Kuhn veröffentlichten Arbeit. Zeitschr. f. phys. Chem. **134**, 193, 1928.



Maxima der Wärmeleitfähigkeit auftraten. Diese Maxima können nur von $\bar{l}$ abhängen. Dies hängt damit zusammen, daß bei gleichen Atommassen nach der Auffassung von Born die beiden Zweige des akustischen und optischen Spektrums des Kristalls, die sonst eine starke Störung bedingen, zu einem verschmelzen, wodurch dann die Störung sehr herabgesetzt wird. Wie es scheint, läßt sich ganz allgemein sagen: je komplizierter das Schwingungsspektrum ist, desto stärker treten die Störungen hervor und desto kleiner wird die freie Weglänge $\bar{l}$. Damit hängt auch zusammen, daß die Temperaturerniedrigung dann nicht mehr viel ausmachen kann. Folgende Tabelle I illustriert das. Für die angegebenen Stoffe ist $\varrho\, c_v\, \bar{w}_s$ ungefähr konstant; die Änderungen des Wärmeleitvermögens basieren auf solchen der freien Weglänge $\bar{l}$

Tabelle I.

	λ_{273}	$\frac{\lambda_{83}}{\lambda_{273}}$
NaF	0,025	4,94
KF	0,017	3,38
$CaCO_3$	0,011	4,5
$MgSO_4$	0,0058	1,1
Mischkristalle KCl und KBr	0,0055	1,07
Kalialaun	0,0047	0,64
Quarzglas	0,0033	0,47

Man kann die Stoffe auch so zusammenfassen, daß für sie $\bar{l}$ ungefähr konstant ist. Es müßte dann λ mit wachsender Härte steigen, was auch in der Tat der Fall ist.

Bemerkenswert ist das Verhalten von Mischkristallen. Durchweg tritt bei der Mischkristallbildung eine recht erhebliche Erniedrigung des Absolutwertes sowohl wie des (negativen) Temperaturkoeffizienten des Wärmeleitvermögens ein.

Bei geringen Zusätzen zu einem reinen (nichtmetallischen) Kristall ließ sich der Einfluß des Zusatzes durch Übertragung des Matthiessenschen Gesetzes der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle ausdrücken. Hiernach ist

$$W_u = W_r + \Delta\,, \tag{4}$$

wobei r sich auf den chemisch reinen Kristall und u sich auf einen durch Zusatz unter Mischkristallbildung verunreinigten Kristall bezieht. (W bedeutet den thermischen Widerstand, der das Reziproke der Wärmeleitfähigkeit ist.) Δ ist unabhängig von der Temperatur.

II. Zur Wärmeleitfähigkeit der Metalle.

Im Vordergrund des Interesses steht bei Metallen das Wiedemann-Franzsche Gesetz, wonach gilt

$$\frac{\lambda}{\sigma T} = L_m\,. \tag{5}$$

Dabei ist λ das Wärmeleitvermögen, σ das elektrische Leitvermögen, T die absolute Temperatur und L_m eine universelle Konstante. Diese sollte nach Rechnungen von Drude, Lorentz und Sommerfeld $2{,}22 \times 10^{-8}$ bzw. $1{,}65 \times 10^{-8}$ bzw. $2{,}44 \times 10^{-8}\,\frac{\text{Watt sec Ohm}}{\text{grad}^2}$ betragen. Alle bisherigen Theorien beziehen sich auf einen idealisierten Fall. Es wird so getan, als ob nur die Elektronen die Wärmeleitung eines Metalles besorgten, nicht das eigentliche Gitter der Atome oder Ionen. Diese Annahme ist sicherlich unzulässig; wenn man nur die Elektronen berücksichtigt, ist es undenkbar, daß man zu dem richtigen Wert für die gesamte Wärmeleitfähigkeit gelangt, wie sie das Experiment liefert. Solange eine Theorie fehlt, die dieses berücksichtigt, wird man sich die gesamte Wärmeleitfähigkeit λ zusammengesetzt denken aus der Gitterleitfähigkeit λ_i und der Elektronenleitfähigkeit λ_m. Es gilt also

$$\lambda = \lambda_i + \lambda_m\,. \tag{6}$$

Dieser Ansatz bedeutet, daß sowohl die thermisch-elastischen Wellen wie auch die Elektronen die Wärmeleitung bedingen. Man kann sie modellmäßig wie zwei parallelgeschaltete Widerstände auffassen, zwischen denen eine mehr oder weniger weitgehende Koppelung existiert. Man überlegt leicht, daß diese auf λ_m einen Einfluß ausübt, doch nur infolge der mittleren freien Weglänge, die aber gerade für die Wiedemann-Franzsche Zahl herausfällt. Gleichung (6) enthält 2 Unbekannte. Es ist leicht, eine davon zu eliminieren. Wir wollen das für nicht-reguläre Metalle, z. B. *Sb* oder *Bi* auseinandersetzen. Nach I ist

$$\lambda_i = \frac{\lambda_0}{nB + 1}\,,$$

wenn n genügend groß ist, erhält man

$$\lambda = \lambda_m\,,$$

um λ_i zu eliminieren, sind also Messungen am Material verschiedener Korngrößen auszuführen und es ist dann eine Extrapolation der Wärmeleitfähigkeit auf sehr große Kornzahl notwendig. Für die Wiedemann-Franzsche Zahl ergibt sich bei 273^0 C $2{,}27 \times 10^{-8}$, bei tiefer Temperatur 90^0, ein System von Werten zwischen $(2{,}1$ und $2{,}55) \times 10^{-8}\,\frac{\text{Watt sec Ohm}}{\text{grad}^2}$, so daß wir eine gute Bestätigung des Wiedemann-Franzschen Gesetzes erhalten.

Es ist auch möglich, die Gleichung (6) für reguläre Metalle zu benutzen und die Messungen

von Grüneisen und Göns über das elektrische und thermische Leitvermögen von Metallen bei tiefen Temperaturen auszuwerten. Dabei hat man nur anzunehmen, daß gemäß (4) die thermische Isolatorleitfähigkeit λ_i eines Metalls, das Verunreinigungen zeigt oder infolge mechanischer Bearbeitung Deformationen seines Gitters erfahren hat, zufolge dem Gesetz von Mathiessen geschrieben werden kann

$$\lambda_i = \frac{1}{A + B\zeta}, \qquad (7)$$

wobei gilt (vgl. (4))

$$A = W_r \qquad \zeta B = \Delta \qquad (8).$$

ζ ist ein Maß für die Verunreinigung bzw. die Deformation des Gitters und wird aus dem Matthiessenschen Gesetz für die elektrische Leitfähigkeit ermittelt. Er ist ζ einfach gleich der Differenz des spezifischen Widerstandes des nicht reinen Metalls σ gegenüber dem des reinen Metalls σ_r. Vermöge (5), (6) und (7) ist die gesamte Wärmeleitfähigkeit.

$$\lambda = L_m T\sigma + \frac{1}{A + B\zeta}. \qquad (9)$$

Es gelingt dann, den Beobachtungen von Grüneisen und Goens durch geeignete Wahl von A, B und L_{mo}, wobei

$$L_m = L_{mo}(1 + \zeta\, 10^6). \qquad (10)$$

ist, gerecht zu werden. So ist z. B. für Gold bei $T = 83{,}2^0$:

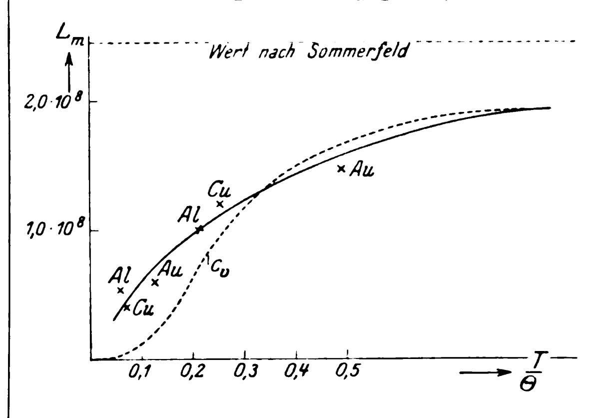
$$A = 1{,}136; \quad B = 2{,}75 \times 10^6;$$
$$L_m = 1{,}43\,(1 + \zeta)\,10^{-8}$$

und bei $T = 21{,}2^0$ ebenfalls für Gold:

$$A = 0{,}148; \quad B = 2{,}75 \times 10^6;$$
$$L_m = 0{,}6\,(1 + \zeta)\,10^{-8}.$$

Das Verhältnis $\frac{\lambda_m}{\lambda_i}$ ist beispielsweise für $\zeta = 0$ bei $T = 83{,}2^0$: 2,8, während es bei $T = 21{,}2^0$ im Falle $\zeta = 0$: 1,3 ist; $\frac{\lambda_m}{\lambda_i}$ nimmt mit wachsender Verunreinigung ab.

Besonders interessant ist das Ergebnis für die Wiedemann-Franzsche Zahl[1]). Das Resultat ist in der Figur wiedergegeben, in der als



Ordinate die Wiedemann-Franzsche Zahl L_m und als Abszisse $\frac{T}{\Theta}$ gewählt ist. Die gestrichelte Kurve in der Figur stellt c_v als Funktion von $\frac{T}{\Theta}$ im Sinne von Debye dar. Θ bedeutet nach Debye die charakteristische Temperatur, die für die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme maßgebend ist. Wie man sieht, ist von einer Konstanz der Wiedemann-Franzschen Zahl L_m keine Rede. Sie fällt mit sinkender Temperatur und scheint überdies etwas mit der Verunreinigung bzw. der Gitterdeformation zu wachsen (vgl. Formel (10)). Die von der Sommerfeldschen Theorie geforderte Konstanz von L_m scheint nicht erfüllt zu sein. Hiernach dürfte wohl vielleicht die Sommerfeldsche Theorie der Elektronenleitung, wenngleich sie gegenüber den älteren Theorien zweifellos einen großen Fortschritt bedeutet, noch nicht die definitive Lösung des Problems der Metallelektronen sein.

1) Näheres vgl. Zeitschr. f. phys. Chem. **134**, 220, 1928.

(Eingegangen 1. Juli 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn O. Martienssen „Eine neue Methode zur Dämpfung der Schwingungen eines Kreiselkompasses".

(Physik. Zeitschr. **29**, 295, 1928.)

Von Karl Glitscher.

Herr M. versucht den Nachweis zu führen, daß die Dämpfung seines Kompasses an das schrittweise Folgen des Nachdrehmotors gebunden und daß das dämpfende Drehmoment um die Elevationsachse wirksam sei. Wir wollen jedoch zeigen,

1. daß die Dämpfung auch dann eintritt, wenn der Wendemotor ideal folgt,
2. daß die von Herrn M. beschriebene Dämpfung einen Nebenumstand oder eine Unsauberkeit darstellt, die zwar einen



Beitrag zur Dämpfung liefern kann, der aber gegenüber der Dämpfung unter 1 außerordentlich klein ist,

3. daß an Herrn M.s Kompaß die dämpfenden Drehmomente nicht um die Elevations-, sondern um die Vertikalachse wirksam sind.

Zum Beweise knüpfen wir an Herrn M.s Figur an, die wir schematisch in unserer Fig. 1 wiederholen.

Unser Punkt O entspricht dem Auge 11. OE ist die Elevations-, OR die Rosenachse, OV die Vertikale. Die Kreiselachse sei um den Winkel β eleviert, dann schließt auch die Rosen-

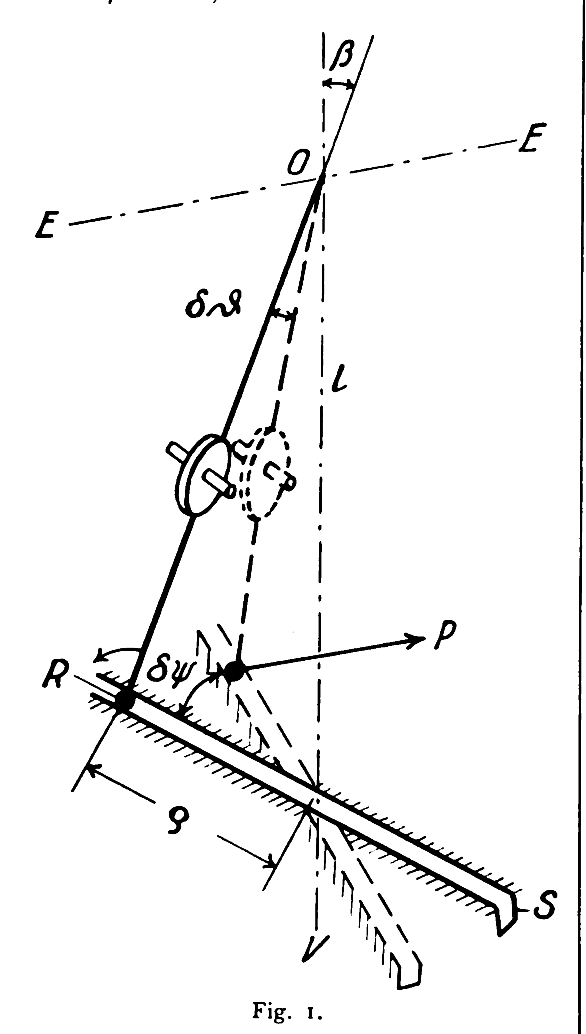


Fig. 1.

achse den Winkel β mit der Vertikalen ein. Die Schlitzführung S sei um den Winkel $\delta\psi$ zurückgeblieben (punktierte Stellung). Dadurch wird die Rosenachse um den Winkel $\delta\vartheta$ aus ihrer Vertikalebene abgelenkt. Es besteht die Beziehung, wenn l den Abtsand vom Auge 11 bis zum Berührungspunkte des Stiftes 12 mit der Führung 14 (bei vertikaler Rosenachse) und ϱ den Abstand des Berührungspunktes von der Vertikalachse bedeutet,

$$l\delta\vartheta = \varrho\delta\psi; \quad \varrho = l\beta; \quad \delta\vartheta = \beta\delta\psi. \qquad (1)$$

β, $\delta\psi$ und $\delta\vartheta$ werden als kleine Winkel vorausgesetzt.

Herr M. legt auf die Ostseite des schwingenden Systems das Gewicht 26 (G) oder ein entsprechendes Gewicht auf die Westseite des nachgedrehten Teiles. Das Gewicht möge den Abstand r von der Vertikalebene besitzen, die durch die Kreiselachse und die Vertikale bestimmt ist. Es hat ein Moment Gr um eine durch O zur Horizontalen parallel gehende Achse. Infolge dieses Momentes und des Zurückbleibens der Schlitzführung entsteht ein Gegenmoment mit dem Berührungsdruck P zwischen Stift 12 und Backe 14 und mit dem Hebelarm l.

Es ist leicht zu sehen, daß

$$Pl = Gr + mga \cdot \delta\vartheta$$

ist oder nach (1)

$$P = \frac{Gr + mga\beta\delta\psi}{l}. \qquad (2)$$

Dieser Druck P übt das Moment $P\varrho = Pl\beta$ um die Vertikale aus, wie weiter unten noch eingehend auseinandergesetzt werden soll. Nehmen wir dies vorläufig als Tatsache hin, so schreiben sich die Gleichungen (1) und (2) des Herrn M. unter der allgemein üblichen Vernachlässigung der unwesentlichen Beschleunigungsmomente $B\frac{d^2\beta}{dt^2}$ und $C\frac{d^2\alpha}{dt^2}$

$$\Theta o \frac{d\alpha}{dt} - mga\beta = -\Theta o\omega \sin\varphi \qquad (3)$$

$$\Theta o\omega \cos\varphi\alpha + \Theta o \frac{d\beta}{dt} = -Pl\beta. \qquad (4)$$

Durch Differentiation von (3) nach t und Elimination der Glieder mit $\frac{d\beta}{dt}$ folgt

$$(\Theta o)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Theta o\omega \cos\varphi \cdot mga \cdot \alpha = -mgaPl\beta. \qquad (5)$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit $\frac{d\alpha}{dt}$, dividieren sie durch mga und erhalten die Energiegleichung

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{(\Theta o)^2}{mga}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \Theta o\omega\cos\varphi\cdot\alpha^2\right\} = Pl\beta\,\frac{d\alpha}{dt}. \qquad (6)$$

Die Gleichung besagt, daß die Abnahme der im schwingenden Kompaß steckenden Gesamtenergie gleich der nach außen abgegebenen Leistung ist. Das erste Glied in der Klammer links ist die scheinbare kinetische Energie des

Kompasses, das zweite die potentielle Energie, die Summe beider die Gesamtenergie. Rechts steht unser oben entwickeltes Drehmoment $Pl\beta$ multipliziert mit $\frac{d\alpha}{dt}$, der Winkelgeschwindigkeit der Kompaßschwingung um die Vertikale. Das Glied rechts ist also die Leistung, die mit Hilfe des Andrucks P auf das um die Vertikale nachgedrehte System übertragen wird; und zwar ist der Sinn so, daß der Kompaß dem Nachdrehmotor gewissermaßen hilft, die Reibung im Getriebe zu überwinden; $Pl\beta$ ist also das dämpfende Drehmoment. Würde der Andruck umgekehrt wirken, was man dadurch erreichen kann, daß man das Gewicht G nicht im Osten des schwingenden bzw. Westen des nachgedrehten Teils, sondern im Westen des schwingenden bzw. Osten des nachgedrehten Teils aufsetzt, so würde der Wendemotor Energie an das schwingende System abgeben und statt einer Dämpfung ein Aufschaukeln der Schwingung eintreten. Diese Überlegung wird durch das Experiment bestätigt.

Wir sehen uns nun die vom Kompaß abgegebene Leistung, also das Maß für die Dämpfung, genauer an. Sie ist

$$Pl\beta\frac{d\alpha}{dt} = (Gr\beta + mga\beta^2\cdot\delta\psi)\frac{d\alpha}{dt}.$$

In der Klammer rechts steht die Summe zweier Momente $Gr\beta$ und $mga\beta^2\delta\psi$. Davon ist das erste hervorgerufen durch das aufgelegte Gewicht G, das zweite durch das Nachhinken der Schlitzführung um den Winkel $\delta\psi$. Um zu ermessen, welchen Anteil beide Momente an der Dämpfung haben, bilden wir ihr Verhältnis, indem wir das zweite durch das erste dividieren.

Wir erhalten

$$V = \frac{mga\cdot\beta}{Gr}\,\delta\psi,$$

mga wird von Herrn M. angegeben, Gr ist uns nicht bekannt. Wir wissen aber, daß Gr wesentlich kleiner als mga ist, weil die Rosenachse auch nach der Belastung durch G noch annähernd vertikal bleibt. Andererseits ist auch β ein sehr kleiner Winkel, der je nach dem Ausschlag des Kompasses zwischen 0 und 3^0 schwankt, so daß $mga\beta$ im allgemeinen von gleicher Größenordnung wie Gr ist. Man erkennt außerdem, daß, wenn nur kleine Restschwingungen auftreten, denen ein außerordentlich kleines β entspricht, dann das Verhältnis V klein wird und demgemäß der Dämpfungsbeitrag durch das Nachhinken gegenüber dem durch den Andruck gar nicht mitzählt. Die Dämpfung nach Herrn M. würde also gerade da nicht wirksam sein, wo man sie im praktischen Betriebe braucht. V ist überhaupt immer klein; denn, nehmen wir an, daß $mga\beta$ noch zehnmal größer sei als Gr, was aber selbst für große Ausschläge zu hoch gegriffen sein dürfte, dann ist doch immer noch $\delta\psi$ eine kleine Größe, weil für einen halbwegs brauchbaren Kompaß das Nachhinken $\delta\psi$ die Größe eines halben Grades nicht überschreiten darf. (Gute Nachdreheinrichtungen folgen auf $^1/_{60}{}^0$ genau.) Dann würde mit $\delta\psi = {}^1/_2{}^0 =$ ungefähr $^1/_{120}{}^0$ V etwa $10 \times {}^1/_{120} = {}^1/_{12}$ werden. Man wird also $\beta mga\delta\psi$ gegen $Gr\beta$ immer vernachlässigen dürfen. Infolgedessen wird man darnach streben, $\delta\psi$ so klein als möglich zu machen, d. h. die Nachdreheinrichtung möglichst ideal folgen zu lassen, obgleich man nach Herrn M. diesen höchst wünschenswerten Zustand gar nicht anstreben dürfte, weil dann keine Dämpfung vorhanden wäre. Wir haben also bis jetzt gezeigt,

1. daß das Moment, das die eigentliche Dämpfung hervorbringt, durch das Auflegen des Gewichtes hervorgerufen wird und ohne das Nachhinken des Wendemotors vorhanden ist;
2. daß das Moment, das infolge des Nachhinkens entsteht, und das Herr M. als alleinige dämpfende Ursache ansieht, sehr klein im Verhältnis zum ersten und nichts weiter als eine etwas dämpfende Unsauberkeit ist, die man vermeiden kann.

Wir wollen noch zeigen, daß das dämpfende Drehmoment um die Vertikale und nicht um die Elevationsachse erfolgt. Mit Herrn M. nehmen wir an, daß auf das nachgedrehte System ein Gewicht G aufgelegt sei, so daß um die Horizontale (senkrecht zur Elevationsachse) das Moment Gr besteht. Ist die Rosenachse vertikal ($\beta = 0$), so entsteht zwischen Stift und Westseite des Führungsschlitzes der Druck P_0. Es herrscht statisches Gleichgewicht nach der Beziehung

$$Gr = P_0 l. \tag{7}$$

Wenn nun bei der Kreiselbewegung die Kreiselachse sich um den Winkel β hebt und dadurch gleichzeitig die Rosenachse mit der Vertikalen den Winkel β einschließt, bleibt das Drehmoment des Aufsatzgewichtes G um die Horizontale nach wie vor bestehen, das Moment des Andrucks aber, der jetzt P sein möge, dreht um die durch O parallel zur Kreiselachse gehende Achse. (Fig. 2.)

Das Moment des Gewichtes G hat also seine Richtung und Größe behalten, das Moment des Andruckes P hat seine Richtung und Größe geändert. Aus der Fig. 2 liest man ab, daß das Moment des Andruckes (die Momente sind als Vektoren aufgetragen)

$$\left.\begin{aligned} \frac{Pl}{\cos\beta} &= Gr\cos\beta \\ P &= \frac{Gr}{l}\cos^2\beta = P_0\cos^2\beta \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

ist, P ändert sich also mit $\cos^2\beta$. Die Momente

des Gewichtes G und des Andrucks P halten sich bei einer Elevation nicht mehr das Gleichgewicht. Die Differenzkomponente beider Momentvektoren $Gr\ \sin\beta$, die um die Rosenachse wirkt, versucht den Kompaß zu drehen, und zwar bei positiver Elevation von Norden nach Osten, bei negativer von Norden nach Westen. Das gelingt ihr nur, soweit die Richtkraft des Kreisels ($\Theta o\omega \cos\varphi$) das zuläßt, die sich der Ablenkung von Norden widersetzt. Es ist also gezeigt, daß sehr wohl ein Moment um die Rosenachse entstehen kann, und zwar als Vektordifferenz zweier Momente, von denen das eine seine Größe und Richtung beibehält (Gr), das andere (das des Andruckes) vorwiegend seine Richtung und in geringem Maße seine Größe ändert.

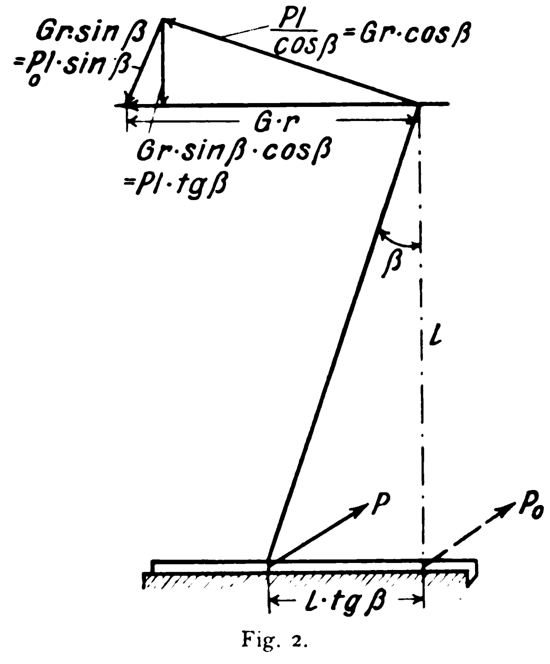


Fig. 2.

Wir zerlegen nun das Moment um die Rosenachse $Gr \sin\beta$ in die beiden Komponenten $Gr \sin^2\beta$ und $Gr \sin\beta\cos\beta$. Die erstere $Gr \sin^2\beta$ scheidet, da β ein kleiner Winkel ist, als eine von höherer Ordnung kleine Größe von der Betrachtung aus. Sie bewirkt lediglich ein sehr geringfügiges Schwanken des schwingenden Systems um die Horizontale, das an der Dämpfung nur insoweit mitwirkt, als dabei etwas Energie in den Kardanzapfen vernichtet wird. Zur wirklichen Dämpfung trägt das Moment so gut wie gar nicht bei. Dagegen ist die Größe $Gr \sin\beta\cos\beta$ das eigentliche dämpfende Drehmoment; es wirkt um die Vertikale. Unter Berücksichtigung von Gl. (7) und (7a) haben wir

$$Gr\sin\beta\cos\beta = P_0 l \sin\beta\cos\beta = \frac{Pl}{\cos^2\beta}\sin\beta\cos\beta = Pl\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Dies ist genau das Moment, das der Andruck um die Vertikale besitzt. Es ist ohne weiteres anschaulich, daß die Rosenachsenspitze, die die von Herrn M. beschriebene Lemniskate durchfährt, auf ihrem Wege beständig den Druck P senkrecht zu der Ebene, die von Rosen- und Kreiselachse gebildet wird, erleidet. Sie muß also dauernd das Moment $Pl\,\mathrm{tg}\,\beta$ überwinden, bzw. die Leistung $Pl\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}$ abgeben. Das ist das gleiche Moment bzw. die gleiche Leistung, die wir schon nach Ableitung der Gl. (6) diskutierten. Nur stand dort konsequenterweise β an Stelle von $\mathrm{tg}\,\beta$, weil die Gleichungen (1)—(6) für kleine Winkel aufgestellt waren.

Wenn der Wendemotor abgeschaltet wird, kann die Kraft P keinen Weg mehr machen, infolgedessen findet dann keine Energieabgabe und keine Dämpfung mehr statt (vgl. Anm. 1 des Herrn M.)

Wir glauben nun einwandfrei bewiesen zu haben, daß das dämpfende Drehmoment um die Vertikale wirkt, der Elevation proportional ist und daß es sein Zustandekommen der Vektordifferenz zweier Momente verdankt, die bei nicht elevierter Kreiselachse nach Größe und Richtung entgegengesetzt gleich sind, von denen aber bei einer Elevation das eine unverändert bleibt, das andere vorwiegend seine Richtung ändert.

Aus der Existenz des untersuchten Drehmomentes lassen sich noch weitere Schlüsse über das Verhalten des Kreiselkompasses des Herrn M. ziehen. Die Gl. (3) und (4) gelten nach wie vor. Wir berechnen daraus die Ruhelage des Kompasses $\left(\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = 0\right)$ und erhalten

$$\beta_0 = \frac{\Theta o\omega\sin\varphi}{mga} \qquad (8)$$

$$\alpha_0 = -\frac{Pl\beta_0}{\Theta o\cdot\omega\cos\varphi} = -\frac{Pl}{mga}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (9)$$

Gl. (8) stellt die Elevation des eingeschwungenen Kompasses dar; eine solche muß bei allen Kreiselkompassen auftreten. Gl. (9) dagegen sagt aus, daß die Kreiselachse sich nicht in den Meridian ($\alpha_0 = 0$) einstellt, sondern bei positiver Elevation nach Osten zu von ihm weg gedrängt erscheint. Das ist die Folge des dämpfenden Drehmomentes $Pl\beta_0$. Einen solchen vom Dämpfungsmoment und von der geographischen Breite φ abhängigen Fehler pflegt man als Breitenfehler zu bezeichnen. Für eine bestimmte nördliche Breite kann man ihn dadurch beseitigen, daß man das Nordende der Kreiselachse mit einem kleinen Übergewicht belastet, bis $\beta_0 = 0$ ist; dann wird auch $\alpha_0 = 0$. In einer anderen Breite tritt der Fehler dann wieder auf, da ja auch β_0 von φ abhängt. Im

Laboratorium kann man die Existenz des Breitenfehlers sehr leicht dadurch zeigen, daß man auf das Nordende der Kreiselachse verschiedene Gewichte auflegt. Jedem Gewicht entspricht ein bestimmtes β_0 und damit auch ein Breitenfehler α_0. Ebenso kann man durch Vergrößern des Aufsatzgewichtes G den Andruck P und damit α_0 vergrößern. An einem zu Experimentierzwecken dem M.schen Kreiselkompaß nachgebildeten Instrument sind auf unsere Veranlassung derartige Versuche gemacht worden, die dann auch die Existenz des Breitenfehlers so gezeigt haben, wie die Theorie es verlangt. Außerdem zeigen die Versuche, daß die Dämpfung umso größer ist, je größer der Andruck gemacht wird. Auch die Schwingungsdauer ändert sich der Dämpfung entsprechend. Es ist leicht eine aperiodische Schwingung herbeizuführen. Damit dürften unsere Darlegungen auch durch das Experiment gesichert sein.

Wenn man ausrechnet, welcher Breitenfehler eintreten müßte, wenn die Dämpfung in der Weise vor sich ginge, wie sie Herr M. beschreibt, würde man, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, erhalten $\alpha_0 = -\beta_0\, \delta\psi \cdot \operatorname{tg}\varphi$, also einen stets kaum meßbar kleinen Winkel. Man könnte ja überdies auch dem Wendemotor nachhelfen und $\delta\psi = 0$ machen, dann wäre α_0 exakt $= 0$. Wenn Herrn M.s Dämpfung um die Elevationsachse wirksam wäre, müßte der Breitenfehler ebenfalls stets exakt gleich 0 sein; das Experiment beweist ihn aber.

Berlin-Dahlem, Mai 1928.

(Eingegangen 3. Juni 1928.)

Zur Frage der starken Elektrolyte und der Spannungsabhängigkeit der Leitfähigkeit.

Von Georg Joos.

(Bemerkung zu der Arbeit von Herrn A. Gyemant[1]).

Vor kurzem berichtete Herr Gyemant in dieser Zeitschrift über interessante Versuche an schlecht leitenden Lösungen starker Elektrolyte, welche in engem Zusammenhang stehen mit der im Jenaer Institut experimentell und theoretisch untersuchten Spannungsabhängigkeit der Leitfähigkeit. Sein Versuch über die Änderung der Leitfähigkeit quer zu einem bereits einen gut meßbaren Wien-Effekt hervorrufenden starken Feld ist geradezu als experimentum crucis für die Frage nach der Ursache des Wien-Effekts anzusehen. Dagegen erscheint die dort vorgeschlagene Erklärung des Ausbleibens einer Änderung der Querleitfähigkeit gezwungen. Danach sollten nämlich assoziierte Ionenpaare durch das Feld zu Ladungsträger werden, welche aber nur in Richtung des großen Feldes wirksam sind. Zu so gewagten Hypothesen wird man indes erst nach Erschöpfung aller andern Erklärungsmöglichkeiten greifen. Dies braucht man aber keineswegs, denn man wird den Tatsachen ebenso gerecht, wenn man auf folgenden Sätzen aufbaut:

1. In den von Herrn Gyemant untersuchten Lösungen mit niedriger Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und in stärker konzentrierten wässerigen Lösungen soll — wie übrigens auch in den Arbeiten von Debye und Hückel stets betont wurde — die Existenz undissoziierter Moleküle durchaus nicht verneint werden. Dabei mag es sich sogar um nichtpolare Bindungen im Sinne der Quantenmechanik handeln; denn ein einfacher elektrostatischer Zusammenhalt würde das Auftreten von definierten Molekülen nicht geben, sondern nur immer wieder die Debyeschen „Ionenatmosphären".

2. Die wirklich vorhandenen Ionen erzeugen durch ihre elektrostatische Beeinflussung stets die Debyeschen Bremskräfte[1]) und da nur die freien Ionen zur Leitfähigkeit beitragen, muß an ihnen der von Frl. Blumentritt[2]) berechnete Spannungseffekt auftreten; d. h. für die relative Änderung der Leitfähigkeit in großen Feldern ist es ganz gleichgültig, wieviel undissoziierte Moleküle außerdem noch vorhanden sind. Damit ist die Erklärung der von Herrn Gyemant gefundenen Erscheinung bereits gegeben.

3. Nachdem es Herrn Wien gelungen ist, den für außerordentlich hohe Felder eintretenden Grenzwert der Leitfähigkeit festzustellen und andererseits aus neuen Arbeiten von Debye und Falkenhagen[3]) hervorgeht, daß wegen der endlichen Ausbildungszeit der Ionenatmosphären bei unendlich großer Feldstärke alle Ionenkräfte verschwinden — die Entwicklungen von Frl. Blumentritt, welche von kleinen Feldern ausgehen, ergeben dies nicht zwingend — besteht prinzipiell die Möglichkeit den wahren Dissoziationsgrad zu ermitteln, nämlich als das für unendlich große Feldstärken geltende Verhältnis der Leitfähigkeit bei kleiner Verdünnung zu denjenigen bei unendlicher Verdünnung.

1) Physik. Zeitschr. 29, 289, 1928.

1) Dieser Gedanke ist von Herrn Gyemant l. c. S. 292, Zeile 4, zwar ausgesprochen, aber nicht verwertet worden.

2) M. Blumentritt, Ann. d. Phys. **85**, 812, 1928.

3) Vorgetragen auf der Tagung des Gauvereins Sachsen-Thüringen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 2. 6. 1928.

Jena, Physikalisches Institut, Juni 1928.

(Eingegangen 10. Juni 1928.)

Polychroismus und Orientierung der Ionen in den Kristallen der seltenen Erden.

Von Rita Brunetti.

1. Bekanntlich sind die Kristalle der seltenen Erden polychroitisch, d. h., sie liefern je nach der Beobachtungsrichtung und der Polarisation der Einfallsstrahlen verschiedene Absorptionsspektren. Nach der Lektüre der klassischen Arbeit von Henri Becquerel (1) über diesen Gegenstand und nach der Untersuchung der kristallisierten Salze, die ich der Liebenswürdigkeit der Professoren L. Rolla und L. Fernandes verdanke, glaube ich behaupten zu können, daß der Polychroismus der kristallinischen Salze der seltenen Erden von der Orientierung einer Achse abhängt, die mit der Struktur der Ionen in bezug auf die Symmetrierichtungen des kristallinischen Gefüges verknüpft ist.

Auf die Elektronen der unvollständigen Niveaus, N (443), N (444), gehen die Absorptionslinien der dreiwertigen Ionen der seltenen Erden in festem oder gelöstem Zustand zurück (2). Unter der Einwirkung der äußeren Strahlung gehen diese Elektronen vom Grundquantenzustand oder einem ihm angenäherten Quantenzustand über in einen energetisch höheren Zustand. Die auf diese Weise erzeugten Absorptionslinien werden sich daher genau so verhalten wie die von den Gasatomen oder -ionen absorbierten Linien.

Die von einem Gasatom oder -ion in natürlichem Zustand ausgehenden monochromatischen Strahlen (und die Strahlen, die sie absorbieren) sind stets polarisiert (3): entweder geradlinig mit Schwingung parallel zur Achse des Gesamtmoments des Atoms (oder Ions) — innere Quantenzahl j, Übergang $\Delta j = 0$ — oder aber zirkular mit Rotation des Lichtvektors nach rechts und links in der zur Achse des Gesamtmoments des Atoms orthogonalen Ebene — Übergänge $\Delta j = \pm 1$ —. Die Frequenzen in den drei Fällen sind natürlich verschieden. Nur maskiert die chaotische Verteilung der Atome oder der Ionen diesen Anfangspolarisationszustand der Strahlung.

Führt man jedoch einen von außen her orientierend wirkenden Faktor ein (beispielsweise ein homogenes magnetisches Feld), so kann man mit Leichtigkeit den Anfangspolarisationszustand der Strahlung aufdecken, wobei die Polarisation diesmal in bezug auf die Richtung der Kraftlinien des Feldes erfolgt (Feldquantenzahl m, Übergänge $\Delta m = 0$, $\Delta m = \pm 1$).

Allgemein können wir in diesem Sinne sagen, daß ein Gas, welches der Wirkung eines (magnetischen oder elektrischen) Feldes unterworfen wird, das hinsichtlich einer Achse symmetrisch ist, polychroitisch ist, weil es in der zur Symmetrielinie des Feldes transversalen und longitudinalen Richtung verschiedene Spektren liefert, und bei den beiden Richtungen sind die Frequenzen der Strahlen, die man mit Analysatoren des Polarisationszustandes der emittierten oder absorbierten Wellen erblickt, nicht die gleichen.

Der Polychroismus der Kristalle, um die es sich hier handelt, kann uns daher die Orientierung der Ionen aufzeigen, welche die Knoten des Kristallgitters besetzen, wenn es gelingt, bei ihnen Polarisationserscheinungen nachzuweisen analog den Erscheinungen, die man von den Strahlen her kennt, die von einem Gas in einem hinsichtlich einer Achse symmetrischen, magnetischen oder elektrischen Feld emittiert oder absorbiert werden.

2. Tatsächlich findet man bei Praseodymsulfat-Pentahydrat (monokline Kristalle in Gestalt feiner Nadeln) (4) unter Beobachtung transversal zur Hauptachse des Kristalls in polarisiertem Licht nach zwei orthogonalen Richtungen hin (parallel und senkrecht zur Achse) die Strahlen ($\lambda_{\parallel}$ und $\lambda_{\perp}$) der Tabelle I (Fig. I, a) und b)).

Dreht man den Kristall in bezug auf den Polarisator, so treten die Linien des parallelen Spektrums zwischen den Linien des orthogonalen auf, wobei gleichzeitig deren Leuchtkraft gedämpft erscheint. Unter Beobachtung längs der Hauptachse treten die $\lambda_{\perp}$ entweder allein oder stärker als die $\lambda_{\parallel}$ auf, selbst wenn der Polarisator entfernt wird. Die Spuren der $\lambda_{\parallel}$ sind auf die Unvollkommenheit der Experimentiervorrichtung zurückzuführen. Wenn man die Kristalldicke noch mehr verringert, so sieht man tatsächlich, wie die Spuren dieser letzteren in höherem Maße schwächer werden als die vorhandenen $\lambda_{\perp}$.

Bei einer Temperatur nahe der von flüssiger Luft erhält man dieselben Polarisationserscheinungen, obwohl das Intensitätsverhältnis der Linien sich geändert hat und zahlreiche Strahlen eine starke Verschiebung nach dem Rot hin erleiden. Eine Linie scheint, besonders bei der Temperatur von flüssiger Luft, beiden Spektren gemein zu sein (λ 4728 Å); bis jetzt konnte noch nicht festgestellt werden, ob sie tatsächlich depolarisiert ist, ob sie einer besonderen Polarisationsrichtung angehört, oder endlich, ob sie in zwei voneinander getrennte Strahlungen auflösbar ist, die wie die anderen zueinander orthogonal polarisiert sind.

3. Mit Neodymbromat (Dicke ungefähr 0,2 mm, parallel oder senkrecht zur Hauptachse des monoklinen Kristalls gespaltene Blättchen bei gewöhnlicher Temperatur) erzielt man die Ergebnisse der kleinen Tabelle II im gelben Spek-

Tabelle I.

Absorptionsspektrum von Praseodymsulfat-Pentahydrat (natürlicher Kristall, Dicke von der Ordnung 0,5 mm).

Beobachtung transversal zur Achse — bei gewöhnlicher Temperatur $\lambda_{\parallel}$	bei gewöhnlicher Temperatur $\lambda_{\perp}$		bei der Temperatur der flüssigen Luft $\lambda_{\parallel}$	bei der Temperatur der flüssigen Luft $\lambda_{\perp}$
5991			**5997**	
	5975			**5979**
5931			5938	
	5903			**5908**
				5901
5982		I	**5892**	
	5877			5877
				5862
(5785)			5785	
	5748			**5748**
			5727	
			5240	
	5222	II		**5224**
5211			**5211**	
	4841			**4846**
			30	
4824		III	**4826**	
			24	
	4815			**4815**
				4809
4725			**4735**	
	4719			**4728**
	4704			**4707**
				4703
4693			**4696**	
		IV	4688	
	4675			4677
				4658
	4653			**4650**
			4621	
			4597	
			4589	

Im Violett findet sich dann noch eine fünfte Gruppe, die sehr kompliziert und schwer zu entziffern ist.

Tabelle II.

Gelbes Gebiet des Absorptionsspektrums von Neodymbromat bei gewöhnlicher Temperatur (Blättchen von ungefähr 0,4 — 0,2 mm Dicke).

Beobachtung transversal zur Achse $\lambda_{\parallel}$	Beobachtung transversal zur Achse $\lambda_{\perp}$	Longitudinalbeobachtung $\lambda_{\perp}$
5791		
5779		
	5754	**5754**
	5741	**5741**
5723		(5723) schwach

tralgebiet. Die Linien 5791 Å und 5779 Å des zur Achse parallelen Spektrums sind, obgleich von derselben Intensität wie die Linien 5754 Å und 5741 Å, aus dem Longitudinalspektrum vollständig verschwunden; man bemerkt nur eine schwache Spur der Linie 5723 Å (Fig. 2a) und b)).

In den anderen Spektralgebieten bei Laboratoriumstemperatur ist der Effekt weniger glänzend; bei der Temperatur von flüssiger Luft kann man jedoch erkennen, daß die zur Hauptachse des Kristalls normalen Strahlungen nicht mit den parallelen zusammenfallen oder zumindest anders aussehen. Während sie im einen der beiden Spektren fein auftreten, sind sie im anderen breit und hinsichtlich der Strahlungen des ersten Spektrums, die ihnen entsprechen, symmetrisch angeordnet (Fig. 3, a)).

Wegen der Analogie im Aussehen will ich hier gewisse Strahlen des blauen Spektralgebietes bei Praseodymsulfat-Oktohydrat anführen: sie scheinen in Tripletts oder Quadrupletts aufgespalten zu sein, die durch die Polarisation und die Anordnung, wenn nicht schon durch die relative Intensität der Linien in überraschender Weise an den klassischen transversalen Zeemaneffekt erinnern (Fig. 3b)). Natürlich will ich mit der Anwendung dieses Ausdrucks nicht zur Interpretation meiner Beobachtungen übergehen, sondern sie lediglich mit Hilfe eines bekannten und anschaulichen Bildes beschreiben.

Beobachtet man die Bromatkristalle in natürlichem Zustand (ungefähr 1 mm Dicke), so sieht man, wie ein anderes Multiplett sehr feiner und ausgeprägter Strahlen erscheint, das mit dem vorhergehenden Multiplett überkreuzt auftritt ($\lambda_{\parallel}$ 5710, 5733, 5763, 5798 Å, $\lambda_{\perp}$ 5732, 5763 Å). Auf den ersten Blick hat es den Anschein, als verhalte es sich genau wie das Multiplett, von dem schon die Rede war und das bei sehr geringen Dicken isoliert erscheint; es ist mir jedoch nicht möglich, die Sache als sicher hinzustellen, und zwar infolge der Schwierigkeiten der Untersuchung bei Verwendung sehr unvollkommener Kristallproben.

4. Trotz der verschiedenen Vorbehalte, die ich bezüglich meiner Beobachtungen und deren Ergebnisse machen mußte, glaube ich den Schluß ziehen zu können, daß in den Spektren der dreiwertigen Ionen der seltenen Erden, die einem symmetrischen Kristallgitter angehören, folgende Frequenzen nachweisbar sind:

a) Frequenzen, die geradlinigen Schwingungen in der Richtung nahezu der Hauptkristallachse entsprechen;
b) Frequenzen, die sich im allgemeinen von den vorigen unterscheiden, deren Schwin-



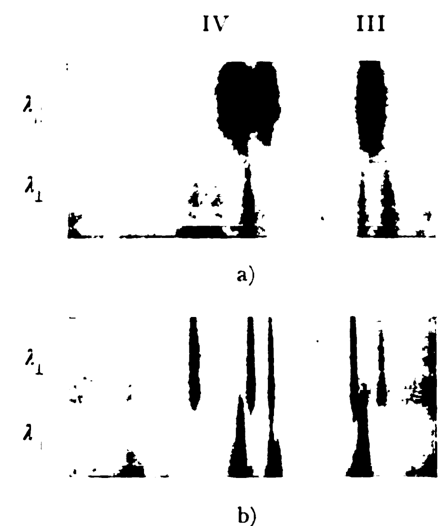


Fig. 1. Praseodymsulfat-Pentahydrat
Transversale Beobachtung
a) bei gewöhnlicher Temperatur (Gruppe III und IV auf Tabelle I),
b) bei einer Temperatur nahe der von flüssiger Luft (dieselben Gruppen).

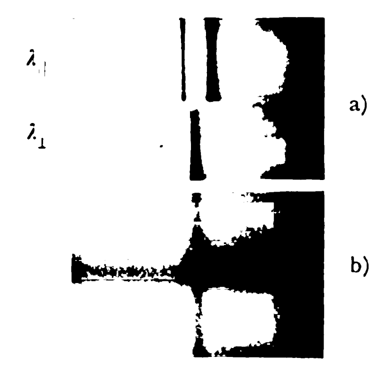


Fig. 2. Neodymbromat
a) Transversale Beobachtung ($\lambda_{\parallel}$, $\lambda_{\perp}$);
b) Longitudinale Beobachtung ($\lambda_{\perp}$).

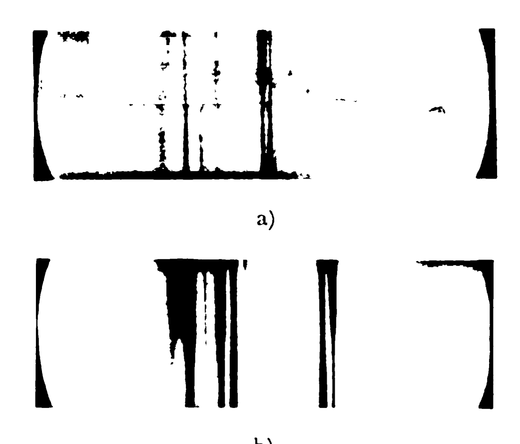


Fig. 3.
a) Neodymbromat bei einer Temperatur nahe der von flüssiger Luft (grünes Gebiet).
b) Praseodymsulfat-Oktohydrat bei einer Temperatur nahe der von flüssiger Luft (blaues Gebiet).

gungen sich in der zur Hauptachse nahezu orthogonalen Ebene vollziehen, und die ferner in dieser Ebene stets in zwei geradlinige Schwingungen zerlegbar sind, welche zueinander senkrecht stehen und gleiche Intensität aufweisen.

Die Frequenzen, die von Zirkularwellen absorbiert werden könnten, wenn das Lichtbündel den Kristall in zweckdienlicher Richtung durchquert, müssen unter denen von Typus b gewählt werden.

Leider gestatten es die zweiachsigen Kristalle nicht, die mir in diesem Augenblick allein zur Verfügung stehen, die zur Fortsetzung dieses Teiles der Untersuchung notwendigen Bedingungen herzustellen; übrigens glaube ich nicht, daß auf diese Weise positive Ergebnisse erzielt werden könnten, selbst nicht bei Verwendung einachsiger Kristalle unter Longitudinalbeobachtung.

Bei den einachsigen Kristallen unterschied Henri Becquerel ein ordentliches und ein außerordentliches Spektrum (5). Diese beiden Spektren weisen zwar gemeinsame Linien auf, jedoch finden sich unter diesen Linien manche besonders intensive im außerordentlichen Spektrum, während andere wiederum nur im ordentlichen auftreten. Diese letzteren entsprechen hinsichtlich der Symmetrieachse des Kristalls normalen Schwingungen, und man beobachtet sie selbst ohne Analysator, wenn man das Licht durch den Kristall in der Längsrichtung hindurchgehen läßt; die ersteren hingegen entsprechen Schwingungen parallel zur Achse.

Selbst ohne eine direkte Untersuchung der von Henri Becquerel erforschten einachsigen Kristalle glaube ich nicht, daß die Behauptung verfrüht ist, nämlich die von mir eingeführte Unterscheidung bezüglich der bei den zweiachsigen Kristallen beobachteten Strahlungen gelte ebensogut für die von Henri Becquerel untersuchten einachsigen; die beiden Spektren gemeinsamen Linien hängen vor allem von den Experimentierbedingungen ab (große Dicke der Blättchen, den Kristall nicht parallel durchquerendes Licht usw.).

Tatsächlich aber haben weder Henri Becquerel noch Jean Becquerel in Verfolg ihrer Forschungen über die magnetooptischen Erscheinungen, die bei den natürlichen einachsigen Kristallen, welche mit Spuren seltener Erden affiziert sind, auftreten, je etwas beobachtet, was die Hypothese rechtfertigen könnte, die eventuelle und wahrscheinliche zirkulare Polarisation der zur Achse normalen Strahlen sei in dem einen äußeren Feld nicht unterworfenen Kristall „definiert".

Unter normalen Bedingungen kann der Charakter der Ionenabsorption je nach den in einem bestimmten Sinn (rechts- oder linksläufig) zirkularen Wellen in den Kristallen maskiert sein durch die Anwesenheit von Ionen in gleichen, entgegengesetzt disponierten Anfangs- und Endenergiezuständen. Wir wissen beispielsweise, daß in einem hinsichtlich einer Achse symmetrischen elektrischen Feld die Quantenübergänge $m \rightarrow (m-1)$, $-m \rightarrow (m-1)$ zwei Zirkularwellen von gleicher Frequenz entsprechen, von denen die eine von rechts nach links, die andere von links nach rechts gerichtet ist (7).

Jean Becquerel stellte jedoch bei transversaler Beobachtung fest, daß die meisten Strahlen des ordentlichen Spektrums der einachsigen Kristalle (Schwingungen in der zur kristallographischen Achse normalen Ebene) sich in ein einfaches, symmetrisches Dublett zirkularer Schwingungen — die eine rechts und die andere links — aufspalten, wenn man den Kristall in ein Magnetfeld mit der Achse parallel zu den Kraftlinien bringt. Das ist genau das, was man zu erwarten hat, wenn man einen doppelten Zirkularoszillator, d. h. der sich aus einem Rechtsrotator, welcher einem Linksrotator übergeordnet ist, zusammensetzt, der Einwirkung eines homogenen Magnetfeldes unterwirft, wobei die Rotationsebene zu den Kraftlinien des Feldes normal liegt. Die Linien des parallelen Spektrums hingegen treten im allgemeinen in unsymmetrische Dubletts aufgespalten auf oder aber erleiden eine Verschiebung nach einem der beiden Enden des Spektrums hin.

5. Die Anordnung der Lichtvektoren in einer zu einer im voraus festgelegten Richtung orthogonalen Ebene und diese zuletzt angeführten Erwägungen begünstigen die Vermutung, daß die Strahlen vom Typus b im Ion längs der Kristallachse von zirkular polarisierten Wellen absorbiert werden können. Dieser Umstand, zusammen mit dem bereits festgestellten Vorhandensein geradlinig polarisierter Strahlungen, gestattet uns die Annahme, daß die Ionen im Innern des Kristallgitters, das Symmetrie aufweist, oft sehr einfach orientiert sind; in den einachsigen Kristallen hätte demnach die Orientierungsachse die Richtung der kristallographischen Achse, das heißt, parallel entweder der Achse des Gesamtmoments des Ions oder der auf ein innermolekulares Feld sich beziehenden Achse; bei den beobachteten zweiachsigen Kristallen kann man behaupten, daß es Ionen gibt, welche dieselbe Orientierung hinsichtlich der Hauptkristallachse aufweisen, ohne daß damit im Augenblick gesagt sein soll, daß nicht vielleicht auch noch andere Orientierungsmöglichkeiten vorhanden sein könnten.

Auf jeden Fall ist die Orientierung, von der



hier die Rede ist, keine absolute, und zwar infolge der thermischen Bewegungen der Elemente des Kristallgitters.

P. Debye (9) führt die Hypothese einer Orientierungsenergie der Moleküle ein, deren Natur nicht bestimmt wird, um auf thermodynamischem Wege die Weißsche Korrektion des Gesetzes von Curie über die magnetische Suszeptibilität der paramagnetischen Substanzen zu erklären. Diese Energie dominiert mit der thermischen Bewegung über die Molekularorientierung im Augenblick der Magnetisierung.

Das Vorhandensein einer molekularen Orientierungsenergie in den Kristallen erscheint natürlich, und zwar auf Grund des Gefüges selbst, dem die Moleküle angehören. Die aus meiner Arbeit gezogenen Schlüsse enthalten weitere Unterlagen für ihre Existenz; überdies geht aus ihnen hervor, daß die Orientierung nicht nur für das Molekül als Elementareinheit charakteristisch ist, sondern auch für dessen Aufbauelemente, im besonderen für dessen Kation im Gesamtkomplex des kristallinischen Gefüges. Diese Tatsache steht in Übereinstimmung mit dem, was man über die magnetische Suszeptibilität der Anionen weiß; im Vergleich zu der Suszeptibilität der Kationen der seltenen Erden (10) kann man sie im allgemeinen vernachlässigen; infolgedessen muß bei dem Korrektionsausdruck des Curie-Weißschen Gesetzes die Orientierungsenergie der Kationen vorwiegen.

Die Beobachtungen über den Polychroismus der Kristalle der Salze der seltenen Erden werden einst auch den Schlüssel zur Deutung der komplexen Absorptionsspektren der farbigen Ionen der seltenen Erden liefern können, wenn die Natur und der Ursprung der Orientierungsenergie erforscht sind.

Für den Augenblick können wir nur sagen, daß, wenn x eine auf die Orientierung des Ions bezügliche Quantenzahl ist ($x = j$ oder $x = m$), die geradlinig polarisierten Strahlungen dem Übergang $\Delta x = 0$ und die zirkular polarisierten $\Delta x = \pm 1$ entsprechen, und zwar unter Koinzidenz der Wellen $x \rightarrow (x - 1)$ und $-x \rightarrow -(x - 1)$.

Diese zuletzt angeführte Tatsache, die Orientierungsrichtung selbst und gewisse spektroskopische Beobachtungen bezüglich der Variationen der Spektren seltener Erden unter verschiedenartigen Bedingungen scheinen auf die Anwesenheit eines elektrischen Molekularfeldes hinzuweisen, das im kristallographischen Sinne hinsichtlich der Hauptkristallachse symmetrisch ist; dies steht auch in Übereinstimmung mit den neuesten Ansichten über die Natur des innermolekularen Feldes (11), das von Weiß angenommen wurde, um die Korrektion an dem einfachen Curieschen Gesetz über die magnetische Suszeptibilität der paramagnetischen Substanzen zu erklären.

Ich behalte mir vor, auf den Gegenstand zurückzukommen, wenn die Voruntersuchungen, welche im Mittelpunkt dieser Ausführungen standen, vervollständigt und erweitert werden können.

(Aus dem Französischen von stud. phil. Walther Hinz.)

Literatur.

1) Ann. de Chimie et Physique VI, S. 170, 1888; siehe auch Dufet, Bulletin de la Société Française de Minéralogie **24**, 373, 1901.
2) Ladenburg, Naturwiss. **8**, 5, 1920.
3) F. Hund, Linienspektren und periodisches System der Elemente. Berlin 1927.
4) Groth, Chemische Kristallographie, Bd. 2.
5) a. a. O.
6) Le Radium **4**, 49, 107, 328, 1907; **5**, 5, 227, 1908; siehe auch H. du Bois und G. J. Elias, Ann. d. Phys. **27**, 233, 1908.
7) Geiger und Scheel, Handbuch der Physik, Abschnitt über „Quanten" von M. Pauli, **23**, Berlin 1926.
8) a. a. O.
9) P. Debye, Physik. Zeitschr. **27**, 67, 1926; B. Cabrera, Journal de Physique et le Radium, **8**, 257, 1927.
10) H. Decher, Ann. d. Phys. **79**, 324, 1926.
11) Marx, Handbuch der Radiologie, Bd. 6, Abschnitt von P. Debye, Leipzig 1924; Weiß und Foex, Le Magnetisme. Paris 1926.

Ferrara, Mai 1928.

(Eingegangen 25. Mai 1928.)

Über die freie Weglänge des Moleküls und den Koeffizienten der inneren Reibung in fluiden Stoffen.

Von N. Gerasimov.

Die Zahl der Stöße, welche die Moleküle auf 1 cm² Wand (des Gefäßes, in welchem sich das Gas befindet) im Laufe einer Sekunde ausüben, ist proportional $\frac{p}{mc}$, wo

p — der Gasdruck,

m — die Molekül-Masse,

c — ihre durchschnittliche Geschwindigkeit ist.

Die Oberfläche eines Moleküls ist πd^2. Letzteres muß längere Zeit eine mittlere Lage beibehalten, wie es z. B. bei Teilchen von Kolloiden stattfindet. Jeder Stoß muß in kurzer Zeit von der entgegengesetzten Seite durch einen anderen gleichen Stoß kompensiert werden, daher muß die Zahl der Stöße, welche 1 cm² Oberfläche des

Moleküls im Laufe einer Sekunde empfängt, proportional $\frac{p}{mc}$ sein. Infolgedessen erfährt das Molekül in einer Sekunde

$$z = k_1 \pi d^2 \frac{p}{mc} \text{ Stöße}^{1)};$$

das ist die Stoßzahl des Moleküls.

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit der bekannten Gleichung

$$\frac{N m c^2}{3 R T} = 1,$$

so erhalten wir

$$z = k_2 \cdot \pi d^2 N c \frac{p}{RT}.$$

Benutzen wir die Zustandgleichung des Gases in der Form[2] $p(v - b) = RT$, so erhält man

$$z = k_2 \pi d^2 n c \cdot \frac{v}{v - b}.$$

Daraus für die Weglänge

$$L = k_3 \cdot \frac{1}{\pi d^2 n} \cdot \frac{v - b}{v}.$$

Bei großer Verdünnung geht die Gleichung in

$$L = k_3 \cdot \frac{1}{\pi d^2 n}$$

über.

Nimmt man an, daß b proportional dem Eigenvolum des Moleküls $\frac{\pi d^3}{6}$ ist, so erhält man

$$L = k \cdot d \cdot \frac{v - b}{b}. \qquad (1)$$

Zu einem ähnlichen Ausdruck gelangen wir auch auf anderem Wege, analog der Ableitung der Zustandsgleichung von Reinganum.

Wie bekannt, muß jede wissenschaftliche Ableitung der Zustandsgleichung auf der Virialgleichung von Clausius

$$V_{\text{Ab}} + V_{\text{An}} + 3RT = 3pv \qquad (2)$$

fußen.

Hierbei ist unter

V_{Ab} — das Virial der Abstoßungskräfte

V_{An} — das Virial der Anziehungskräfte verstanden,

während das Virial, genau genommen

$$\sum (X_x + Y_y + V_z) \text{ ist.}$$

Diese Summe wird auf alle Moleküle des Fluides ausgedehnt, wobei X, Y, Z die Komponenten der momentanen Kräfte sind, welche auf die Moleküle wirken, und x, y, z ihre Koordinaten.

1) k_1 ist ein Zahlenkoeffizient, ebenso wie k_2; k_3; k.

2) Also eine Abwesenheit innerer Anziehungskräfte vorausgesetzt.

Wenn zwei Moleküle mit der Kraft S_ϱ aufeinander wirken, ist es nicht schwer zu beweisen, daß für dieses Paar das Virial gleich $S_\varrho \cdot \varrho$ wird, wo ϱ — der Abstand der Molekülzentren ist (Fig. 1).

Um das Virial der gegebenen Kräfte zu bilden, genügt es, die Zahl der Paare n_ϱ festzustellen, ein Produkt

$$n_\varrho \cdot S_\varrho \cdot \varrho$$

zu bilden und alle solche Produkte zu summieren

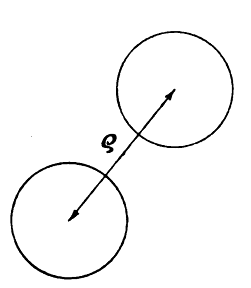


Fig. 1.

in den Grenzen, in welchen diese Größe variiert werden kann, oder, mit anderen Worten, die Summierung

$$\sum n_\varrho \cdot S_\varrho \cdot \varrho$$

auszuführen.

Um das Virial der Abstoßungskräfte zu bilden, müssen wir die Zahl der Paare, zwischen welchen diese Kräfte wirken, feststellen, zu welchem Zwecke wir die Stoßzahl der Moleküle in der Zeiteinheit zu Hilfe nehmen[1])

Nennen wir die Stoßzahl der Moleküle z, so wird die ganze Zahl der Stöße aller Gasmoleküle im Laufe einer Sekunde gleich sein Nz, und folglich finden im Zeitraum dt

$$N \cdot z \cdot dt$$

Stöße statt.

Daher wird die Anzahl der Molekülpaare, die sich im Laufe der Zeit dt bis zum Berühren nähern

$$\frac{1}{2} N z dt$$

sein.

In diesem Zeitraum werden die Moleküle jedes dieser Paare sich annähernd eine Strecke gleich $d\varrho$, die sie voneinander trennt, oder eine kleinere durchlaufen. Im selben Zeitraum dt werden in allen den Paaren, deren Zusammenstoß schon im vorangegangenen Zeitraum dt sich abspielte, die Moleküle sich voneinander entfernen und die gleiche Strecke $d\varrho$ in entgegen-

1) Hierbei ist zu bemerken, daß in diesem Falle das Resultat der Ableitung unabhängig von der Anwesenheit der Anziehungskräfte ist.

gesetzter Richtung durchlaufen, daher wird die Anzahl der Paare, bei welchen die Zentren auf einer größeren Entfernung als der molekuläre Durchmesser d und kleineren als $d + d\varrho$ befinden

$$2 \cdot \frac{1}{2} Nz\,dt = N \cdot z \cdot dt.$$

Setzen wir die durchschnittliche Geschwindigkeit, mit welcher die Zentren der Moleküle sich nähern,

$$c_\varrho = \frac{d\varrho}{dt}$$

so

$$N \cdot z \cdot dt = \frac{Nz}{c_\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot dt = \frac{Nz}{c_\varrho} \cdot d\varrho = \frac{Nz}{c_0} \cdot \frac{c_0}{c_\varrho} \cdot d\varrho$$

wo $\bar{c}_0$ — die mittlere relative Geschwindigkeit ist.

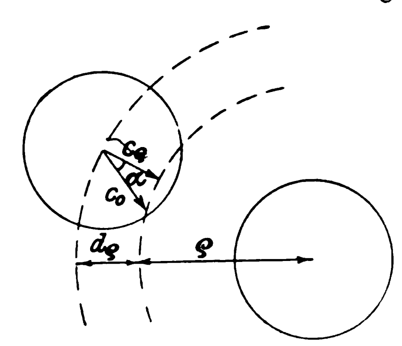


Fig. 2.

Aus der Fig. 2 ist zu ersehen, daß

$$\frac{c_0}{c_\varrho} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Der Mittelwert dieser Größe, in den Grenzen von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bis 0, ergibt sich wie weiter gezeigt wird zu

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)_{\text{Mittl.}} = 2.$$

Diesen mittleren Wert leiten wir ab unter der Voraussetzung, daß alle parallelen Richtungen der relativen Geschwindigkeit gleichwahrscheinlich sind. Zur Bestimmung des Mittelwertes $\frac{1}{\cos\alpha}$ betrachten wir ein Flächenelement $2\pi r \cdot dr$ (Fig. 3), das einem Werte von α entspricht; es ist somit der

$$\frac{2\pi r \cdot dr}{\pi d^2}$$

Teil der ganzen Menge aller möglichen α. Da aber

$$r = d \cdot \sin\alpha\,; \quad dr = d \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha,$$

so ist

$$\frac{2\pi r \cdot dr}{\pi d^2} = \frac{2\pi d \cdot \sin\alpha \cdot d \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha}{\pi d^2}$$
$$= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha$$

und

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)_{\text{Mittl.}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot d\alpha =$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin\alpha \cdot d\alpha = -2\,[\cos\alpha]_0^{\pi/2} = 2.$$

Es ist also

$$\frac{c_0}{c_\varrho} = 2$$

und die zu ermittelnde Anzahl der Paare

$$\frac{Nz}{c_0} \cdot \frac{c_0}{c_\varrho} \cdot d\varrho = 2\frac{Nz}{c_0} \cdot d\varrho.$$

Wenn wir jedes Molekül zwischen zwei Kugelflächen mit dem Halbmesser d bzw. $d + d\varrho$ einschließen, so werden die Zentren der Molekülpaare sich in der so erhaltenen Kugelhülle befinden, wobei das Potential der Abstoßungskräfte für dieses Volum gleich Null ist. Am Anfang des Zusammenstoßes wird der Abstand der Molekülzentren kleiner als d sein, sie werden in solchem Falle im Volumen der Kugelhüllen mit den Halbmessern d und $d - d\varrho$, bzw. $d - d\varrho$ und $d - 2\,d\varrho$ usf. gelangen, bis endlich die Abstoßungskräfte die kinetische Energie des Molekülpaares überwiegen. Da die Strecke $d\varrho$ im Vergleich zum Durchmesser d verschwindend

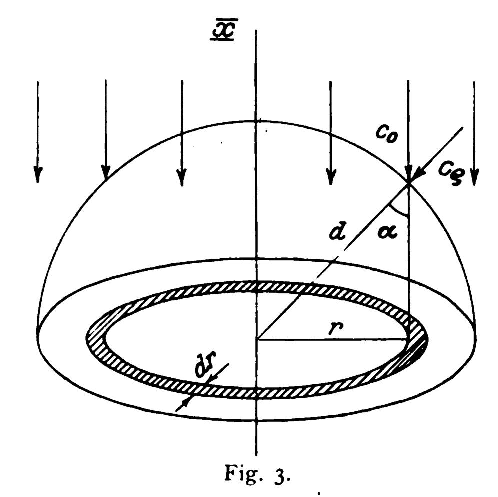


Fig. 3.

klein ist und da die Abstoßungskräfte sehr schnell anwachsen, können wir alle diese Kugelhüllen-Volumen als einander gleich annehmen.

Jedes dieser Volumen wird ein für dasselbe charakteristisches Abstoßungskräftepotential besitzen, welches gleich[1])

$$-\frac{1}{m}\int_\varrho^d S_\varrho \cdot d\varrho.$$

1) Lehrbuch der phys. Chemie Prof. Dr. K. Jellinek, Bd. II, S. 163. Verlag 1915.

Daher wird die Zahl der Molekülpaare, welche sich im Bereich des gegebenen Potentials befinden, nach dem Boltzmann-Maxwellschen Gesetz gleich sein

$$n_\varrho = 2 \cdot \frac{Nz}{c_0} \cdot e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_\varrho^d S_\varrho \cdot d\varrho} \cdot d\varrho .$$

Daraus folgt für das Virial der Abstoßungskräfte

$$V_{\mathrm{Ab}} = \sum_{\varrho = d-\delta}^{\varrho = d} n_\varrho \cdot S_\varrho \cdot \varrho$$

$$= 2 \frac{Nz}{c_0} \int_{d-\delta}^{d} S_\varrho \cdot \varrho \cdot e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_\varrho^d S_\varrho \cdot d\varrho} \cdot d\varrho$$

$$= \frac{2Nzd}{c_0} \int_{d-\delta}^{d} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_\varrho^d S_\varrho \cdot d\varrho} \cdot S_\varrho \cdot d\varrho .$$

(Infolge der Enge der Integrationsgrenzen kann ϱ als d vor das Integrationszeichen genommen werden.)

Dieses Integral läßt sich leicht durch die Substitution

$$\int_\varrho^d S_\varrho \cdot d\varrho = y$$

lösen.

Dabei erhalten wir

$$V_{\mathrm{Ab}} = 2 \frac{zd}{c_0} \cdot \frac{Nm\bar{c}^2}{3} = \frac{2zd}{c_0} \cdot RT .$$

Setzt man diesen Wert in die Virial-Gleichung (2) ein, so bekommen wir

$$2 \frac{z}{c_0} \cdot d \cdot RT + 3RT = 3pv - V_{\mathrm{An}},$$

woraus folgt, daß

$$RT = \frac{v}{1 + \frac{2}{3} \frac{z}{c_0} d} \left(p - \frac{V_{\mathrm{An}}}{3v}\right)$$

$$= (v - b)(p + P)$$

und

$$v - b = \frac{v}{1 + \frac{2}{3} \frac{z}{c_0} d}$$

oder

$$z = \frac{3}{2} \frac{c_0}{d} \cdot \frac{b}{v-b} = \frac{3}{2} \frac{\bar{c}_0}{\bar{c}} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{b}{v-b} \cdot \bar{c} \text{ ist.}$$

Folglich ist die freie Weglänge

$$L = \frac{2}{3} \frac{\bar{c}}{c_0} \cdot d \cdot \frac{v-b}{b} \text{ [1]} \qquad (3)$$

Die Formeln, die Reinganum für die Größe „b" und die Weglänge erhalten hat, entsprechen vollständig der in dieser Gleichung (3) gegebenen Funktion. Nach der Zustandsgleichung Reinganums ist

$$\left[p + \frac{a}{v^2} \psi(T)\right] \cdot \frac{v}{1 + \frac{2}{3} \frac{\pi d^3 N}{v} e^{\frac{C}{T}}} = RT .$$

Für die Weglänge leitete er folgende Formel ab

$$L = \frac{v}{\sqrt{2}\pi d^2 N e^{\frac{C}{T}}} .$$

Vergleichen wir unsere Formel der Weglänge, in der wir $\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ substituiert haben, mit der von Reinganum, so ergibt sich

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot d \cdot \frac{v-b}{b} = \frac{v}{\sqrt{2}\pi d^2 N e^{\frac{C}{T}}} .$$

Wenn wir diese Gleichung nach b auflösen und die Differenz $v - b$ bilden, so ist

$$v - b = \frac{v}{1 + \frac{2}{3} \frac{\pi d^3 N}{v} e^{\frac{C}{T}}} .$$

Dieser Ausdruck entspricht vollständig der obengenannten Reinganumschen Beziehung; da ich aber die Zahlenkoeffizienten auf ganz anderer Grundlage bestimmt habe, als es Reinganum macht, so bekräftigt die erhaltene Übereinstimmung die Richtigkeit meiner Annahmen.

Für die Formel der Weglänge kann der Koeffizient der inneren Reibung der Prüfstein ihres Wertes sein. Alle bis jetzt aufgestellten Formeln waren nur bei verdünnten Gasen verwendbar, — die von mir erhaltene Formel muß universell sein. Sie erklärt in der Tat die charakteristischen Eigenschaften dieser Größe sowohl für Gase, als auch für Flüssigkeiten.

Selbst die Formel des Koeffizienten der inneren Reibung, welche von Maxwell gegeben, ist nur für verdünnte Gase gültig, so daß wir die Ableitung Maxwells abändern müssen, um sie universell zu gestalten.

Die Geschwindigkeit, mit der die Bewegungs-

1) Im Falle gleichzeitiger Berührung von 3, 4 usw. Molekülen, läßt sich unschwer erkennen, daß die Gleichung (3) durch die Formel

$$L = \frac{2}{3} \frac{z_0}{z} \cdot \frac{\bar{c}}{c_0} \cdot d \cdot \frac{v-b}{b}$$

ersetzt werden muß, wo z_0 — die Anzahl der Berührungen und z — die Anzahl der Zusammenstöße ist; da aber eine gleichzeitige vielfache Berührung wenig wahrscheinlich ist, so kann praktisch $\frac{z_0}{z} = 1$ angenommen werden.

größe[1]) im Gas sich verteilt, ist größer als die Geschwindigkeit der Diffusion des Stoffes, da beim Zusammenstoß der Moleküle „die Bewegung" aus dem Zentrum des anstoßenden ins Zentrum des angestoßenen Moleküls, sozusagen, überspringt. In diesem Sinne kann man über „Bewegungsfluß" und „Weglänge der Bewegung" sprechen in Gegensatz zum „Stofffluß" und zur „Weglänge des Stoffes" oder des „Moleküls".

Wenn durch die gegebene Fläche $n\xi_x$ Bewegungszentren durchströmen und

n — Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit

ξ_x — Strömungsgeschwindigkeit „der Bewegung" in Richtung der Achse, welche normal zu dieser Fläche ist,

so wird $n\xi_x$ der Bewegungsfluß sein.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Geschwindigkeiten aller Gasmoleküle gleich sind und gleiche Komponenten nach X, Y, Z besitzen, so daß

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 3c_x^2 = c^2; \; c_x = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Der Gasdruck ist gleich dem Produkt des „Bewegungsflusses" und der „Bewegungsgröße", welche jedem „Bewegungs"-Zentrum entspricht.

$$n\xi_x \cdot mc_x = p + P = \frac{RT}{v-b} = \frac{Nmc^2}{3(v-b)}$$
$$= nmc_x^2 \cdot \frac{v}{v-b}.$$

Daraus wird

$$\xi_x = c_x \cdot \frac{v}{v-b}. \tag{4}$$

oder mit anderen Worten die Geschwindigkeit der Fortbewegung der „Bewegungs"-Größe im Gase ist $\frac{v}{v-b}$ mal größer als die Geschwindigkeit der Fortbewegung des Stoffes ist.

Dieser Satz, welcher sehr wichtig bei Anwendung auf einen Stoff im verdichteten Zustande ist, wurde zu allererst von G. Jäger[2]) angezeigt und von Kamerlingh-Onnes bei Ableitung der Formel der Verdampfungswärme angewandt.

Die mittlere „Weglänge" des Stoffes — ist der Abstand zwischen zwei Zusammenstößen. Die mittlere „Bewegungs"-Weglänge ist diejenige Strecke, auf welche die Bewegung zwischen zwei Zusammenstößen im Mittel weitergegeben wird.

(Um das zu veranschaulichen, wollen wir ein Schema — zwei Kugeln — wählen [Fig. 4].) Die erste Kugel empfängt den Impuls im Punkte A

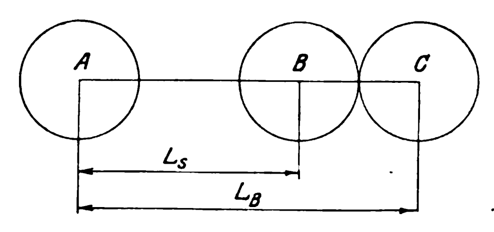


Fig. 4.

und übergibt ihn der zweiten im Punkte C, wobei sie selbst im Punkte B stehen bleibt.

In ähnlicher Weise, wie der „Stoff" den Weg $L_{\text{Stoffes}} = L_S$, läuft, durchläuft „die Bewegung" den $L_{\text{Bewegungs}} = L_B$, so daß es selbstverständlich ist, daß

$$\frac{L_B}{L_S} = \frac{\xi}{c},$$

woraus folgt, daß

$$L_B = L_S \cdot \frac{v}{v-b}, \tag{5}$$

d. h. die Weglänge „der Bewegung" ist $\frac{v}{v-b}$ mal größer als die Weglänge des Stoffes.

Ausgehend von diesen Sätzen leiten wir die Formel für den Koeffizienten der inneren Reibung auf folgende Weise ab: Nehmen wir an, daß der

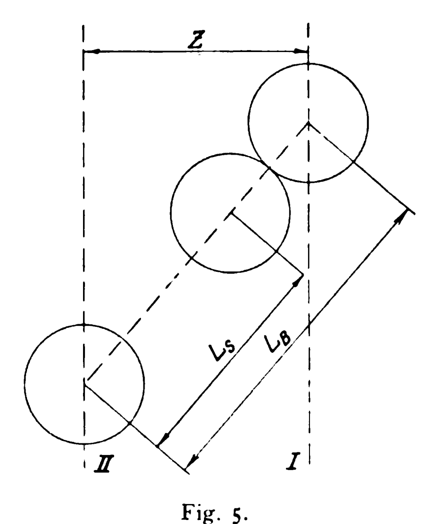


Fig. 5.

fluide Stoff, als Ganzes, sich in der Richtung der Achse U bewegt (Fig. 5), wobei die Geschwindigkeit u seiner einzelnen Schichten nach der Richtung z, welche vertikal zu U ist, abnimmt.

1) Unter dieser Benennung verstehen wir das Produkt aus der molekulären Masse und ihrer Geschwindigkeit.

2) Wiener Berichte IIa, **105**, 15—21, 1896, und Zeitschr. f. phys. Chemie **93**, 276, 1919.

Die Bewegungsgröße, welche von der Fläche I zur Fläche II vermittels eines Moleküls übergeben wird, ist

$$m \cdot \frac{du}{dz} \cdot z .$$

Die volle Bewegungsgröße aber, welche die Fläche II in einer Sekunde von seiten der rechts und links in der Weite z liegenden Flächen aufnimmt, gleicht dem „Bewegungsflusse", multipliziert mit dieser Größe.

$$n \xi_z \cdot m \cdot \frac{du}{dz} \cdot z .$$

Diese Bewegungsgröße gleicht infolge der Beharrung des Prozesses der auf die Fläche II wirkenden Reibungskraft

$$n \xi_z \cdot m \frac{du}{dz} \cdot z = \eta \cdot \frac{du}{dz} .$$

Daraus folgt, daß

$$\eta = n \xi_z \cdot m z .$$

Weil nun z die Projektion der Strecke ist, auf welcher „die Bewegung" übergeben wird, so gilt (nach der Form 5) daß

$$z = L_B \cdot \frac{c_z}{c} = L_S \cdot \frac{c_z}{c} \cdot \frac{v}{v-b}$$

ist.

Außerdem, ist, wie es oben schon erwähnt worden (Form 4)

$$\xi_z = c_z \cdot \frac{v}{v-b} ,$$

weshalb

$$\eta = n m \frac{c_z^2}{c} L_S \left(\frac{v}{v-b} \right)^2$$

oder, weil $3 c_z^2 = c^2$,

$$\eta = \frac{n m c}{3} \cdot L_S \cdot \left(\frac{v}{v-b} \right)^2 . \qquad (6)$$

Bei großer Verdünnung gibt diese Formel die schon bekannte Gleichung

$$\eta = \frac{m n c}{3} L_S .$$

Wenn wir unsere Ableitung in Übereinstimmung mit dem Maxwellschen Verteilungsgesetze durchgeführt hätten, so hätte sich nur der Zahlenkoeffizient[1]) verändert und die Formel wäre

$$\eta = 0{,}35028 \, n m \bar{c} L_S \left(\frac{v}{v-b} \right)^2 .$$

Da aber nach unserer Ableitung (Formel 3)

$$L_S = \frac{2}{3} \frac{\bar{c}}{c_0} \cdot d \cdot \frac{v-b}{b}$$

ist, so bekommen wir unter der Annahme, daß

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\eta = 0{,}35028 \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot d \cdot M \bar{c} \cdot \frac{v}{b(v-b)} .$$

Da aber

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}} = 14600 \left(\frac{T}{M} \right)^{1/2} ,$$

so ist

$$\eta = 0{,}35028 \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 14600 \cdot M^{1/2} \cdot d \cdot \frac{v}{b(v-b)} \cdot T^{1/2}$$

oder

$$\eta = 2410{,}8 \cdot d \cdot M^{1/2} \cdot \frac{v}{b(v-b)} \cdot T^{1/2} . \qquad (7)$$

In dieser Formel wird der Reibungskoeffizient durch die Größe b bestimmt, welche wir uns als Funktion des Volumens und der Temperatur vorstellen.

Die einfachste Voraussetzung ist die, daß b eine Konstante ist. Es stellt sich heraus, daß eine solche Annahme die Temperaturabhängigkeit des Reibungskoeffizienten der Flüssigkeiten zu erklären erlaubt.

Ein äußerst interessantes Beispiel in dieser Hinsicht ist Quecksilber.

Die Werte der Reibungskoeffizienten des flüssigen Quecksilbers bei verschiedenen zwischen 0 und 340^0 C liegenden Temperaturen[1]) sind

0^0	—	0,01684	v. Schweidler
20^0	—	0,01589	—
99^0	—	0,01227	S. Koch
$196{,}7^0$	—	0,01018	—
282^0	—	0,009499	—
$340{,}1^0$	—	0,008975	—

Nehmen wir an, daß $b =$ konst, so ergibt die Formel (7)

$$\eta = k \cdot \frac{v}{v-b} \cdot T^{1/2} . \qquad (8)$$

Berechnet man mit den Werten für 0^0—20^0 die Konstanten, so ergibt sich

$$b \; \mathrm{cm}^3 \; \mathrm{gr} = 0{,}070928$$

$$k = A \sqrt{5} \cdot 560 \cdot 7901 .$$

Mittels dieser Konstanten für höhere Temperaturen ergibt die Extrapolation

$$\eta_{196,7} = 0{,}01138 \qquad \eta_{340} = 0{,}009650 .$$

Außerdem wäre zu bemerken, daß

1. das spezifische Gewicht b zu 14,1 errechnet ist, während für das spezifische Gewicht von festem Quecksilber experimentell bei $-38{,}85^0$ C zu 14,193 gefunden wurde.

1) Nach Reinganum: Siehe Lehrb. d. phys. Chemie Prof. Dr. K. Jellinek Bd. II, S. 282. Stuttgart 1915.

1) Lehrbuch der phys. Chemie Prof. Dr. K. Jellinek Bd. I, S. 595. Stuttgart 1915.

2. J. Traube[1]) erhält mit Hilfe der van der Waalsschen Gleichung

t		b cm³/gr
0°	—	0,0703
50°	—	0,0704
100°	—	0,0705 im Mittel 0,0707
200°	—	0,0707
300°	—	0,0710
360°	—	0,0712.

Endlich erklärt die Formel (8) die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten vom Druck.

Wenn wir die Richtigkeit der van der Waalsschen Zustandsgleichung annehmen und

$$\frac{\eta}{\eta_k} = \varepsilon, \quad \frac{p}{p_k} = \pi, \quad \frac{v}{v_k} = \omega, \quad \frac{T}{T_k} = \tau$$

setzen, so erhalten wir die Formel (8) in folgender Form

$$\varepsilon = \frac{2\omega}{3\omega - 1}\tau^{1/2}.$$

Nehmen wir die Zustandsgleichung

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau$$

und eliminieren aus diesen beiden Gleichungen die Größe ω, so wird

$$\pi = \left(\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\tau^{1/2}} - 1\right)8\tau - 27\left(1 - \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\tau^{1/2}}}\right)^2 \qquad (9)$$

Auf Grund dieser Formel ergibt sich:

	$\tau = 1,00$	$\tau = 0,96$	$\tau = 1,03$
$\varepsilon = 0,5$	$\pi = -5,000$	$\pi = -4,398$	$\pi = -5,511$
0,6	−1,133	−0,818	−1,369
0,7	0,339	0,422	0,256
0,8	0,850	0,821	0,861
0,9	—	0,883	1,056
1,0	1,000	0,847	1,113
1,1	—	0,817	1,154
1,2	1,067	0,847	1,236
1,3	—	0,947	1,381
1,4	1,392	1,127	1,599
1,6	2,013	1,710	2,250
1,8	2,896	2,561	3,162

Auf Zeichnung (6) sind diese Resultate graphisch dargestellt.

Wenn wir diese Kurven mit den Versuchskurven[2]) von Phillips (Reibung von CO_2) (Fig. 7) vergleichen, überzeugen wir uns von der vollen qualitativen Ähnlichkeit mit letzteren, was beweist, daß die physikalische Natur der Kurven mittels unserer Formel sich vollständig erklären läßt.

Was die quantitative Seite unserer Frage anbetrifft, so gelangen wir zu keiner Übereinstimmung, weil die van der Waalssche wie auch unsere Formel (8) nur Näherungsformeln sind. (Zum Vergleich mit Versuchskurven ist auf der Fig. 6 eine, nämlich die Versuchskurve für $t = 30°$, angeführt.)

Trotz diesem Resultat behält die Formel (7) ihre volle Bedeutung. Falls wir das Gesetz, laut welchem sich die Größe b ändert, kennen würden, würde sich aus der Formel (7) eine quantitative Ähnlichkeit ergeben. Daher bietet unsere Formel (7) ein gutes Mittel zur Prüfung der auf theoretischem Wege erhaltenen Formeln für die Größe b und daher kann sie zur Erklärung der richtigen Zustandsgleichungsform dienen, weil eben die Größe b in unserer Gleichung unabhängig von der Form der Funktion ist, durch welche der innere Druck bestimmt wird.

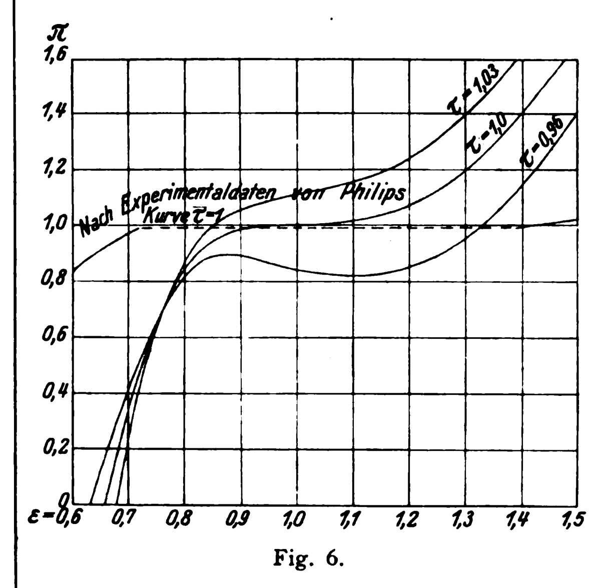


Fig. 6.

Wie wir schon gesehen haben, können wir b nicht als Konstante annehmen, weil wir in solchem Falle keine quantitative Ähnlichkeit mit dem Versuch bekommen. Ich habe den Versuch gemacht, auf solche Weise die für b funktionelle Abhängigkeit von Temperatur und Volumen festzustellen.

Vor allem habe ich den Reinganumschen Ausdruck (siehe oben) geprüft. Setzen wir in der Formel (7) den Reinganumschen Ausdruck für b ein, so bekommen wir

$$\eta = 2410,8\, M^{1/2} T^{1/2} d \cdot \frac{1}{k e^{\frac{C}{T}}}\left(1 + \frac{k e^{\frac{C}{T}}}{v}\right)^2.$$

---

1) Siehe Lehrbuch der phys. Chemie Prof. Dr. K. Jellinek Bd. II, S. 260. Stuttgart 1915.

2) Diese im Lehrbuch der phys. Chemie Prof. Dr. K. Jellinek Bd. I, S. 595 (Ausg. 1914) angegebenen Kurven sind auf graphischem Wege vergrößert.

Bei konstanter Temperatur ergibt das

$$\eta = c \cdot \left(1 + \frac{e}{v}\right)^2,$$

wo c und e konstant sind.

Die Formel ergibt mit den Versuchsisothermen eine gute Übereinstimmung in demjenigen ihrer Teile, welcher noch nicht allzu verdichteten Zuständen entspricht. Ganz anders wird es, wenn wir zu höher verdichtetem Stoffe übergehen, in diesem Falle wird die Differenz zwischen Versuchen und Theorie sehr groß.

Das führte mich auf den Gedanken, daß bei Ableitung der Funktion $v - b$ Reinganum, ungeachtet seines allgemein richtigen Ableitungsverfahrens, einen Fehler zugelassen hat, welcher bei verdünnten Gasen von geringem Einfluß ist, eine große Rolle aber bei größerer Verdichtung spielt.

Betrachten wir jetzt, wie Reinganum die Wahrscheinlichkeit der Annäherung des gegebenen molekulären Paares bestimmt, d. h. daß der Abstand ihrer Zentren gleich oder kleiner als $d + d\varrho$ sein wird. Er erklärt diese Frage auf folgende Weise: Wenn wir um jedes Molekül zwei Kugelflächen mit Halbmessern d und $d + d\varrho$ beschreiben, dann werden alle Moleküle, deren Zentren sich in dem auf solche Weise erlangten Volumen befinden, so nahe sein, daß $d < \varrho < d + d\varrho$ ist.

Damit kann man einverstanden sein; weiter aber vermutet er, daß das Zentrum des gegebenen Moleküls sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit im beliebigen Teile des Volumens befinden kann. Daraus schließt er, daß die Wahrscheinlichkeit, daß das Molekül sich in dem von diesen Sphären gebildeten Volumen befindet, gleich sein wird

$$4 \frac{\pi d^2 N}{v} d\varrho .$$

Hier liegt schon ein Fehler vor. Das Zentrum des Moleküls kann sich nicht im beliebigen Punkte des Volumens befinden. Stellen wir uns vor, daß alle Moleküle unbeweglich sind und nur eines beweglich ist. Dann ist klar, daß das Zentrum dieses beweglichen Moleküls sich in einem beliebigen Punkte des Volumens befinden kann, mit Ausnahme des Volumens der um jedes der unbeweglichen Moleküle umschriebenen Sphären mit einem Durchmesser von $2d$; dieses Volumen ist

$$8 \frac{\pi d^3}{6} N .$$

Dann ist die Reinganumsche Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4 \pi d^2 N d\varrho}{v - 8 \frac{\pi d^3 N}{6}} .$$

Bei dieser Verbesserung ergibt die Reinganumsche Formel für $v - b$

$$v - b = \frac{v}{1 + \frac{\frac{4 \pi d^3}{6} N}{v - \frac{8 \pi d^3}{6} N} e^{\frac{C}{T}}} .$$

Oder, nennt man das Eigenvolumen der Gasmoleküle $\frac{N \pi d^3}{6} = \Omega$, so erhalten wir

$$v - b = \frac{v}{1 + \frac{4 \Omega}{v - 8 \Omega} e^{\frac{C}{T}}} . \qquad (10)$$

Die Richtigkeit dieser Verbesserung findet auch in theoretischer Hinsicht Bekräftigung, wenn wir in dieser Formel annehmen, daß $C = 0$, d. h., daß das Gas keine Anziehungskräfte besitzt, dann erhalten wir:

$$v - b = \frac{(v - 8 \Omega) v}{v - 4 \Omega} .$$

Dieser Ausdruck ist von L. Boltzmann[1]) in seiner Ableitung der Zustandsgleichung gegeben, obgleich sein Ableitungsverfahren sich von dem Reinganumschen unterscheidet.

Die Prüfung der Formel (10) an dem Versuchsmaterial mit Hilfe der Formel (7) ergibt genügend gute Resultate, so daß man wohl sagen kann, daß die gegebene Formel der Wirklichkeit am nächsten ist. Aus den Formeln (10) und (7) erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \eta = 2410{,}8\, M^{1/2} T^{1/2} d \cdot \frac{v - 8 \Omega}{4 \Omega \cdot v} \\ \cdot e^{-\frac{C}{T}} \left(1 + \frac{4 \Omega}{v - 8 \Omega} \cdot e^{\frac{C}{T}}\right)^2 \end{aligned}\right\} ; \qquad (11\text{a})$$

bei $v = \infty$ ergibt diese Formel

$$\eta_\infty = \frac{2410{,}8\, M^{1/2} T^{1/2} d}{4 \Omega} \cdot e^{-\frac{C}{T}}$$

daraus

$$\eta = \eta_\infty \cdot \frac{v - 8 \Omega}{v} \left(1 + \frac{4 \Omega e^{\frac{C}{T}}}{v - 8 \Omega}\right)^2 .$$

Nennen wir $8 \Omega = B$, ebenfalls $4 \Omega e^{\frac{C}{T}} = \Pi$, so erhalten wir

$$\eta = \eta_\infty \cdot \frac{v - B}{v} \left(1 + \frac{\Pi}{v - B}\right)^2 . \qquad (11\text{b})$$

Die Versuchsisothermen von Phillips müßten mit dieser Formel übereinstimmen.

1) Siehe Lehrbuch der phys. Chemie Prof. Dr. K. Jellinek Bd. I, S. 370 (Ausg. 1914).

Bei meinen Berechnungen habe ich die Volumina Amagats teils aus den Tabellen von Landolt-Börnstein, teils aus dem Artikel A. Wohls über die Zustandsgleichung (Zeitschr. f. phys. Chemie 1914) genommen.

Für die Berechnung der Größen B und Π habe ich die 30^0 C entsprechende Isotherme von Phillips genommen

Außer

$$\eta_{\infty}^{30^\circ} = 1{,}46 \cdot 10^{-4} \qquad \nu = \infty$$

ist genommen

$$\eta_{74\,\mathrm{At}}^{30^\circ} = 4{,}89 \cdot 10^{-4} \qquad \nu = 0{,}00296$$

und

$$\eta_{100\,\mathrm{At}}^{30^\circ} = 7{,}14 \cdot 10^{-4} \qquad \nu = 0{,}00255$$

(als Volumeneinheit ist hier das Volumen bei 0^0 C und 760 mm Druck gewählt, wobei zur Feststellung der Größe B in absolutem Maße das Gewicht von 1 cm³ Kohlensäure unter normalen Umständen nach Landolt-Börnstein zu 0,0019768 gr. angenommen ist).

Nach diesen drei Punkten berechnen wir:

$$B = 0{,}00193 \qquad \Pi = A\ 3{,}3355732\,.$$

Diese Konstanten erlauben den Durchmesser des Moleküls und die Avogadrosche Zahl festzustellen:

$$d_{CO_2} = \eta_{\infty} \cdot \frac{1}{2410{,}8} \cdot \frac{1}{M^{1/2} T^{1/2}} \cdot \frac{\Pi M}{0{,}0019768}$$

$$= \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{-8}}}\ \mathrm{cm}\,.$$

Weil aber

$$B = 8\Omega = 8\,\frac{\pi d^3}{6} N,$$

so ist

$$N = \frac{0{,}00193 \cdot 44}{0{,}0019768} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{\pi d^3} = \underline{\underline{6{,}35 \cdot 10^{23}}}\,.$$

Diese Zahlen entsprechen recht genau den nach anderen Methoden erhaltenen Zahlen.

Außerdem erlaubt die Größe Π die Reinganumsche Konstante C zu bestimmen.

Weil

$$\Pi = \frac{B}{2} e^{\frac{C}{T}},$$

so ist

$$C = T \cdot \frac{lg \frac{2\Pi}{B}}{0{,}4343} = 303{,}09 \cdot \frac{lg\,\Pi - lg\,\frac{B}{2}}{0{,}4343} = \underline{\underline{245}}\,.$$

Nach Breitenbach[1]) ist die Sutherlandsche Konstante 239,7; wie bekannt, gleicht die Reinganumsche Konstante fast der Konstante von Sutherland, so daß unsere Zahl sehr nahe der Wirklichkeit kommt.

1) Siehe Lehrbuch der phys. Chemie Prof. Dr. K. Jellinek Bd. I, S. 305 (Ausg. 1914).

Mit Hilfe der nächstfolgenden Tabelle können wir die Übereinstimmung der erhaltenen Kurven mit den Versuchskurven (Fig. 7) vergleichen.

Isotherme 30^0.

Druck (Atm.)	50	70	71	72	74	75	100
$\eta \cdot 10^4$ Exp.	1,73	2,28	4,33	4,53	4,89	5,04	7,14
$\eta \cdot 10^4$ Berechnet	1,74	2,19	4,15	4,47	4,88	5,02	7,15

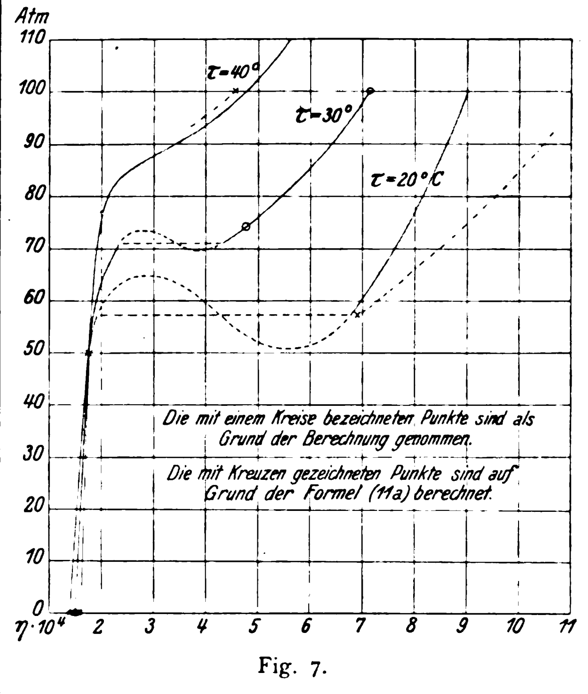


Fig. 7.

Bei Übergang zu anderen Temperaturen, müssen wir zuerst η_{∞} und Π berechnen.

Nehmen wir die äußersten experimentellen Isotherme von 40^0 und 20^0.

Zur Vergleichung berechnen wir nur die äußersten Punkte dieser Kurven.

Isotherme 40^0.

Aus den schon bekannten $C = 245$; $B = 0{,}00193$ erhält man

$$\Pi = \frac{0{,}00193}{2} \cdot e^{\frac{245}{313{,}09}} = A\ \bar{3}{,}3243609$$

$$\eta_{\infty}^{\mathrm{ber}} = 1{,}524 \cdot 10^{-4} \qquad \eta_{\infty}^{\mathrm{exp}} = 1{,}54 \cdot 10^{-4}$$

$$\eta_{100\,\mathrm{At}}^{\mathrm{ber}} = 4{,}54 \cdot 10^{-4} \qquad \eta_{100\,\mathrm{At}}^{\mathrm{exp}} = 4{,}76 \cdot 10^{-4}$$

Ebenfalls berechnen wir für 20^0.

Isotherme 20^0.

$$\Pi = \frac{0{,}00193}{2} \cdot e^{\frac{245}{293{,}09}} = A\ \bar{3}{,}3475505$$

$$\eta_{\infty}^{\mathrm{ber}} = 1{,}39 \cdot 10^{-4} \qquad \eta_{\infty}^{\mathrm{exp}} = 1{,}38 \cdot 10^{-4}$$

$$\eta_{100\,\mathrm{At}}^{\mathrm{ber}} = 11{,}33 \cdot 10^{-4} \qquad \eta_{100\,\mathrm{At}}^{\mathrm{exp}} = 9{,}0 \cdot 10^{-4}$$

Für den Punkt, bei welchem die Flüssigkeit in Gas übergeht, ist

$$\eta_k^{\text{ber}} = 6{,}89 \cdot 10^{-4} \qquad \eta_k^{\text{exp}} = 6{,}76 \cdot 10^{-4}.$$

Diese Isotherme zeigt beim Druck von 100 Atm. eine bedeutende Abweichung von der Versuchsisotherme. Unsere Formel gilt aber nur für Dämpfe und kann nicht vollkommen genau für Flüssigkeiten sein.

Wir können die Größe B nur so lange als Konst. ansehen, als $v - B$ nicht allzu klein wird, weil B nach einem uns bis jetzt unbekannten Gesetze abnimmt und bei Annäherung zum Erstarrungspunkte ungefähr 2Ω gleichen muß. Ebenfalls muß die Größe Π, die von Ω abhängt, abnehmen. Damit wird die unvollkommene Übereinstimmung unserer Berechnung erklärt.

Es wäre von Interesse auf obengegebene Weise die Druck-Reibungskoeffizient-Isothermen der verschiedenen Stoffe zu verfolgen[1]), und ich hoffe demnächst darauf zurückzukommen.

Zum Schluß muß ich bemerken, daß es nötig wäre, auf Grund der in dieser Arbeit entwickelten Prinzipien die Formeln des Diffusions-Koeffizienten zu bearbeiten.

Reval 1928.

1) Um unsere Methode bei der Berechnung der Avogadroschen Zahl anzuwenden, müssen nur die dem Gas entsprechenden Teile der Kurven benutzt werden.

(Eingegangen 26. Mai 1928.)

Der Hall-Effekt in der Versuchsanordnung von Corbino.

Von W. W. Sleator, z. Zt. in München.

Im Zusammenhang mit der neuen Arbeit von Sommerfeld (Zeitschr. f. Phys. **47**, 1, 1928) über die Elektronentheorie der Metalleitung dürfte es von Interesse sein, die Experimente von Corbino[1]) theoretisch zu untersuchen, in denen er eine radiale stromdurchflossene Scheibe der Wirkung eines zur Scheibe senkrechten magnetischen Feldes aussetzte. In solch einer Scheibe tritt eine Stromkomponente längs konzentrischer Kreise auf, deren Mittelpunkt in der Scheibenmitte liegt, d. h. in Richtung von Linien gleichen Potentials; den gesamten Strom kann man durch seine Induktionswirkung messen. Wir wollen uns die Frage stellen, ob bei dieser Anordnung ein anderer Wert für die Hallkonstante herauskommt als für die gewöhnliche Anordnung der rechteckigen Platte, einmal wenn wir die klassische und zweitens wenn wir die Fermische Statistik verwenden.

Adams (Phil. Mag. **27**, 224, 1914) integriert nach dem Vorgang von Corbino die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten und verwendet wie Drude Mittelwerte der Elektronengeschwindigkeit. Er findet für den Strom, der durch einen beliebigen radialen Querschnitt der Scheibe (z. B. AB, siehe Fig.) hindurch geht:

$$I_\varphi = -\frac{HeTI_r}{4\pi m}\log\frac{r_2}{r_1}, \tag{1}$$

wo I_r die radiale Stromstärke ist. T ist gleich l/v, wo l die mittlere freie Weglänge und v eine mittlere Geschwindigkeit; T bedeutet also die mittlere „freie Zeit" zwischen zwei Zusammenstößen. e ist die Ladung und m die Masse eines Elektrons. Für den spezifischen Widerstand findet er den Drudeschen Wert

$$\varrho = \frac{2m}{e^2TN}, \tag{2}$$

wo N die Zahl der Elektronen pro Volumeinheit vorstellt, die an der Leitung teilnehmen.

Gewöhnlich definiert man die Hallkonstante durch die Gleichung

$$\Phi_y = \frac{RHI_x}{d}. \tag{3}$$

Hier bedeuten Φ_y die Potentialdifferenz in der Querrichtung für eine rechteckige Platte, die in der Längsrichtung vom Strom I_x durchflossen wird, H das magnetische Feld, und d die Dicke der Platte. Wenn wir jetzt zur Hallspannung in der Scheibe übergehen, die wir als Integral längs eines Kreises vom Linienelement ds auffassen, so gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_\varphi &= -\int E_\varphi\,ds = -\int J_\varphi\,\varrho\,ds \\ &= -2\pi r J_\varphi\,\varrho.\end{aligned} \tag{4}$$

Definieren wir jetzt die Hallkonstante im Corbino-Effekt, analog zur Gleichung (3), also durch

$$\Phi_\varphi = \frac{RHI_r}{d}, \tag{5}$$

so ergibt sich

$$J_\varphi = -\frac{RHI_r}{2\pi r\varrho d}$$

und der Gesamtstrom wird

$$\left.\begin{aligned}I_\varphi &= \int_{r_1}^{r_2} J_\varphi\,dr \\ &= -\frac{RHI_r}{2\pi\varrho}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} \\ &= \frac{-RHI_r}{2\pi\varrho}\log\frac{r_2}{r_1}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

1) Physik. Zeitschr. **12**, 561, 1911. Im Anschluß an theoretische Betrachtungen von Boltzmann für die kreisförmige Platte hat bereits von Ettingshausen diesbezügliche Versuche gemacht. Vgl. Boltzmann, Ges. Werke III, Abh. 76 und 77.

Wir vergleichen diesen Wert mit dem Adamsschen Resultat (1) für J_φ, setzen ϱ ein, nach Gleichung (2) und erhalten

$$R = \frac{1}{eN}. \qquad (7)$$

Das ist der Wert der Hallkonstante, den man gewöhnlich für die rechteckige Platte angibt.

Prof. Sommerfeld findet für den Fall der Fermischen Geschwindigkeitsverteilung denselben Wert $\frac{1}{eN}$, während die Maxwellsche Verteilung nach Gans (Ann. d. Phys. **20**, 293, 1906) den Wert $\frac{3\pi}{8}\frac{1}{eN}$ ergab. Die zwei letzten Resultate leitet man aus den Gleichungen (69) in Sommerfelds Arbeit ab; sie lauten

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \frac{4\pi}{3}\frac{e^2 m^2 G}{h^3}(F_x K_2 + u F_y K_1) \\ J_y &= \frac{4\pi}{3}\frac{e^2 m^2 G}{h^3}(F_y K_2 - u F_x K_1). \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Hierbei stellen F_x und F_y die elektrischen Feldstärken in der rechteckigen Platte dar; in μ kommt das magnetische Feld vor. K_1 und K_1 sind Integrale, welche die Geschwindigkeitsverteilung enthalten.

Eine direkte Transformation auf Polarkoordinaten ν und φ in den Gleichungen (69) gibt unmittelbar die entsprechenden Beziehungen für den Cobrino-Effekt, wenn man die Komponenten des Feldes nach ν und φ mit F_r und F_φ bezeichnet und in den entstehenden Gleichungen F_φ gleich Null setzt. Wir haben, mit der Abkürzung $\beta = \frac{4\pi e^2 m^2 G}{3 h^3}$,

$$\begin{aligned} J_x &= J_r \cos\varphi - J_\varphi \sin\varphi \\ &= \beta\{(F_r \cos\varphi - F_\varphi \sin\varphi)K_2 \\ &\quad + u(F_r \sin\varphi + F_\varphi \cos\varphi)K_1\} \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_r \sin\varphi - J_\varphi \cos\varphi \\ &= \beta\{(F_r \sin\varphi + F_\varphi \cos\varphi)K_2 \\ &\quad - u(F_r \cos\varphi - F_\varphi \sin\varphi)K_1\} \end{aligned} \qquad (9)$$

oder, weil ja F_φ gleich Null sein soll:

$$\begin{aligned} J_x &= J_r \cos\varphi - J_\varphi \sin\varphi \\ &= \beta\{F_r K_2 \cos + u F_r K_1 \sin\varphi\} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_r \sin\varphi - J_\varphi \cos\varphi \\ &= \beta\{F_r K_2 \sin\varphi - u F_r K_1 \cos\varphi\}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Deshalb, durch Addieren oder Subtrahieren

$$J_r = \beta F_r K_2 \qquad (12)$$

$$J_\varphi = -\beta F_r u K_1. \qquad (13)$$

Also:

$$\frac{J_\varphi}{J_r} = -u\frac{K_1}{K_2}. \qquad (14)$$

Definieren wir anderseits ein elektrisches Gegenfeld, dessen negatives Integral die Hallspannung geben soll, nämlich, für σ = Leitfähigkeit,

$$F'_\varphi = -\frac{J_\varphi}{\sigma}; \qquad (15)$$

dann gilt

$$F'_\varphi = +J_r \frac{u}{\sigma}\frac{K_1}{K_2}, \qquad (16)$$

und das stimmt mit Gleichung (70) bei Sommerfeld überein. Die Gleichung, die für den Fall der Kreisscheibe zur Bestimmung der Hallkonstante führt, ist also genau dieselbe wie für die rechteckige Platte.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Sommerfeld und Herrn Dr. Bechert für Anleitung und Förderung beim Studium dieser Frage meinen besten Dank aussprechen.

(Eingegangen 6. Juli 1928.)

BESPRECHUNGEN.

F. Auerbach und W. Hort, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. I. Band, 1. Lieferung. Gr. 8⁰. IX u. 306 S. mit 120 Fig. Leipzig, J. A. Barth. 1927. Subskriptionspreis M. 24.—. — III. Band. Gr. 8⁰. IX u. 468 S. Mit 198 Fig. Subskriptionspreis M. 32.—, geb. M. 34.50. Einzelpreis M. 40.—, geb. M. 42.50.

Wenn man die bisher erschienenen Teile der drei in statu nascendi befindlichen deutschen physikalischen Handbücher betrachtet, so mag man vielleicht bedauern, daß es seinerzeit den Bemühungen vieler Einsichtigen nicht gelungen ist, die Riesenarbeit, welche in diese drei Werke unabhängig voneinander hineingesteckt werden muß, auf gemeinsamer Grundlage aufzubauen. Denn zweifellos war die Zeit für ein solches Unternehmen denkbar günstig: der rasche Aufstieg der Naturwissenschaften im ersten Viertel dieses Jahrhunderts, die kaum mehr zu übersehende Fülle der gesicherten Forschungsergebnisse, das völlige Veralten der früheren Darstellungen — das alles forderte gebieterisch die Schaffung eines neuen physikalischen Handbuches. Es hat aber natürlich keinen Zweck, nun nachträglich ein Klage-

lied darüber anzustimmen, daß wir statt eines Handbuches deren mindestens drei auf einmal beschert erhalten. Glücklicherweise sind die drei Unternehmungen von Anfang an, dank der verschieden gerichteten Einstellung ihrer Herausgeber und der verschiedenartigen Zusammensetzung ihrer Mitarbeiterlisten, so verschiedene Wege gegangen, daß sie sich trotz der vielen unvermeidlichen Überdeckungen doch im großen ganzen gegenseitig ergänzen. Es läge nahe, die drei in Konkurrenz stehenden Werke gegeneinander abzuwerten; aber abgesehen davon, daß mir als Mitwirkendem ein solches Werturteil zwar mir zu bilden, nicht aber auszusprechen erlaubt wäre, bin ich der Meinung, daß man Werke dieser Art und dieses Umfanges nicht schlechtweg mit einer Zensurnote einander gegenüberstellen kann, nicht einmal dann, wenn sie dereinst einmal vollständig fertig vorliegen werden. Im Gegensatz zu den Handbüchern früherer Zeiten sind unsere modernen Handbücher leider eigentlich nur noch systematisch aneinandergereihte Sammlungen von Monographien. Hat der Redakteur das System und die Mitarbeiter aufgestellt, so wird er die weitere Verantwortung zum größten Teil seinen Mitarbeitern überlassen müssen; nur wenn er über eine volle Beherrschung des Stoffes verfügt und wenn seine Mitarbeiter ein ungewöhnlich hohes Maß von Einsicht besitzen, kann er es wagen, die ihm übergebenen Manuskripte so umzuformen und so aneinander anzupassen, daß ein Werk aus einem Guß, von einheitlichem Charakter und von überall gleicher Höhe entsteht. Von diesem Ideal aber sind, glaube ich, alle unsere heutigen Handbücher noch recht weit entfernt.

Das Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, herausgegeben von F. Auerbach und W. Hort, ist entstanden als dritte Auflage der beiden die Mechanik behandelnden Bände des Winkelmannschen Handbuches der Physik und soll künftig sieben Bände umfassen. Es war sicherlich ein guter Gedanke, neben der physikalischen die technische Mechanik einzubeziehen; wie günstig sich dieser Gedanke auswirken wird, ersieht man aus der stark mit Ingenieuren durchsetzten Mitarbeiterliste und auch schon aus den bisher erschienenen Lieferungen. Das vorläufige Inhaltsverzeichnis zeigt, daß die beiden Herausgeber sich bemühen, ein Werk zu schaffen, dem sich an Umfang und Reichhaltigkeit kein anderes auf diesem Gebiet an die Seite stellen darf. Es bleibt abzuwarten, wie sich die Durchführung dieses wahrhaft großen Programmes gestaltet: ob es gelingt, die große Linie festzuhalten, welche die Mechanik heute als die geschlossenste physikalische Wissenschaft kennzeichnet.

Die erste Lieferung des ersten Bandes umfaßt die Grundbegriffe, die Meßtechnik und die Potentialtheorie. Im ersten Abschnitt behandelt F. Auerbach das System der Grundbegriffe in ähnlicher Weise wie schon in der früheren Auflage. Ich gestehe offen, daß ich mit vielen Ausführungen dieses Abschnittes nicht einverstanden bin; aber ich gebe zu, daß man über nichts so uferlos debattieren könnte, wie gerade über die Grundbegriffe. Ich greife daher nur einige Einzelheiten heraus, über die mir die Debatte abgeschlossen erscheint. Wenn (S. 13) aus der früheren Auflage die Behauptung übernommen wird, daß über die Polhöhenschwankungen näheres noch nicht endgültig festgestellt sei, so ist hier doch daran zu erinnern, daß diese Untersuchungen nachgerade zu den genauesten in der ganzen Astronomie gehören. Darf man (S. 40) von der Gravitationskraft heute noch sagen (wie 1908), daß alle Bemühungen, sie als Nahewirkungskraft nachzuweisen, gescheitert seien? Gegen die Ausführungen über die Begriffe Vektor und Tensor (S. 58: „Ein fahrender Eisenbahnzug ist ein Vektor, das Gleis, auf dem er fährt, das aber auch in der umgekehrten Richtung befahren werden kann, ein Tensor") muß jeder Fachmann Einspruch erheben; und es geht auch nicht an, wenn der Verfasser sich in einer Fußnote darauf beruft, daß seine Tensordefinition nur die ursprüngliche Fassung dieses Begriffes wiedergebe, die sich in neuerer Zeit wesentlich verschoben habe. Vektoren und Tensoren in der heutigen Fassung sind so fundamentale Begriffe der rationellen Mechanik geworden, daß ich mir nicht vorstellen kann, wie man sie aus einem modernen Handbuch der Mechanik verbannen könnte. Die vielverbreitete, aber unrichtige Definition der Entropie $S = \int dQ/T$ (S. 75) gehört trotz der klaren Darstellungen bei M. Planck u. a. zu den unausrottbarsten Mißverständnissen der ganzen Physik; auf keinen Fall aber durfte gesagt werden (S. 75): „Die Entropie existiert nur für streng umkehrbare Prozesse."

Die folgenden Abschnitte über die Meßtechnik der mechanischen Größen von W. Block sind eine stark modernisierende und auf den doppelten Umfang erweiternde Umarbeitung der entsprechenden Abschnitte aus der früheren Auflage. Hier sind vor allem die wichtigsten Methoden der technischen Grob- und Feinmessungen hinzugefügt, ohne die auch der Physiker heute nicht mehr auskommen kann. Diese Abschnitte sind mit großer Sachkenntnis geschrieben. Es ist nur schade, daß der Verlag mit dem alten Brauch nicht gebrochen hat, von der Außenansicht solcher Meßinstrumente Klischees abzudrucken, aus denen der Leser eigentlich nichts ersehen kann (z. B. Fig. 58, 63, 65 usw.). Viel instruktiver wirken die guten schematischen Schnittzeichnungen (Fig. 25 usw.). Ein Versehen ist S. 253 zu berichtigen, wo 1 kW-Stde = 367 mkg gesetzt wird.

Der letzte Abschnitt dieser Lieferung über die Potentialtheorie von A. Korn ist eine Darstellung in klassischem Gewande. Wenn ich gegenüber diesem Abschnitt einen Wunsch äußern darf, so wäre es der, daß in einer späteren Auflage auch diejenigen neueren praktischen Methoden mitbehandelt würden, die für die numerische Lösung der Probleme so wichtig geworden sind.

Der fertig vorliegende Band III behandelt die Elastizitätstheorie und beginnt mit einem Abschnitt über die allgemeine, d. h. mathematische Elastizitätstheorie von A. Korn. Dieser Abschnitt schließt sich eng an die Potentialtheorie des ersten Bandes an und ist in seiner Art sehr wertvoll. Was ich nur wieder vermisse, sind die praktischen Methoden: Minimalprinzipe, Ritzsches Verfahren usw. (vgl. erst S. 160). Im übrigen leidet der Abschnitt ohne Schuld des Verfassers sehr darunter, daß die zahlreichen Verweisungen durch ein Versehen der Redaktion völlig sinnlos geworden sind.

Der zweite Abschnitt über Zug und Druck von F. Auerbach ist im wesentlichen aus der früheren Auflage übernommen, mit Ergänzungen hinsichtlich der neueren Literatur. Die Darstellung der Knickung ist nicht ganz vollständig, es fehlen die Untersuchungen von v. Kármán u. a.

Im dritten Abschnitt behandelt J. W. Geckeler die Biegung von Stäben, Platten und Schalen in sehr klarer Weise und von modernem Standpunkt aus; auch die wichtigsten Näherungslösungen sind berücksichtigt. In einem Nachtrag hierzu folgt eine Darstellung der Kirchhoffschen kinetischen Analogie von F. Auerbach; die hier nicht erwähnten Fälle der Biegungskippung und der Drillungsknickung sind wohl im folgenden Band zu erwarten.

Der vierte Abschnitt über Scherung und Drillung von F. Auerbach enthält vor allem eine gute Darstellung der Theorie von de Saint-Venant. Statt Kraftschraube wird (S. 236) das Wort „Bohr“ oder „Korkzieherkraftsystem“ vorgeschlagen! Die gelegentlich benützten Vektorbezeichnungen sind ein wenig durcheinander geworfen: S. 209 steht Grad und Quirl neben div, S. 293 wird grad und quirl geschrieben.

Der fünfte Abschnitt behandelt die Elastizität der Kristalle, der sechste die elastischen Schwingungen und Wellen, beide von F. Auerbach und beide im wesentlichen aus der früheren Auflage übernommen.

Neu hinzugekommen ist der siebente Abschnitt über Erdbeben und Erdbebenwellen von B. Gutenberg. Dieser Abschnitt gibt, soweit ich das beurteilen kann, einen guten Überblick über das Gebiet und geht nicht weiter ins einzelne, als es den Physiker interessieren mag.

Der achte Abschnitt, wieder von F. Auerbach, über den Stoß ist abgesehen von einigen Zusätzen ziemlich wörtlich der früheren Auflage entnommen; leider sind auch die Druckfehler und Ungenauigkeiten mit übernommen (z. B. besonders störend in Ziffer 12 die fortwährenden Verwechslungen zwischen den Buchstaben *a* und *l* und die falsche Stellung der Fig. 178c).

In einem letzten Abschnitt wird auf nur 6 Seiten einiges über Wärmeausdehnung, Schmelzen, Verdampfen, spez. Wärme und Wärmeleitung mitgeteilt. Es ist schade, daß an Stelle dieses hier als Fremdkörper wirkenden Abschnittes, von dem man fast den Eindruck hat, als hätte er den letzten Bogen ausfüllen sollen, nicht lieber ein umfangreicheres Sachregister angelegt worden ist. Ein gutes Sachverzeichnis ist für ein Handbuch, das doch hauptsächlich als Nachschlagewerk dient, ein Erfordernis allerersten Ranges. Stichproben zeigen, daß man viele in diesem Bande behandelten Begriffe, z. B. die Airysche Spannungsfunktion, im Sachregister vergeblich sucht. Jeder Leser würde es dankbar begrüßen, wenn in den späteren Bänden größte Sorgfalt auf die Herstellung des Sachverzeichnisses verwendet würde. Denn die Inhaltsfülle eines solchen Werkes, mag man viel oder wenig im einzelnen daran auszusetzen haben, darf nicht brach liegen bleiben.

R. Grammel.

F. Auerbach und W. Hort, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. V. Bd. 1. Lieferung. Gr. 8⁰. IX und 472 S. Mit 231 Fig. Leipzig, J. A. Barth. 1927. Subskriptionspreis M. 36.—.

Der Eindruck, den der Leser aus den früheren Lieferungen des Auerbach-Hortschen Handbuches der Mechanik gewonnen hat[1]), wird durch die erste Lieferung des fünften Bandes im wesentlichen bestätigt. Dieser Band ist der Physik der Flüssigkeiten gewidmet, welche schon in der zweiten Auflage zu den erfreulichsten Stücken des Winkelmannschen Handbuches gehörte.

Von den elf Abschnitten der vorliegenden Lieferung sind sieben zu einem erheblichen Teil aus der alten Auflage übernommen, selbstverständlich mit Hinzufügung derjenigen Ergänzungen, die der Fortschritt der Wissenschaft seitdem nötig gemacht hat. Diese wieder von F. Auerbach bearbeiteten Abschnitte umfassen die allgemeinen Eigenschaften der Flüssigkeiten, die Hydrostatik, die (klassische) Hydrodynamik, die Wirbel- und die Wellenbewegung, den Ausfluß und die Strahlbildung. Als besonders schön gelungen darf man hierunter bezeichnen die Berichte über flüssige Kristalle, über die Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten und über die Theorie der Wellen; diejenigen Teile der modernen Hydrodynamik, die ihre Hauptrolle insbesondere in der Aerodynamik spielen und die der Leser hier vielleicht vermissen könnte, werden ihm in anderen Teilen des Handbuches versprochen. Es wäre kleinlich, die große Leistung, die in diesen Abschnitten steckt, durch eine Aufzählung der Unebenheiten herabzusetzen, über die man beim Lesen stolpert; ich greife daher nur einige wenige von grundsätzlicher Bedeutung heraus: am meisten tut mir weh, daß auch in diesem Band die Vektorrechnung als adäquateste Sprache der Hydrodynamik nicht gesprochen wird; an manchen Stellen könnte durch folgerichtige Benützung der Hyperbelfunktionen eine weitere typographische Vereinfachung erreicht werden (doch schreibe man lieber nicht, wie S. 153, Art Cos statt Ar Cos!); die interessanten strengen Lösungen der Grundgleichungen der zähen Flüssigkeiten (von Hamel u. a.) habe ich nirgends finden können.

Ganz neu hinzugekommen ist ein Abschnitt über die Turbulenz, worin H. Lorenz seine bekannten Arbeiten über diesen Gegenstand zusammenfassend darstellt. Dieser Abschnitt ist eine kleine Monographie für sich. Das Turbulenzproblem, noch immer die Crux der rationellen Hydromechanik, wird hier von einer völlig neuen Seite angepackt; und wenn die Lorenzsche Theorie, aus der u. a. die kritische Reynoldssche Zahl mit verblüffender Genauigkeit folgt, unter den Hydrodynamikern bis jetzt wohl auch nur wenig Verständnis gefunden hat, so darf sie doch Anspruch darauf machen, außerordentlich originell zu sein.

Neu ist ebenso der folgende Abschnitt über die Theorie der Meeresströmungen von V. W. Ekman. Die Grundlagen und Ergebnisse dieser jungen, von V. Bjerknes, F. Nansen und dem Verfasser geschaffenen Wissenschaft werden sehr kritisch und vorsichtig dargelegt. Auch dieser Abschnitt bildet innerhalb des Bandes eine Monographie ganz für sich, die auch ein Außenstehender mit Genuß lesen kann.

Der letzte Abschnitt der Lieferung handelt von der Reibung der Flüssigkeiten. Er ist aus dem entsprechenden Abschnitt von L. Graetz in der früheren Auflage hervorgegangen, aber von L. Graetz und K. Stöckl völlig umgearbeitet und so auf den neuesten Stand gebracht worden. Ein kleiner Anhang von W. R. Hess über die Viskosität des Blutes beschließt die erste Lieferung des fünften Bandes, über den ein endgültiges Urteil erst nach Erscheinen der zweiten Lieferung möglich sein wird.

R. Grammel.

1) Vgl. vorhergehende Besprechung (S. 585).

M. Planck, Einführung in die theoretische Physik. IV. Bd., Einführung in die theoretische Optik. Gr. 8⁰. VI u. 184. S. Mit 24 Fig. Leipzig, S. Hirzel. 1927. M. 6. —, geb. M. 7.50.

Der vorliegende 4. Band der Planckschen Lehrbücher ist als Fortsetzung der Elektrizitätslehre gedacht, es werden darum die Maxwellschen Gleichungen an die Spitze gestellt und der elektromagnetische Standpunkt konsequent durchgeführt. Die

Gesetze der Reflexion und Brechung, die Fresnelschen Formeln, die Verhältnisse bei Totalreflexion erscheinen gleich zu Anfang als Folgen der Grenzbedingungen der Maxwellschen Gleichungen.

Die Auswahl des Stoffes erfolgte nach dem Gesichtspunkt, nur das prinzipiell Wesentliche in großen Zusammenhängen darzustellen. Es wird darum aus dem Gebiet der Interferenzerscheinungen nur das Problem der planparallelen Platte und die Newtonschen Ringe behandelt, auch die geometrische Optik, die Theorie der optischen Abbildung nur in ihren Grundzügen entwickelt, während z. B. Kohärenz und Inkohärenz, die Analyse des Lichtes nach spektraler Zusammensetzung und Polarisationsverhältnissen von verschiedenen Seiten her eindringlich beleuchtet wird. Auch die Beugungserscheinungen sind ausführlich berücksichtigt. Als Beispiel für eine Fresnelsche Beugungserscheinung wird der Fall des unendlich ausgedehnten geradlinig begrenzten ebenen Schirmes in allen Einzelheiten durchgesprochen, rechteckiger Spalt und Gitter folgen als Beispiele für den Fraunhoferschen Fall.

Ein eigener ausführlicher Abschnitt ist der Kristalloptik gewidmet. Für einen souveränen Beherrscher der mathematischen Methode erschließt sich ja hier ganz besonders die dankbare Aufgabe, die Stärke des deduktiven Verfahrens zu zeigen und eine große Fülle von Einzeltatsachen an Hand von einfachen, eleganten Rechnungen als direkte Folge der allgemeinen zusammenfassenden Prinzipien hinzustellen, die wie kaum sonst wo in der Physik so vorbehaltlos bis in ihre letzten Konsequenzen auszuschöpfen sind.

Der letzte Teil des Buches ist der klassischen (mit quasielastisch gebundenen Ladungen operierenden) Dispersionstheorie gewidmet, wobei die Lorentzsche Mittelwertsbildung in geschickter Weise umgangen wird und so die makroskopischen Feldgleichungen unmittelbar in Anwendung kommen können. Das letzte, abschließende Kapitel, behandelnd die Optik inhomogener Körper, gibt dem Verf. Gelegenheit, auf die Hamiltonsche Analogie zwischen Mechanik und Optik einzugehen und die modernen Ideen von de Broglie und Schrödinger in überaus klarer Weise in ihren Grundzügen zu skizzieren.

Obwohl als „Einführung" betitelt, dürfte das Buch für einen wirklichen Anfänger, falls seine Begabung nicht vorwiegend mathematischer Art ist, durch seine abstrakte Tendenz manche Schwierigkeiten bereiten, insbesondere auch durch die Knappheit jener Kapitel, die für den Bau der abbildenden und der spektroskopischen Instrumente von Wichtigkeit sind. Mit um so größerer Freude wird es der reife Student zur Hand nehmen, der bereits ein einführendes Kolleg gehört hat und nun das Gelernte in großen Linien übersehen will. Ganz besonders aber wird der Dozent selbst mannigfache Anregungen aus dem Buche schöpfen, auch wenn er selbst z. T. andere didaktische Wege verfolgt oder verfolgen muß.

Es wäre ein Irrtum, im Fehlen irgendwelcher numerischer Angaben und Beispiele (die ja manchmal das Verständnis sehr erleichtern), im Nichteingehen auf experimentelle oder instrumentelle Anordnungen einen Mangel der Planckschen Lehrbücher zu erblicken. Es liegt im Grundcharakter des Verf., daß ihm die Darstellung der objektiven Verhältnisse in ihren prinzipiellen Zusammenhängen so sehr am Herzen liegt, daß demgegenüber alles rein vom Zufall Bedingte, alles rein Menschliche, selbst wenn es sich um die Hilfsmittel der reinen Erkenntnis handelt, ins Unsichtbare zurücktreten muß. Dieser Zug gibt den Planckschen Büchern ein eigenes Gepräge — sie bedeuten weit mehr als die kompendiöse Behandlung dieses oder jenes Gebietes der theoretischen Physik, sie sind gleichzeitig gewissermaßen Marksteine einer bestimmten physikalischen Weltanschauung. Gerade in einer Zeit, die ihrem ganzen Wesen nach so stark positivistisch gefärbt ist, daß die aktuelle Unzulänglichkeit menschlicher Erkenntnis zur virtuellen gestempelt und bis in die letzten Prinzipien der Naturanschauung hineingetragen wird, dürften die Werke von Planck als Dokumente einer objektiv-realistischen Naturbetrachtung ein gesundes Gegengewicht bedeuten und so manchen vor einseitigen Übertreibungen zurückhalten. Die stille Begeisterung, die sich hinter der kühlen Sachlichkeit verbirgt, die Freude am Erkennen um ihrer selbst willen — was naturgemäß die Zuversicht an der Möglichkeit des Erkennens, auch der prinzipiellen, voraussetzen muß —, wird die Schönheit der „klassischen" Betrachtungen auch in einer Zeit hochhalten, die die großen Synthesen als noch verfrüht von sich weisen muß.

Lanczos.

Handbuch der Physik, herausgegeben von H. Geiger u. K. Scheel.

Bd. 22: Elektronen, Atome, Moleküle. Redigiert von H. Geiger. 4°. VII u. 568 S. Mit 148 Abb. Berlin, J. Springer. 1926. Geh. RM. 42.—, geb. RM. 44.70.

Bd. 24: Negative und positive Strahlen. Zusammenhängende Materie. Redigiert von H. Geiger. Gr. 8°. XI u. 604 S. Mit 374 Abb. Berlin, J. Springer. 1928. Geh. RM. 49.50, geb. RM. 51.60.

Da sich die in diesen beiden Bänden des Handbuches der Physik behandelten Themen zum großen Teil eng berühren und sogar ineinander übergreifen, dürfte eine zusammenfassende Besprechung gerechtfertigt sein. Der Titel des 24. Bandes gibt bereits ein fast richtiges Bild des Inhalts der in ihm vereinigten Abschnitte. Denn es handelt sich hier im wesentlichen um die Besprechung der Vorgänge beim Durchgang von Elektronen, von Kanalstrahlen und von α-Strahlen durch Materie einerseits und des Aufbaus der festen Materie andererseits. Aus diesem Rahmen fällt nur heraus ein Kapitel über Atombau und Chemie, das besser in den Band 22 gepaßt hätte. Nicht so gut gewählt ist der Titel dieses Bandes. Denn es finden sich hier zwar die Eigenschaften der Elektronen, der Atomkerne und der Moleküle besprochen, der Bau der Atome jedoch mußte aus verständlichen Gründen an anderer Stelle, nämlich in dem Band 23 über Quanten behandelt werden, das Kapitel über die Ionen in Gasen gehört unbedingt zu der Elektrizitätsbewegung in Gasen (Bd. 14) und auch das Kapitel über Radioaktivität würde man wohl kaum unter dem Titel „Elektronen, Atome und Moleküle" suchen. Doch dies nur, um die Orientierung zu erleichtern; der reiche Inhalt der beiden Bände, bearbeitet von vorzüglichen Kennern der einzelnen Gebiete, ist auch hier durchwegs dem derzeitigen Stand der Forschung angepaßt und wird seinen Teil beitragen zu der berechtigten Wertschätzung des Gesamtwerkes.

In Band 22 gibt zunächst Gerlach eine Darstellung der Eigenschaften (Ladung und Masse) der Elektronen oder besser gesagt der experimentellen Methoden zur Untersuchung dieser Größen und der erzielten Ergebnisse; die Folgerungen Ehrenhafts

werden abgelehnt. In die Physik des Atomkerns haben sich im nächsten Kapitel Philipp (Kernladung, Kernmasse), Hahn (Das α-Teilchen als Heliumkern), Meitner (Kernstruktur) und Pettersson gemeinsam mit Kirsch (Atomzertrümmerung) geteilt. Auch das folgende Kapitel über Radioaktivität ist von mehreren Forschern bearbeitet worden; Bothe hat hier den Abschnitt über den radioaktiven Zerfall im allgemeinen übernommen, St. Meyer den über die radioaktiven Stoffe und Hahn hat zwei Abschnitte über die Grenzgebiete zur Chemie und Geologie hin verfaßt. Das nächste Kapitel über die Ionen in Gasen rührt her von Przibram und behandelt die Eigenschaften und die Kinetik der Ionen einschließlich der Theorien. Eine vorzügliche und in solcher Vollständigkeit und systematischen Disposition zum erstenmal versuchte und deshalb sehr wertvolle Darstellung unserer Kenntnisse über den Bau der Moleküle haben dann Herzfeld und Grimm gegeben und den Schluß des Bandes bildet ein Kapitel über das periodische System der Elemente von Paneth.

Anschließend an den Beitrag von Herzfeld und Grimm sei aus dem 24. Band zuerst das letzte, von Grimm bearbeitete Kapitel genannt, in dem mit großer Ausführlichkeit Atombau und Chemie (Atomchemie) behandelt wird. Es berührt sich der Inhalt dieses Beitrags natürlich vielfach mit dem des erstgenannten, beide ergänzen sich zu einem vollständigen Bild unserer Kenntnisse vom Wesen des Molekülbaus und haben in sehr geschickter Form die mehr physikalischen bzw. chemischen Gesichtspunkte jeweils in den Vordergrund gestellt. Über den Durchgang von korpuskularen Strahlen durch Materie berichten zuerst Bothe hinsichtlich der Elektronen, dann Geiger hinsichtlich der α-Strahlen und in einem zwischengeschalteten Kapitel Rüchardt gemeinsam mit Baerwald hinsichtlich der Kanalstrahlen. Die sympathische, von Bothe gewählte Art der Darstellung, in der Theorie und Experiment beide zu ihrem Recht kommen, dürfte die bestmögliche sein zur Führung nicht nur durch die experimentelle Literatur, sondern auch durch das Gewirr der bekanntlich gerade hier so vielfältigen Nomenklatur. Nicht oder doch nur soweit dies im Zusammenhang unbedingt erforderlich ist, ist die Kinetik der langsamen Elektronen behandelt, die eine andere Betrachtungsweise erfordert und deshalb mit Recht in dem Band 23 über Quanten dargestellt worden ist. Der von Rüchardt und Baerwald ihrem Beitrag vorangestellte Untertitel — Durchgang von Kanalstrahlen durch Materie — wird dem reichen Inhalt wohl nicht ganz gerecht; denn es handelt sich eigentlich um die Darstellung der ganzen Physik der Kanalstrahlen, ihrer so sehr verwickelten Kinetik, der Umladungen, des Dopplereffekts usw. Das von Geiger bearbeitete Kapitel über die α-Strahlen ist im wesentlichen nach der experimentellen Seite hin orientiert und ist deshalb bezüglich der theoretischen Seite der Forschung zum Teil abhängig von dem oben genannten Kapitel von Bothe. Das zweite große Thema das Bandes, der Aufbau der festen Materie, wird zuerst von Ewald nach der strukturphysikalischen Seite hin behandelt, dessen Beitrag zugleich auch die ganze röntgenographische Forschungsmethodik umfaßt. Es wird unterbaut und ergänzt durch ein Kapitel über die theoretischen Grundlagen (Gitterstatik und Dynamik), das Born und Bollnow verfaßt haben und das sich im wesentlichen deckt mit Borns Enzyklopädieartikel. R. Seeliger.

H. Beggerow, Die Erkenntnis der Wirklichkeiten. 8°. XLII u. 544 S. Halle, Max Niemeyer. 1927. Geh. M. 22.—.

Ausgehend von Kant will der Verf. „gemäß dem klaren Stande der naturwissenschaftlichen und ästhetischen Einsichten unserer Zeit den transzendentalen Idealismus fortbilden und eine exaktwissenschaftliche Weltanschauung entwickeln mit dem besonderen Ziel, schließlich den bestimmten Nachweis vom Dasein der absoluten Wirklichkeit zu erbringen" (Kants „Ding an sich"). — Es könnte leider leicht sein, daß ein Teil der Leser, für die dieses Referat bestimmt ist, sich schon durch jene Problemstellung abgeschreckt fühlt; indessen sei jenen von vornherein gesagt, daß der Verf., selbst aus der Physik hervorgegangen, die Konkretisierung jener abstrakt-philosophischen Gedanken bis zu einer Sphäre durchführt, in der der Fachphysiker durchaus bodenständig ist. So ist der Gegensatz Mach (Sensualistisches Weltbild) — Planck (Physikalisches, aus der Erklärung der sich in der Außenwelt wirklich abspielenden Vorgänge resultierendes Weltbild) programmatisch für das ganze Buch und findet seine Lösung im Nachweis zweier verschiedener, aber gleichberechtigter Wirklichkeiten — beide einander homolog, aber jede von ihnen nur eine besondere empirisch-reale Erscheinungsweise der absoluten Wirklichkeit.

Die Wirklichkeitsentfaltung wird einleitend dargestellt durch fünf Erlebnisbilder: Traum, Landschaft, Musik, Mechanisches Bild des Kosmos, Minkowski-Welt. Abgesehen vom ersten (Fehlen der Objektivität) sind alle Bilder Wirklichkeit. Das Wesen der 2. und 3. liegt in der Form, im Ästhetischen; kausal sind beide wesenlos (Morphische Wirklichkeit). Das aus der Vernunft und Praxis hervorgehende Kausalitätsbedürfnis schafft sich das 4. u. 5. Bild kausaler Wesenhaftigkeit (Hylische Wirklichkeit).

Nach einer eingehenden Behandlung der mathematischen, philosophischen, morphischen und psychischen Erkenntnis folgt das den Physiker am unmittelbarsten angehende Kapitel: „Reflektierte Erfahrung". Hier wird an der Entwicklung der Physik gezeigt, wie sich die Hylosche Wirklichkeit schrittweise aus der Morphischen Wirklichkeit entwickelt: Zuerst die mechanische Wirklichkeit (Welt als kraftbewegte Materie); sie enthält noch mancherlei rudimentäre, morphische Elemente, findet die Schranke ihrer Entfaltung in der Unmöglichkeit, sich die optischen und elektrischen Erscheinungen restlos einzuordnen und wird durch die „elektronisch-quantische Welt" abgelöst, die ihrerseits mehr und mehr in eine zuständlich-logische Wirklichkeit (Feldphysik) übergeht.

Alle jene Formen der Wirklichkeit sind gleichwertige, einander homologe Glieder einer polaren Wirklichkeitsreihe: (Psychische W.) — Morph. W. — Mech. W. — Elektronisch-quantische W. — Zuständl.-log. Wirklichkeit

Hylische Wirklichkeit

in der von links nach rechts die Möglichkeit kausalen Verständnisses wächst, die der Formerfassung jedoch abnimmt. Links herrscht vollkommenste Freiheit, rechts strengster Zwang.

Weiterhin wird dann in Fortbildung der Kant-Friesschen Ideenlehre die Erkenntnis des Daseins der absoluten (transzendenten) Wirklichkeit entwickelt, von deren So-sein wir zwar infolge der Schranken unsrer Vernunft keine eigentliche Erkenntnis, wohl aber durch Abstraktion von jenen Grenzen eine gewisse „Mutung" haben können. Diese darf sich die Welt als Erscheinung des Gedanken

Gottes denken, der sich uns in der akosmistischen Erfahrung der Mystik unmittelbar offenbart. —

Das Buch ist von einem Menschen geschrieben, der sich in der Stille mancherlei feine Gedanken über die Entwicklung der Erkenntnis gemacht hat, und dessen Persönlichkeit in Aufbau und Stil des Werkes in belebender Eigenart zum Ausdruck kommt. Es enthält eine solche Fülle von Einzelbetrachtungen und Gedanken, daß es aus Raumgründen unmöglich ist, eine Kritik der Einzelheiten zu begründen. Man wird mancherlei Bedenken haben gegen die Möglichkeit einer durchgehenden, prinzipiellen Unterscheidung zwischen Morphischer und Hylischer Wirklichkeit. (Wozu gehören z. B. die ultramikroskopischen Teilchen?) Man wird es z. B. auch als schwierige Konstruktion empfinden, wenn der Verf., um die allgemeine Relativitätstheorie mit der a priori gegebenen, euklidischen Struktur des Raumes in Einklang zu bringen, die nicht-euklidischen Geometrien zu „reelloidischen Imaginationen" macht, die sich zwar zum Begreifen der Wirklichkeit eignen, darum aber noch lange keine Wirklichkeit sind. Und noch allgemeiner gesagt: Es werden auch hier nicht alle Einwände gegen den transzendentalen Idealismus widerlegt. Indessen darf man ein solches Werk nicht danach beurteilen, ob es die Wahrheit enthält, sondern lediglich danach, wieviel Wahrheit es enthält. In diesem Sinn aber rechnen wir das Werk zur wertvollen physikalisch-philosophischen Literatur; insbesondere sei es jedem empfohlen, der — gleich dem Verf. — den tiefen Zwiespalt fühlt zwischen der schönen Welt und dem, was die Naturwissenschaft unabweislich fordert. R. Döpel.

Handbuch der Astrophysik. Herausgegeben von G. Eberhard, A. Kohlschütter, H. Ludendorff. Band VI. Das Sternsystem. Zweiter Teil. Bearbeitet von F. C. Henroteau, H. Ludendorff, K. G. Malmquist, F. J. M. Stratton. Gr. 8⁰. IX und 474 S. Mit 123 Abb. Berlin, J. Springer. 1928. M. 66.—, geb. M. 68.70.

Von dem groß angelegten Handbuch der Astrophysik ist zuerst der letzte Band VI: Das Sternsystem (Zweiter Teil) herausgekommen. Vielleicht ist hier der Platz, einige Worte über das ganze Unternehmen zu sagen. In der Astronomie erscheint zur Zeit eine Fülle populärwissenschaftlicher Literatur, die man zu einem erheblichen Teil als überflüssig bezeichnen kann. Demgegenüber fehlt es fast ganz an modernen Lehrbüchern, so daß das nunmehr erscheinende Handbuch eine wirkliche Lücke auszufüllen vermag.

Man darf den Begriff „Astrophysik" hier allerdings nicht allzu wörtlich nehmen. Eine scharf abgegrenzte Astrophysik gibt es in Wirklichkeit gar nicht. Selbst wenn man sich in der Astrophysik auf die physikalische Beschaffenheit der Himmelskörper beschränken will, bestehen doch im Kosmos so enge Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften und der räumlichen Anordnung und Bewegung der Körper, daß man immer wieder bei der Behandlung astrophysikalischer Fragen in Gebiete kommt, die man der Astrometrie zuzuordnen pflegt.

Das vorliegende Handbuch faßt nun die Astrophysik keineswegs in der angegebenen engen Weise. Die ersten drei Bände, welche die „Grundlagen der Astrophysik" behandeln, beschränken sich keineswegs auf Strahlung und Thermodynamik, Spektroskopie im weitesten Sinn, praktische Optik und Photometrie, sondern geben auch stellarastronomische Hilfsmittel und ein Kapitel über die Reduktion photographischer Himmelsaufnahmen. Es werden hier also auch rein astronomische Probleme einbezogen. Ebenso gehen die folgenden Bände (Band IV: Das Sonnensystem und Band V: Das Sternsystem, I. Teil) über die rein astrophysikalischen Gebiete hinaus. Sieht man die Inhaltsangabe der einzelnen Bände durch, so ergibt sich als leitender Gedanke bei der Stoffauswahl die Darstellung der Methoden der Astrophysik, sowie die Darlegung der mit diesen Methoden gewonnenen Ergebnisse und deren theoretische Deutung. Eingeschlossen sind hierbei Methoden, die man aus einer gewissen Tradition heraus als astrophysikalische bezeichnet, die aber dem inneren Wesen nach der Astrometrie näherstehen. So liegt der ganze Komplex der photographischen Ortsbestimmung außerhalb der Astrophysik, ebenso wie die Ermittlung von Doppelsternbahnen aus Linienverschiebungen. Die Stoffauswahl ist also zum Teil eine rein äußerliche, und hierdurch kommt es, daß zusammengehörende Gebiete der Astronomie nur teilweise behandelt sind, und doch andererseits wieder, wie schon betont, die Darstellung über den Rahmen der eigentlichen Astrophysik erheblich hinausgeht.

Diese Eigentümlichkeiten der Stoffeinteilung machen sich sofort bei dem ersten Kapitel des erschienenen Bandes: „The radial velocities of the stars" von K. G. Malmquist in Lund als ein gewisser Mangel geltend. Dieses Kapitel beschäftigt sich vor allem mit der Diskussion der beobachteten Radialgeschwindigkeiten. Aber die Gesetzmäßigkeiten der Sternbewegung sind solche der räumlichen Geschwindigkeiten und man kann bei der Diskussion die beobachteten Geschwindigkeiten senkrecht zum Visionsradius nicht ausschließen oder nur nebenbei behandeln, ohne daß die Darstellung darunter leidet. Die folgenden Kapitel: „Die veränderlichen Sterne" von H. Ludendorff in Potsdam und „Novae" von F. J. M. Stratton in Cambridge beziehen sich im wesentlichen auf rein astrophysikalische Fragen, während das vierte Kapitel: „Double and multiple stars" von F. C. Henroteau in Ottawa astronomische und astrophysikalische Ergebnisse gleichmäßig behandelt.

Die vier Kapitel des vorliegenden Bandes, die alle von besonderen Kennern der einzelnen Stoffgebiete bearbeitet sind, haben besonders astronomisches Interesse. Am umfangreichsten sind die Kapitel 1 und 4, die beide neben einer Darstellung der Methoden auch wertvolle statistische Zusammenstellungen bieten. Vor allem gibt H. Ludendorff zum ersten Male eine zusammenfassende Bearbeitung der Eigenschaften der Veränderlichen, die sich auf einer ins Einzelne gehenden Klassifikation dieser Sterne aufbaut. So zeigt schon dieser erste herausgekommene Band des Handbuches, daß ihm eine grundlegende Bedeutung für die Weiterentwicklung wichtiger Zweige der Astronomie zukommt. Es ist nur zu wünschen, daß die übrigen Bände in möglichst rascher Folge erscheinen können. A. Kopff.

H. Reichenbach, Philosophie der Raum-Zeit-Lehre. 8⁰. VI u. 380 S. Berlin u. Leipzig, Walter de Gruyter & Co. 1928. M. 18.—, geb. M. 20.—.

Der Zeitpunkt, zu welchem diese umfassende und in die Tiefe gehende Behandlung der Grundlagen der Relativitätslehre erscheint, ist außerordentlich günstig, denn wieder konzentriert sich das



Interesse der Physiker auf Fragen von prinzipieller Bedeutung. Zwar liegt der Schauplatz des Ringens jetzt nicht im Gebiete der Relativitätstheorie, sondern der Quantenmechanik, aber dieses Buch von Reichenbach ist so allgemein und prinzipiell gehalten, daß es befähigt ist, Licht und Klarheit in einem weiteren Umkreis zu verschaffen als in dem unmittelbar von ihm behandelten Fragenkomplex der Relativitätstheorie.

Dieser Komplex beschäftigt allerdings nicht mehr in dem Umfange die Gemüter wie noch vor wenigen Jahren, nachdem eine umfangreiche populäre Literatur über die Relativitätstheorie den Hunger vieler, nach Klarheit strebender, zwar vorübergehend gestillt aber sicher nicht auf die Dauer befriedigt hat. Volle Aufklärung ihrer Fragen würden vermutlich viele erst in einem Buche wie dem hier vorliegenden finden. Ein solches Buch konnte aber erst entstehen, nachdem der Kampf um die strittigen Fragen, den die Relativitätstheorie ausgelöst hatte, verraucht und eine gewisse Besinnung und Reifung eingetreten war, so daß der Sieger von einer hohen Warte aus das ganze Feld, um das gerungen worden war, in Ruhe überschauen kann.

Diese allgemeinen Bemerkungen über das Buch von Reichenbach sollen dahin wirken, einen möglichst weiten Kreis zu seiner Lektüre zu veranlassen. Es ist so ausführlich, daß in der Tat fast jeder Gegenstand in ihm zur Sprache kommt, der während der letzten Jahre im Zusammenhang mit den Fragen der Relativitätstheorie zur Diskussion gestanden hat; es ist andrerseits so allgemein und prinzipiell gehalten, daß das Interesse aller befriedigt wird, denen es um das Prinzipielle, ohne genauere Kenntnis der physikalischen Einzelheiten, zu tun ist; es ist schließlich so geistvoll und lebhaft geschrieben, daß man bei seiner Lektüre wieder ganz in den Bann dieses gewaltigen Gedankengebäudes gerät, das Einstein errichtet hat und an dessen Ausbau und philosophischer Begründung Reichenbach hervorragend beteiligt ist.

Er hat den Stoff in drei Abschnitte gegliedert, von denen der erste den Raum, der zweite die Zeit und der dritte ihre Zusammenfassung als Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit zur „Welt" behandelt. Mit jedem Abschnitt rückt der behandelte Stoff näher an die physikalischen Geschehnisse, speziell an die Relativitätstheorie, heran.

In der Behandlung des Raumproblems herrschen noch vorwiegend geometrische Betrachtungen vor, doch liegt der Schwerpunkt der Betrachtungen in zwei Punkten, in denen die Verankerung des physikalischen Raumproblems später stattfindet. Es wird erstens mit Schärfe die Bedeutung der Zuordnungsdefinitionen für alle physikalischen Erkenntnisprozesse hervorgehoben und ihr Auftreten in dem vorliegenden Problem der Geometrie des Raumes aufgezeigt, es wird zweitens mit Nachdruck darauf hingewiesen, daß der euklidische Raum weder in metrischer noch topologischer Hinsicht eine Sonderstellung zu beanspruchen hat.

In dem zweiten Abschnitt, der das Zeitproblem behandelt, und in welchem natürlich auch das viel diskutierte Problem der Relativität der Gleichzeitigkeit analysiert wird, ist die Herausschälung des engen Zusammenhanges des Zeitproblems mit der Kausalstruktur der Geschehnisse von Wichtigkeit. Durch diesen unmittelbar bestehenden Zusammenhang erhält die Zeit, als eine der vier Dimensionen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, eine Sonderstellung, und Reichenbach klärt in diesem Abschnitt die mannigfachen Mißverständnisse auf, die auch bei vielen Anhängern der Relativitätstheorie bestanden haben, welche vermeinten, daß die Relativitätstheorie, Raum und Zeit zu einer Mannigfaltigkeit zusammenschweiße, in der jede der vier Dimensionen jeder der anderen vollkommen gleichwertig sei.

Im dritten Abschnitt treten dann die Ideen der allgemeinen Relativitätstheorie in den Vordergrund und es findet die wundervolle Erkenntnis Einsteins eine eingehende Würdigung, daß die Geometrie als ein Ausdruck des Gravitationsfeldes aufgefaßt werden kann, sich also aus der Verteilung von Energie und Materie in der Welt bestimmt. Der Sinn der damit gewonnenen Erkenntnis wird noch klarer durch einen Anhang, in welchem die Bemühungen kurz besprochen werden, auch die Elektrizitätslehre in ähnlicher Weise wie die Gravitation in die Geometrie der Welt einzupassen; hier tritt besonders eindrucksvoll das Wesen der Zuordnungsdefinitionen hervor. Rein formal eröffnen sich mancherlei Wege die Elektrizitätserscheinungen geometrisch zu deuten, da in der Wahl einer Zuordnungsdefinition in dem zu dem vorliegenden Zweck verallgemeinertem Raumbegriff noch eine Willkür besteht. Ein Fortschritt in den physikalischen Erkenntnissen der Elektrizität ist damit aber ohne weiteres nicht gewonnen; dies wäre erst der Fall, wenn diese geometrische Deutung zu einer Umgestaltung unserer Elektrizitätslehre führte und uns z. B. zu einem Verständnis des Elektrons verhülfe.

Es ist nicht möglich, im Rahmen einer solchen Besprechung den Inhalt eines so umfassenden und grundlegenden Buches voll im einzelnen und lückenlos zu würdigen. Als einziges habe ich eine Behandlung des kosmologischen Problems, also die Behandlung des topologischen Charakters des dreidimensionalen Raumes als Ganzes in der Relativitätstheorie vermißt. Mir scheinen die Vorstellungen über die Geschlossenheit und Endlichkeit des Raumes, die Einstein entwickelt hat, ein so wesentlicher Teil seiner Theorie, daß sie in dem vorliegenden Buch hätten Platz finden sollen. Doch kann diese geringfügige Beanstandung in keiner Weise das Gesamturteil über das Reichenbachsche Buch beeinträchtigen, das in jeder Hinsicht ein Werk von größter wissenschaftlicher Bedeutung ist und allgemeinstes Interesse in dem Kreise aller Mathematiker, Physiker und Philosophen verdient.

Potsdam. Erwin Freundlich.

E. König, Elastizität und Festigkeitslehre. 8°. XII u. 140 S. Mit 90 Abb. Leipzig J. A. Barth. 1927. M. 10.—, geb. M. 12.—.

Das vorliegende 140 Seiten umfassende Buch gibt einen kurzen und klaren Überblick über die Grundlagen und die wichtigsten Anwendungen der Festigkeitslehre. Im ersten Abschnitt „Mathematische Elastizitätstheorie" werden in üblicher Weise von den Spannungen und Deformationen und dem beide verbindenden Hookeschen Gesetz ausgehend die Grundgleichungen abgeleitet und die Formeln für die Formänderungsarbeit aufgestellt. In Nr. 26 „Potentielle Energie und Formänderungsarbeit" werden deutlich die beiden Minimumsätze, die zur Berechnung statisch unbestimmter Aufgaben dienen, gegenübergestellt; einerseits das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, wobei die Formänderungsarbeit als Funktion der Verschiebungen bei fest gegebenen Spannungen dargestellt wird, andererseits das Prinzip von Castigliano, bei dem die Formänderungsarbeit

als Funktion der Spannungen bzw. der äußeren Kräfte bei fest gegebenen Verschiebungen zur Darstellung kommt. Beide Prinzipe sind einander gleichwertig und man kann jedes zur Lösung statisch unbestimmter Aufgaben heranziehen; allerdings wird sich je nach Stellung der Aufgabe bald das eine, bald das andere Prinzip zur Lösung besser eignen. Vom Castiglianoschen Prinzip sind in dem folgenden Abschnitt eine Reihe von Anwendungen gegeben, dagegen habe ich ein Beispiel zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen nicht finden können.

Der zweite Abschnitt „Näherungsmethoden und Anwendungen" behandelt in üblicher Weise nacheinander die verschiedenen Arten der Beanspruchung von Stäben auf Zug und Druck, Biegung, Torsion und Knicken. Die Beispiele sind geschickt ausgewählt, nur vermisse ich an manchen Stellen Literaturhinweise auf eingehendere Darstellungen, wie sie in einem Sammelwerk — um ein solches handelt es sich ja in den „Werkkräften", von denen das vorliegende Büchlein einen Teilband darstellt — besonders erwünscht sind. Die Behandlung der Ringe und Scheiben und der Platten schließt den zweiten Abschnitt. Die letzteren kommen sehr kurz. Der Verf. beschränkt sich hier auf das allereinfachste und verweist im übrigen auf die Literatur. Daß die Schalen überhaupt nicht behandelt werden, auch nicht soweit sie sich ohne Eingehen auf die Formänderung rein statisch behandeln lassen (Membranspannungen), scheint mir eine Lücke zu sein. Abgesehen davon ist die Darstellung aber recht gut und von erfreulicher Klarheit.

Es folgt im dritten Abschnitt die „Festigkeitslehre". Darunter versteht der Verfasser die experimentellen Untersuchungen über den Zusammenhang der äußeren Kräfte, Spannungen und Formänderungen bei den verschiedenen Werkstoffen, während er die beiden ersten Abschnitte zur Elastizitätstheorie rechnet. Der Abschnitt vermittelt einen guten Überblick über die verschiedenen Bruchtheorien, geht auch auf die neueren Arbeiten über elastische Hysteresis ein und behandelt schließlich auch den Einfluß der Zeit bei wiederholter Belastung.

Der vierte Abschnitt ist den Anwendungen der Seileckkonstruktion gewidmet. Es wird in bekannter Weise das Seileck zur Konstruktion der Momentenlinie und der elastischen Linie verwendet. Ferner wird die graphische Konstruktion von Flächeninhalten und von Trägheitsmomenten gegeben.

Wenn man von den Lücken, die das Buch aufweist, die aber vielleicht absichtlich mit Rücksicht auf den zur Verfügung gestandenen Raum gelassen worden sind, absieht, so handelt es sich in dem vorliegenden Buch um eine wertvolle, klare Darstellung der Festigkeitslehre, die sich sicher Freunde erwerben wird. L. Föppl.

S. W. Rösch, Über Reflexphotographie. (Abh. d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. XXXIX. Bd. Nr. VI.) 8⁰. 62 S. Mit 7 Tafeln u. 90 Fig. Leipzig. S. Hirzel. 1926. Geheftet M. 5.50.

Im Rahmen der Arbeit wird Reflexphotographie dahin definiert, daß dabei Licht konstanter Schwingungszahl, von einem leuchtenden Punkt kommend, an einem Objekt derart auf die photographische Schicht reflektiert wird, daß aus dem gewonnenen Bild (das nicht ein getreues Abbild des Reflektors sein soll) auf die räumliche Lage (Richtung) der reflektierenden Flächenelemente geschlossen werden kann. Diese photographische Registrierung der Reflexe ist in der Kristallographie von Vorteil bei der Untersuchung sehr kleiner Objekte, bei sehr flächenreichen Stücken, bei Erscheinungen geätzter und krummflächiger Körper und beim Studium von Oberflächenveränderungen bei physikalischen und chemischen Eingriffen. Nach einer Übersicht über Literatur und Geschichte des bisher wenig bearbeiteten Gegenstandes behandelt der Verf. die mathematischen Grundlagen der räumlichen Anordnung der Reflexstrahlenbüschel und der Projektion auf die Ebene und auf die Zylinderfläche für verschiedene Möglichkeiten der Beleuchtungsrichtung. Im praktischen Teil wird die Apparatur (nach Art des zweikreisigen Goniometers nach V. Goldschmidt) und ihre Justierung beschrieben. Auf genaue Hinweise bezüglich des verwendeten photographischen Materials und der erforderlichen Aufnahmetechnik folgt die Auswertung der Photogramme mit Hilfe der in den Tafeln wiedergegebenen Netze. Auch die möglichen Fehlerquellen und ihre Berücksichtigung werden eingehend gewürdigt, ebenso die Intensitätsbestimmung zwecks Auswertung der Photogramme nach dieser Richtung hin. Zum Schluß wird eine Fülle von Versuchsergebnissen geboten, welche sich auf das Gebiet der Kristallographie (ebenflächige und krummflächige Kristalle), auf bildliche Darstellung komplizierter mathematischer Kurven, auf Experimente physikalischer Natur (z. B. künstlicher Regenbogen), auf technische Untersuchungen (der Oberflächen von Glasstäben und Stahlkugeln) erstrecken. 68 Reflexphotogramme mit dazugehöriger tabellarischer Aufstellung der Ergebnisse belegen die Brauchbarkeit der eingeschlagenen Methode. Die Arbeit muß als sehr eingehend und umfassend bezeichnet werden. Klughardt.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

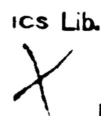
Habilitiert: An der Technischen Hochschule Aachen Dr. Ing. A. Sulfrian für Wirtschaftschemie, an der Universität Rostock Dr. Ferdinand Waibel für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent für physikalische Chemie und physikalisch-chemische Technik an der Universität Gießen Dr. Hugo Stintzing zum a. o. Professor daselbst, der Privatdozent Dr. Aeckerlein zum a. o. Professor für Radiumkunde an der Bergakademie in Freiberg, Laborator Dr. E. Hammersten zum Professor der Chemie und Pharmazie am Karolinska Institutet in Stockholm.

Berufen: Der a. o. Professor für theoretische Physik an der Universität Rostock Dr. Friedrich Hund zum ord. Professor für theoretische Physik an der Universität Halle. (Inzwischen Berufung abgelehnt.)

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Marburg Geh. Regierungsrat Dr. Karl v. Auwers.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye,** Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 17. Ausgegeben am 1. September 1928. **29. Jahrgang.**

Nr. 765. Printed in Germany.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Besprechungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 17 | 1. September 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 19 am 25. September 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Experimentelle Untersuchungen über die Fallbewegung von Kugeln und Scheiben in reibenden Flüssigkeiten.

Von J. Schmiedel.

Der Widerstand, den Kugeln und kreisförmige dünne Scheiben bei gleichförmiger Translation in einem zähen Medium im Bereich großer Reynoldsscher Zahlen erfahren, ist experimentell wiederholt mit genügender Genauigkeit festgelegt worden.

Für die Kugel erstrecken sich die Untersuchungen auch über das Gebiet mittlerer und kleiner Reynoldsscher Zahlen[1]). Die bisherigen Ergebnisse zu letztgenannter Aufgabe bedürfen aber insofern einer Ergänzung, als im Bereich der schleichenden Bewegung einmal der Verlauf der Widerstandskurve infolge der geringen Zahl und der verhältnismäßig großen Streuung der Versuchswerte noch nicht ausreichend genau festliegt, zum anderen aber der hier sich bemerkbar machende Einfluß der Gefäßwände nicht die nötige Beachtung finden konnte, da die Versuchsgefäße meist nicht der durch die Theorie vorgeschriebenen Bedingung der zylindrischen Beschaffenheit genügten. Wenn die letztere erfüllt ist, können derartige Versuche in erster Linie dazu dienen, die interessante Frage zu klären, ob die bisher vorliegenden Wandeinflußtheorien mit den experimentellen Ergebnissen im Einklang stehen und welcher von ihnen der Vorzug zu geben ist.

Für die kreisförmige Scheibe liegen bisher nur Versuche der Göttinger Versuchsanstalt vor[1]), die die Widerstandskoeffizienten für Reynoldssche Zahlen von 4000 und höher festlegen. Im Bereich kleiner R-Werte sind bisher noch keine Messungen erfolgt.

Es erschien daher wünschenswert:

1. den Widerstand von Kugeln bei stationärer Bewegung im Gebiet sehr kleiner R-Werte zu messen, insbesondere den Einfluß der Gefäßwände dabei zu berücksichtigen,

1) H. S. Allen, Phil. Mag. **50**, 323, 1900; H. D. Arnold, Phil. Mag. **22**, 755, 1911; L. Schiller u. A. Döge, Leipz. Ber. **64**, 13, 1912; Physik. Zeitschr. **13**, 234, 1912; F. Sigismund Schmidt, Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln. Diss. Leipzig 1919; C. Wieselsberger, Physik. Zeitschr. **23**, 219, 1922; H. Liebster, Ann. d. Phys. **82**, 541, 1927, Auszug aus einer Diss., Leipzig 1924: Über den Widerstand von Kugeln bei der Fallbewegung und seine Veränderung in der Nähe einer ebenen Wand; Castleman, Techn. Notes, U. S. Nat. Advisory Committee f. Aeronautics Nr. 231, 1926.

1) Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanst. Göttingen, II. Lief. S. 28, 1923.



2. den Widerstand von kreisförmigen Scheiben im Bereich kleiner und mittlerer R-Werte festzulegen und
3. den Strömungsverlauf hinter den Versuchskörpern, dessen Kenntnis eine bessere Beurteilung der Versuchsergebnisse erlaubt, in einigen Fällen näher zu untersuchen.

I. Versuchsanordnung.

Von den beiden möglichen Versuchsanordnungen, die man zur Widerstandsbestimmung fester Körper in widerstehenden Medien verwenden kann — ruhende Körper in bewegten Medien und bewegte Körper in ruhenden Medien —, wurde bei allen Versuchen die letztere, unter Zuhilfenahme der Schwere als bewegende Kraft, benutzt. Die zur Ermittelung der Geschwindigkeit nötigen genauen Bestimmungen der Fallwege und Fallzeiten wurden mittels einer kinematographischen Methode vorgenommen, die in ihren Einzelheiten schon von P. Hirsch[1]) und H. Liebster[2]) beschrieben worden ist. Insbesondere sind die Angaben über Apparatur, Meßtechnik und Fehlerberechnung in letztgenannter Arbeit auch für die vorliegenden Versuche zutreffend. Im folgenden seien deswegen nur spezielle Angaben, bzw. Abweichungen von der Liebsterschen Anordnung, beigefügt.

Als Versuchskörper dienten Kugeln und dünne kreisförmige Scheiben. Die Kugeln, die zur Verwendung kamen, waren fast durchweg Stahlkugeln, wie sie im Handel als Kugellagerkugeln erhältlich sind. Ihr Durchmesser betrug 0,1009 bis 0,5529 cm. Die kleinsten dieser Kugeln, mit einem Durchmesser von 0,1—0,2 cm, wurden von der Firma Gebr. Heller, Marienthal, Thür., in dankenswerter Weise für die Versuche zur Verfügung gestellt. Um sehr kleine Reynoldssche Zahlen zu erhalten, wurden drei Versuche mit Aluminiumkugeln[3]) von einem Durchmesser von 0,1131 und 0,1936 cm ausgeführt. Die Durchmesser wurden mit einem Komparator von Zeiss gemessen. Es zeigte sich, daß alle Kugeln für die Versuche genügend kugelförmige Beschaffenheit besaßen. Bei den Stahlkugeln betrug die Abweichung von der Kugelform maximal 0,6 Proz., bei den Aluminiumkugeln allerdings 2 Proz. des Durchmessers.

Die verwendeten kreisförmigen Scheiben wurden alle in der Institutswerkstatt aus feingewalztem Pendelstahl, bzw. Aluminium-, Silber- oder Goldblech gestanzt. Sie waren infolgedessen alle scharfrandig. Die Abweichung der gemessenen Durchmesser voneinander betrug nie über 1 Proz. Die Dicke der Scheiben wurde mit einer Mikrometerschraube und einem Libellensphärometer bestimmt. Um die Meßfehler hierbei möglichst auf unter 1 Proz. herabzudrücken, wurden bei jedem Plättchen mindestens 10 Dickenmessungen vorgenommen und daraus die Mittelwerte gebildet.

Wenn der Durchmesser einer Scheibe mit d, die Dicke mit c bezeichnet wird, so war das Verhältnis $\frac{c}{d}$ in keinem Falle größer als 0,03. Auf die geometrische Ähnlichkeit der Scheiben mußte verzichtet werden, da Bleche verschiedenen Materials nicht in gleicher Dicke erhältlich waren und ein präzises Abschleifen sich als unmöglich erwies. Im übrigen ist das Verhältnis $\frac{c}{d}$ so klein, daß das Außerachtlassen der geometrischen Ähnlichkeit die Resultate wenig beeinflußt haben dürfte.

Die Dichte der Kugeln als auch der Scheiben wurde mittels Pyknometers bestimmt. Die gemessenen Werte sind aus den nachfolgenden Tabellen zu ersehen.

Bei den ersten Versuchen wurden die Versuchskörper mit einer Pinzette unter die Flüssigkeitsoberfläche gebracht. Beim Öffnen der Pinzette begann die Fallbewegung und damit der Versuch. Später wurde eine elektromagnetische Loslaßvorrichtung verwendet. Sie gewährte insofern einen Vorteil, als die Flüssigkeit nicht mehr in die geringste Erschütterung versetzt wurde, was beim Öffnen der Pinzette nie ganz vermieden werden konnte. Außerdem konnten nun die Versuche von einer Person allein ausgeführt werden, da die Kontaktauslösung des Elektromagneten durch die Kurbel des Aufnahmeapparates erfolgte. Bei den Kugelversuchen wurde ein stabförmiger Elektromagnet benutzt. Da die kleinsten Kugeln durch den remanenten Magnetismus auch nach Öffnen des Kontaktes noch festgehalten wurden, war es nötig, den unteren Teil des Weicheisenkernes mit einer Glashülle zu umgeben. Auf diese Weise wurde die Wirkung des remanenten Magnetismus geschwächt und außerdem Verschmutzungen der Flüssigkeit durch Eisenoxydspuren verhindert. Im übrigen wurde der Magnetismus, der Größe der Kugeln entsprechend, durch einen Widerstand geregelt. Diese Fallvorrichtung war an einem Stativ befestigt und konnte in senkrechter Richtung verschoben werden. Vor Versuchsbeginn wurde sie so eingestellt, daß sich die Glaskuppe mit Versuchskörper $^{1}/_{2}$ cm unter der Flüssigkeitsoberfläche befand. Da die Kugel in dieser Lage von

1) P. Hirsch, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 3, 93, 1923.
2) H. Liebster, a. a. O.
3) In der Institutswerkstatt hergestellt.



allen Seiten zu sehen war, konnte genau festgestellt werden, ob sie frei von anhaftenden Luftbläschen war.

Bei den Scheiben trat zu besserer horizontaler Orientierung wie aus Fig. 1 zu ersehen ist, an die Stelle des Stabmagneten ein Hufeisenmagnet, dessen Pole in je zwei feine Spitzen ausliefen. Um den remanenten Magnetismus unwirksam zu machen, wurden über den Eisenspitzen vier Messingspitzen so angeordnet, daß

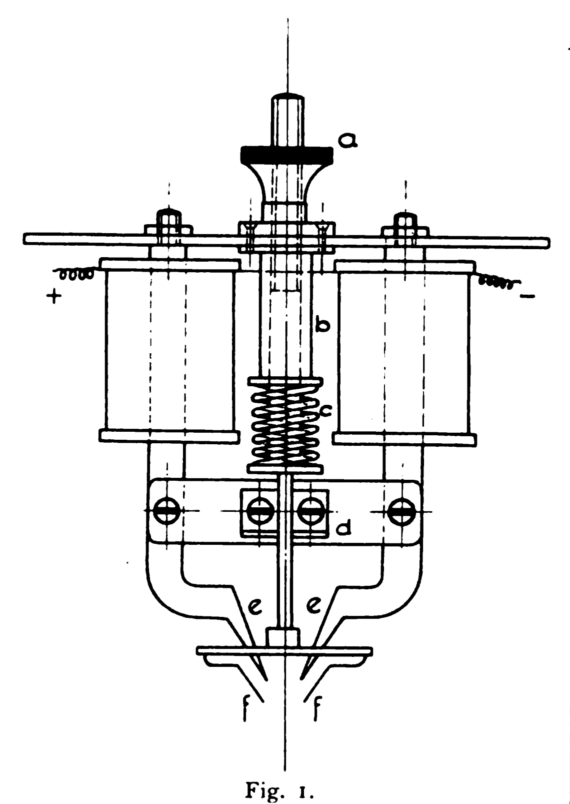


Fig. 1.

a) Stellschraube
b) Führungszylinder
c) Spannfeder
d) Führung
e) Stahlspitzen
f) Messingspitzen.

durch eine Stellschraube der Abstand der Messing- und Eisenspitzen beliebig geändert werden konnte. Durch den Magnetismus wurde die Stahlscheibe gegen die Messingspitzen gezogen, und sie begann bei Unterbrechung des Stromes ihre Fallbewegung in vollkommen horizontaler Lage.

Bei den Versuchen, die eine Untersuchung des Wandeinflusses bezweckten, kamen durchgängig zylindrische Glasgefäße zur Verwendung. Die erste Reihe von Kugelversuchen wurde in einem Zylinder von 5,6 cm Durchmesser und 35 cm Höhe, die zweite Reihe in einem kleineren von 2,7 cm Durchmesser und 20 cm Höhe vorgenommen. Die Höhe auch des kleineren Gefäßes war ausreichend, da es sich bei diesen Versuchen um so kleine Geschwindigkeiten handelte, daß der Zustand konstanter Endgeschwindigkeit praktisch immer erreicht wurde. Die Glaswände der Gefäße waren verhältnismäßig dünn und von guter Beschaffenheit, so daß in keinem Falle eine Ablenkung der durchgehenden Strahlen und eine damit verbundene Verzerrung des Bildes beobachtet wurde. Dies wurde festgestellt, indem ein im Innern des Gefäßes in der Achsenrichtung befestigter Maßstab photographiert wurde. Eine etwaige Verzerrung wäre beim Ausmessen des Bildes sofort in Erscheinung getreten.

Die Versuche mit den kreisförmigen Stahlscheiben wurden in einem Zylinder von 9,5 cm Durchmesser und 40,2 cm Höhe ausgeführt. Außerdem kamen zwei quadratische Gefäße zur Verwendung, deren Abmessungen 8,5 × 8,5 × 20 cm und 14,5 × 14,5 × 30 cm betrugen. In ihnen wurden die Spezialversuche über den Boden- und Deckeneinfluß, die Schwankungserscheinungen bei fallenden Scheiben und endlich die photographischen Aufnahmen des Strömungsverlaufes hinter Kugeln und Scheiben vorgenommen.

Als zähe Medien wurden Glyzerin und homogene Mischungen von Glyzerin und Wasser verwendet, deren Dichte mit dem Pyknometer und deren Zähigkeitswerte mittels der Poiseuilleschen Kapillarmethode bestimmt wurden. Bei allen ausgewerteten Versuchen wurde eine Zähigkeitsmessung vorher und eine nachher bei einer beobachteten Temperaturerhöhung um $\sim 1^0$ vorgenommen. Während der Dauer eines Versuches konnte die Temperatur immer konstant gehalten werden, dagegen ließ es sich nicht vermeiden, daß sich infolge der Bestrahlung die Versuchsflüssigkeit während der Dauer einer Versuchsreihe um Bruchteile von Graden erwärmte, obwohl das Versuchsgefäß von einem Wasserbad umgeben war. Die Versuchstemperatur wurde mit einem Thermometer vor und nach jedem Einzelversuch bis auf $0,1^0$ gemessen. Der zu jedem Versuch gehörige Zähigkeitswert wurde dann durch Interpolation auf $0,1^0$ genau gewonnen. Meßfehler infolge von Temperaturdifferenzen dürften auf diese Weise auf ein Minimum herabgedrückt worden sein.

Bei großen Zähigkeitsunterschieden, wie den hier vorliegenden, war es notwendig, die Relativmessungen in zwei Kapillaren auszuführen. In der engeren wurde die Zähigkeit einer Vergleichsflüssigkeit[1]) gegen die des Wassers bestimmt, in der weiteren die der Versuchsflüssigkeit gegen die der Vergleichsflüssigkeit.

1) Hierzu wurde eine Mischung von Wasser und Glyzerin verwendet, deren Durchlaufzeit ungefähr in der Mitte zwischen der des Wassers und der der Versuchsflüssigkeit lag.

Die Abmessungen unserer Kapillaren betrugen: h_I[1]) $= 33{,}8$ cm, $h_{II} = 33{,}9$ cm; Radius $a_I = 0{,}0580$ cm, $a_{II} = 0{,}1116$ cm; Durchflußmenge $Q_I = 6{,}422$ ccm, $Q_{II} = 6{,}395$ ccm. Aus dem oben angeführten Grunde mußte bei Anwendung des Poiseuilleschen Gesetzes auch die Energie der ausströmenden Flüssigkeit berücksichtigt werden. Daher wurde bei allen Durchlaufversuchen die Hagenbachsche[2]) „Korrektur der lebendigen Kraft" in Rechnung gesetzt. Die verwendete Gleichung lautet mithin:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tau_1\left(h s_1 - \varrho_1 \dfrac{Q^2}{a^4 \pi^2 \tau_1^2}\right)}{\tau_2\left(h s_2 - \varrho_2 \dfrac{Q^2}{a^4 \pi^2 \tau_2^2}\right)}.$$

Es bedeuten hierbei μ die Zähigkeiten, τ die Durchlaufzeiten, s die spez. Gewichte und ϱ die Dichten. Die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf die beiden durch dieselbe Kapillare strömenden Vergleichsflüssigkeiten.

Im übrigen wurden die Kapillaren so gewählt, daß sie der Bedingung $\frac{l}{aR} > 0{,}115$ genügten[3]), d. h. daß die parabolische Geschwindigkeitsverteilung der Poiseuilleschen Strömung erreicht wurde. Es bedeutet dabei l die Länge, a den Halbmesser der Kapillaren und R die Reynoldssche Zahl.

Zu Kontrollzwecken wurden Zähigkeitsbestimmungen des Wassers in der Weise vorgenommen, daß ein Wert aus Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, entnommen und die dazugehörige Ausflußzeit bestimmt wurde. Dann wurden die Durchlaufzeiten des Wassers bei verschiedenen anderen Temperaturen ermittelt und hieraus die entsprechenden Viskositäten berechnet. Verglichen mit den von Kohlrausch angegebenen ergab sich eine mittlere Abweichung von 0,6 Proz.

Als kinematographischer Aufnahmeapparat wurde ein Apparat von der Firma Ernemann, Modell A, mit einem Objektiv Ernemann, Anastigmat „Ernon" 1 : 3,5; $f = 8$ cm, verwendet, den die Helmholtzgesellschaft freundlichst zur Verfügung gestellt hatte[4]).

II. Über den Widerstand von Kugeln bei kleinen Reynoldsschen Zahlen.

1. Allgemeines.

Der Widerstand, den eine kleine Kugel bei langsamer quasistationärer Bewegung in einem zähen, unendlich ausgedehnten Medium erfährt, ist zuerst von Stokes[1]) berechnet worden. Durch Vernachlässigung der quadratischen Glieder in den hydrodynamischen Grundgleichungen war es ihm möglich, die Strömung um eine im Medium unter dem Einfluß der Schwere fallende Kugel und den Widerstand zu berechnen, für den er erhält:

$$W = 6\pi\mu r v.$$

wobei μ die Zähigkeit, r den Kugelradius und v die Geschwindigkeit bedeutet.

C. W. Oseen[2]) zeigte, daß die Stokessche Lösung der Differentialgleichungen nicht einwandfrei ist. Durch Berücksichtigung der sogenannten halbquadratischen Glieder fand er für den Widerstand

$$W = 6\pi\mu r v\left(1 + \frac{3}{4}|\sigma| r\right).$$

Hierbei ist $\sigma = \frac{\varrho v}{2\mu}$.

Da diese beiden Theorien nur für das unendlich ausgedehnte Medium Gültigkeit besitzen, konnte eine Prüfung derselben durch das Experiment erst dann erfolgen, nachdem auch theoretische Arbeiten über den Einfluß der Gefäßwände vorlagen.

Unter Zugrundelegung der Stokesschen Form der Differentialgleichungen hat H. A. Lorentz[3]) den Einfluß beliebiger Wände auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit durch Superposition der Zustände, die durch Bewegungsreflexionen an einer Grenzfläche des Mediums und am Körper selbst entstehen, bestimmt.

Mit Hilfe dieser Lorentzschen Rechnung und ebenfalls ausgehend von den Stokesschen Gleichungen hat R. Ladenburg[4]) die Reflexionen der Bewegung einer Kugel, die eine Translation in einem geschlossenen Zylinder ausführt, in der Weise berechnet, daß er die Reflexion auf einen unendlich langen Zylinder — Einfluß der Seitenwände — und zwei unendlich ausgedehnte parallele und zur Zylinderachse senkrechte Ebenen — Boden und Deckeneinfluß — bezieht, deren Abstand die Zylinderlänge ist. Das Resultat der Rechnung ist insofern nur eine Annäherung, als die Reflexion, streng genommen, auf einen geschlossenen Zylinder bezogen werden müßte. Er berechnet für den Widerstand unter Berücksichtigung des Seitenwandeinflusses

$$W' = 6\pi\mu r v\left(1 + 2{,}4\,\frac{d}{\zeta}\right),$$

1) h = Abstand des Flüssigkeitsspiegels im Auffanggefäß vom Mittel zwischen den beiden Marken an der Kapillaren.

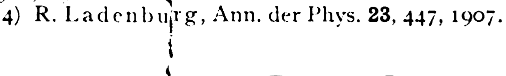
2) Ed. Hagenbach, Pogg. Ann. **109**, 385, 1860.

3) L. Schiller, Forschungsarb. auf dem Gebiete d. Ingenieurwesens, Heft 248, S. 22 ff., 1922.

4) Für die Überlassung des Apparates sei auch an dieser Stelle gedankt.

1) G. G. Stokes, Cambr. Trans. 9, 1851.

2) C. W. Oseen, Ark. f. math., astron. o. fys. 6, 75, 1910; **9**, 1, 1913.



3) H. A. Lorentz, Abhandl. über theor. Phys. **1**, 23 ff., 1906.

4) R. Ladenburg, Ann. der Phys. **23**, 447, 1907.



wobei d der Kugeldurchmesser, ζ der Zylinderdurchmesser ist.

Mit der Oseenschen Form der Differentialgleichungen als Basis hat neuerdings H. Faxén[1]) eine Theorie für dieselben Verhältnisse aufgestellt. Als Gültigkeitsbedingung fordert er, daß die Zylinderlänge im Vergleich zum Durchmesser sehr groß sei. Er berechnet den Widerstand zu

$$W = \frac{6\pi\mu r v}{1 - \frac{3}{4} r|\sigma| - \frac{r}{l} L(\sigma l) + \frac{r^3}{l^3} \cdot 2{,}09}.$$

Hier bedeutet l den Zylinderradius. $L(\sigma l)$ ist eine von ihm für einzelne Werte des Arguments numerisch berechnete Funktion. Die Zwischenwerte wurden von uns durch graphische Interpolation gewonnen.

Außer den beiden letzterwähnten Theorien, die nur den Einfluß der Seitenwände berücksichtigen, liegen noch zwei weitere vor, die das Problem des Boden-, bzw. Boden- und Deckeneinflusses zu lösen suchen. H. A. Lorentz berechnet die Reflexion der Bewegung an einer zur Fallrichtung senkrechten Ebene[2]) und findet für die zusätzliche Geschwindigkeit, um die sich die Geschwindigkeit der Kugel bei Bewegung in einem unendlichen Medium vergrößern würde, $\frac{9}{8}\frac{r}{a} v$, wobei a der augenblickliche Wandabstand ist. Der Widerstand in einem beliebigen Punkte beträgt also unter Berücksichtigung des Bodeneinflusses

$$W = 6\pi\mu r v\left(1 + \frac{9}{8}\frac{r}{a}\right).$$

Diese Theorie erfuhr eine Erweiterung durch R. Ladenburg[3]), der eine zweite parallele Ebene — feste Decke — einführte und an dieser ebenfalls die ursprüngliche Bewegung der Kugel reflektierte. Auf dieselbe Weise berechnete er dann die drei folgenden Reflexionen an den jeweils gegenüberliegenden Ebenen. Durch Integration der erhaltenen Zusatzgeschwindigkeiten über das gesamte Beobachtungsgebiet und Mittelung des so gewonnenen Wertes erhält er für die Zusatzgeschwindigkeit den Wert $3{,}3\frac{r}{h} v$, wobei h den Abstand Boden-Decke bedeutet. Die Integrationsgrenzen sind so gewählt, daß sie das mittlere Drittel des Gefäßes einschließen. Der Widerstand nach Stokes wird dadurch — unter Berücksichtigung des Boden- und Deckeneinflusses — vergrößert auf

$$W = 6\pi\mu r v\left(1 + 3{,}3\frac{r}{h}\right).$$

Die Versuchsergebnisse vorliegender Arbeit sind in den in der neueren Hydrodynamik allgemein üblichen dimensionslosen Größen ψ und R ausgedrückt. ψ ist eine den Widerstand charakterisierende dimensionslose Zahl, der sogenannte Widerstandskoeffizient. R ist die Reynoldssche Zahl. Wenn

W = Widerstand
d = Durchmesser der Kugel
v = Endgeschwindigkeit
ϱ = Dichte der Flüssigkeit
μ = Zähigkeit
ϱ_1 = Dichte der Kugeln

bedeuten, so ist $R = \frac{d v \varrho}{\mu}$ und $\psi = \frac{W}{r^2\pi\frac{\varrho v^2}{2}}$.

Der funktionale Zusammenhang zwischen dem Widerstand W und den Variabeln d, v, ϱ, μ und ϱ_1 läßt sich durch die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes ψ von der Reynoldsschen Zahl R darstellen.

In diesen dimensionslosen Größen ausgedrückt lautet das Gesetz von Stokes

$$\psi_{St} = \frac{24}{R},$$

das von Oseen

$$\psi_o = \frac{24}{R}\left(1 + \frac{3}{16}R\right).$$

Die Theorien über den Einfluß der Seitenwände von Ladenburg und Faxén erscheinen in folgender Gestalt:

$$\psi_{L_1} = \frac{24}{R}\left(1 + 2{,}4\frac{d}{\zeta}\right)$$

$$\psi_F = \frac{24}{R\left[1 - \frac{3}{16}R - \frac{d}{\zeta}L\left(\frac{\zeta\varrho v}{4\mu}\right) + \cdots\right]}.$$

ζ ist dabei wie oben der Durchmesser des Zylinders.

Ebenso kann man die Ladenburgsche Theorie über den Boden- und Deckeneinfluß dimensionslos darstellen. Sie lautet

$$\psi_{L_2} = \frac{24}{R}\left(1 + 3{,}3\frac{r}{h}\right).$$

Da für beide sich auf das unendliche Medium beziehende Theorien, sowohl die von Stokes als auch die von Oseen, auch eine Theorie über den Einfluß der Seitenwände vorliegt — vom Boden- und Deckeneinfluß soll zunächst abgesehen werden —, ist die Möglichkeit gegeben, einmal die

1) H. Faxén, Einwirkung der Gefäßwände auf den Widerstand gegen die Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit. Diss. Upsala 1921; H. Faxén, Ark. f. math., astron. o. fys. Bd. 17, Nr. 27, 1923.
2) H. A. Lorentz, a. a. O.
3) R. Ladenburg, a. a. O.

Tabelle I.

Nr.	Kugel		Flüssigkeit				
	Durchm. d cm	Dichte ϱ_1	Dichte ϱ g/cm^3	Kinem. Zähigk. $\frac{\mu}{\varrho}$; cm^2/sec	Geschw. v cm/sec	$R = \frac{dv\varrho}{\mu}$	$\psi = \frac{W}{r^2\pi\frac{\varrho v^2}{2}}$
1	0,1131	2,700[1])	1,228	1,298	0.6109	0,0531	475,6
2	0,1009	7,524	1,233	1,621	1,703	0,1059	238.6
3	0,1009	7,524	1,228	1,323	2,017	0,1537	166,3
4	0,1936	2,700[1])	1,233	1,621	1,370	0.1636	160.5
5	0,1936	2,700	1,228	1,323	1,666	0,2437	109,6
6	0,1508	7,524	1,228	1,323	4.321	0,4924	54,16
7	0,1750	7,524	1,233	1,621	4,777	0,5157	52,59
8	0,1750	7,524	1,228	1,438	5,307	0,6693	41,66
9	0,1750	7,524	1,228	1,323	5,499	0,7277	38,82
10	0,2005	7,524	1,228	1,429	6,587	0,9241	30,97
11	0,2005	7,524	1,227	1,385	6,948	1,005	27,87
12	0,2005	7,524	1,228	1,311	7,109	1,087	26,65
13	0,2005	7,524	1,227	1,118	8,326	1,493	19,40
14	0,3166	7,818	1,228	1,428	14,71	3,258	10,27
15	0,3166	7,818	1,228	1,323	15,08	3,606	9,772
16	0,3885	7,818	1,228	1,420	19,73	5,397	7,003
17	0,4766	7,818	1,228	1,411	26,62	8,990	4,721
18	0,5529	7,818	1,227	1,118	36,24	17,92	2,956
19	0,1009	7,524	1,227	1,605	1,604	0,1008	263,1
20	0,1009	7,524	1,227	1,307	1,963	0,1515	175,6
21	0,1508	7,524	1,227	1,605	3,500	0,3287	82,62
22	0,1508	7,524	1,227	1,315	4,148	0,4755	58,84
23	0,1750	7,524	1,227	1,596	4,517	0,4953	57,57
24	0,1750	7,524	1,227	1,315	5,628	0,7489	37,10
25	0,2005	7,524	1,227	1,596	6,084	0,7640	36,34
26	0,2005	7,524	1,227	1,323	6,885	1,042	28,38

1) Aluminiumkugeln.

experimentell bestimmten Widerstandsbeiwerte unmittelbar mit den theoretischen von Ladenburg, bzw. Faxén zu vergleichen, oder aber jene auf unendliches Medium umzurechnen und ihre Abweichungen von den theoretischen Werten von Stokes bzw. Oseen festzustellen[1]).

Der zuletzt erwähnte Weg hat gegenüber dem ersteren einen großen Vorzug, weswegen er auch im folgenden Verwendung finden soll. Stellt man nämlich die Versuchsergebnisse graphisch dar, so liegen die auf unendliches Medium umgerechneten ψ-Werte alle auf einer einzigen Kurve, wodurch die Beurteilung der Ergebnisse bedeutend erleichtert wird. Im ersteren Fall dagegen liegen die Punkte für ψ auf einer Kurvenschar, als deren Parameter der relative Wandabstand auftritt, der ja in den Gesetzen von Ladenburg und Faxén, die den Widerstand in der allgemeinsten Form angeben, als unabhängige Variable enthalten ist.

Die Umrechnung der experimentell bestimmten ψ-Werte auf unendliches Medium[2]), die Berechnung von ψ_∞, ist also, da nach dem vorher Gesagten immer gelten muß

$$\frac{\psi_{\text{exp}}}{\psi_\infty} = \frac{\psi_{L_1}}{\psi_{St}}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\psi_{\text{exp}}}{\psi_\infty} = \frac{\psi_F}{\psi_o},$$

so durchzuführen, daß man ansetzt im einen Falle

$$\psi_\infty = \frac{\psi_{\text{exp}}}{1 + 2{,}4\frac{d}{\zeta}}$$

und im anderem Falle

$$\psi_\infty = \psi_{\text{exp}} \frac{\left[1 - \frac{3}{16}R - \frac{d}{\zeta}L\left(\frac{\zeta\varrho v}{4\mu}\right)\cdots\right]}{1 - \frac{3}{16}R}.$$

1) Eine prozentuale Angabe der Abweichungen liefert in beiden Fällen dieselben Resultate.

2) Vorläufig nur mit Berücksichtigung des Einflusses der Gefäßseitenwände.

2. Beobachtungsergebnisse.

Die Versuchsergebnisse sind in Tab. I zusammengestellt. Neben den Werten von d, ϱ_1, ϱ, $\frac{\mu}{\varrho}$ und v sind die Dimensionslosen R und ψ verzeichnet. Die Versuche Nr. 1—18 sind in einem Zylinder von 5,6 cm Durchmesser, die von 19—26 in einem von 2,7 cm Durchmesser ausgeführt worden.

Tabelle II[1]).

Nr.	R	$\frac{d}{\zeta}$	$\psi'_{St} = \frac{24}{R}$	$\psi_\infty = \frac{\psi'_{exp}}{1+2{,}4\frac{d}{\zeta}}$ umgerechn. n. Ladenburg	Abweichung Proz.	$\psi'_0 = \frac{24}{R(1-\frac{3}{16}R)}$	$\psi_\infty = \psi'_{exp}\frac{\left[1-\frac{3}{16}R-\frac{d}{\zeta}L()\ldots\right]}{1-\frac{3}{16}R}$ umgerechnet n. Faxén	Abweichung Proz.	Korrektur von ψ_{exp} nach Ladenburg Proz.	Korrektur von ψ_{exp} nach Faxén Proz.
1	0,0531	0,020	451,2	453,8	+ 0,5	456,5	459,4	+ 0,6	4,6	3,6
2	0,1059	0,018	226,6	228,7	+ 0,9	231,2	232,8	+ 0,7	3	2,5
3	0,1537	0,018	156,1	159,4	+ 2,1	160,7	163,2	+ 1,5	4,3	1,9
4	0,1636	0,034	146,7	148,2	+ 1,0	151,3	152,6	+ 0,8	7,7	4,9
5	0,2437	0,034	98,48	101,2	+ 2,7	103,1	105,1	+ 2,0	8,4	4,5
6	0,4924	0,026	48,74	50,90	+ 4,5	53,70	53,33	— 0,7	6,0	1,5
7	0,5157	0,031	46,53	48,92	+ 5,2	51,53	51,53	+ 0,0	7,0	2,0
8	0,6693	0,031	35,85	38,75	+ 8,2	40,71	41,02	+ 0,7	7,0	1,5
9	0,7277	0,031	32,98	36,11	+ 9,7	38,23	38,29	+ 0,1	7,1	1,3
10	0,9241	0,036	25,97	28,54	+ 9,9	31,43	30,54	— 2,8	7,8	1,4
11	1,005	0,036	23,87	25,68	+ 7,8	29,43	27,51	— 6,6	7,8	1,2
12	1,087	0,036	22,08	24,56	+11,2	27,75	26,34	— 5,2	8,0	1,1
13	1,493	0,036	16,07	17,88	+11,3	22,32	19,26	—13,9	8,0	0,7
19	0,1008	0,037	238,1	241,6	+ 1,4	242,7	246,4	+ 1,6	8,2	6,4
20	0,1515	0,037	158,3	161,2	+ 1,8	163,0	165,6	+ 1,6	8,4	5,8
21	0,3287	0,055	72,99	72,86	— 0,1	77,81	78,43	+ 0,8	11,9	5,1
22	0,4755	0,055	50,47	51,88	+ 2,8	55,41	55,24	— 0,3	12,0	6,2
23	0,4953	0,064	48,45	49,84	+ 2,9	53,41	53,17	— 0,4	13,5	7,7
24	0,7489	0,064	32,04	32,12	+ 0,2	37,28	34,89	— 6,4	13,5	6,4
25	0,7640	0,074	31,41	30,85	— 1,8	36,66	33,61	— 8,4	15,2	7,5
26	1,042	0,074	23,01	24,09	+ 4,7	28,62	26,66	— 7,0	15,3	6,1

1) Vorläufige Veröffentlichung. Geiger u. Scheel, Handb. d. Phys., **VII**, 111, 1927.

Die angegebenen Werte der Geschwindigkeiten sind Mittelwerte. Zur Berechnung derselben wurden mehrere Bilder einer Serie, und zwar solche, auf denen das mittlere Drittel der Fallstrecke zu sehen war, zusammengefaßt. Bei jedem Versuch wurde festgestellt, ob die Endgeschwindigkeit erreicht war.

Für den in der Definition für ψ verwendeten Widerstand W konnte angesetzt werden, da nur Endgeschwindigkeiten berücksichtigt wurden,

$$W = \text{Gewicht} - \text{Auftrieb}.$$

Der mittlere Fehler der ψ-Werte dürfte $\pm$ 1 Proz. betragen. Der Durchmesser und die Dichte der Kugel, ebenso die Dichte der Flüssigkeit waren sehr genau bestimmbar, dagegen dürfte der mittlere Fehler der Zähigkeitsmessung, wie aus dem oben Gesagten ersichtlich, bei 1 Proz. und der der Geschwindigkeitsbestimmung bei $^1/_2$ Proz. liegen.

Aus Tabelle II sind die auf unendliches Medium umgerechneten Werte für ψ zu entnehmen. Hierbei wurden vorerst nur die den Einfluß des Zylindermantels berücksichtigenden Theorien verwendet. Neben den beiden Werten für ψ_∞ sind die dazu gehörigen theoretischen Werte von Stokes bzw. Oseen angegeben und zur besseren Beurteilung der Ergebnisse die Abweichungen in Prozenten beigefügt.

Es ist aus dieser Zusammenstellung zu ersehen, daß bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen beide Theorien befriedigend mit dem Experiment übereinstimmen.

Im weiten Zylinder ist die Übereinstimmung der nach Ladenburg umgerechneten experimentellen Werte mit den theoretischen Werten nach Stokes nur bis zu $R = 0{,}16$ vorhanden, während sie bei den Oseen-Faxénschen Wertepaaren bis 0,72 andauert.

Im engeren Zylinder stimmen die nach Ladenburg umgerechneten Werte gut mit den theoretischen nach Stokes überein — bis $R =$ 0,76 —, da hier das Korrekturglied $\frac{d}{\zeta}$ ziemlich groß wird und infolgedessen, wie aus der vorletzten Spalte der Tabelle zu ersehen ist, die Korrektur von ψ_{exp} bis zu 15 Proz. beträgt.

Die Übereinstimmung der Oseen-Faxénschen Wertepaare ist hier befriedigend bis zur Reynoldsschen Zahl $R = 0{,}49$, während bei $R = 0{,}74$ schon eine Abweichung von 6,4 Proz. verzeichnet ist[1]).

Im übrigen ersieht man aus den beiden letzten Spalten der Zusammenstellung, daß sich die

1) Siehe auch Tab. III; bei anderer Umrechnung nur 2,8 Proz.



Tabelle III.

Nr.	$\psi_0 = \frac{24}{R\left(1-\frac{3}{16}R\right)}$	$\psi_\infty = \psi_{exp}\frac{\left[1-\frac{3}{16}R-\frac{d}{\zeta}L(\ )\ldots\right]}{1-\frac{3}{16}R}$	Abw. Proz.	$\psi_0 = \frac{24\left(1+\frac{3}{16}R\right)}{R}$	$\psi_\infty = \psi_{exp}\frac{1+\frac{3}{16}R}{\left[1+\frac{3}{16}R+\frac{d}{\zeta}L(\ )\right]}$	Abw. Proz.
1	456,5	459,4	+0,6	455,7	460,1	+0,9
2	231,2	232,8	+0,7	231,1	233,3	+0,9
3	160,7	163,2	+1,5	160,6	163,4	+1,7
9	38,23	38,29	+0,1	37,48	38,44	+2,5
10	31,43	30,54	—2,8	30,47	30,68	+0,7
11	29,43	27,51	—6,6	28,37	27,64	—2,6
24	37,28	34,89	—6,4	36,54	35,51	—2,8
25	36,66	33,61	—8,4	35,91	34,42	—4,1

zwei Wandeinflußtheorien im Prinzip voneinander unterscheiden. Während die Korrektur von ψ_{exp} nach Ladenburg mit zunehmendem R größer wird, nimmt sie nach Faxén ab, da die Funktion L mit wachsendem R kleiner wird[1]). Dies tritt bei den Versuchen im kleinen Zylinder nicht so scharf in Erscheinung, weil das Verhältnis $\frac{d}{\zeta}$ außerordentlich stark wächst.

Die Ergebnisse der Versuche 14 bis 18 sind nicht umgerechnet, da die Voraussetzungen für die Theorien fehlen. Der Anschluß der ψ-Werte an die experimentelle Kurve von Liebster ist befriedigend.

Zusammenfassend kann auf Grund der Zusammenstellung behauptet werden, daß die Übereinstimmung des Experiments mit der Oseen-Faxénschen Theorie für beide Zylinder sehr befriedigend und weitgehend ist, während man dasselbe für die Stokes-Ladenburgsche Theorie nur für den engen Zylinder feststellen kann.

Die nach Faxén umgerechneten ψ_∞-Werte sind in Fig. 2 (Tafel I) in logarithmisch geteilte Koordinatenachsen als Ordinaten, die dazu gehörigen R-Werte als Abszissen aufgetragen.

Die ψ_∞-Werte liegen im allgemeinen, besonders bei den kleinsten Reynoldsschen Zahlen, etwas höher als die Oseensche Kurve, was aber nicht befremdend, sondern zu erwarten ist, da in den bisherigen Rechnungen weder der Einfluß des Gefäßbodens noch der freien Oberfläche berücksichtigt wurde. Boden- und Deckeneinfluß wirken aber widerstandserhöhend, so daß die Tendenz zur Abweichung nach oben hierdurch ihre Erklärung findet.

In Fig. 2 (Tafel I) sind außer den ψ_∞-Werten noch die theoretischen Kurven für ψ_{St} — in logarithmischer Auftragung dargestellt durch eine Gerade — und ψ_0 eingezeichnet.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß für die Umrechnung auf unendliches Medium mit Hilfe der Faxénschen Theorie mit derselben Berechtigung angesetzt werden kann[1])

$$\psi_\infty = \psi_{exp}\frac{1+\frac{3}{16}R}{\left[1+\frac{3}{16}R+\frac{d}{\zeta}L(\ \ )\cdots\right]}.$$

Für $\psi_\infty = \psi_0$ muß bei oben verwendeter Methode $\frac{24}{R\left(1-\frac{3}{16}R\right)}$, bei letztgenannter $\frac{24\left(1+\frac{3}{16}R\right)}{R}$ gesetzt werden, da bei gegen ∞ gehendem ζ sich jeweils die Klammerausdrücke rechts wegkürzen und die Folgerichtigkeit nur dann gewahrt bleibt, wenn in einer Gleichung der Oseensche Klammerausdruck nur in einer einzigen Gestalt erscheint.

In Tabelle III seien für einige Werte die beiden Möglichkeiten der Umrechnung nebeneinandergestellt.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die oben angeführte Beurteilung der Ergebnisse nicht anders ausfällt, auch wenn man die zweite Art der Umrechnung benutzt. In diesem Falle, ist, wie Tabelle III zeigt, die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment sogar noch weitgehender.

Dem Problem des Boden- und Deckeneinflusses kann experimentell nicht näher getreten werden, ohne daß man auf große Schwierigkeiten

1) Die von Faxén numerisch berechneten Werte für L sind: $L(0) = 2{,}104$; $L(0{,}5) = 1{,}76$; $L(1) = 1{,}48$; $L(2) = 1{,}04$; $L(5) = 0{,}46$.

1) In der vorläufigen Veröffentlichung (a. a. O.) wurde mittels folgender Gleichung umgerechnet:

$$\frac{24\left(1+\frac{3}{16}R\right)}{R} = \psi_{exp}\frac{\left[1-\frac{3}{16}R-\frac{d}{\zeta}L(\ \ )\cdots\right]}{1-\frac{3}{16}R}.$$

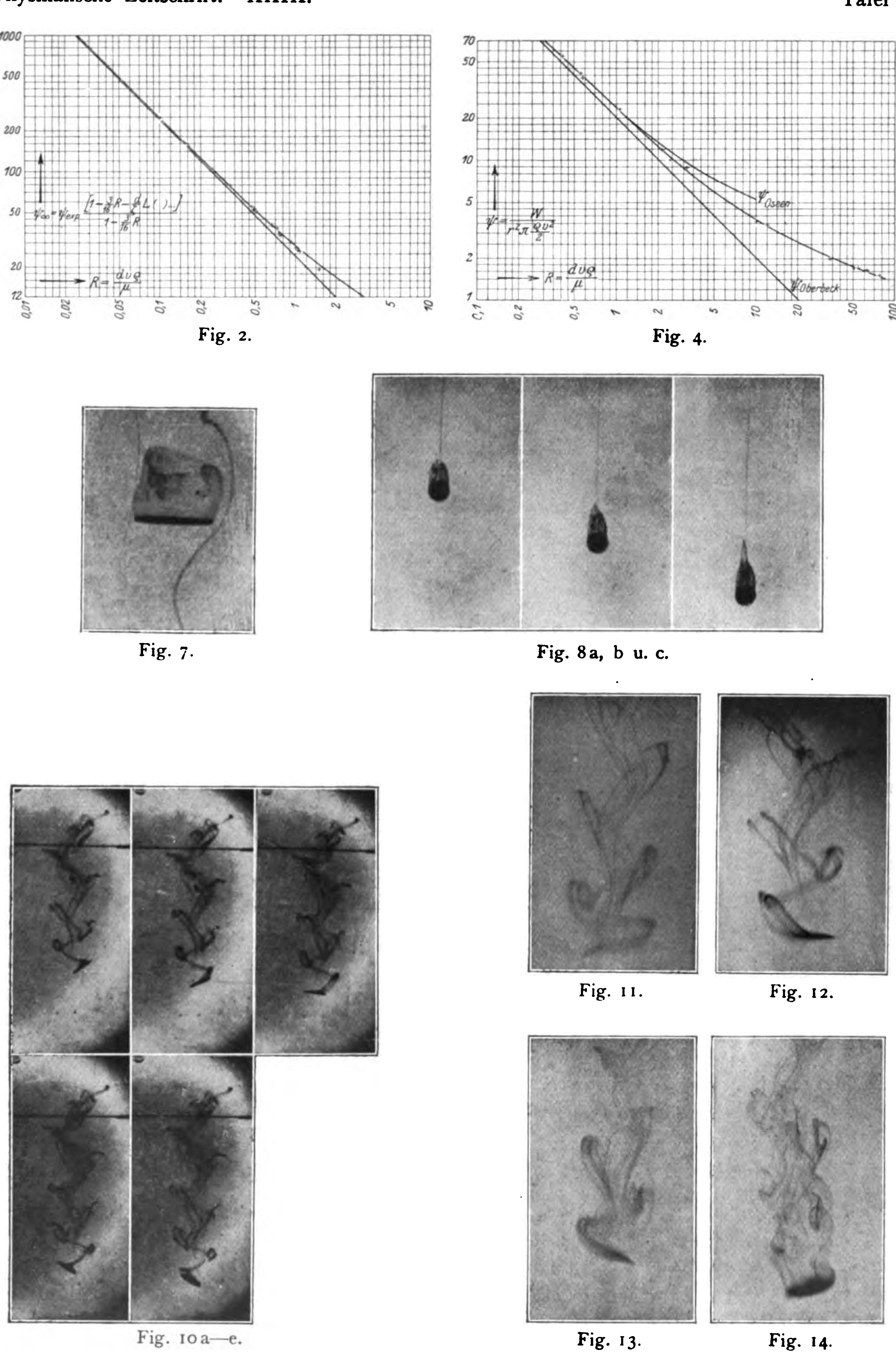


Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 7.

Fig. 8a, b u. c.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 10a—e.

Fig. 13.

Fig. 14.

Tabelle IV.

Nr.	d	ϱ	$\frac{\mu}{\varrho}$	v	ψ	R	
1	0,1997	—	—	9,146	—	—	freie Oberfl., $h = 18$ cm
2	0,1997	—	—	9,143	—	—	,, ,, $h = 9$ cm
3	0,1009	1,221	1,019	2,516	107,5	0,2491	,, ,, $h = 15$ cm
4	0,1508	1,221	1,019	5,472	33,98	0,8097	
5	0,1009	1,221	1,019	2,531	106,2	0,2506	mit fester Decke $h = 12,2$ cm
6	0,1508	1,221	1,019	5,462	34,11	0,8018	

stößt. Auf die vorliegenden Versuche ist weder die Theorie von Lorentz, die ein auf der einen Seite des Bodens unendliches Medium zur Voraussetzung hat, noch die von Ladenburg anwendbar, der neben der Reflexion am Boden die Reflexion an einer festen Decke in seine Rechnungen einbezieht. Eine Theorie aber, die neben dem Boden die freie Oberfläche berücksichtigt, liegt nicht vor.

Es besteht nun die Möglichkeit, eine der beiden genannten Theorien zur Berechnung von ψ_∞ zu verwenden. Die so erhaltenen Werte würden wenigstens annähernd richtig sein. Sofern die freie Oberfläche ebenso wirkt, wie die feste Decke bei Ladenburg, muß die Lorentzsche Rechnung — angewendet auf vorliegende Versuche — zu kleine Werte für den Boden- und Deckeneinfluß ergeben. Über die Größe der Wirkung läßt sich nichts aussagen.

Da das Problem des Boden- bzw. Deckeneinflusses experimentell noch nicht untersucht worden ist, war es wünschenswert, zunächst einmal festzustellen ob ein solcher Einfluß überhaupt nachzuweisen ist und ob die Lorentzsche Theorie — die ja auch die Grundlage der Ladenburgschen bildet — mit dem Experiment wenigstens qualitativ im Einklang steht. Zu diesem Zwecke wurden einige Spezialversuche in einem weiteren quadratischen Gefäß von den Abmessungen $8,5 \times 8,5 \times 20$ cm vorgenommen, um den Einfluß der Gefäßseitenwände möglichst auszuschalten. Die Versuchsdaten sind in Tabelle IV zusammengestellt.

Die in der Tabelle angegebene Geschwindigkeit v ist im mittleren Drittel des Gefäßes in derselben Weise gemessen, wie bei allen oben angeführten Versuchen. Aus den Messungen unter Nr. 1 und 2 geht hervor, daß eine Einwirkung der Flüssigkeitshöhe h auf die Geschwindigkeit v nicht nachgewiesen werden kann, ein etwaiger Einfluß zum mindesten innerhalb der Größe der Meßgenauigkeit liegt. Die Zähigkeit wurde bei diesen beiden Versuchen nicht gemessen, da es lediglich darauf ankam, daß die Versuche unmittelbar hintereinander, d. h. bei genau denselben Versuchsbedingungen vorgenommen wurden.

Ebenso konnte, wie die Messungen unter Nr. 3 bis 6 zeigen, kein über die Meßgenauigkeit hinausgehender Geschwindigkeitsunterschied zwischen Versuchen, die in einem Gefäß mit fester Decke einerseits und freier Flüssigkeitsoberfläche andererseits bei sonst gleichen Versuchsbedingungen ausgeführt wurden, konstatiert werden.

Bei den Versuchen 3 bis 6 war im Versuchsgefäß ein Messingboden so angebracht, daß die Fallbewegung bis zum Auftreffen der Kugel auf dem Boden photographiert und infolgedessen die Geschwindigkeit von Bild zu Bild auch bis in unmittelbare Nähe des Bodens ermittelt werden konnte. Die Ergebnisse der Messungen für die

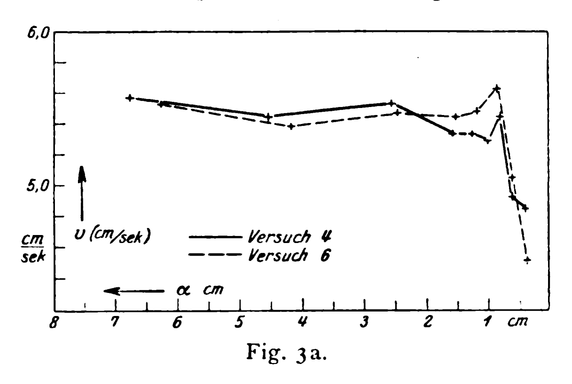


Fig. 3a.

Versuche 4 und 6 sind in Fig. 3a graphisch dargestellt.

Als Abszisse wurde die Entfernung vom Boden, als Ordinate die gemessene Geschwindigkeit aufgetragen. Beides sind natürlich nur Mittelwerte, die aus je zwei aufeinanderfolgenden Bildern berechnet wurden. Die in Fig. 3a eingezeichneten Werte sind in Tabelle V neben den Werten für Versuch 5 zusammengestellt. Der Einfluß des Bodens ist offensichtlich.

In den ermittelten Werten stecken noch die Meßfehler, die hier größer als sonst sind, da die Differenzen der Fallwege zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bildern außerordentlich klein sind und die Genauigkeit der Messung vermindern. Die Meßfehler betragen hier — der kleinste gemessene Fallweg beträgt 0,0151 cm — maximal 4 Proz. Außerdem dürften die Schwankungen

Tabelle V.

Versuch 4		Versuch 6		Versuch 5		
Entf. a cm	Geschw. v cm/sec	a cm	v cm/sec	a cm	v cm/sec	$v\left(1+\frac{9}{8}\frac{r}{a}\right)$
6,771	5,568	6,256	5,531	7,342	2,546	2,564
4,553	5,449	4,172	5,394	6,272	2,524	2,547
2,571	5,537	2,457	5,473	4,943	2,524	2,552
1,587	5,337	1,546	5,443	2,882	2,524	2,572
1,260	5,336	1,109	5,484	1,468	2,461	2,555
1,036	5,294	0,863	5,628	1,256	2,498	2,611
0,812	5,480	0,616	5,052	1,133	2,448	2,570
0,610	4,924	0,394	4,518	1,015	2,498	2,635
0,408	4,855			0,896	2,434	2,588
				0,777	2,427	2,604
				0,654	2,442	2,652
				0,460	2,311	2,595
				0,272	2,110	2,549

der Geschwindigkeit, die wiederholt im stationären Zustand der Bewegung beobachtet worden sind[1]), den schwankenden Verlauf der Kurven bedingen.

Bei Versuch 5 wurde jedes Bild viermal gemessen. Die daraus gemittelten Werte sind in Fig. 3b in derselben Weise aufgetragen wie oben. Sie liegen hier ziemlich regelmäßig ober- und unterhalb einer graphisch interpolierten Kurve.

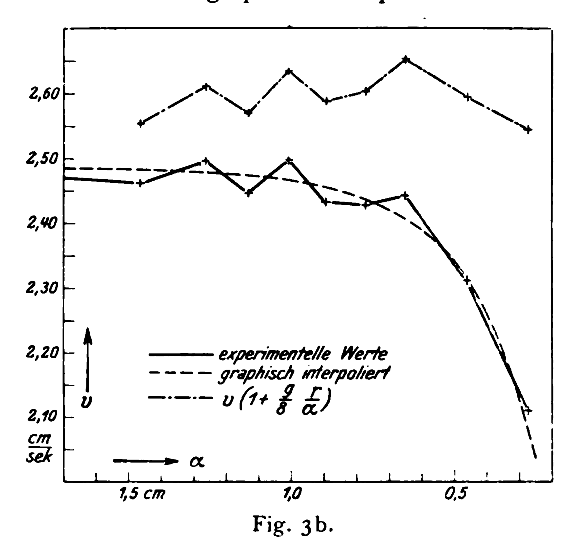


Fig. 3b.

Wären die Versuche in einem auf der einen Seite des Bodens unendlich ausgedehnten Medium vorgenommen worden, so wären wir in der Lage, mit Hilfe der Lorentzschen Theorie in jedem Punkte die Absolutgeschwindigkeit berechnen zu können, die vorhanden wäre, wenn das Medium unendlich ausgedehnt wäre. Die so berechneten Werte müßten einen stationären Zustand charakterisieren. Bei unseren Versuchsbedingungen kann die Rechnung natürlich nur Annäherungswerte ergeben, da der Einfluß der freien Oberfläche durch die Rechnung nicht mit erfaßt wird und außerdem nur Mittelwerte der Entfernung und Geschwindigkeit benutzt werden konnten. In Tabelle V und Fig. 3b sind die auf diese Weise auf unendliches Medium umgerechneten Werte der Geschwindigkeit mit angegeben. Sie gruppieren sich gut um einen Mittelwert. Es ist hiermit gezeigt, daß die Theorie von Lorentz mit den experimentellen Ergebnissen befriedigend übereinstimmt.

Bei der Berechnung der in Tabelle II zusammengestellten ψ_∞-Werte war zunächst der Einfluß der Seitenwände eliminiert worden. Wir müssen nun bei der endgültigen Berechnung jener Werte auch den Bodeneinfluß berücksichtigen, da die Wirkung desselben über die Grenzen der Meßgenauigkeit hinausgeht. Es ist gleichgültig, welche von den genannten Theorien man hierbei benutzt, da die Unterschiede zwischen Lorentzscher und Ladenburgscher Rechnung bei vorliegenden Versuchen innerhalb der Versuchsfehlergrenzen liegen.

Setzt man nämlich analog der Ladenburgschen Rechnung für das Integral der Zusatzgeschwindigkeit mit beibehaltenen Integrationsgrenzen an[1]):

$$v_z = \frac{\gamma}{\gamma - 2}\frac{1}{h}\int\limits_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}h} \frac{9}{8} r v \frac{1}{z}\, dz,$$

d. h. berücksichtigt man nur die erste Reflexion, wie sie die Lorentzsche Theorie explizit gibt und wie sie durch das Experiment richtig gesprochen ist, so würde das für die Zusatzgeschwindigkeit

1) H. Liebster, a. a. O.

1) R. Ladenburg, a. a. O.

Tabelle VI.

Nr.	ψ_{St}	$\psi_x = \dfrac{\psi_{exp}}{\left(1+2{,}4\,\dfrac{d}{\zeta}\right)^{1)}\left(1+2{,}4\,\dfrac{r}{h}\right)^{2)}}$	Abw. Proz.	ψ_0	$\psi_\infty = \psi_{exp}\,\dfrac{\left[1-\dfrac{3}{16}R-\dfrac{d}{\zeta}L(\,)\ldots\right]}{\left(1-\dfrac{3}{16}R\right)\left(1+2{,}4\,\dfrac{r}{h}\right)^{2)}}$	Abw. Proz.
1	451,2	452,0	+ 0,1	456,5	457,5	+ 0,2
2	226,6	227,8	+ 0,5	231,2	231,9	+ 0,3
3	156,1	158,8	+ 1,8	160,7	162,6	+ 1,1
4	146,7	147,4	+ 0,5	151,3	151,8	+ 0,3
5	98,48	100,7	+ 2,2	103,1	104,5	+ 1,4
6	48,74	50,64	+ 3,9	53,70	53,06	— 1,2
7	46,53	48,62	+ 4,5	51,53	51,22	— 0,6
8	35,85	38,51	+ 7,6	40,71	40,77	+ 0,1
9	32,98	35,89	+ 9,0	38,23	38,06	— 0,4
10	25,97	28,34	+ 9,4	31,43	30,32	— 3,5
11	23,87	25,50	+ 7,0	29,43	27,31	— 7,3
12	22,08	24,39	+10,5	27,75	26,15	— 5,9
13	16,07	17,74	+10,4	22,32	19,18	—14,2
19	238,1	240,1	+ 0,8	242,7	244,9	+ 0,9
20	158,3	160,2	+ 1,2	163,0	164,6	+ 1,0
21	72,99	72,21	— 1,0	77,81	77,73	— 0,1
22	50,47	51,41	+ 1,8	55,41	54,74	— 1,2
23	48,45	49,29	+ 1,7	53,41	52,59	— 1,5
24	32,04	31,77	— 0,8	37,28	34,51	— 7,4
25	31,41	30,48	— 3,0	36,66	33,21	— 9,5
26	23,01	23,80	+ 3,4	28,62	26,34	— 8,1

1) Einfluß der Seitenwände. — 2) Einfluß des Bodens.

den Wert

$$v_z = \frac{9}{8}\,\frac{\gamma}{\gamma-2}\,\frac{r}{h}\,v\,[\lg z]_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}h}$$

$$= \frac{9}{8}\,\frac{\gamma}{\gamma-2}\,\frac{r}{h}\,v\,\lg(\gamma-1)$$

$$= 2{,}4\,\frac{r}{h}\,v$$

ergeben, falls man $\gamma = 3{,}2$[1]) setzt, d. h. annähernd im mittleren Drittel des Gefäßes beobachtet.

Die Unterschiede in den Zusatzgeschwindigkeiten betrügen also

$$\frac{\gamma}{\gamma-2}\,\frac{1}{h}\int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(w_1+w_2+w_3)\,dz^{2)} - \frac{\gamma}{\gamma-2}\,\frac{1}{h}\int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}h} w_1\,dz$$

$$= 3{,}3\,\frac{r}{h}\,v - 2{,}4\,\frac{r}{h}\,v$$

$$= 0{,}9\,v\,\frac{r}{h}$$

und in unserem Fall — Versuch 26 — maximal 0,5 Proz. der Geschwindigkeit und damit auch des Widerstandes, den wir erhalten zu

$$W = 6\pi\mu r v\left(1+2{,}4\,\frac{r}{h}\right)^{1)}.$$

Im folgenden sei zur weiteren Umrechnung der in Tabelle II angegebenen ψ_x-Werte nur die erste Reflexion am Boden berücksichtigt. Um einen Vergleich der beiden nun auf allseitig unendliches Medium umgerechneten ψ-Werte möglich zu machen, mußte auch das mit Hilfe der Oseen-Faxénschen Theorie gewonnene ψ_∞ durch das Glied $\left(1+2{,}4\,\frac{r}{h}\right)$ dividiert werden. Die in Tabelle VI enthaltenen Werte für ψ_∞ repräsentieren nunmehr den Widerstand, den die Kugel in einem allseitig unbegrenzten Medium erfahren würde. Sie müßten bei genauen Messungen und Richtigkeit der Theorien mit den theoretischen Werten bis auf kleine Abweichungen infolge Nichtberücksichtigung der freien Oberfläche übereinstimmen.

1) Bei einer Flüssigkeitshöhe von 32 cm wurden ∾ je 10 cm am Boden und an der Oberfläche von der Beobachtung ausgeschlossen, bei einer Höhe von 19 cm im kleinen Zylinder je 6 cm.

2) Von Ladenburg berechnetes Integral, wobei w_1, w_2, w_3 die ersten drei aufeinander folgenden Reflexionen sind.

1) Der Faktor $\left(1+2{,}4\,\frac{r}{h}\right)$ ist hier ein durch den Gefäßboden bedingtes Korrektionsglied, im Gegensatz zu dem ähnlichen Faktor $\left(1+2{,}4\,\frac{d}{\zeta}\right)$ bei Ladenburg, der damit den Einfluß der Seitenwände in Rechnung stellt.

Für die Flüssigkeitshöhe h ist bei den Versuchen 1—13 32 cm, bei den Versuchen 19—26 19 cm eingesetzt worden. Die zu den Versuchen gehörigen Reynoldsschen Zahlen und ψ_{exp}-Werte sind schon in Tabelle II angegeben.

Die letzteren erfahren durch die Berücksichtigung des Boden- und Deckeneinflusses eine noch merkliche Korrektur. Dadurch wird ihre Übereinstimmung mit den theoretischen Werten noch befriedigender.

III. Über den Widerstand kreisförmiger Scheiben.

1. Allgemeines.

Der Widerstand, den eine kreisförmige Scheibe bei langsamer stationärer Bewegung in einer reibenden Flüssigkeit erfährt, ist zuerst von Oberbeck[1]) berechnet worden. Später ist dasselbe Problem noch einmal von R. Gans[2]) — erweitert auf geneigte Scheiben und Stäbchen — behandelt worden. Die Scheibe wird bei diesen Berechnungen als Grenzfall eines Rotationsellipsoides betrachtet. Bei vorliegenden Versuchen kommt allein die Bewegung breitseit, d. h. parallel zur Rotationsachse in Frage.

Das dem Stokesschen Widerstandsgesetz für die Kugel entsprechende Oberbecksche für die Scheibe lautet:

$$W = 16\mu r v,$$

wobei μ die Zähigkeit, r den Radius und v die Geschwindigkeit bedeuten. Als Gültigkeitsbedingung wird gefordert, daß die zweiten Potenzen von $\frac{c}{r}$ vernachlässigt werden können, wenn c die Dicke bedeutet.

In den Dimensionslosen ψ und R ausgedrückt, lautet das Gesetz

$$\psi = \frac{20{,}37}{R}\ ^{3)}.$$

C. W. Oseen[4]) hat, ebenso wie für die Kugel, die dies Problem beherrschenden Differentialgleichungen mit Berücksichtigung der halbquadratischen Glieder gelöst. Er findet auf diese Weise für den Widerstand

$$W = 16\mu r v\left(1 + \frac{\varrho\,r\,|v|}{\pi\mu}\right) = 16\mu r v\left(1 + \frac{2}{\pi}\,|\sigma|\,r\right).$$

Es bedeutet dabei — wie beim Widerstand für die Kugel — $\sigma = \frac{\varrho v}{2\mu}$. Dies Gesetz lautet in dimensionslosen Größen

$$\psi = \frac{20{,}37}{R}\left(1 + \frac{R}{2\pi}\right).$$

Eine Theorie über den Wandeinfluß liegt für das Rotationsellipsoid nicht vor, so daß eine korrekte Umrechnung der Versuchswerte auf unendliches Medium nicht erfolgen konnte.

2. Beobachtungsergebnisse.

Das Verhalten der Scheiben bei der Fallbewegung war je nach der Größe der Reynoldsschen Kennziffern durchaus verschieden. Im Gebiete der schleichenden Bewegung wurde festgestellt, daß die Scheiben keine Tendenz zeigten, sich irgendwie einzustellen. Während der Translation behielten sie ihre Orientierung gegen die Fallrichtung bei. Maßgebend hierfür war einzig und allein die Einstellung bei Beginn des Experiments. Die von R. Gans[1]) für zähe Flüssigkeiten aufgestellte Behauptung, daß bei einer Translationsbewegung von Körpern, die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, infolge der Druckkräfte der Flüssigkeit kein Drehmoment auftritt, ist also im Bereich der schleichenden Bewegung durch das Experiment bestätigt. Die Versuche in diesem Gebiet gestalteten sich schwierig, da alle diejenigen für unsere Widerstandsbetrachtungen unbrauchbar waren, bei denen die Scheibe eine nicht vollkommen horizontale Lage einnahm. Bei der geringsten Neigung ändert sich natürlich der Widerstand, der bei der verwendeten Methode auch nicht zu bestimmen war, da ein Messen des Neigungswinkels aus einer Projektion, wie sie der Film darstellt, nicht möglich ist.

Im angrenzenden Gebiet, ungefähr bis zum R-Werte 80, zeigte die Scheibe das Bestreben, sich sofort horizontal einzustellen, gleichgültig, wie die Lage zu Beginn des Versuches war. Zur Erklärung dieses Verhaltens sei bemerkt, daß sich nach Kirchhoff[2]) bei Translationsbewegungen eines Rotationsellipsoides in idealen Flüssigkeiten die Flüssigkeitsdrucke auf ein Kräftepaar reduzieren, das nur verschwindet, wenn sich das Ellipsoid in Richtung einer der drei Hauptachsen bewegt. Von diesen drei permanenten Translationen ist eine einzige völlig stabil, die in Richtung der kleinsten Achse.

Bei R-Werten über 80 — bis ~ 300 — traten durchgehends periodische Schwingungen um irgendeine äquatoriale Achse auf. Der Scheibenmittelpunkt bewegte sich dabei nicht geradlinig, sondern in der Schwingungsebene merklich pendelnd fort. Die Schwingungen waren auch ober-

1) Oberbeck, Crelles Journ. **81**, 62, 1876; Lamb § 326.
2) R. Gans, Münch. Berichte, S. 191, 1911.
3) Wieselsberger gibt — wohl irrtümlich — an $\frac{17{,}4}{R}$, Physik. Zeitschr. **23**, 219, 1922.
4) C. W. Oseen, Arch. f. Math. u. Phys. Bd. **24**, 108, 1915.

1) R. Gans, a. a. O.
2) Kirchhoff, Crelles Journ. 71, 1869; Mech. 19. Vorl.; Lamb § 124.

Tabelle VII.

Nr.	Scheibe			Flüssigkeit		v	$R=\frac{dv\varrho}{\mu}$	$\psi=\frac{W}{r^2\pi\frac{\varrho v^2}{2}}$
	d cm	$\frac{c}{d}$	ϱ_1	ϱ_2	$\frac{\mu}{\varrho_2}$	cm/sec		
1	0,4051	0,02592	7,674	1,223	1,391	1,408	0,4098	54,81
2	0,5970	0,00837	7,674	1,223	1,201	1,116	0,5543	41,55
3	0,4050	0,02592	7,674	1,223	1,176	1,670	0,5748	38,96
4	0,5560	0,01888	7,674	1,223	1,126	2,172	1,071	23,03
5	0,9848	0,01066	7,674	1,223	1,386	3,019	2,145	11,92
6	0,9848	0,01066	7,674	1,223	1,316	3,264	2,441	10,19
7	0,5283	0,03312	2,700	1,199	0,3684	2,209	3,168	8,804
8	0,9848	0,01066	7,674	1,199	0,3684	3,790	10,13	3,685
9	1,998	0,01035	7,674	1,223	1,310	7,925	12,08	3,409
10	0,4050	0,02592	7,674	1,150	0,0906	7,569	33,82	1,991
11	0,5560	0,01888	7,674	1,150	0,0906	8,271	50,74	1,707
12	0,5960	0,01762	7,674	1,150	0,0906	8,266	54,05	1,708
13	1,998	0,01035	7,674	1,199	0,3684	11,55	62,64	1,642
14	1,998	0,01035	7,674	1,199	0,3684	11,64	63,18	1,615
15	0,4572	0,0118	7,674	1,101	0,0390	6,500	76,17	1,497
16	0,5076	0,0103	7,674	1,101	0,0390	6,390	83,13	1,508
17	0,5493	0,00910	7,674	1,101	0,0390	6,262	88,16	1,491
18	0,5968	0,00855	7,674	1,101	0,0390	6,302	96,40	1,597
19	0,6960	0,00732	7,674	1,101	0,0390	6,059	108,0	1,564
20	0,1948	0,0256	7,674	0,9981	0,00996	6,332	123,8	1,636
21	0,1955	0,0255	7,674	0,9981	0,00996	6,403	125,5	1,603
22	0,3045	0,0164	7,674	0,9981	0,00995	6,079	186,0	1,775
23	0,3887	0,0128	7,674	0,9981	0,00995	6,082	237,6	1,772
24	0,4566	0,0109	7,674	0,9981	0,00995	5,966	273,8	1,843
25	0,5079	0,00964	7,674	0,9981	0,00994	5,867	299,8	1,865
26	0,5243	0,0114	10,50[1])	1,113	0,03988	7,638	100,4	1,701
27	0,4055	0,0266	10,17[2])	1,080	0,02815	10,07	145,1	1,758
28	0,5087	0,0214	10,17	1,080	0,02815	10,129	182,8	1,757
29	0,3071	0,0188	19,34	1,113	0,03988	10,89	83,85	1,576
30	0,4072	0,0141	19,34	1,113	0,03988	10,60	108,2	1,648
31	0,5266	0,0109	19,34	1,113	0,03988	11,16	147,3	1,487

1) Feinsilber. — 2) Feingehalt 800.

halb dieser R-Werte noch feststellbar, koppelten sich aber hier mit einer Schraubenbewegung der Scheibe um eine Vertikalachse und gestalteten den Vorgang so kompliziert, daß ein Messen des Widerstandes unmöglich war. Im übrigen sind bei der Bewegung von Luftblasen schon ähnliche schraubenförmige Bahnen beobachtet worden[1]). Die Ursache dieser Schwingungen dürfte in Strömungsvorgängen hinter dem Versuchskörper zu suchen sein. Wie die unten folgenden Strömungsaufnahmen zeigen, treten im Gebiet $R < 80$ aus zusammenhängenden Diskontinuitätsflächen entstandene am Versuchskörper haftende Wirbelgebilde, im Bereich $80 < R < 300$ Bildungen von Wirbelstraßen auf. Ähnlich strukturierte zweidimensionale Wirbelstraßen sind schon bei Schleppversuchen von Zylindern und Platten durch ruhende Flüssigkeiten beobachtet und photographiert worden[2]). Hinter dem Körper entsteht dabei eine periodische Pendelung der Flüssigkeitsteile, die nach v. Kármán[1]) als notwendige Folge einer vorher bestehenden labilen Anordnung anzusehen ist. In den Schwingungen der fallenden Scheibe haben wir offenbar ein dreidimensionales Analogon vor uns, auch sie sind sicher eine Folge des Überganges der zusammenhängenden Diskontinuitätsfläche in eine bestimmte Anordnung abgelöster Wirbelgebilde.

Die gemessenen ψ und R-Werte sind in Tabelle VII neben den Werten d, $\frac{c}{d}$, ϱ_1, ϱ_2, $\frac{\mu}{\varrho_2}$ und v zusammengestellt.

Es bedeuten, wie bisher, $\psi = \frac{W}{r^2\pi\frac{\varrho v^2}{2}}$ und $R = \frac{dv\varrho}{\mu}$. Wie aus den Dichten ϱ_1 hervorgeht, wurden bei den Versuchen Nr. 1 bis 25 — mit Ausnahme von Versuch 7 — Stahlscheiben, bei den Versuchen Nr. 26 bis 28 Silberscheiben und bei den Nr. 29 bis 31 Goldscheiben verwendet.

1) P. Hirsch, a. a. O.; O. Miyagi, Phil. Mag. **50**, 6, 112, 1925.

2) Th. v. Kármán u. H. Rubach, Physik. Zeitschr. **13**, 49, 1912.

1) Th. v. Kármán, Gött. Nachr. S. 509, 1911.

Tabelle VIII.

Nr.	R	ψ_{exp}	ψ_{Ob} (Oberbeck)	Abweichung Proz.	ψ_O (Oseen)	Abweichung Proz.	$\sim\psi_\infty$	Abweichung von ψ_o Proz.
1	0,4098	54,81	49,70	+ 10,4	52,94	+ 3,6	52,87	— 0,1
2	0,5543	41,55	36,74	+ 13,3	39,98	+ 4,0	39,34	— 1,6
3	0,5748	38,96	35,43	+ 10,0	38,67	+ 0,8	37,92	— 1,9
4	1,071	23,03	19,01	+ 21,1	22,25	+ 3,5	22,45	+ 0,9
5	2,145	11,92	9,496	+ 26,9	12,73	— 6,7	11,51	—10,1
6	2,441	10,19	8,344	+ 23,1	11,58	—12,6		

Bis zum R-Wert 76,17 — Vers. Nr. 15 — fielen die Scheiben vollkommen ruhig und in horizontaler Lage. Bis zu dieser Reynoldsschen Zahl sind die zusammengehörigen ψ- und R-Werte in Fig. 4 logarithmisch aufgetragen.

Neben den Versuchswerten sind die das Oberbecksche (ψ_{Ob}) und Oseensche Widerstandsgesetz (ψ_O) charakterisierenden Kurven eingezeichnet. Es zeigt sich, daß die Werte gut zu einer graphisch interpolierten Kurve liegen, die einen durchaus stetigen Verlauf aufweist. Aus Fig. 4 und Tab. VIII geht hervor, daß die experimentellen Ergebnisse auch bei der Scheibe bis $R = 1{,}07$ gut mit der Oseenschen Theorie übereinstimmen. Dabei ist zu bedenken, daß der Einfluß der Gefäßwände gänzlich unbeachtet geblieben ist.

Berücksichtigt man den letzteren, indem man in Ermangelung einer Theorie über den Wandeinfluß die für die Kugel vorliegende von Faxén heranzieht und für die Umrechnung auf unendliches Medium etwa ansetzt:

$$\frac{20{,}37}{R}\left(1+\frac{R}{2\pi}\right) = \psi_{exp}\frac{1+\frac{1}{2\pi}R}{\left[1+\frac{1}{2\pi}R+\frac{d}{\zeta}L\left(\frac{\zeta\varrho v}{4\mu}\right)^{1)}+\cdots\right]},$$

so erhält man die in der vorletzten Spalte von Tab. VIII angegebenen Werte für $\sim\psi_\infty$. Die Übereinstimmung der so korrigierten ψ-Werte mit den theoretischen nach Oseen ist überraschend weitgehend.

Der durchschnittliche mittlere Fehler der ψ-Werte beträgt bei den in Tab. VII aufgeführten Versuchen im allgemeinen $\pm$ 1 Proz., da dieselben Meßmethoden zur Verwendung kamen wie bei den Kugelversuchen. Bei den Versuchen mit den dünnsten Scheiben — Vers. 2, 15—26, 29—31 — dürfte er allerdings bei $\pm$ 2 Proz. liegen, da hier die Genauigkeit der Dickenmessung merklich geringer wird.

1) Nur dies Glied ist der Theorie für den Kugelwiderstand entnommen.

Im Prinzip anders verliefen alle Versuche von Nr. 16 bis 31. Bei ihnen war ein periodisches Schwingen um eine äquatoriale Achse zu bemerken. Diese Erscheinung war so ausgeprägt, daß leicht die Frequenz der Schwingung mit hinreichender Genauigkeit ermittelt werden konnte. Es geschah das in der Weise, daß auf dem Film alle Bilder ausgewählt wurden, auf denen die Scheibe die gleiche Orientierung gegen die Fallrichtung aufwies. Die zwischen zwei derartigen Bildern verstrichene Zeit stellte die Dauer einer einzigen Schwingung, deren reziproker Wert die Frequenz N dar. Bei Bestimmung der letzteren wurden je 2 bis 4 solcher Bildfolgen verwendet, bei deren jeder die Scheibe eine andere Orientierung besaß. Die Abweichung der so aus einem Versuch gewonnenen Werte für N vom Mittel betrug maximal 4 Proz.

In Tabelle IX sind die Werte für N neben denen für R, $\frac{Nd}{v}$, $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, d u. $\frac{c}{d}$ zusammengestellt. Sie nehmen — gleiche kinematische Zähigkeit und Dichte vorausgesetzt — mit wachsendem Durchmesser ab.

Die ψ-Werte der letzterwähnten Versuche, die schon in Tab. VII angeführt sind, wurden in Fig. 5

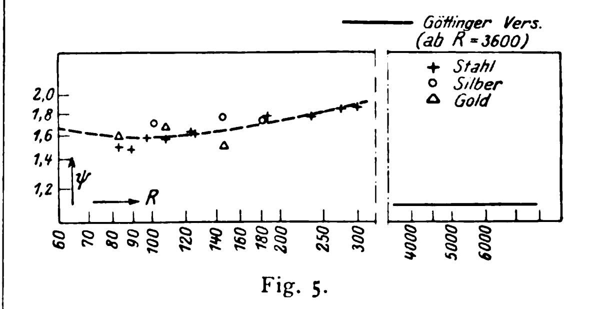


Fig. 5.

in Abhängigkeit von R in logarithmisch geteilte Koordinatenachsen eingezeichnet. Wie nicht anders zu erwarten, wirken die Schwingungen widerstanderhöhend. Die Widerstandskurve biegt bei der Reynoldsschen Zahl ~ 80 in annähernd wagerechter Richtung ab, um später um ein geringes zu steigen. Die Versuchswerte streuen hier außerordentlich stark, eine Erscheinung, die

Tabelle IX.

Nr.	R	N	$\frac{Nd}{v}$	$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$	d cm	$\frac{c}{d}$
16	83,13	3,459	0,2747	6,970	0,5076	0,0103
17	88,16	3,081	0,2702	6,970	0,5493	0,00910
18	96,40	3,036	0,2875	6,970	0,5968	0,00855
19	108,0	2,687	0,3087	6,970	0,6960	0,00732
20	123,8	10,35	0,3184	7,688	0,1948	0,0256
21	125,5	10,46	0,3196	7,688	0,1955	0,0255
22	186,0	7,811	0,3912	7,688	0,3045	0,0164
23	237,6	6,834	0,4367	7,688	0,3887	0,0128
24	273,8	6,171	0,4723	7,688	0,4566	0,0109
25	299,8	5,592	0,4841	7,688	0,5079	0,00964
26	100,4	3,940	0,2704	9,434	0,5243	0,0114
27	145,1	7,505	0,3022	9,416	0,4055	0,0266
28	182,8	6,592	0,3313	9,416	0,5087	0,0214
29	83,85	8,992	0,2536	17,37	0,3071	0,0188
30	108,2	6,939	0,2665	17,37	0,4072	0,0141
31	147,3	5,554	0,2620	17,37	0,5266	0,0109

bei Kugelversuchen[1]) in der Nähe des R-Wertes 1000 festgestellt wurde.

Betrachtet man die beiden Widerstandskurven, so muß man aus der Ähnlichkeit der Kurven-

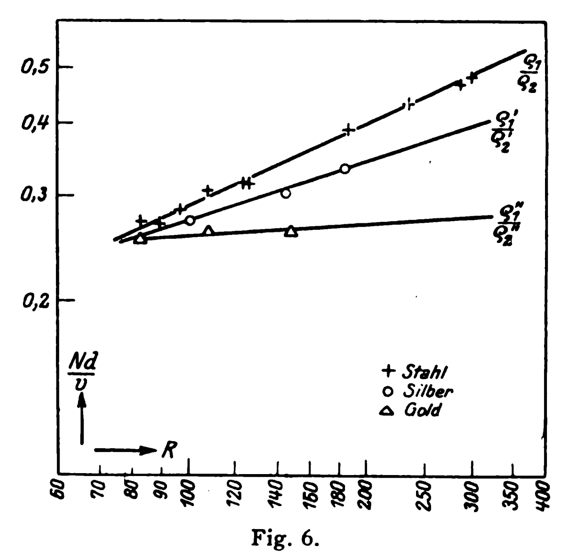


Fig. 6.

bilder an den Stellen starker Streuung schließen, daß die letztere nicht rein zufälliger Natur sei, sondern durch das Einsetzen einer neuen Strömungsform bedingt wird.

Interessant war es, die Abhängigkeit der Dimensionslosen $\frac{Nd}{v}$ von R zu untersuchen[2]). Sie ist in Fig. 6 graphisch dargestellt.

Da eine Theorie für dies Problem noch nicht vorliegt, können wir nur eine Dimensionsbetrachtung anstellen, aus der man schließen kann, daß das Dichteverhältnis $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ als zweiter Parameter — neben R — für $\frac{Nd}{v}$ in Frage kommt, daß also

$$\frac{Nd}{v} = f\left[R, \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right].$$

Eine Bestätigung dieser Überlegung liefert Fig. 6, in der sich die Versuche mit Stahl-, Silber- und Goldplättchen in je einen Kurvenzug zusammenfassen lassen. $\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \frac{\varrho_1'}{\varrho_2'}, \frac{\varrho_1''}{\varrho_2''}\right)$.

Bemerkt sei, daß die Dimensionslose $\frac{Nd}{v}$ für das räumliche Problem nahezu dasselbe bedeutet, wie die in der Kármánschen Wirbelstraßentheorie[1]) auftretende Größe $\frac{h}{l}$ für die Ebene, wobei h der Abstand, l die Teilung der Wirbelreihen ist. Denkt man sich nämlich das System der Wirbelgebilde in der Schwingungsebene der Scheibe aufgeschnitten, so erhält man ein den Kármán-Rubachschen Aufnahmen ähnliches Bild. v. Kármán hat berechnet, daß das Verhältnis $\frac{h}{l}$ für stabile Wirbelanordnung hinter dem Versuchskörper den Wert 0,28 annimmt, ebene Strömung und quadratisches Widerstandsgesetz vorausgesetzt. Diese Theorie wurde durch Versuche an Zylinder und Platte bestätigt. Für den ersteren ergab sich der Wert $\frac{h}{l} = 0{,}28$, für die letztere der etwas höhere 0,30.

Es ist zu betonen, daß der sich aus unseren Scheibenversuchen ergebende Wert $\frac{Nd}{v} < \frac{h}{l}$ sein

1) H. Liebster, a. a. O.
2) Untersuchungen am Zylinder (zweidimensional) bei Relf, Phil. Mag. **42**, 173, 1921; Relf and Simmons, Phil. Mag. **49**, 509, 1925.

1) Th. v. Kármán, a. a. O.

muß, da einmal $d < h$[1], zum anderen $\frac{v}{N} > l$[2] ist.

Berechnet man zum Vergleich den wirklichen Wert $\frac{h}{l}$, so tritt zu unserem Wert der Faktor $\frac{h}{d\left(1-\frac{u}{v}\right)}$.

Also ist $\frac{h}{l} = \frac{Nd}{v} \cdot \frac{h}{d\left(1-\frac{u}{v}\right)}$, wobei N die Frequenz, d den Scheibendurchmesser, h den Abstand der beiden Wirbelreihen, v die Geschwindigkeit der Scheibe, u die des Wirbelsystems bedeutet.

Angenommen u sei so klein, daß es vernachlässigt werden kann und das Verhältnis $\frac{h}{d} \sim 1{,}3$,[1], so ergeben unsere Versuche für $\frac{h}{l}$ Werte von 0,34 bis 0,62. Bedenkt man weiter, daß nur die ersten Wirbelpaare hinter dem Versuchskörper zur Messung von N verwendet werden konnten und nach der Annahme v. Kármáns[3]) sich das Verhältnis $\frac{h}{l}$ in unmittelbarer Nähe des Körpers dem größeren Werte 0,36 nähert, so ist die Übereinstimmung unserer Zahlenwerte gegenüber dem ebenen Fall recht gut zu nennen.

Bemerkt sei noch, daß auch drei Versuche mit Aluminiumscheiben angestellt wurden. Die hierbei erzielten Ergebnisse entsprachen nicht den oben angestellten Betrachtungen. Die Werte lagen zwischen denen für Silber und denen für Stahl. Ob die Ursache für dies abweichende Verhalten in der schlechten Beschaffenheit der Scheiben[4]) — die maximale Abweichung der bei einer Scheibe gemessenen Dicken betrug 8 Proz. — zu suchen ist, mag dahingestellt bleiben.

IV. Der Strömungsverlauf bei Kugel und Scheibe.

Bei beiden Arten von Versuchskörpern, sowohl Kugeln als auch Scheiben, kann die Strömung nur im Gebiet kleinster R-Werte streng stationär sein. Schon bei Reynoldsschen Zahlen von 0,5 hat Liebster[5]) festgestellt, daß Geschwindigkeit und Richtung einer fallenden Kugel unperiodisch um einen Mittelwert schwanken. Aus dem unperiodischen Charakter schließt

1) Deutlich aus den Abbildungen zu entnehmen.

2) $l = \frac{v-u}{N}$, wobei u die Geschwindigkeit des Wirbelsystems bedeutet. u ist bei allen Versuchen sehr klein. Die auf den Fig. zu bemerkende Bewegung dürfte in der Hauptsache durch die Schwere der Farbkörner hervorgerufen worden sein.

3) Th. v. Kármán u. H. Rubach, a. a. O.

4) Infolge von Deformationen beim Stanzen.

5) H. Liebster, a. a. O.

er, daß hinter der Kugel keine stabile Wirbelanordnung vorhanden sein kann.

Von uns in diesem Gebiet vorgenommene Strömungsaufnahmen (Fig. 7 und 8) zeigen hinter der Scheibe eine spiralig eingerollte Trennungsfläche, hinter der Kugel ein ringförmiges Wirbelgebilde. Beide haften, soweit unsere Beobachtungen reichen, an dem bewegten Körper. Abschwemmungen irgendwelcher Wirbelgebilde konnten bei Scheiben bis $R \sim 80$, bei Kugeln bis $R \sim 500$ nie festgestellt werden. Es besteht immerhin die Möglichkeit, daß auch in diesem Gebiet eine solche stattfindet, deren Periode aber so groß ist, daß sie auf der verhältnismäßig kurzen Versuchsstrecke nie in Erscheinung treten konnte.

Fig. 7 stellt einen Versuch dar, der zur besseren Sichtbarmachung der Strömung mit einer Aluminiumscheibe von 3 cm Durchmesser und 0,1 cm Dicke, die ohne Schwingung fiel, ausgeführt wurde. Der ermittelte R-Wert beträgt 48,6. Fig. 7 und alle folgenden Strömungsaufnahmen sind, mit Ausnahme der Fig. 11 bis 16, 3- bis $4^1/_2$fach vergrößerte Filmbilder. Fig. 8a bis 8c zeigen die Strömung nach einer fallenden Aluminiumkugel — $R = 100$ — von 0,597 cm Durchmesser.

Nach v. Kármán[1]) erfolgt bei wachsender Kennzahl zunächst Übergang in eine nichtstationäre Wirbelströmung mit regelmäßiger Periodizität. Es wäre dies das Gebiet der Wirbelstraßen, bzw. des nahezu quadratischen Widerstandsgesetzes mit „großen Koeffizienten". Es scheint bei der Scheibe bei dem R-Werte von ~ 80, bei der Kugel, gefolgert aus dem nahezu wagerechten Abbiegen der Widerstandskurve bei dem R-Werte von ~ 1000 allmählich einzusetzen. Messungen der Geschwindigkeit von Bild zu Bild und Strömungsaufnahmen bestätigen die Behauptung zunächst bzw. der Strömungsvorgänge hinter der Scheibe. Eine solche Meßreihe der Geschwindigkeit ist in Fig. 9 graphisch dargestellt[2]). Die letztere schwankt hier offensichtlich periodisch um einen Mittelwert, was mit Sicherheit auch auf einen periodischen Strömungsvorgang hindeutet. Die Orientierung der fallenden Scheibe ist rechts von der Kurve angedeutet. Da die v-Werte untereinander Abweichungen bis zu 30 Proz. aufweisen, der maximale Fehler der Geschwindigkeitsbestimmung aber höchstens 4 Proz. betragen kann, darf die Realität der Periode wohl als garantiert angesehen werden.

Strömungsaufnahmen in diesem Gebiet lassen es noch deutlicher werden, daß es sich wirklich um die Ausbildung von Wirbelstraßen handelt. Über die Beschaffenheit der abgeschwemmten

1) Th. v. Kármán, a. a. O., siehe auch Abh. aus d. Aerodyn. Inst. a. d. Techn. Hochsch. Aachen, Heft 4, 26, 1925.

2) Es handelt sich um Versuch 19 (Tab. VII).



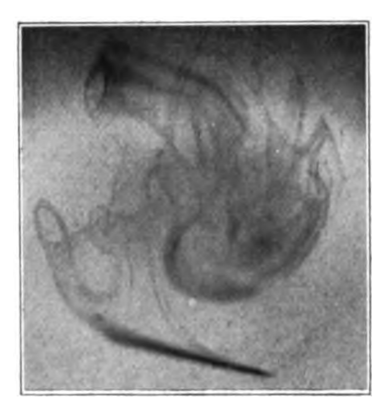


Fig. 15.

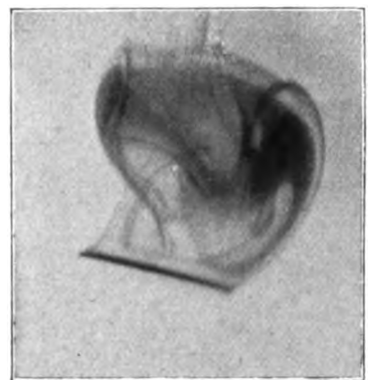


Fig. 16.

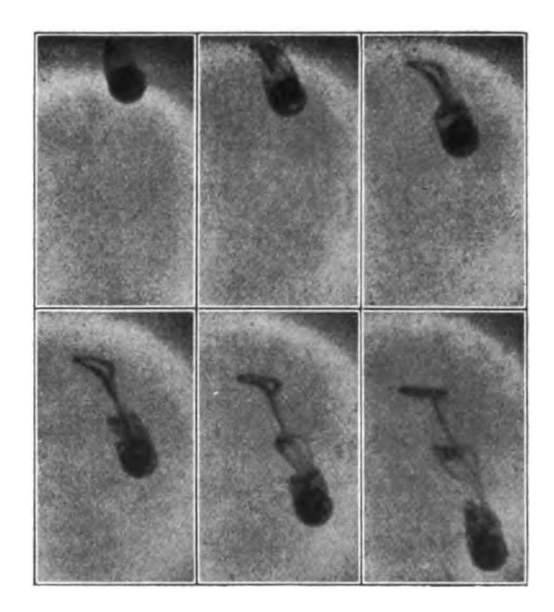


Fig. 17a—f.

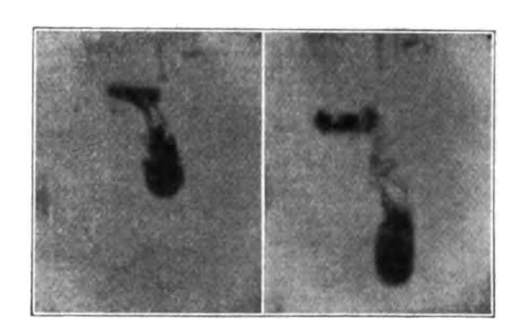


Fig. 19a u. b.

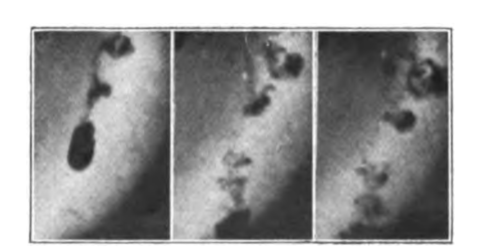


Fig. 18a, b u. c.

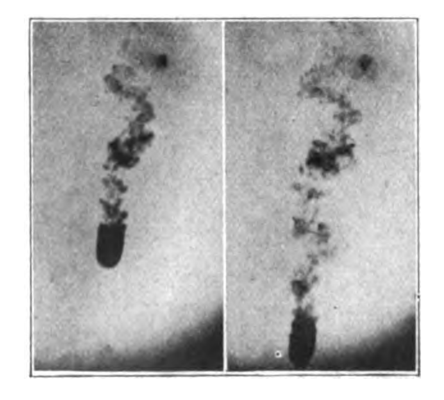


Fig. 20a u. b.

Wirbelgebilde, aus denen sich die Wirbelstraßen zusammensetzen, geben die Fig. 10a bis 10e und 11 bis 16 Auskunft. Die in zwei Reihen angeordneten deutlich sichtbaren Gebilde sind offenbar mit „Anfahrwirbeln" im Sinne der Prandtlschen

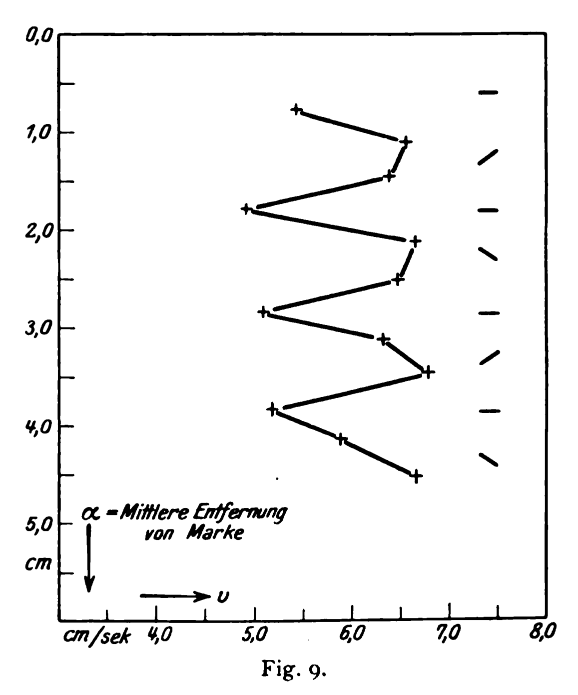
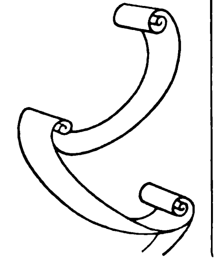


Fig. 9.

Tragflügeltheorie zu vergleichen. Die Bewegung der Scheibe entspricht nämlich der einer Tragfläche mit dauernd und regelmäßig zwischen positiven und negativen Werten wechselndem Anstellwinkel. Jedem Übergang von positiven zu negativen Werten muß ein neuer „Anfahrwirbel" entsprechen. Als solche Anfahrwirbel fassen wir die auf den Fig. sichtbaren und in zwei Reihen angeordneten Gebilde auf, von denen also die eine Reihe Wirbeln mit einem Drehsinn, die andere solchen mit entgegengesetztem entsprechen müssen. Der hiermit verbundene Quertrieb macht sich in dem Auftreten einer periodisch schwankenden Seitenbewegung geltend. Will man noch den aus den Bildern ersichtlichen Zusammenhang der aufeinanderfolgenden Wirbelgebilde erklären, so hat man diese nur als aufeinanderfolgende Einrollungen eines Wirbelbandes zu deuten. Dies ist ja wohl überhaupt ganz allgemein das Bild, das man sich von der Entstehung einer Straße diskreter Wirbelgebilde zu machen hat.

Ein Gesamtbild der Strömung hinter der Scheibe hat man sich nach dem oben Gesagten etwa in folgender Weise zu denken:



Die Kinematik der Scheibe zeigt nach vorstehendem Schema eine gewisse Verwandtschaft mit einer Tragfläche, die mit Sturzflug beginnend, allmählich in horizontale Bewegung übergeht, dann infolge ihrer lebendigen Kraft mit bis zu 0 abnehmender Geschwindigkeit ansteigt, dann rückwärts dieselbe Bewegung vollführt usw.

Fig. 10a bis 10e sind Vergrößerungen von fünf aufeinanderfolgenden Filmbildern, die den Verlauf einer halben Schwingung wiedergeben. Der zugehörige R-Wert beträgt 199. Fig. 11 bis 16 sind photographische Aufnahmen[1]) in diesem Gebiet, bei denen eine Bestimmung von R nicht möglich war. Bei Fig. 15 und 16 handelt es sich um große Scheiben, die in sehr zähen Medien fielen und bei denen infolgedessen N sehr klein war. Es liegt in der Natur der Sache begründet, daß die vorliegenden Aufnahmen nicht derartig scharf ausgefallen sind, wie etwa die ebener Wirbelstraßen von H. Ermisch[2]).

War die weiter oben ausgesprochene Vermutung richtig, daß die Strömungsform bei Scheiben und Kugeln an Stellen großer Streuung der ψ-Werte entsprechend sein müsse, so mußten Strömungsaufnahmen hinter Kugeln bei R-Werten von $\sim$ 1000 ähnliche periodische Strömungserscheinungen aufweisen.

Es ist schon F. S. Schmidt gelungen, zu zeigen, daß sich bei Reynoldsschen Zahlen über 1000 bei Beginn der Bewegung von der Kugel ein einziger Wirbelring ablöste. Es war aber bisher weder eine Folge von Wirbeln, noch weniger eine Periodizität beobachtet worden. Fig. 17a bis 17f zeigen periodische Abschwemmungen von Wirbelringen bei $R = 690$, Fig. 18a bis 18c solche — allerdings nicht in so regelmäßiger Folge — bei $R = 955$. Der durch Fig. 17 dargestellte Versuch wurde mit einer Quarzkugel von 1,532 cm Durchmesser, der in Fig. 18 dagegen mit einer Aluminiumkugel von 0,597 cm Durchmesser ausgeführt. Bei dem letztgenannten Versuch war die Belichtungszeit trotz schnellsten Filmens mit kleinstem Sektor noch zu groß, so daß die Kugel auf dem Bild granatenförmig erscheint.

Fig. 19a und 19b lassen die oben angeführte Behauptung F. S. Schmidts verständlich erscheinen. Auch bei ihnen ist nur ein einziger Wirbelring zu sehen.

Endlich zeigen die Fig. 20a und 20b auch bei einem R-Wert von 3400 noch derartige, allerdings wenig periodische Erscheinungen. Wie aus den Bildern hervorgeht, fielen die Kugeln in den meisten Fällen nicht senkrecht; teilweise wich die Fallbahn sogar sehr stark vom Lot ab, obwohl

1) Aufnahmeapparat Zeiss-Tessar 1:6,3; f = 21 cm.

2) H. Ermisch, Abh. aus dem Aerodyn. Inst. a. d. Tech. Hochsch. Aachen, Heft 6, 1927.

die Beschaffenheit der Kugel einwandfrei und in der Flüssigkeit vor Versuchsbeginn keine Strömung zu beobachten war. Auch bei den Kugelversuchen wurde, um einen Vergleichspunkt zu haben, die Dimensionslose $\frac{Nd}{v}$ festgestellt. Sie wurde bei $R = 690$ (Fig. 17) zu 0,327, bei $R = 955$ (Fig. 18) zu 0,389 ermittelt. Die Werte stimmen gut mit den bei den Scheibenversuchen gefundenen überein.

Die Sichtbarmachung der Strömung erfolgte in allen Fällen durch roten Farbstoff. Bei Kugeln und sehr kleinen Scheiben wurde hierzu Eosin (Tetrabromfluorescëin) verwendet, das sich außerordentlich schnell und gut in wässerigen Flüssigkeiten löst. Die Versuchskörper wurden in diesem Falle mit einer dünnen Eosinschicht überzogen. Das Mißliche dabei war ein sehr großer Verbrauch an Glyzerin, da dieses nach einem Versuch wegen intensiver Rotfärbung unbrauchbar geworden war. Bei Versuchen mit größeren Scheiben konnte diesem Übelstand dadurch abgeholfen werden, daß die Glyzerinlösung mit einer alkoholischen Lösung von Phenolphtalëin versetzt wurde. Bei Versuchsbeginn wurden auf die Mitte der Glyzerin-Oberfläche einige Tropfen Kalilauge gebracht, die — bei der Fallbewegung in winzigen Mengen mitgerissen — beim Passieren der Scheibe durch das Medium infolge der basischen Reaktion eine schöne Rotfärbung hinterließen. War der Versuch zu Ende, genügten einige Tropfen Schwefelsäure, um die rote Farbe zu beseitigen und das Glyzerin wieder gebrauchsfertig zu machen. Es mußte allerdings vor jedem Versuch eine neue Zähigkeitsmessung vorgenommen werden.

Zusammenfassung.

1. Es wurde der Widerstand von Kugeln bei gleichförmiger Translation längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Zylinders im Bereich kleiner R-Werte experimentell festgelegt, mit Hilfe der Theorien von Ladenburg und Faxén über den Einfluß der Gefäßwände auf unendliches Medium umgerechnet und mit den Theorien von Stokes bzw. Oseen verglichen. Dabei zeigte sich, daß die Oseensche Theorie besser mit dem Experiment übereinstimmte als die Stokessche.

2. Ein Einfluß des Bodens konnte experimentell festgestellt werden. Er wird im Prinzip von der Lorentzschen Theorie richtig wiedergegeben. Die Unterschiede zwischen letzterer und der Ladenburgschen Rechnung über den Boden- und Deckeneinfluß sind bei vorliegenden Versuchen so klein, daß sie innerhalb der Meßgenauigkeit liegen.

3. Es wurde der Widerstand von dünnen kreisförmigen Scheiben, die sich breitseit unter denselben Bedingungen wie die Kugel bewegten, im Bereich der R-Werte von 0,4 bis 300 festgelegt. Die graphisch interpolierte experimentelle Kurve zeigt einen stetigen Verlauf. Im Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahlen stimmen wiederum die Versuchswerte besser mit der Oseenschen als mit der, der Stokesschen analogen, Oberbeckschen Theorie überein.

4. Im Bereich der R-Werte von 80 bis 300 führten die Scheiben bei ihrer Bewegung regelmäßige Schwingungen aus, deren Frequenz gemessen werden konnte. Die berechnete Dimensionslose $\frac{Nd}{v}$ lag in jedem Falle zwischen den Werten 0,25 und 0,48. Sie scheint, wie zu erwarten, nicht allein eine Funktion von R, sondern auch vom Dichteverhältnis $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ zu sein.

5. Wie Strömungsaufnahmen zeigen, bilden sich bei kleineren R-Werten am Versuchskörper haftende Wirbelgebilde aus. Ab $R \sim 80$ für die Scheibe und $R \sim 1000$ für die Kugel setzt Wirbelstraßenbildung ein.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. Schiller für die Anregung zu dieser Arbeit und seinen ständigen wertvollen Rat, durch den er ihren Fortgang wesentlich förderte, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

An dieser Stelle sei auch des verstorbenen Herrn Geheimrates Professor Dr. Wiener dankbarst gedacht.

(Eingegangen 13. Juni 1928.)

Das neue Kältelaboratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin[1]).

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Von Walther Meißner.

Seit dem Jahre 1913 wird in der Reichsanstalt mit flüssigem Wasserstoff gearbeitet[2]). 1923 wurde die ursprüngliche kleine Wasserstoffverflüssigungsanlage, bei der man einen Nernstschen Verflüssiger für $^1/_2$ l flüssigen Wasserstoff/Std. benutzte, durch eine größere Anlage für 5 l Flüssigkeit/Std. ersetzt. Mit Hilfe der so zur Verfügung stehenden größeren Mengen flüssigen

1) Eine bis auf redaktionelle Änderungen gleiche Mitteilung enthält die Z. d. V. D. I. **72**, 1069, 1928.
2) W. Meißner, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 540, 1913.

Wasserstoffs, die auch in andern Laboratorien der Reichsanstalt und von wissenschaftlichen Gästen ausgenutzt wurden, gelang 1925[1]) die Einrichtung einer Heliumflüssigungsanlage, so daß seitdem auch Messungen im Temperaturgebiet des flüssigen Heliums bis herunter zu 1,2° abs., angestellt werden konnten[2]), die vorher nur in Leiden und Toronto (Kanada) möglich waren.

Die Wasserstoff- und Heliumverflüssigungsanlagen waren zunächst in behelfsmäßigen Räumen untergebracht, die sehr klein und auch besonders hinsichtlich der Sicherheitsmaßnahmen unzulänglich waren.

Im Laufe des Jahres 1927 ist nunmehr ein neuerbautes Kältelaboratorium[3]) in Betrieb genommen worden, in dem auch eine Anlage für 20 l flüssigen Stickstoff/Std. aufgestellt wurde. Auch ist die neue Wasserstoffverflüssigungsanlage für 10 l statt 5 l/Std. eingerichtet, während die Heliumverflüssigungsanlage wesentlich unverändert überführt wurde.

1. Allgemeines.

In Fig. 1 ist das Kältelaboratorium im Grundriß dargestellt, Fig. 2 gibt die Ansicht desselben.

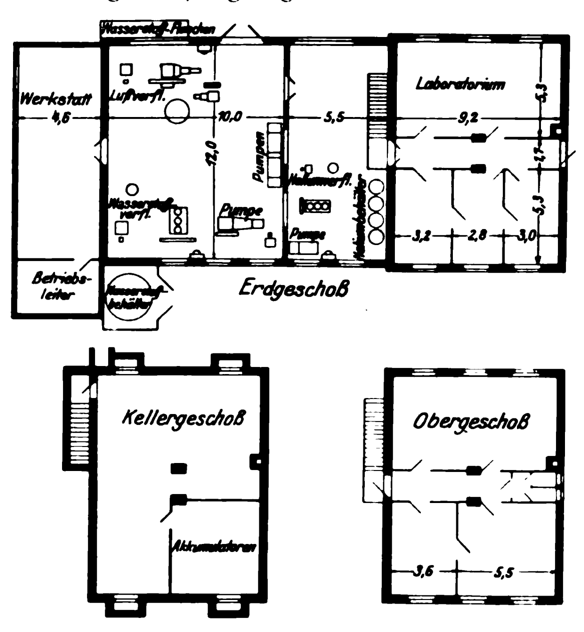


Fig. 1. Grundriß des Kältelaboratoriums.

1) W. Meißner, Naturwissenschaften **13**, 695. 1925.

2) W. Meißner, Physik. Zeitschr. **26**, 689, 1925; Zeitschr. f. Phys. **38**, 647, 1926; Physik. Zeitschr. **27**, 725, 1926; Zeitschr. f. d. ges. Kälte-Ind. **34**, 197, 1927.

3) Vgl. auch: W. Meißner, V.D.I.-Nachrichten Nr. 50, 1927; in dieser Notiz sind auch 3 Abbildungen der Maschinenanlagen enthalten. Ferner ist in ihr auf die geschichtliche Entwicklung der Wasserstoff- und Heliumverflüssigung eingegangen, die wesentlich mit den Namen Dewar, Nernst, Kamerlingh Onnes verknüpft ist.

Das Kältelaboratorium enthält danach:

1. Ein Werkstattsgebäude mit einem Zeichen- und Büroraum für den Betriebsleiter.

2. Einen großen Maschinenraum, in dem die Anlage zur Gewinnung von flüssigem Stickstoff, die Wasserstoffverflüssigungsanlage sowie Vakuumpumpen zum Abpumpen von Wasserstoffdampf aufgestellt sind.



Fig. 2. Ansicht des Kältelaboratoriums.

3. Zwei kleine Anbauten für einen Wasserstoffbehälter mit einem Fassungsvermögen bis zu 10 m³ und für Stahlflaschen mit komprimiertem Wasserstoff.

4. Einen kleinen Maschinenraum, in dem die Heliumverflüssigungsanlage aufgestellt ist.

5. Ein zweistöckiges, unterkellertes Gebäude mit Büro- und Laboratoriumsräumen. Ober- und Kellergeschoß sind durch Treppen mit dem Heliumverflüssigungsraum verbunden. Im Kellergeschoß befindet sich hauptsächlich ein Akkumulatorenraum und eine Heizungsanlage. Vom Keller aus führt ein begehbarer Schacht zum Hauptgebäude und zum Starkstromgebäude der Reichsanstalt. Durch diesen Schacht laufen Heizungsrohre und elektrische Kabel. Das zweite Stockwerk mit 4 Räumen ist besonders auch zur Aufnahme von wissenschaftlichen Gästen, die Versuche bei tiefsten Temperaturen ausführen wollen, bestimmt.

Mit Rücksicht auf die umfangreichen Arbeiten mit flüssigem Wasserstoff sind im Laboratorium besondere Sicherheitsmaßregeln getroffen. Allerdings ist dabei nicht in allen Punkten so weit gegangen, wie bei der von Lilienfeld[1]) beschriebenen Wasserstoffverflüssigungsanlage in Leipzig, bei der in Anlehnung an die Einrichtungen im Leidener-Kältelaboratorium[2]) die Elek-

1) J. E. Lilienfeld, Zeitschr. f. kompr. u. flüss. Gase **13**, 165 u. 185, 1911.

2) H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 94 f., 1906.

tromotore wegen der an ihnen auftretenden Funken in einem besonderen Raum laufen, aus dem nur die Achsen herausführen.

Diese Anordnungsweise wäre bei den vielen anzutreibenden Maschinen des Laboratoriums auf Schwierigkeiten gestoßen; ferner bietet sie auch keine absolute Sicherheit gegen Entzündung von Wasserstoff; auch ohne Gegenwart von Feuer oder Funken entzündet sich der Wasserstoff von selbst, wenn er unter Druck aus Undichtigkeiten ausströmt und geringe Beimengungen von Wasser oder festen Teilchen (z. B. Eisenoxyd) enthält. Dies beruht auf elektrischer Aufladung der festen oder flüssigen Teilchen und Funkenbildung[1]). Plötzliches Ausströmen von Wasserstoff kann hervorgerufen werden durch plötzliches Freiwerden des verstopften Expansionsventils und Springen des Gefäßes mit flüssigem Wasserstoff, wobei infolge der plötzlichen Verdampfung des Wasserstoffes großer Druck auftreten kann.

Außerdem kann man das Auftreten von Funken an den Motoren fast ganz vermeiden: In den Maschinenräumen wurden nur Drehstrommotore mit Schleifringankern, an denen nur etwa 100 Volt Spannung liegt, verwendet. Die Hauptschalter zum Einschalten des Feldes, das mit 500 Volt Drehstrom erregt wird, befindet sich nicht in den Maschinenräumen, sondern auf einer Schalttafel in der Werkstatt, so daß auch beim plötzlichen Ausschalten der Motore keine Funken in den Maschinenräumen auftreten. Funken an den Riemengetrieben, die bei Verwendung von hölzernen Riemenscheiben stark entstehen, wenn man nicht die Riemen durch Einreiben mit Graphit-Fettmischung leitend macht, wurden durch Verwendung von eisernen Riemenscheiben völlig vermieden.

Vor allem aber ist in den Maschinenräumen für eine kräftige Lüftung gesorgt: Dicht über dem Fußboden wird im großen Maschinenraum an zwei Stellen, im kleinen an einer Stelle durch Öffnungen in der Mauer von außen Frischluft angesaugt und in die Räume hineingedrückt; diese Luft entweicht oben im Dachaufsatz durch die in Fig. 2 sichtbaren Ventilationsklappen, so daß stündlich viermalige Lufterneuerung in den mehr als 7 m hohen Maschinenräumen stattfindet. Im Winter wird die von außen angesaugte Luft über Dampfheizkörper geleitet und dient dann gleichzeitig zur Heizung der Maschinenräume. Wird nicht mit Wasserstoff gearbeitet, so können die Luftheizapparate, die von der Firma Danneberg & Quandt, Berlin, geliefert wurden, von Frischluft auf Umluft umgestellt werden, so daß die Luft nicht von außen, sondern aus den Räumen angesaugt und an Dampf gespart wird. Durch die geschilderte Art der Lüftung wird die an sich durch den Auftrieb vorhandene Aufwärtsbewegung etwa ausströmenden Wasserstoffs begünstigt. Etwa an den Motoren dicht am Fußboden auftretende kleine Funken können also auch bei Wasserstoffausströmung wegen der Lüftung sehr schwer wirksam werden.

Aus Gründen der Sicherheit sind der Wasserstoffbehälter für 10 m³, sowie die Stahlflaschen mit komprimiertem Wasserstoff in besonderen Anbauten untergebracht, die aus den Fig. 1 und 2 zu ersehen sind. Von diesen Anbauten aus führen Leitungen durch Öffnungen in den Mauern zu den Verflüssigungsanlagen.

Für den Fall aber, daß wider Erwarten doch einmal eine kleine Wasserstoffexplosion stattfinden sollte, sind noch folgende Sicherungen getroffen: Die Eingangstüren zum Maschinenraum und zum Laboratoriumsgebäude sind nicht verriegelt, sondern werden nur durch Kugelschnepper, also nur durch Federdruck gehalten, so daß sie sich bei geringem inneren Überdruck nach außen öffnen und als Sicherheitsventile wirken. Auch sind die Verbindungstüren zwischen Maschinenräumen, Werkstatt und Laboratoriumsgebäude als Pendeltüren ausgebildet. Ferner sind die aus Fig. 2 ersichtlichen Ventilationsklappen im Dachaufsatz so angeordnet, daß sie nicht durch die Zugseile, die zum Öffnen dienen, sondern nur durch ihr Gewicht geschlossen gehalten werden und sich also bei innerem Überdruck ebenfalls leicht öffnen. Schließlich ist noch das leichte Dach des Dachaufsatzes nur so lose befestigt, daß es sich bei etwas größerem Überdruck als ganzes leicht abheben kann.

Im folgenden sind die Einrichtungen des Kältelaboratoriums im einzelnen beschrieben.

2. Anlage zur Erzeugung von flüssigem Stickstoff und flüssigem Sauerstoff.

Das Schema der von der Linde-Gesellschaft unter Heranziehung der Heylandt-Gesellschaft entsprechend den Wünschen der Reichsanstalt gelieferten Anlage ist aus Fig. 3 zu ersehen:

Die Luft wird bei 1 über ein Staubfilter *St* angesaugt und von dem vierstufigen Kompressor *K* für 110 m³ Ansaugleistung/Std. auf 200 at komprimiert. An den Zwischenkühlern zwischen den einzelnen Stufen sind Abscheider A_1 bis A_3 für Wasser und Öl angebracht, hinter der letzten Stufe ferner ein Abscheider A_4, sowie ein Ätzkalirohr *T* zur Beseitigung der Kohlensäure und der Feuchtigkeitsreste. Bei 2 wird die komprimierte Luft verschiedene Wege geleitet, je nachdem man flüssigen Stickstoff oder flüssigen Sauerstoff herstellen will.

1) Vgl. z. B. Nusselt, Zeitschr. d. V. D. Ing. **66**, 203, 1922; Pothmann, ebenda **66**, 938, 1922.



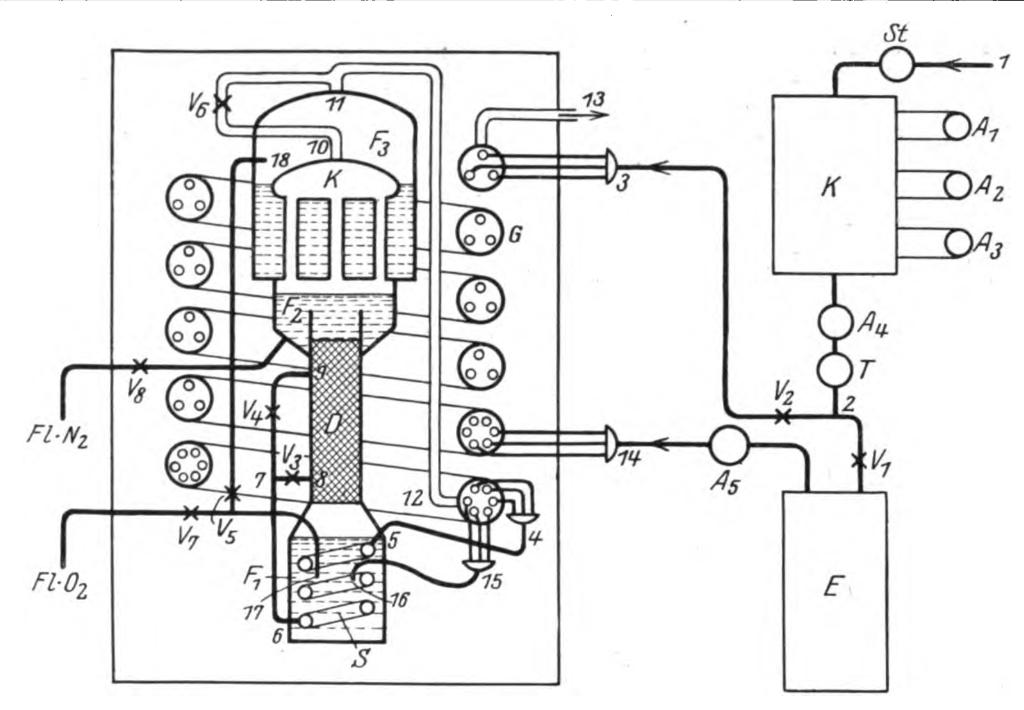


Fig. 3. Schema der Anlage zur Verflüssigung von Stickstoff und Sauerstoff.

a) Stickstoffgewinnung.

Ventil V_1 wird geöffnet, und etwa die Hälfte der Druckluft wird durch entsprechendes Einregulieren des gesteuerten Einlaßventils in die Heylandtsche Expansionsmaschine E geleitet, in welcher sie von 200 auf etwa 3 at Überdruck unter Leistung äußerer Arbeit expandiert und sich dabei von Zimmertemperatur auf etwa — 115^0 C abkühlt. Die Leistung der Expansionsmaschine — im vorliegenden Fall etwa 5 P.S. — wird durch Riementrieb auf den Kompressor übertragen. Der Kolben der Heylandtschen Expansionsmaschine ist durch Kolbenringe gedichtet und die Schmierung erfolgt mit gewöhnlichem Maschinenöl. Dies ist möglich, weil nur der vordere Teil des Zylinders, an dem sich das Auslaßventil befindet, kalt wird. Die auf etwa 3 at expandierte Luft geht durch einen Ölabscheider A_5 und tritt bei 14 in den Gegenströmer G des Rektifikationsapparats ein.

Der andere Teil der Druckluft geht von 2 durch das geöffnete Ventil V_2 nach 3 und tritt dort mit vollem Druck, also 200 at in den Gegenströmer G ein. Der der Rektifikationssäule nicht flüssig entnommene Teil, der bei 3 und 14 eintretenden Luft — beim Arbeiten auf flüssigen Stickstoff etwa $^4/_5$ — entweicht bei 13 mit einer zwischen 0^0 C und Zimmertemperatur liegenden Temperatur unter etwa 1 at Druck ins Freie.

Die Vorgänge im Rektifikationsapparat sind folgende: Die in der Expansionsmaschine auf etwa 3 at entspannte Luft, die bei 14 in den Gegenströmer G eintritt, durchläuft den unterhalb 14 liegenden Teil desselben, tritt bei 15 aus ihm aus und bei 16 in das unterste Gefäß F_1 der Drucksäule D, in der also etwa 3 at Druck herrschen. Der andere Teil der Druckluft, der bei 3 in den Gegenströmer eintritt, durchläuft den gesamten Gegenströmer, tritt bei 4 aus ihm aus, sodann bei 5 in das schraubenförmig gewundene Rohr S ein, das im Gefäß F_1 im Beharrungszustand von sauerstoffreicher Luft umgeben ist, wobei sich die Druckluft verflüssigt. Im Falle der Stickstoffgewinnung wird diese flüssige Luft sodann durch Ventil V_3 (Ventil V_4 bleibt geschlossen) auf etwa 3 at entspannt und bei 8 in die Drucksäule geleitet. Bei der Drosselentspannung im V_3 tritt Kälteleistung auf. Vor Eintritt des Beharrungszustandes, d. h. bevor sich in F_1 flüssige Luft angesammelt hat, kühlt sich die Luft beim Entspannen im V_3 ab, bis allmählich flüssige Luft gebildet wird. Von der in F_1 angesammelten Luft wird ein Teil an den Wandungen von S verdampft und steigt als Dampf in der Drucksäule D aufwärts. Ein anderer Teil wird bei 17 in ein Rohr geleitet, im Ventil V_5 (V_7 bleibt geschlossen) auf 1 at entspannt und bei 18 in das Gefäß F_3 gegeben, in dem 1 at Druck herrscht. Diese flüssige sauerstoffreiche Luft umspült die Rohre des Kondensators K, der zur Drucksäule D gehört. In den Kondensatorrohren werden die in D

aufsteigenden Luftdämpfe, sowie sie oben anlangen, verflüssigt, da ihr Kondensationspunkt unter 3 at Überdruck höher liegt als die Temperatur der unter 1 at abs. Druck befindlichen, die Kondensatorrohre kühlenden sauerstoffreichen Luft. Die in K kondensierte Flüssigkeit rieselt über die Füllung von D langsam nach unten und wäscht dabei aus den aus F_1 aufsteigenden Dämpfen den Sauerstoff aus, der also nach F_1 abfließt, während die aufsteigenden Dämpfe zufolge der Verdampfung des Stickstoffs der herabrieselnden Flüssigkeit allmählich stickstoffreicher werden, so daß die im Kondensator kondensierten Dämpfe im Beharrungszustand nahezu aus reinem Stickstoff bestehen, während die in F_1 sich sammelnde und zum Teil nach F_3 geleitete Flüssigkeit sauerstoffreich ist. Von dem in F_2 sich sammelnden flüssigen Stickstoff, der zum größten Teil auf die Drucksäule überläuft, wird ein Teil, bei der vorliegenden Anlage etwa 20 l/Std., durch Ventil V_8 abgezapft.

Die in F_3 gebildeten Dämpfe ziehen bei 11 ab, treten bei 12 in das untere Ende des Gegenströmers ein, durchströmen ihn entgegen dem Lauf der komprimierten Luft und verlassen ihn bei 13 mit einer etwas unter Zimmertemperatur liegenden Temperatur.

Es ist prinzipiell bei Verwendung einer Expansionsmaschine auch bei vollkommen wirkenden Gegenströmern nicht möglich, daß die bei 13 austretende Luft genau die Temperatur der bei 3 eintretenden Druckluft hat, da ja in den Druckrohren nur etwa halb so viel Luft hinströmt wie in dem umgebenden Niederdruckrohr zurückströmt. Nach Hausen[1]) soll bei günstigster Verteilung der Druckluft auf Expansionsmaschine und Gegenströmer (55 Proz. Luft durch die Expansionsmaschine) und bei einer Temperatur von — 115° C beim Austritt aus dem Expansionszylinder zwischen 13 und 3 eine Temperaturdifferenz von etwa 3° vorhanden sein. Praktisch wird diese Grenze nicht erreicht; die auftretende Temperaturdifferenz beträgt bei der vorliegenden Anlage etwa 15°.

Der Stand der Flüssigkeiten in F_1, F_2 und F_3 kann an in Fig. 3 nicht gezeichneten Flüssigkeitsanzeigern (Hampsometern) abgelesen werden, und die Ventile V_3, V_5 und V_8 müssen so einreguliert werden, daß überall Druck und Flüssigkeitsstand konstant bleibt. Der so gewonnene flüssige Stickstoff enthält im Beharrungszustand nur etwa 3 Proz. Sauerstoff.

Vom Beginn der Expansion durch V_3 bis zur Bildung von Flüssigkeit in F_2 vergehen etwa 100 Minuten.

1) Hausen, Zeitschr. f. d. ges. Kälte-Ind. **32**, 117, 1925.

b) Sauerstoffgewinnung.

Hierbei muß die Expansionsmaschine ausgeschaltet werden, da bei ihrer Verwendung in F_1 Luft normaler Zusammensetzung geleitet, also ein großer Reinheitsgrad des flüssigen Sauerstoffs unmöglich gemacht wird. Es wird daher das Ventil V_1 geschlossen und die gesamte Druckluft nach 3 geleitet. Ferner braucht man bei der Sauerstoffgewinnung nicht 3 at Druck in der Drucksäule. Vielmehr wird das Ventil V_6 oberhalb des Kondensators K ganz geöffnet, so daß die oberhalb D abziehenden Dämpfe durch K nach 11 und 12 und weiter in den Gegenströmer eintreten. Die komprimierte und im Beharrungszustand in S verflüssigte Luft wird nicht durch V_3 nach 8 entspannt, sondern durch V_4 nach 9, so daß die flüssige Luft vom oberen Ende von D über die Füllung der Drucksäule nach unten rieselt, wobei infolge der von unten entgegenziehenden Sauerstoffdämpfe der Stickstoff der Luft fast ganz verdampft und durch flüssigen Sauerstoff ersetzt wird. Der Kondensator K und das Flüssigkeitsbad in F_3 kommen also bei der Herstellung von flüssigem Sauerstoff nicht zur Verwendung.

Von der in F_1 gebildeten Flüssigkeit kann so viel, daß der Flüssigkeitsstand konstant bleibt, durch Ventil V_7 nach außen abgelassen werden, bei der vorliegenden Anlage etwa 7 l/Std. Die gewonnene Flüssigkeit enthält nur etwa 3 Proz. Stickstoff.

Arbeitet man wie bei der Gewinnung von flüssigem Sauerstoff, entspannt aber nicht durch V_4 nach 9, sondern durch V_3 nach 8, so erhält man, da die Rektifikationssäule fast ganz ausgeschaltet ist, nicht flüssigen Sauerstoff, sondern flüssige Luft nahezu normaler Zusammensetzung. Man kann dann — ohne Druck in der Drucksäule — auch die Expansionsmaschine mitarbeiten lassen und erhält dann durch V_7 etwa 20 l/Std. etwas sauerstoffreiche Luft, was in manchen Fällen auch angenehm ist.

3. Wasserstoffverflüssigungsanlage.

In Fig. 4 ist die Anlage schematisch dargestellt. Ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Anlage für flüssigen Stickstoff besteht darin, daß ein vollständig geschlossener Wasserstoffkreislauf vorhanden ist, und daß der Wasserstoff mit flüssigem Stickstoff vorgekühlt wird. Seine Verflüssigung erfolgt dann wieder nach dem Lindeschen Verfahren.

Der Wasserstoff wird Stahlflaschen F_1, die sich, wie bereits oben erwähnt, in einem besonderen Anbau befinden, entnommen und mit Hilfe des fein einstellbaren Spitzenventils V_3 bei geschlossenem Ventil V_5 bei 0 in den Kompressor K und bei geöffnetem Ventil V_4 in den

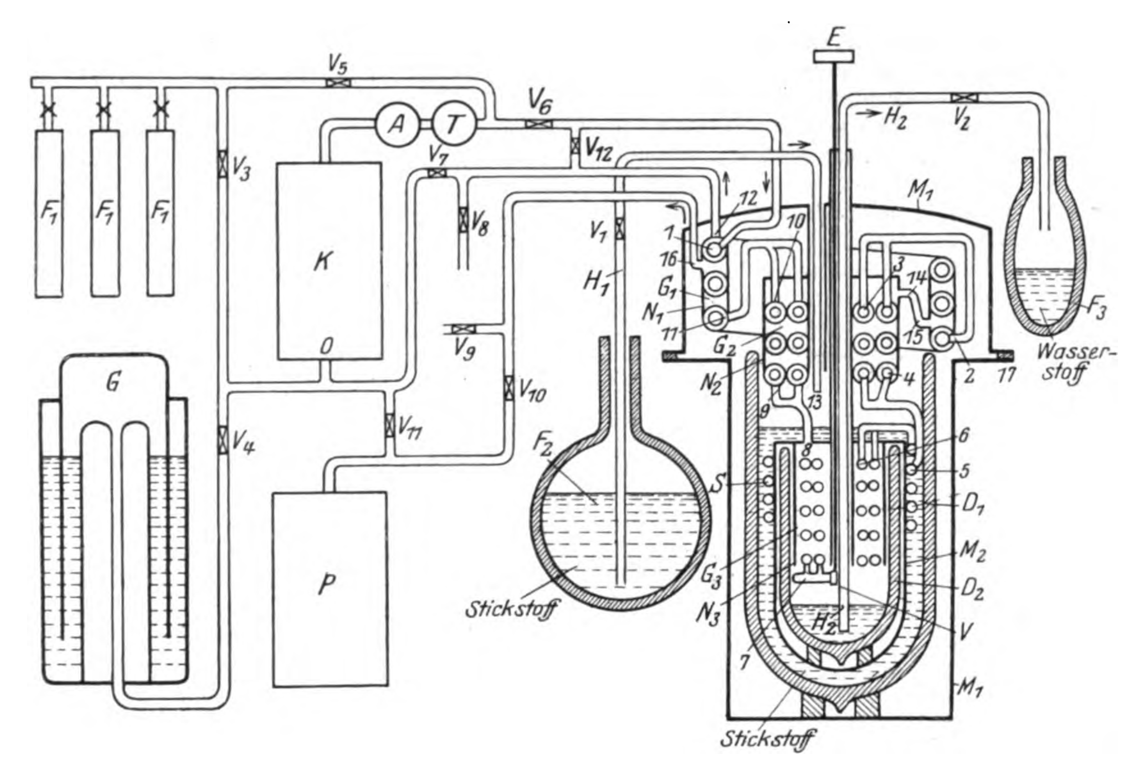


Fig. 4. Schema der Wasserstoffverflüssigungsanlage.

Gasbehälter G, der sich ebenfalls in einem besonderen Anbau befindet, eingelassen. Nach Kompression auf etwa 175 at durchläuft er bei geöffnetem Ventil V_6 einen Ölabscheider A, ein (mit Ätzkali gefülltes) Trockenrohr T und tritt bei 1 in den eigentlichen Verflüssigungsapparat ein, auf den weiter unten näher eingegangen ist. Der auf 1 at entspannte und nicht verflüssigte Teil des Wasserstoffs verläßt den Verflüssiger mit Zimmertemperatur bei 12 und strömt nach O zurück, um wieder von neuem komprimiert zu werden. Der zur Vorkühlung dienende flüssige Stickstoff wird aus der Vakuummantelflasche F_2 mit Hilfe des Vakuummantelhebers H_1 zugeführt. Der verdampfte Stickstoff verläßt nach Durchströmen von Gegenströmern den Verflüssiger bei 16, und zwar nahezu mit Zimmertemperatur und unter einem Druck von nur wenigen Zentimetern Quecksilbersäule; er wird nämlich mit Hilfe der großen Vakuumpumpe P abgesaugt. Da der flüssige Stickstoff hiernach unter starkem Unterdruck siedet und demgemäß aus F_2 durch H_1 hindurch angesaugt wird, kann sein Zufluß durch Einstellen des in den Heber H_1 eingeschalteten Hahnes V_1 einreguliert werden. Der bei 7 verflüssigte Wasserstoff wird durch den Vakuummantelheber H_2 in Vorratsflaschen F_3 abgelassen. Da der Wasserstoff bei 7 einige Zehntel Atmosphären Überdruck hat, braucht zum Ablassen des flüssigen Wasserstoffs nur der Hahn V_2, der in den Heber H_2 eingeschaltet ist, geöffnet zu werden.

Dadurch, daß der Gasbehälter G angeschlossen ist, wird der Druck in der Niederdruckleitung automatisch konstant gehalten. Man braucht nur ab und zu durch vorsichtiges Öffnen des Ventils V_3 so viel Wasserstoff, wie verflüssigt worden ist, in den Gasbehälter einzulassen. — Vor Inbetriebnahme kann die ganze Apparatur bei geschlossenen Ventilen V_4 und V_{10} durch Öffnen von V_{11} mit der Pumpe P evakuiert werden. Außerdem kann sie noch bei geschlossenem Ventil V_7 und geöffnetem Ventil V_8 (von V_8 führt eine Leitung ins Freie) mit Wasserstoff ausgespült werden. Falls V_{10} geschlossen ist, wird V_9 geöffnet, so daß der verdampfende Stickstoff unter 1 at Druck ins Freie strömt. Nach Schluß der Verflüssigung kann der Wasserstoff bei geschlossenem Ventil V_6 und geöffnetem Ventil V_5 aus den Gasbehältern G usw. mit dem Kompressor in die Flaschen F_1 zurückgedrückt werden. Der Gasbehälter enthält als Sperrflüssigkeit Öl. Nach besonderen Versuchen, die angestellt wurden, ist die Diffusionsgeschwindigkeit durch das verwendete Öl so gering, daß bei tief eintauchender Glocke auch in einigen Tagen nur eine zu vernachlässigende Verunreinigung des Wasserstoffs durch Luft eintritt.

Der eigentliche Verflüssigungsapparat besitzt drei Gegenströmer G_1, G_2, G_3, die sämtlich

schraubenförmig um die Achse des ganzen Apparates laufen. Am unteren Ende von G_3 findet bei 7 im Drosselventil V die Entspannung des komprimierten Wasserstoffs statt. Der oberste Gegenströmer G_1 besteht aus zwei ineinandergesteckten Rohren. Durch das innere Rohr (in Wirklichkeit werden mehrere parallel geschaltete innere Rohre verwendet) fließt der komprimierte Wasserstoff nach unten, im Zwischenraum zwischen den Rohren der entspannte Wasserstoff nach oben. Über die schraubenförmigen Rohrwandungen ist ein Neusilbermantel N_1 gelötet; in dem so geschlossenen Zwischenraum zwischen den Wasserstoffniederdruckrohren strömt verdampfter Stickstoff nach oben. Der zweite Gegenströmer G_2 ist ähnlich angeordnet, nur daß mehrere Wasserstoffniederdruckrohre parallel geschaltet sind. Auch G_2 besitzt einen Neusilbermantel N_2, innerhalb dessen der verdampfte Stickstoff schraubenförmig nach oben strömt. Der unterste Gegenströmer G_3 wird nur von Wasserstoff, nicht von Stickstoff durchflossen. Der komprimierte Wasserstoff durchströmt die parallel geschalteten schraubenförmigen Rohrwindungen von oben nach unten. Der Zwischenraum zwischen den Rohrwindungen ist durch den Neusilbermantel N_3 abgeschlossen; in ihm strömt der bei 7 im Ventil V mit Hilfe der Ventilstange E entspannte Wasserstoff, soweit er nicht verflüssigt ist, nach oben zurück. G_3 ist von einem metallenen Vakuummantelgefäß D_2 umgeben, in welchem sich der verflüssigte Wasserstoff sammelt. D_2 steckt in einer vollkommen geschlossenen zugelöteten Messingkapsel M_2. Die letztere ist von flüssigem Stickstoff umgeben, der sich im Vakuumgefäß D_1 befindet. Der ganze Verflüssiger ist in einen Eisenmantel M_1 eingebaut. Der untere Teil desselben ist mit dem oberen bei 17 luftdicht verschraubt. M_1 wird durch die Pumpe P beim Absaugen der Luftdämpfe evakuiert. Der obere Teil von M_1, in dem G_1 liegt, ist zur Wärmeisolation mit Seidenzupf gefüllt.

Der Strömungsvorgang im Verflüssiger ist entsprechend dem Vorstehenden also folgender: Der komprimierte Wasserstoff tritt bei 1 ein, durchläuft den Gegenströmer G_1 bis 2, tritt bei 3 in den Gegenströmer G_2, bei 4 aus ihm aus, wird in der bifilaren Spirale S, die in flüssigem Stickstoff steckt, vorgekühlt, tritt bei 6 in den untersten Gegenströmer G_3 und wird schließlich bei 7 im Drosselventil V auf etwa 1,3 Atm. entspannt. Der nicht verflüssigte Teil des entspannten Wasserstoffs strömt zwischen den Druckrohren von G_3 schraubenförmig zurück bis 8, tritt bei 9 in die Niederdruckrohre von G_2 ein, bei 10 aus denselben aus, durchströmt die Niederdruckrohre von G_1 von 11 bis 12 und geht nach 0 zum Kompressor zurück. — Der flüssige Stickstoff strömt bei 13 in das Vakuummantelgefäß D_1 aus Metall und wird an S verdampft. Der Stickstoff streicht zwischen den Rohrwindungen von G_2 schraubenförmig nach oben, tritt bei 14 aus G_2 aus, bei 15 in G_1 ein und verläßt den Verflüssiger bei 16 unter der Saugwirkung der Pumpe P.

In der nur schematischen Fig. 4 sind alle Einzelheiten, wie Sicherheitsventile, Manometer, Vakuummeter, Anzeigevorrichtungen für den Stand von flüssiger Luft und flüssigem Wasserstoff u. dgl. m. fortgelassen.

Bei der Konstruktion der Gegenströmer G_2 und G_3 mit parallel geschalteten Rohren liegt folgende Schwierigkeit vor: Das Rohr mit kleinerem Windungsradius ist erheblich kürzer und bietet dementsprechend weniger Strömungswiderstand, so daß durch dasselbe an sich viel mehr Wasserstoff strömen würde als durch das mit größerem Radius, wodurch der Wärmeaustausch im Gegenströmer ungünstig werden würde. Diese Schwierigkeit wurde dadurch behoben, daß in der Mitte des Gegenströmers das Rohr von kleinerem Radius herausgebogen und als Rohr von größerem Radius weitergeführt ist, während umgekehrt das bisher außen verlaufende Rohr nach innen verlegt ist. Dann ist die gesamte Länge und der Strömungswiderstand beider Rohre gleich. Dasselbe Prinzip läßt sich auch bei mehr als zwei parallel gelegten Rohren anwenden. Gegenströmer nach Art von G_3 haben vor der Hampsonspirale den Vorzug einfacherer Herstellung. Außerdem ist bei ihnen die Strömung des entspannten Gases definierter und widerstandsfreier, so daß der Gegenströmer der Berechnung auf Wärmeaustausch besser zugänglich ist und der Druckabfall in ihm gering gehalten werden kann.

Eine Hauptschwierigkeit der Wasserstoffverflüssigung liegt darin, daß der käufliche Wasserstoff noch etwas Verunreinigungen, meist Sauerstoff und Stickstoff, enthält.

Bei dem elektrolytischen Wasserstoff der chemischen Fabrik Heyden, der allein für die Verflüssigung verwendet wird, betragen die Verunreinigungen in der Regel allerdings nur wenige Promille, so daß ein Verstopfen des Expansionsventils durch ausgefrorene feste Luft nur sehr selten eintritt. Um auch bei etwas größerem Luftgehalt des Wasserstoffs, wie es bisweilen vorkommt, ungestört arbeiten zu können, sind folgende Maßregeln getroffen:

Dicht vor dem Ventil V ist in die Hochdruckwasserstoffleitung ein Abscheidegefäß von etwa 20 cm^3 Inhalt eingeschaltet, von welchem aus eine Ausblasleitung nach oben aus dem Verflüssiger herausführt. Die letztere ist außerhalb des Verflüssigers durch ein Ventil verschlossen. In dem Abscheidegefäß sammelt sich die Haupt-

menge der ausgefrorenen Luft an und kann von Zeit zu Zeit ausgeblasen werden, indem das Ventil der Ausblasleitung geöffnet wird. Das Ausblasen ist meist nur am Anfang erforderlich, wo die ganze kreisende Wasserstoffmenge gereinigt wird, während später nur so viel Wasserstoff zukommt, wie verflüssigt wird. Außer dieser Ausblasvorrichtung ist am Ventil V noch eine elektrische Heizspule angebracht, um das Ventil nötigenfalls auftauen zu können, ohne den Apparat selbst erwärmen zu müssen.

Der Kompressor der beschriebenen Anlage hat eine maximale Ansaugleitung von etwa 60 m³/Std. Der Verflüssigungsapparat selbst ist derselbe, der früher mit einem Kompressor von 25 m³/Std. Saugleistung benutzt wurde. Wie sich gezeigt hat, reicht er für die volle Leistung des neuen Kompressors nicht ganz aus. Läßt man den Kompressor mit verminderter Tourenzahl laufen, so daß die Ansaugleistung 37 m³/Std. beträgt, so erhält man im Verflüssiger selbst 10 l/Std. flüssigen Wasserstoff, nach dem Abhebern etwa 7,6 l flüssigen Wasserstoff/Std., während eine weitere Steigerung der Tourenzahl des Kompressors die Ausbeute an flüssigem Wasserstoff nicht mehr erhöht. Der Bau eines vergrößerten Gegenströmers, der die Saugleistung des Kompressors voll auszunutzen gestattet, ist in Vorbereitung.

Der Verbrauch an flüssigem Stickstoff beträgt etwa 2 kg für 1 l flüssigen Wasserstoff.

Betreffs der Energiebilanz sei auf die ausführlichen Darlegungen an anderen Stellen verwiesen[1]).

4. Gewinnung von Helium.

Das im Kältelaboratorium verwendete Helium ist teils aus Neon-Helium-Gemisch gewonnen, das die Linde-Gesellschaft zur Verfügung stellte, teils durch Reinigung von Rohhelium, das die Auer-Gesellschaft aus Monazitsand gewinnt und zu Selbstkosten lieferte. Das Neon-Helium-Gemisch enthält etwa 75—80 Proz. Neon, das Rohhelium der Auer-Gesellschaft noch etwa 10—30 Proz. Verunreinigungen, die aus Luft, Kohlensäure und Wasserstoff bestehen.

Die Trennung des Neon-Helium-Gemisches erfolgte durch Ausfrieren des Neons bei etwa 11° abs. Der normale Siedepunkt des Neons liegt bei etwa 24,5° abs[2]). Bei 15° abs. beträgt der Dampfdruck des festen Neons etwa 2 mm, so daß er bei 11° abs. schon sehr klein ist. Zur Kühlung bei 11° abs. wurde fester Wasserstoff, der unter etwa 5 mm Quecksilberdruck stand, verwendet. Fig. 5 gibt das Schema der Einrichtung zur Neon-Heliumtrennung:

Das Neon-Helium-Gemisch befindet sich unter einem Druck bis zu 50 at in der Stahlflasche

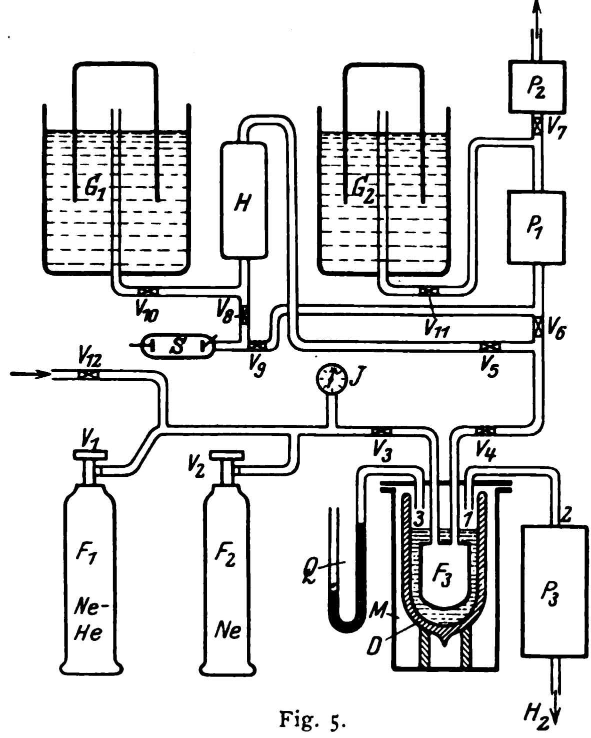


Fig. 5.
Schema der Einrichtung zur Neon-Heliumtrennung.

F_1 oder kann, falls es mit dem Heliumkompressor komprimiert wird, durch das Ventil V_{12} zugelassen werden. Es empfiehlt sich, die Flasche F_1 nur bis zu einem Druck von etwa 10 at zu entleeren und den Rest mit dem Kompressor auf höheren Druck zu bringen, da das Arbeiten mit niedrigem Druck bei der Trennung langwierig ist. Von F_1 oder V_{12} führt eine Rohrleitung über Ventil V_3 zum Kondensationsgefäß F_3. An die Rohrleitung ist außerdem eine vorher evakuierte Stahlflasche F_2 für das zu gewinnende Neon angeschlossen. Von F_3 führt eine zweite Rohrleitung zum Ablassen des Heliums einerseits über Ventil V_6 zur Pumpe P_1 und weiter über Ventil V_{11} zum Gasbehälter G_2, anderseits über Ventil V_5 und ein Rohr H mit glühendem Kupferoxyd über Ventil V_{10} zum Gasbehälter G_1. An die letztere Leitung ist über ein Ventil V_8 noch das Spektralrohr S angeschlossen, das über Ventil V_9 durch die Pumpe P_1 evakuiert werden kann. Das Kondensationsgefäß F_3 taucht in flüssigen oder

1) W. Meißner, Zeitschr. f. Phys. **18**, 12, 1923; Artikel „Erzeugung tiefer Temperaturen und Gasverflüssigung". Handb. d. Physik v. Geiger und Scheel, Bd. XI, Springer 1926; W. H. Keesom, Rapports et Communications 5. Congrès international du froid. Rome 1928, S. 136, Leiden 1928.

2) P. G. Catte und Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden, Nr. 152b, 1917; Nr. 147c, 1915.

festen Wasserstoff ein, der sich im Vakuummantelgefäß D befindet. Letzteres ist vom Metallgefäß M gasdicht umschlossen, so daß der Wasserstoffdampf durch Rohr 1, 2 mit Hilfe der Vakuumpumpe P_3 abgesaugt werden kann. Der Stand des flüssigen Wasserstoffs wird an einer nicht gezeichneten Anzeigevorrichtung abgelesen, und es kann durch einen Vakuummantelheber aus einer Vorratsflasche nach Bedarf flüssiger Wasserstoff nachgefüllt werden.

Der Dampfdruck des Wasserstoffs wird am Quecksilbermanometer Q abgelesen, das bei 3 angeschlossen ist. Man arbeitet nun folgendermaßen: Zunächst werden bei geschlossenen Ventilen V_{10} und V_{11} nach Öffnen von V_7 mit der Vorpumpe P_2 alle Rohrleitungen evakuiert. Dann wird F_3 in flüssigen Wasserstoff eingetaucht und der Dampfdruck bis auf etwa 0,1 at erniedrigt, so daß der Wasserstoff eben noch flüssig ist. Nunmehr wird durch ruckweises Öffnen von V_3 in F_3 Neon-Helium-Gemisch hineingelassen. Durch das ruckweise Hineinlassen des Gases wird ein Verstopfen durch festes Neon hintenangehalten. Sinkt der von I angezeigte Druck bei Öffnen von V_3 nicht mehr, so wird der Dampfdruck des Wasserstoffs auf etwa 5 mm Quecksilber erniedrigt. Ist der Druck bei geschlossenem Ventil V_1 wieder konstant geworden, so wird durch vorsichtiges Öffnen und Schließen von V_4 zunächst etwas Helium bei geschlossenem Ventil V_5 mit der Pumpe P_1 bei geöffnetem Ventil V_6 und V_9 mit der Pumpe P_1 in Gasbehälter G_2 abgepumpt, bis im Spektralrohr S die Neonlinien fast völlig verschwunden sind. Daß zunächst neonhaltiges Helium abgepumpt wird, liegt wohl daran, daß in dem zu V_4 führenden Rohre wegen langsamer Diffusion Neon zurückbleibt. Denn das weiterhin nach Schließen von V_6 über V_5, H und V_{10} in G_1 langsam eingelassene Helium ist nahezu spektralrein. Dies erkennt man an Proben, die man über V_8 in das Spektralrohr S einläßt, das dann wieder durch V_9 mit P_1 evakuiert wird. Ist der Heliumdruck in F_3 auf 1 at gesunken, so wird V_4 wieder geschlossen und weiter Neon-Helium-Gemisch eingelassen und so fort. Ist zum Schluß F_3 nahezu mit festem Neon angefüllt, so wird bei 11^0 abs. noch das Helium mit P_1 bis auf möglichst niedrigen Druck aus F_3 abgepumpt. Sodann wird bei geschlossenen Ventilen V_4 und V_1 und geöffneten Ventilen V_3 und V_2 das Gefäß D mit Wasserstoff entfernt, so daß das feste Neon auftaut und in F_2 hineinverdampft. Da F_3 klein gegen F_2 ist, bleibt nur wenig Neon in F_3 zurück. Man kann die Kondensation des Neons usw. fortsetzen, bis man in F_2 einen Druck von 30 bis 50 at hat. Das so gewonnene Neon enthält nur wenige Promille Helium. Es wird an die Linde-Gesellschaft zurückgegeben. Früher[1]) war die Trennung des Heliums in einem unreinen und einem reinen Teil nicht vorgenommen worden, so daß das ganze abgepumpte Helium nochmals gereinigt werden mußte. Bei der geschilderten Art des Vorgehens kann das in G_1 angesammelte Helium sofort zur Verflüssigung verwendet werden, und nur das in G_2 befindliche Helium, das etwa $^1/_5$ der abgeschiedenen Menge Helium ausmacht, muß nochmals gereinigt werden. — Man kann nach dieser Methode an einem Tage etwa 70 l reines Helium gewinnen, wozu etwa 7 l flüssiger Wasserstoff erforderlich sind.

Die Reinigung des von der Auer-Gesellschaft gelieferten Rohheliums, das kein Neon enthält, erfolgt dadurch, daß es unter 1 at Druck nacheinander über glühendes Kupferoxyd, über Phosphorpentoxyd, durch eine in flüssige Luft getauchte Vorlage und durch eine in flüssigen, unter normalem Druck siedenden, in Wasserstoff tauchende Vorlage geleitet und in einem Glasbehälter aufgefangen wird. Es wird so der Reihe nach Wasserstoff, Wasser, Kohlensäure und Luft beseitigt, und man erhält bei einer Strömungsgeschwindigkeit von etwa 3 l/Minute nahezu spektralreines Helium. Man kann nach dieser Methode bequem 500 l reines Helium an einem Tage gewinnen, wobei nur etwa 7 l flüssiger Wasserstoff gebraucht werden, da das Gas schon vorgekühlt in die Vorlage mit flüssigem Wasserstoff eintritt. Diese Art der Heliumgewinnung ist also sehr viel ergiebiger als die durch Neon-Heliumtrennung. Trotzdem wird auch die Neon-Heliumtrennung fortgesetzt, da die Reichsanstalt dabei das Helium völlig kostenlos erhält.

Der Heliumvorrat des Kältelaboratoriums beträgt jetzt etwa 6 m³.

5. Heliumverflüssigungsanlage.

Das Schema der gesamten Heliumverflüssigungsanlage der Reichsanstalt gibt Fig. 6. Die Verflüssigung erfolgt dem Vorgange von Kamerlingh Onnes entsprechend nach dem Lindeschen Prinzip bei Vorkühlung mit flüssigem Wasserstoff.

Der größte Teil des Heliums wird in Stahlflaschen F_1, der Rest in Gasometern G mit Ölfüllung aufbewahrt. Heliumkompressor K und sämtliche Rohrleitungen für Helium können nach Öffnen des Ventils V_4 mit Hilfe der Kapselpumpe P_1 und Vorpumpe P_2 bis auf etwa 0,001 mm H_g evakuiert werden. Nach Schließen von V_4 wird durch das Nadelventil V_2 aus F_1 Helium in Rohrleitungen, Kompressor K und Gaso-

1) W. Meißner, Artikel: Erzeugung tiefer Temperaturen und Gasverflüssigung. Handbuch d. Physik von Geiger und Scheel Bd. 11, 321, 1926.



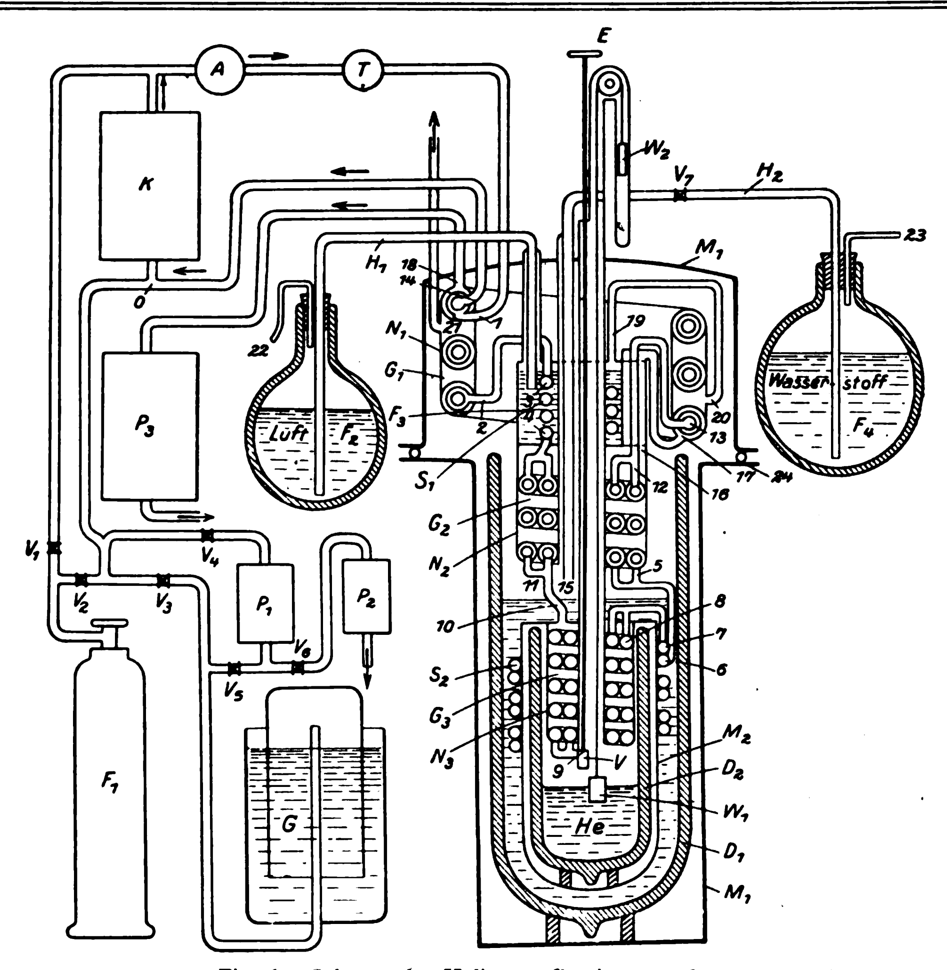


Fig. 6. Schema der Heliumverflüssigungsanlage.

meter G gelassen. Das in K komprimierte Helium durchläuft den Ölabscheider A, das Trockenrohr T und tritt bei 1 in den eigentlichen Verflüssigungsapparat ein. Der nicht verflüssigte und entspannte Teil des Heliums verläßt den Verflüssiger nahezu mit Zimmertemperatur bei 14 und wird bei 0 vom Kompressor K von neuem angesaugt und komprimiert. Die zur Vorkühlung dienende flüssige Luft wird aus der Flasche F_2 durch den Heber H_1 bei 3 in das Gefäß F_3 eingefüllt, indem bei 22 mittels Gummigebläse oder Druckluft ein geringer Überdruck erzeugt wird. Der Stand der flüssigen Luft in F_3 kann an einer nicht eingezeichneten Anzeigevorrichtung abgelesen werden. Die verdampfte Luft verläßt den Verflüssiger bei 21. Der zur Vorkühlung benutzte flüssige Wasserstoff wird der Flasche F_4 mit Hilfe des Hebers H_2, in welchen das Ventil V_7 eingefügt ist, entnommen. Er fließt bei 15 aus dem Heber H_2 aus. Der Wasserstoffdampf wird mit der Pumpe P_3 von 18 aus abgepumpt, so daß der Wasserstoff unter stark vermindertem Druck siedet. Durch Einregulieren von Ventil V_7 kann man den Zufluß des angesaugten flüssigen Wasserstoffs regeln. An die Vorratsflasche F_4 ist bei 23 eine Wasserstoffatmosphäre (Stahlflasche mit Reduzierventil oder Gummiblase) angesetzt, um das Kondensieren von Luft in F_4 zu vermeiden. Der Stand des flüssigen Wasserstoffs in F_4 wird durch einen Schwimmer angezeigt. Der Stand des flüssigen Wasserstoffs im Verflüssiger kann durch Sichtstreifen im Vakuummantelgefäß D_1 und im Metallmantel M_1 beobachtet werden.

Der eigentliche Heliumverflüssiger enthält drei Gegenströmer G_1, G_2 und G_3, die alle drei aus schraubenförmigen Windungen um die Mittelachse des ganzen Apparates bestehen. Die Windungen von G_1 bestehen aus drei ineinandergesteckten Rohren. Im innersten Rohr strömt das entspannte, nicht verflüssigte Helium, im Zwischenraum zwischen dem innersten und dem zweiten Rohr das komprimierte Helium, im Zwischenraum zwischen dem äußersten und dem zweiten Rohr der verdampfte Wasserstoff. Über die Rohrwindungen ist innen und außen ein Neusilbermantel N_1 gelötet. In dem so abgeschlossenen Zwischenraum strömt schrauben-

förmig nach oben die verdampfte Luft. Zwischen G_1 ist das Gefäß F_3 mit flüssiger Luft eingeschaltet, in dem einige Schraubenwindungen des Heliumhochdruckrohrs 3, 4 verlaufen. Der Gegenströmer G_2 besteht aus zwei (in Wirklichkeit aus mehr) parallel liegenden Rohrwindungen, deren jede aus zwei ineinandergesteckten Rohren besteht. Im innerstem Rohr fließt wieder das entspannte rückströmende Helium, im Zwischenraum zwischen beiden Rohren das hinströmende komprimierte Helium. In dem schraubenförmigen Raum zwischen den Rohrwandungen und dem Neusilbermantel N_2, der innen und außen auf die Wandungen gelötet ist, steigt der verdampfte Wasserstoff empor. Zwischen die Gegenströmer G_2 und G_3 ist die bifilare Kühlschlange S_2 der Druckleitung eingeschaltet, die in flüssigem Wasserstoff liegt. Der Gegenströmer G_3 besteht aus zwei (in Wirklichkeit aus mehr) parallel laufenden schraubenförmigen Windungen des Heliumdruckrohres. Im Raum zwischen diesen Windungen und dem aufgelöteten Neusilbermantel N_3 steigt schraubenförmig das entspannte Helium empor. Die Entspannung erfolgt im Ventil V, das von oben her mittels der Ventilstange E betätigt wird. Das flüssige Helium sammelt sich im Vakuummantelgefäß D_2, das in einer zugelöteten Blechbüchse M_2 steckt. Der zur Vorkühlung dienende flüssige Wasserstoff befindet sich im Vakuummantelgefäß D_1. Der ganze Verflüssiger ist in einen eisernen zweiteiligen Mantel M_1 eingeschlossen. Der untere Teil desselben ist mit dem oberen bei 24 vakuumdicht verschraubt. Das Innere von M_1 wird beim Abpumpen des Wasserstoffdampfes mit evakuiert.

Der Strömungsvorgang im Verflüssiger ist hiernach folgender: Das komprimierte Helium tritt bei 1 in den obersten Gegenströmer G_1 ein, und zwar in den Zwischenraum zwischen innerstem und zweitem Rohr. Es verläßt G_1 bei 2, durchströmt die Vorkühlschlange 3, 4, die in flüssiger Luft liegt, tritt in den Gegenströmer G_2 und verläßt ihn bei 5. Dann durchströmt das komprimierte Helium die bifilare Kühlschlange S_2, die in flüssigem Wasserstoff liegt, tritt bei 8 in den untersten Gegenströmer G_3 und bei 9 in das Expansionsventil V, wo es auf 1,3 at entspannt wird. Der nicht verflüssigte Teil des Heliums strömt durch G_3 schraubenförmig nach oben, tritt bei 11 in die innersten Rohre des Gegenströmers G_2, bei 12 aus diesen aus, bei 13 in das innerste Rohr von G_1 und verläßt den Apparat bei 14.

Der flüssige Wasserstoff fließt bei 15 in das Vakuummantelgefäß D_1. Der an der Vorkühlschlange S_2 verdampfte Wasserstoff wird abgepumpt und durchläuft dabei zunächst schraubenförmig den Zwischenraum zwischen den Rohren von G_2. Er verläßt G_2 bei 16 und tritt bei 17 in den Zwischenraum zwischen den beiden äußeren Rohren von G_1. Bei 18 verläßt der Wasserstoffdampf den Verflüssiger und wird von der Pumpe P_3 ins Freie befördert.

Die flüssige Luft, die durch H_1 in das Gefäß F_3 eingefüllt wird, verdampft an der Kühlspirale 3, 4. Der Dampf verläßt F_3 bei 19, tritt bei 20 in den Zwischenraum zwischen den Windungen des obersten Gegenströmers, durchläuft G_1 schraubenförmig und tritt bei 21 nahezu mit Zimmertemperatur aus dem Apparat heraus.

Betreffs der eigenartigen Ausführung der Gegenströmer G_2 und G_3 wird auf das beim Wasserstoffverflüssiger Gesagte verwiesen. Die Gegenströmer G_2 und G_3 sind außerdem nicht aus Kupferrohren sondern aus Neusilberrohren hergestellt. Dies ist wegen der geringen Kälteleistung bei der Entspannung des Heliums prinzipiell wichtig für die gute Wirksamkeit des Gegenströmers[1]). Außerdem wird so die Wärmezufuhr von oben auch dann gering, wenn das Helium nicht zirkuliert, wenn man vielmehr Messungen in dem in D_2 verflüssigten Helium anstellt.

Um Versuchsapparate, z. B. Gasthermometer, Dampfdruckthermometer, auf Widerstand zu prüfende Metallspulen u. dgl. einbauen zu können, werden die Gefäße M_1 und D_1 nach unten zu abgenommen, M_2 aufgelötet und D_2 ebenfalls nach unten zu entfernt. Die Kapillaren von Gas- oder Dampfdruckthermometern, die natürlich Heliumfüllung haben müssen, werden durch das zentrale Neusilberrohr, durch welches die Ventilspindel T und der Aufhängefaden des Schwimmers W_1 zum Gegengewicht W_2 läuft, nach oben herausgeführt, ebenso die Zuführungsdrähte zu den Widerstandsspulen u. dgl. Durch das zentrale Neusilberrohr kann man auch einen Vakuummantelheber einführen, falls man das Helium in andere Gefäße abfüllen will.

Bei Inbetriebnahme des Verflüssigers wird zunächst, um die Abkühlung des Apparates zu beschleunigen, nicht nur in F_3, sondern auch in D_1 durch H_2 hindurch flüssige Luft eingefüllt. Nachdem alles bei zirkulierendem Helium die Temperatur der letzteren angenommen hat, wird der übrigbleibende Rest flüssiger Luft durch eine am Boden von D_1 angebrachte elektrische Heizspule verdampft, D_1 und M_1 mittels P_3 evakuiert und nun durch H_2 flüssiger Wasserstoff eingefüllt, der dann unter einem Druck von etwa 6 cm Quecksilber verdampft. Hierbei läßt man das Helium, ohne es zu komprimieren, langsam zirkulieren. Nachdem in D_2 bei 9 Abkühlung bis auf die

1) Vgl. W. Meißner, Ztschr. f. techn. Physik 7, 235, 1926.



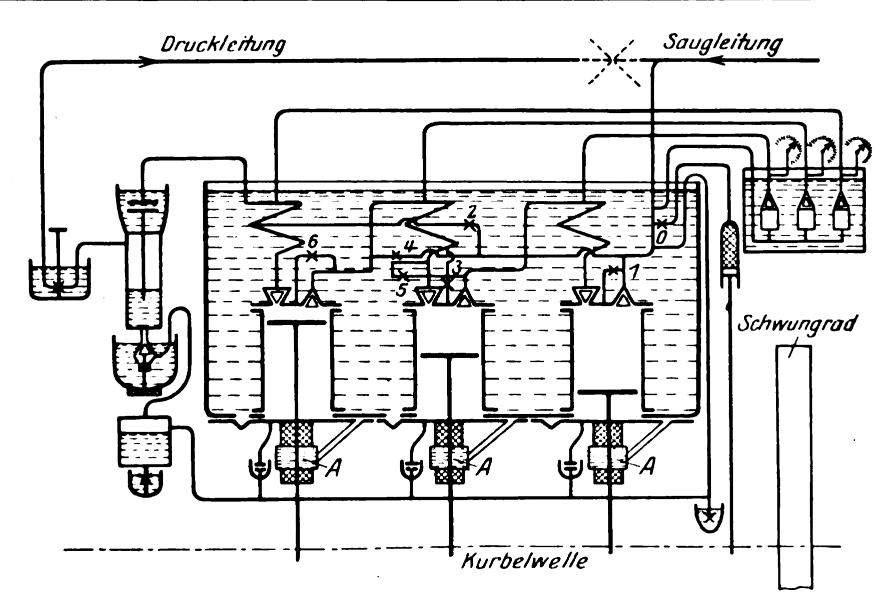


Fig. 7. Schema der Heliumkompressors.

Temperatur des flüssigen Wasserstoffs eingetreten ist, wird das Helium auf etwa 40 at komprimiert und entspannt. Alsbald tritt dann die Verflüssigung des Heliums ein.

Um das Helium unter vermindertem Druck sieden zu lassen, kann man K als Pumpe benutzen. Hierzu wird das Drosselventil geschlossen und Ventil V_1 geöffnet, so daß der Kompressor das abgepumpte Helium in die Stahlflasche F_1 komprimiert. Man kommt so auf einen Dampfdruck von etwa 35 mm Quecksilbersäule. Will man den Druck noch weiter erniedrigen, so kann man das Helium mit der Kapselpumpe P_1 bei geöffneten Ventilen V_4 und V_5 und geschlossenem Ventil V_3 in das Gasometer G hinein abpumpen. Bei Verwendung einer Siemensschen Kapselpumpe von etwa 140 m³ Saugleistung/Std. kommt man so auf einen Dampfdruck von 0,9 mm Quecksilber (etwa 1,2⁰ abs.).

Damit Heliumverluste vermieden werden, müssen alle Teile, die Helium enthalten, also auch der Heliumkompressor vollkommen dicht sein. Der Heliumkompressor muß auch, wie schon oben erwähnt, hoch evakuiert werden können, da ein Ausspülen mit Helium natürlich nicht möglich ist.

Bei dem in der Reichsanstalt benutzten Heliumkompressor für etwas mehr als 10 m³/Std. Ansaugleistung, dessen Anordnung in Fig. 7 schematisch dargestellt ist, ist man diesen Erfordernissen in folgender Weise gerecht geworden: Der Kompressor ist an sich ein gewöhnlicher, mit Öl geschmierter Kompressor, der aber in folgender Weise abgeändert ist: Die Zylinder sind nicht nur hinten, sondern auch vorn, auf der Seite der Kolbenstangen geschlossen. In diese vorderen Zylinderräume tritt das Gas, das etwa von der Kolbendichtung beim Komprimieren durchgelassen wird, und von hier aus durch Rohrleitungen zurück in die Ansaugleitung des Kompressors. Die Kolbenstangen laufen durch Ölkammern A, die unter etwa 50 cm Öldruck stehen, so daß an den Kolbenstangendichtungen nie Gas, sondern nur Öl austreten kann. Alle Verschraubungen und Dichtungsflächen liegen unter Öl, auch zur Kühlung ist Öl verwendet, so daß beim Evakuieren nur Öl, nicht Luft angesaugt werden kann, beim Komprimieren etwa auftretende Undichtigkeiten an aufsteigenden Gasblasen zu sehen sind. Ferner sind besondere Verbindungsrohre mit eingeschalteten Ventilen 1 bis 6 angebracht, um auch das Innere der Zylinder und der Kühlschlangen trotz der durch Federn angedrückten Druck- und Saugventile vollkommen evakuieren zu können. Natürlich blasen auch die Sicherheitsventile in die Ansaugleitung des Kompressors ab. — Auch der in Leiden benutzte Heliumkompressor ist nach ähnlichen Prinzipien gebaut. Von der Benutzung eines Quecksilberkompressors ist man auch dort abgekommen.

Die Betriebsergebnisse mit der beschriebenen Anlage sind bei Verwendung des Kompressors von reichlich 10 m³ Ansaugleistung pro Stunde folgende: Um die Apparatur mit flüssiger Luft abzukühlen und den Rest der flüssigen Luft in D_1 zu verdampfen, ist etwa 1 Stunde erforderlich. Die Abkühlung mit flüssigem Wasserstoff bis zur Heliumkompression dauert etwa 15 Minuten. Etwa 10 Minuten später beginnt die Heliumver-

flüssigung. 400 cm³ flüssiges Helium, welche das Gefäß D_1 faßt, erhält man bei einem Kompressionsdruck von 35 at in etwa 9 Minuten. Der verflüssigte Bruchteil des komprimierten Heliums ist hiernach etwa 0,19, da die Dichte des flüssigen Heliums am normalen Siedepunkte 0,125, die des gasförmigen Heliums unter Normalbedingungen 0,000178 ist.

Zum Abkühlen mit flüssiger Luft werden etwa 3 l gebraucht, zur weiteren Abkühlung mit flüssigem Wasserstoff sind etwa 2 l flüssiger Wasserstoff nötig. Mit weiteren 5 l flüssiger Luft und 8 l. flüssigen Wasserstoffs kann man etwa 3 Stunden lang das etwa 400 cm³ fassende Gefäß D mit flüssigem Helium gefüllt halten, auch wenn man das Helium beim Beobachten unter stark erniedrigtem Druck sieden läßt.

Betreffs des Wirkungsgrades der Anlage im Verhältnis zu dem, was nach der Theorie zu erwarten ist, wird wieder auf die Behandlung dieser Frage an anderer Stelle verwiesen[1]).

Im Leidener Laboratorium wird das flüssige Helium auch aus dem Verflüssiger in andere Gefäße abgehebert und neuerdings sogar an andere Stellen des Laboratoriums transportiert[2]). Dabei wird das verdampfte Helium vorübergehend beim Transport in einer Gummiblase aufgefangen, die dann an eine zum Gasometer führende Leitung angeschlossen wird, so daß auch beim Transport kein Helium verloren geht.

Es sind Vorbereitungen getroffen, um ähnlich auch im Kältelaboratorium der Reichsanstalt arbeiten zu können. Aus dem Heliumverflüssigungsraum führen Rohrleitungen für Wasserstoff und Helium in die einzelnen Räume des Laboratoriumsgebäudes. Durch diese Rohrleitungen kann der verdampfte Wasserstoff bzw. das verdampfte Helium in die Gasbehälter zurückgeleitet werden; auch können die Rohrleitungen durch entsprechende Regulierung von Ventilen an die Pumpen für Wasserstoff und Helium angeschlossen werden, so daß man in den Laboratoriumsräumen auch Wasserstoff und Helium unter vermindertem Druck sieden lassen kann.

6. Einrichtung des Laboratoriumsgebäudes.

Wie schon in Nr. 1 erwähnt wurde, befindet sich im Keller des Laboratoriumsgebäudes eine Heizungsanlage. Die Niederdruckdampfkessel derselben werden jedoch nur dann benutzt, wenn die Hauptkesselanlage der Reichsanstalt abgestellt ist, d. h. insbesondere, wenn spät abends und nachts gearbeitet werden muß, was im Kältelaboratorium häufiger der Fall ist. Der Niederdruckdampf der eigenen Kesselanlage oder der von 3 at auf Niederdruck entspannte Dampf der Hauptkesselanlage wird benutzt:

1. Zur Dampfheizung des Werkstattgebäudes.
2. Zur Heizung der Maschinenräume mittels der in Nr. 1 beschriebenen Luftheizkörper der Firma Danneberg & Quandt.
3. Zur Erwärmung des Wassers der Warmwasserheizanlage des Laboratoriumsgebäudes.

Im Akkumulatorenkeller ist bis jetzt eine Batterie von 120 Volt und etwa 270 Amperestunden Kapazität aufgestellt, die durch eine besondere Schaltanlage auf 4, 8, 12, 20, 40, 60 und 120 Volt schaltbar ist. Sie hat bei 120 Volt eine maximale Stromstärke von 90 Ampere, bei 4 Volt also eine solche von 2700 Ampere. Versuche mit derartig starken Strömen müßten allerdings im Keller direkt an der Schaltanlage ausgeführt werden.

Die Arbeitsräume des Laboratoriumsgebäudes — abgesehen von zwei als Schreib- bzw. Bürozimmer dienenden Räumen — sind folgendermaßen eingerichtet: In alle Räume führen die schon am Ende von Nr. 5 erwähnten Rohrleitungen zum Abpumpen von Wasserstoff- und Heliumgas. In allen Räumen sind zum Entlüften Ventilatoren angebracht; dieselben saugen die Luft in gemauerte Züge, die oberhalb der Dächer ins Freie führen. In den meisten Räumen sind auch Digestorien vorhanden. Sämtliche Räume können verdunkelt werden. Die beiden großen Räume im Erdgeschoß und Obergeschoß (Fig. 1) können durch einen Quervorhang in zwei Räume eingeteilt werden. In sämtlichen Räumen ist eine Schalttafel angebracht, welcher Ströme verschiedener Art und Spannung entnommen werden können. An den Schalttafeln liegen dauernd 120 Volt Drehstrom für Ströme bis 100 Ampere, 110 Volt Gleichstrom, vorläufig für Ströme bis etwa 6 Ampere, später für höhere Ströme; Anschaltbar sind: Die oben erwähnte Akkumulatorenbatterie von 4 bis 120 Volt; die Akkumulatorenbatterien des Starkstromgebäudes der Reichsanstalt soweit verfügbar für starke Ströme und Spannungen bis 240 Volt, sowie für schwache Ströme und Spannungen bis maximal 3000 Volt; die Gleichstrom-, Wechselstrom- und Drehstrommaschinen des Starkstromgebäudes (soweit verfügbar); die Gleichstromhochspannungsmaschine des Starkstromgebäudes für Spannungen bis 10 000 Volt und Ströme bis 1 Ampere (soweit verfügbar und nur in einzelnen Räumen); auch

1) W. Meißner, Artikel: Erzeugung tiefer Temperaturen und Gasverflüssigung, im Handb. d. Physik v. Geiger und Scheel. Bd. XI, S. 326, Springer 1926; W. H. Keesom, Rapports et Communications, 5. Congrès international du froid. Rome 1928, S. 136, Leiden 1928.

2) H. Kamerlingh, Onnes, Kap. and Comm. 4. Intern. Congr. of Refrig. London 1924, Leiden 1924.

führen vier dünne Doppelleitungen zum Starkstromgebäude, um die Erregung von Motor und Dynamomaschine einregulieren und Frequenz und Phasenverschiebung ablesen zu können.

In jedem Raume befinden sich außer Experimentiertischen usw. ein Werkzeugschrank, die allgemein erforderlichen Hilfsapparate, wie Stative, Brenner u. dgl. und die notwendigsten Materialien.

Ferner ist eine größere Sammlung von Apparaten vorhanden, welche die gebräuchlichsten elektrischen, thermischen und optischen Apparate enthält.

Es sind also die Einrichtungen derart, daß Untersuchungen auf allen Gebieten der Physik in tiefen Temperaturen angestellt werden können. Die speziellen Versuchsapparate, die dem jeweiligen Fall anzupassen sind, müssen natürlich besonders beschafft werden.

7. Die Mittel für die Neueinrichtungen. Gastarbeiten am Kältelaboratorium.

Die Mittel für den Bau des Kältelaboratoriums und seine Maschineneinrichtungen sind im wesentlichen vom Reich bewilligt worden. Außerdem hat die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft erhebliche Mittel für die Einrichtung der Laboratorien und der Verflüssigungsanlagen sowie für die Arbeiten selbst zur Verfügung gestellt. Ferner hat sie sich von vornherein mit großer Energie für die Schaffung eines deutschen Kälte-Instituts nach dem Leidener Vorbilde eingesetzt. Auch von seiten der Lieferfirmen, besonders der Linde-Gesellschaft, wurde das Institut durch weitgehendes Entgegenkommen unterstützt.

Mit Rücksicht auf die von der Notgemeinschaft zur Verfügung gestellten Mittel ist es, wie bereits in Nr. 1 erwähnt wurde, möglich, daß auch wissenschaftliche Gäste in dem Kältelaboratorium Versuche bei tiefsten Temperaturen ausführen.

Anträge auf Zulassung als wissenschaftlicher Gast sind an den Ausschuß für Gastarbeiten am Kältelaboratorium der Reichsanstalt zu Händen des Präsidenten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Berlin-Charlottenburg, Werner-Siemens-Straße 8—12, zu richten. Hierbei sind der Zweck der Arbeiten, der gewünschte Zeitpunkt ihres Beginns und die voraussichtliche Dauer derselben, sowie die für sie erforderlichen Apparate und Einrichtungen anzugeben.

Auch kann flüssiger Wasserstoff für Forschungszwecke vom Kältelaboratorium abgegeben werden. Hierzu ist ebenfalls ein Antrag an den Ausschuß mit entsprechender Begründung notwendig.

Dem Ausschuß gehören an:

Der Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, der Leiter des Kältelaboratoriums (z. Z. Oberregierungsrat Dr. Meißner), der Präsident der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, Exzellenz Schmidt-Ott, (Stellvertreter Professor Stuchtey), Professor v. Laue, Berlin-Zehlendorf.

(Eingegangen 10. Juni 1928.)

Zur Frage eines einheitlichen Maßsystems für den theoretischen Anfangsunterricht in Physik.

Von H. Hermann.

Im 40. Jahrgang der Zeitschr. f. ph. u. chem. Unterr. (1927) forderte S. 42 der inzwischen schon verstorbene Didaktiker A. Semiller auf zu überlegen, ob nicht ein umfassendes Maßsystem für alle Teile des physikalischen Lehrgangs (vor der Hochschule) ausreichen könnte. Verf. arbeitete daraufhin eine Handschrift aus, welche April 1927 bei der Physik. Zeitschr. einging, aber infolge der Erkrankung des Herausgebers abhanden gekommen ist. Inzwischen sind in dieser Zeitschrift in Veröffentlichungen des AEF (28, 387) einige der in Betracht kommenden Gesichtspunkte und Beispiele behandelt worden. Mit Rücksicht hierauf ist die folgende Wiederholung der Arbeit des Verf. gekürzt.

Ein einheitliches Maßsystem muß die gebräuchlichsten elektrotechnischen Einheiten, streng oder metronomisch genügend genähert, umfassen. Es ist selbst innerhalb des Fachs merkwürdigerweise vielfach vergessen, daß es ein solches System schon gibt. Die elektrotechnischen Einheiten passen, abgesehen von den Zwittereinheiten der neuesten Entwickelung, in ein dem C. G. S.-System gleichgebautes System mit den Grundeinheiten Hebdomometer (10^{+7} m, ein Erdquadrant), Undecimogramm (10^{-11} g, Hunderttausendmilliontelgramm, in dieser etwas schwulstigen Form leicht zu behalten) und Sekunde, das dementsprechend als HUS-System zu bezeichnen und beispielsweise von Kohlrausch, Lehmann-Karlsruhe, Höfler-Wien benutzt worden ist. Verf. hat darauf hingewiesen, daß es sich empfiehlt, auch die Krafteinheit dieses Systems aufzustellen und Centidyne zu nennen; dann läßt es sich auch in der Mechanik benutzen und ergibt glatte Abwicklung von Berechnungen elektrischer und magnetischer Kräfte aus elektrischen Daten und umgekehrt, z. B. der elektrolytischen Reibung oder der Lösungstension[1]).

---

1) Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. **53**, 80; Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturwiss. **32**, 357.



Allein für den Anfangsunterricht in der Mechanik ist dieses System wegen der entlegenen Größenordnung der Längen- und der Masseneinheit wenig geeignet.

Die elektrischen Definitionen des absoluten Maßsystems lassen keine Möglichkeit, diesen Übelstand zu heben. Da beispielsweise der Widerstand die Dimension einer Geschwindigkeit hat, kann man, wenn das Ohm bleiben soll, im absoluten Maßsystem Länge und Zeit nur proportional ändern. Eine solche Änderung ist auf die Energieeinheit ohne Einfluß. Man kann also, wenn das Joule ebenfalls bleiben soll, die Masseneinheit nicht ändern. Soll dagegen das Watt bleiben, so muß Masse und Zeit proportional geändert werden, also die Masseeinheit im gleichen Verhältnis und Sinn geändert werden wie die Längeneinheit. Zweck hat aber nur eine gegensinnige Änderung beider, welche nicht möglich ist.

Dagegen besitzt das natürliche Maßsystem in Gestalt der elektrischen und magnetischen Erregbarkeit des Äthers zwei konventionelle Größen, welche nicht wie im absoluten System gleich Eins gemacht sind, sondern Werte besitzen, deren Änderung namentlich jetzt, wo dieses System erst in der Einbürgerung begriffen ist, noch erörterungsfähig sein dürfte.

Das natürliche System in seiner heutigen Gestalt ist mechanisch inkonsequent, was sich in der Behandlung der Bewegungen freier Ladungsträger bei den Verhältnissen der Ladung zur Masse geltend macht. Da es die Energieeinheit Joule mit der Längeneinheit cm verbindet, ist seine Krafteinheit die Hebdomodyne; demnach müßte man ihm eigentlich die Masseneinheit Hebdomogramm oder Dekatonne zuschreiben; üblich sind aber in ihm Massenangaben in Gramm. Will man diese Unstimmigkeit beseitigen, so muß man, damit die Einheiten Joule und Watt erhalten bleiben, die Masseneinheit und das Quadrat der Längeneinheit gegensinnig ändern. Die einzigen Paare gebräuchlicher Massen- und Längeneinheiten, welche sich mit dieser Forderung vertragen, sind Milligramm mit Kilometer verbunden, oder Kilogramm mit Meter verbunden. Die zweite Wahl dürfte für den Anfangsunterricht in der Mechanik die wesentlich geeignetere sein.

Allerdings ergibt die Dichteeinheit kg/cbm unvorteilhaft hohe Maßzahlen in der Hydrodynamik. Dieser (auf der in Rede stehenden Anwendungsstufe wenig umfangreiche) Nachteil wird in der Aerodynamik eher ein Vorteil.

In diesem

Kilogramm†-Meter-Sekunden-System

würde die Krafteinheit die Größe 10^5 Dynen besitzen; eine geeignete Abkürzung hierfür ist das Wort

Lakdyne (rund 102 g)[1])

(Lak indisch = 10^5; das Schluß-*h* der englischen Rechtschreibung dürfte im Deutschen entbehrlich sein). Das Coulomb, Ampere, Volt, Ohm, Farad und Henry sind im natürlichen System mit der Mechanik nur durch die Sekunde verknüpfte Größen. Dagegen sind die elektrischen und magnetischen Feldstärkeneinheiten und die der fiktiven Ätherspannungen, sowie die der Energiedichte mit der Längeneinheit verknüpft, daher im hier entworfenen System von den jetzt üblichen verschieden, freilich in einer Weise, die in der Benennung sofort zutage tritt und daher dem einigermaßen Unterrichteten keine Schwierigkeiten macht. Für den Anfangsunterricht aber ist es nicht unwesentlich, hier um die Erlaubnis zur Folgerichtigkeit zu bitten. Denn gerade für ihn sind die Schwierigkeiten des natürlichen Systems, die in der von ihm geforderten Umsicht im Bereich der elektrischen und magnetischen Erscheinungen liegen, so wesentlich, daß Zeitersparnisse möglichst vollständig herausgeholt werden müssen. Man hätte also mindestens beim Anfänger Feldstärken in Amwindungen je Meter und Volt je Meter auszudrücken, damit die Kräfte in Lakdynen herauskommen; die fiktiven Spannungen $-{}^1/_2 \varepsilon E^2$ bzw. $-{}^1/_2 \mu H^2$ wären in Lakdynen je Quadratmeter (das sind Hunderttausendstel-Atmosphären), die Energiedichten in Joule je Kubikmeter auszudrücken. Der vom Verf. 1926 gemachte Vorschlag, die natürliche magnet. Feldstärkeneinheit 1 Mie zu nennen, würde im neuen System den Zusatz „metrisch" erfordern:

1 Mie = 1 Amwdg/cm;

1 metrisches Mie = 1 Amwdg/m.

Die elektrische und magnetische Erregbarkeit des Äthers enthält der natürlichen Dimension nach die Längeneinheit im Nenner, sie werden also bei Verwendung des Meters durch 100mal größere Zahlen ausgedrückt als bisher. Damit ändern sich also die $\mathfrak{B}$-Zahlen in andrem Verhältnis als die $\mathfrak{H}$-Zahlen; erstere werden in Voltsek/qm 10000 mal größer, letztere in metrischen Mie 100mal größer, wie es in der Tat sein muß, damit die Selbstinduktionseinheit Henry unberührt bleibt. (Natürlich darf man ihr dann nicht mehr den nur im HCS-System berechtigten Namen Quadrant geben.)

Die vorstehenden Vorschläge sind nicht als Eingriff in die Erörterung über die Zweckmäßigkeit des natürlichen Systems selbst, über das

1) Unterrbl. f. Math. u. Naturwiss. **32**, 356, Ziff. II.



auch unter den dem Verf. bekannten Hochschullehrern die Meinungen ähnlich geteilt sind wie in dieser Zeitschrift[1]), aufzufassen; es muß jedoch gesagt werden, daß das Erscheinen der sehr handlichen Pohlschen Darstellung des Systems (1927) die Zahl der Anstalten, wo mit ihm zu arbeiten versucht wird, erheblich steigert. Daher ist baldige Erörterung der angeschnittenen Frage durch die Fachvertreter erwünscht.

1) Vgl. Busch, Physik. Zeitschr. **28**, 364, 1927.

(Eingegangen 6. Juli 1928.)

Bemerkungen zu R. v. Hirsch u. R. Döpel: „Die Axialität der Lichtemission und verwandte Fragen.“

Von E. Rupp.

Dank der Freundlichkeit der Herren Verfasser bin ich in der Lage, die meine Untersuchungen zur Polarisation des Kanalstrahllichtes betreffenden Fragen unmittelbar zu beantworten. Ich halte mich dabei an die von den Verfassern gewählte Abschnittsgliederung.

Zu Abschn. 2. Ein Einfluß eines elektrischen Feldes auf die Polarisation des abklingenden Leuchtens wird nur dann durch die verwendeten Meßmethoden feststellbar werden, wenn das polarisierte Leuchten eine größere Strecke in den Abklingraum hineinläuft. Daß diese Wegstrecken für die verschiedenen Beobachter recht verschieden sind, ist meines Erachtens durch die depolarisierenden Einflüsse der „Umwelt“ (hauptsächlich Restgase) bedingt. Da diese depolarisierenden Einflüsse mit der jeweils benutzten Apparatur sich ändern, werden auch die Wegstrecken und die Absolutwerte der Polarisation sich ändern[1]). In den depolarisierenden Einflüssen ganz geringer Fremdgasbeimischungen auf die leuchtenden Atome glaube ich die „Fehlerquelle unbekannter Art“ suchen zu müssen.

Zu Abschn. 3. Hier muß die irrtümliche Auffassung der Herren Verfasser richtiggestellt werden, als ob für das elektrische Feld $E = 0$ (Fig. 10a, Taf. XV)[2]) eine Drehung der Polarisationsebene statthätte.

Die mit dem Abklingweg kontinuierlich sich ändernde Streifenverlagerung in dieser Aufnahme ist durch einen „parallaktischen Fehler“ der von mir verwendeten Versuchsanordnung verursacht. (Fig. 6, S. 520). Der Spalt S, der Doppelkeil B und die Marke liegen nicht immer in ein und derselben Ebene, daher bewirkt eine Verschiebung des Spaltes S längs B eine Verlagerung der Interferenzstreifen in bezug zur Marke. Nun muß der Spalt S längs B verschoben werden, um verschiedene Teile des abklingenden Kanalstrahls auf ihren Polarisationszustand untersuchen zu können. Die Streifenlage für $E = 0$ ist gleichsam die Nullpunktskurve, auf die die Streifenverschiebungen bei elektrischem Querfeld $E > 0$ bezogen werden müssen[1]).

Den Polarisationszustand des Kanalstrahllichtes kann man sich durch folgenden Modellversuch gut veranschaulichen. Im Kanalstrahl ist eine polarisierte Intensität einer unpolarisierten Intensität überlagert. Man stellt sich einen künstlichen Kanalstrahl durch eine Kerrzellenanordnung her, in deren Strahlengang man unpolarisiertes Licht hineinreflektiert. Dieses gesamte Licht fällt auf die Anordnung in Fig. 6.

Fall $E = 0$. Man verstärkt die Intensität des unpolarisierten Lichtes bei konstanter Spannung an der Kerrzelle. Die Interferenzstreifen bleiben in ihrer Lage erhalten, sie werden nur unschärfer. Der Kanalstrahl ohne elektrisches Feld zeigt dieselbe Erscheinung für verschiedenen Abklingweg. (Warum die benutzte Versuchsanordnung Streifenverlagerung gab, ist oben ausgeführt: Aufnahmen mit sehr verwaschenen Streifen eigneten sich nicht zur Reproduktion[2]). Verschiebt man bei künstlichem Kanalstrahl den Spalt S, so tritt eine Streifenverlagerung in gleicher Weise wie in der reproduzierten Aufnahme ein.)

Fall $E > 0$. Man verstärkt die Intensität des unpolarisierten Lichtes und ändert gleichzeitig die Spannung an der Kerrzelle. Die Interferenzstreifen werden verwaschener und verschieben sich entsprechend der verschiedenen Elliptizität des polarisierten Lichtes (nicht Drehung der Polarisationsebene). Der Kanalstrahl im elektrischen Feld zeigt dasselbe Verhalten, die Änderung des Polarisationsverhältnisses im Feld hat als Ursache Änderung der Elliptizität des Lichtvektors. Eine Erklärung der Erscheinung ist daher an das Verhalten eines anharmonischen Oszillators im elektrischen Feld anzuschließen[3]), nicht etwa an eine Präzessionsbewegung des Leuchtelektrons, was einer Drehung der Polarisationsebene entspräche.

1) Ann. d. Phys. **85**, 515, 1928.
2) Ann. d. Phys. **85**, 516, 1928, Abschn. c u. d.

1) Wäre die Anordnung so, daß Spalt S, Babinet B und Marke gleichzeitig parallel bewegt werden (etwa mit ein und demselben Schiebereiter), dann würde diese Reduktion wegfallen.
2) Die Reproduktionen in Tafel XV a. a. O. sind durch Kopieren des Originals auf Filmstreifen, Übereinanderlegen der Filmstreifen und Wiederkopieren durch sie hindurch hergestellt.
3) a. a. O., S. 524.

Weitere Klärung der von K. Hertel und mir gefundenen Schwankungen des Polarisationsverhältnisses längs des Abklingwegs können nur fortgesetzte Versuche mit möglichst verschiedenartigen Apparaturen bringen[1]).

Zu Abschn. 4. In Verfolg meiner Untersuchungen zur Lichtemission der Atome hatte ich meine erste Untersuchung[2]) zur Polarisation des Kanalstrahllichtes an abklingenden Kanalstrahlen von Wasserstoff, Helium und Lithium unternommen, um Vergleichswerte des Polarisationsverhältnisses für die Linien der einfachsten Elemente zu erhalten. Die Aufgabe konnte, wie sich später zeigte[3]), aus Beobachtung der Polarisation unmittelbar am Kanalende nicht gelöst werden. Daher habe ich andere Versuchsbedingungen gewählt, mit denen die Parallelität der Polarisation und Depolarisation des Kanalstrahllichtes mit entsprechenden Erscheinungen der Resonanzfluoreszenz aufgezeigt werden konnte. Bei meiner ersten Untersuchung ist die Apparatpolarisation[4]) entsprechend der wiedergegebenen Schwärzungskurve korrigiert, wobei natürlich die Schwärzungen in Intensitäten ausgewertet wurden. Für das grüne Gebiet standen mir andere Aufnahmen zur Verfügung.

Im einzelnen sind die Korrekturen wegen Apparatpolarisation in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Es gilt die Beziehung

$$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w = \frac{\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_s}{\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_o}$$

w = wahre, s = scheinbare Polarisation, o = Apparatpolarisation.

λ	$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$	$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_o$	λ	$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$	$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_o$
4713	1,11	0,94	5016	1,16	0,88
5876	1,35	0,84	5048	1,12	0,88
	1,33			1,22	
4472	1,45	1,01	4922	1,20	0,88
	1,35		4388	1,25	1,0
4026	1,28	1,42			
	1,33				

1) Erweiterungen und Fortsetzungen meiner Untersuchung werden andernorts erscheinen.
2) Ann. d. Phys. **81**, 615, 1926.
3) Ann. d. Phys. **84**, 94, 1927.
4) a. a. O. S. 619.

Göttingen, 28. Mai 1928.

(Eingegangen 28. Mai 1928.)

Bemerkung zu der Mitteilung von A. Weißberger: Über Dipolmomente symmetrischer Verbindungen und Cis-Trans-Isomerie an „einfachen" Bindungen[1]).

Von R. Engeland.

(Aus dem Biochemischen Institut der Mittelasiatischen Staatsuniversität.)

Als wesentlicher Inhalt der Ausführungen Weißbergers erscheint mir die Erörterung der Frage, ob die sogen. Restvalenzen in Verbindung mit den Hauptvalenzen Veranlassung geben können zum Auftreten von Cis-Trans-Isomerie. Diese Frage ist aber bereits durch Untersuchungen N. Schlesingers in unzweideutiger Weise in positivem Sinne entschieden[2]). Er konnte nämlich den Nachweis bringen, daß gewisse Bis-α-Iminosäuren zwei verschiedene Kupfersalze bilden, die in Farbe, Löslichkeit usw. sehr voneinander abweichen. Die beiden Modifikationen ließen sich durch einfache Manipulationen ineinander wechselseitig überführen und konnten auf Grund analogen Verhaltens der niederen bzw. höheren Homologen der Cis- bzw. Trans-Reihe zugeordnet werden.

Die hier in Erscheinung tretenden Restvalenzen entbehren natürlich jedes hypothetischen Charakters, da sie durch die hinlänglich bekannte Affinität des positiv substituierten Ammoniaks zu dem Cu-Atom gegeben sind.

Auch die große Verschiedenheit im physikalischen Verhalten der *Cu*-Salze der racemischen und der optisch aktiven α-Aminosäuren ist jedenfalls unmittelbar durch Cis-Trans-Isomerie bedingt, welche natürlich ihrerseits verursacht wird durch die sterische Verschiedenheit. Der endgültige Beweis für die Richtigkeit dieser Erklärung scheint mir dadurch erbracht zu sein, daß es gelang, auch von dem ersten Glied der Reihe der α-Aminosäuren, der α-Aminoessigsäure, welche natürlich keine optischen Antipoden bilden kann, zwei verschiedene *Cu*-Salze herzustellen, deren eines in Farbe und durch den Mangel von Kristallwasser dem *Cu*-Salz des optisch aktiven höheren Homologen entspricht, während die andere, längst bekannte Modifikation in allen ihren Eigenschaften dem *Cu*-Salz der Racemform seines höheren Homologen analog ist. Merkwürdigerweise konnte die neue Modifikation dieses *Cu*-Salzes nur aus natürlichem Glykokoll hergestellt werden, d. h. solchem, welches durch Hydrolyse von Eiweißstoffen gewonnen war[3]).

1) Physik. Zeitschr. **29**, 272, 1928.
2) Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. Bd. **58**, S. 1877.
3) Erscheint demnächst (Biochem. Journ.).

(Eingegangen 12. Juni 1928.)

Experimentelles zur Dispersion der Leitfähigkeit.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von H. Sack.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) haben P. Debye und H. Falkenhagen gezeigt, daß bei starken Elektrolyten eine Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Frequenz des zur Messung benutzten Stromes zu erwarten ist. Die Theorie verlangt ein Anwachsen der Leitfähigkeit mit wachsender Frequenz und gibt, wenigstens für genügend verdünnte Lösungen, den Wert dieser Änderung. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, eine Methode zu beschreiben, die es gestattet, Leitfähigkeiten bei genügend hohen Frequenzen mit einiger Genauigkeit zu messen und einige damit erhaltene, allerdings sehr vorläufige, Resultate zu geben. Meinem Wissen nach existieren noch keine brauchbaren Messungen auf diesem Gebiete. Ein Anzeichen für einen solchen Frequenzeffekt hat M. Wien[2]) gefunden. Ferner bemerken H. Hellmann und H. Zahn[3]), (Seite 207 ihrer Arbeit), daß ihre Methode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten gutleitender Flüssigkeiten auch zu solchen Messungen geeignet wäre, daß sie aber keine Änderung gefunden hätten. Aus dieser kleinen Notiz geht aber nicht hervor, wie genau sie solche Änderungen hätten feststellen können[4]).

Die hier verwandte Methode beruht auf folgender Überlegung: Haben wir einen Resonanzkreis, bestehend aus Selbstinduktion und Kapazität mit parallel geschaltetem Widerstande (also z. B. einen Kondensator mit leitender Flüssigkeit), so ist die Stromstärke im Falle der Resonanz von der Größe des Widerstandes abhängig. Ist $\frac{1}{\omega^2 C^2 W^2} \ll 1$, wobei ω die Kreisfrequenz, C die Kapazität, W der Widerstand (in unserer Anordnung war $\frac{1}{\omega^2 C^2 W^2} < \frac{1}{500}$), so entspricht einer prozentualen Verminderung des Widerstandes eine gleich große prozentuale des Stromes. Es ist also möglich, aus der Resonanz-Stromstärke auf den Widerstand zu schließen.

Die experimentelle Ausführung ist die folgende: Ein Holborn-Generator (6—60 m Wellenlänge, Intensität auf 1 $^0/_{00}$ konstant) induziert auf einen schwach gekoppelten, möglichst verlustfreien Resonanzkreis, bestehend aus Selbstinduktion und Drehkondensator. Parallel dem Kondensator kann eine Leitfähigkeitszelle geschaltet werden. Der Strom im Resonanzkreis wird in einem enggekoppelten aperiodischen Kreis mit Kristalldetektor und Spiegelgalvanometer gemessen. Vorläufig wurden nur verschiedene Lösungen miteinander verglichen; die Methode läßt aber auch einen Vergleich von Lösungen mit einem festen Widerstande zu. Zwei Zellen, beide mit verstellbaren Elektroden, werden mit den zu untersuchenden Lösungen gefüllt und in einer Wheatstoneschen Brücke auf Widerstandsgleichheit eingestellt. Nun wird zuerst die eine Zelle in den Resonanzkreis geschaltet und der Resonanzstrom gemessen, dann die andere und nun Drehkondensator und Elektrodenabstand der Zelle so geändert, daß der gleiche Resonanzstrom (und damit auch die gleiche Resonanzkurve) resultiert. Das bedeutet, daß nun sowohl Kapazität wie Widerstand genau gleich sind wie im Falle der ersten Zelle. Nun vergleicht man die Zellen wieder mit der Wheatstoneschen Brücke und kann so eine Änderung des Widerstandes genau messen. Diese Methode hat den Vorteil, daß man von Kapazitätsunterschieden zwischen den beiden Zellen und Verlegung des Resonanzpunktes infolge des Widerstandes (die Verlegung ist allerdings in unserem Falle sehr gering) ungestört ist. Prinzipiell kann man auf diese Art jede beliebig große Leitfähigkeit messen, indem man die Widerstandszelle immer kleiner macht, d. h. den Widerstand trotz der größeren Leitfähigkeit konstant läßt. Die Genauigkeit leidet darunter kaum. Der Widerstand wird am besten so gewählt, daß $\frac{1}{\omega^2 C^2 W^2}$ immer noch klein gegen 1, die Resonanzkurve aber schon einigermaßen flach ist, so daß sich der Resonanzstrom leicht sicher bestimmen läßt. Durch Füllen beider Zellen mit der gleichen Lösung und Vertauschen der verschiedenen Lösungen in den verschiedenen Zellen hat man eine gewisse Kontrolle der Methode. Auf die Ausführung im einzelnen und die auftretenden Schwierigkeiten soll erst in einer späteren Publikation eingegangen werden. Immerhin möchte ich hier die bis heute erhaltenen Resultate mitteilen.

Es wurden untersucht KCl, NaCl und $MgSO_4$ bei 18 m und 50 m Wellenlänge und verglichen mit dem Widerstand bei Hör-Frequenz (Wheatstonesche Brücke mit kleiner Hochfrequenzmaschine $v = 1200$ Hertz, Telephon und Kompensation der Kapazität). Das Wasser hatte eine Leitfähigkeit von etwa $3 \cdot 10^{-6}$. Die Zellen bestanden aus einer fest eingeschmolzenen und einer

1) P. Debye und H. Falkenhagen, Physik. Zeitschr. **29**, 401, 1928.
2) M. Wien, Ann. d. Phys. **83**, 840, 1927.
3) H. Hellmann und H. Zahn, Ann. d. Phys. **80**, 191, 1926.
4) Im Prinzip ist ihre Methode die gleiche wie die hier beschriebene. Nur glaube ich, daß unsere leichter genau auszuführen ist, während jene den Vorteil kürzerer Wellenlänge hat.

mit Mikrometerschraube verstellbaren Elektrode aus mit Platin-Mohr überzogenem Platin. Ein Thermostat konnte noch nicht verwendet werden; die Temperaturen der Lösungen wurden vor und nach jeder Messung bestimmt, und der Widerstand mittels der bekannten Temperaturkoeffizienten auf die mittlere Temperatur der Meßreihe reduziert.

I. $MgSO_4$ 0,0005 *n* gegen KCl 0,0004 *n* zeigt bei 18 m eine Erniedrigung des Widerstandes um 1 Proz. $\pm$ 0,5.

II. $MgSO_4$ 0,0005 *n* gegen KCl 0,0004 bei 50 m eine Erniedrigung um 0,8 Proz. $\pm$ 0,5.

III. KCl 0,0004 *n* gegen NaCl 0,0004 *n* zeigt innerhalb der Meßfelder keine Änderung.

Die großen Meßfehler kommen erstens von der Unsicherheit der Temperatur, zweitens von einer geringen Instabilität der Zellen, drittens von unkontrollierbaren äußeren Einflüssen auf den Resonanzkreis. Trotzdem darf man wohl von diesen Resultaten auf eine Erhöhung der Leitfähigkeit bei großen Frequenzen schließen. Die Größenordnung der gefundenen Änderung stimmt mit der theoretisch geforderten überein.

Mit der Verfeinerung der Apparatur, besonders mit dem Einbau in einen Thermostaten und der Erweiterung der Messungen auf eine größere Anzahl Salze, Konzentrationen und Wellenlängen ist bereits begonnen worden.

Herrn Prof. Debye möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an ihrem Fortgange herzlichst danken.

Leipzig, Physik. Institut, 10. Aug. 1928.

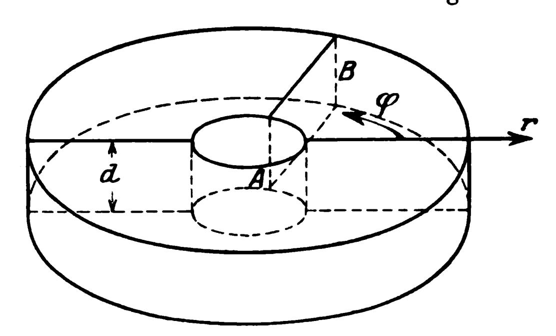
(Eingegangen 11. August 1928.)

Der Hall-Effekt in der Versuchsanordnung von Corbino[1]).

Von W. W. Sleator, z. Zt. in München.

Im Zusammenhang mit der neuen Arbeit von Sommerfeld (Zeitschr. f. Phys. **47**, 1, 1928) über die Elektronentheorie der Metalleitung dürfte es von Interesse sein, die Experimente von Corbino[2]) theoretisch zu untersuchen, in denen er eine radiale stromdurchflossene Scheibe der Wirkung eines zur Scheibe senkrechten magnetischen Feldes aussetzte. In solch einer Scheibe tritt eine Stromkomponente längs konzentrischer Kreise auf, deren Mittelpunkt in der Scheibenmitte liegt, d. h. in Richtung von Linien gleichen Potentials; den gesamten Strom kann man durch seine Induktionswirkung messen. Wir wollen uns die Frage stellen, ob bei dieser Anordnung ein anderer Wert für die Hallkonstante herauskommt als für die gewöhnliche Anordnung der rechteckigen Platte, einmal wenn wir die klassische und zweitens wenn wir die Fermische Statistik verwenden.

Adams (Phil. Mag. **27**, 224, 1914) integriert nach dem Vorgang von Corbino die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten und verwendet wie Drude Mittelwerte der Elektronengeschwin-



digkeit. Er findet für den Strom, der durch einen beliebigen radialen Querschnitt der Scheibe (z. B. *A B*, siehe Fig.) hindurch geht:

$$I_\varphi = -\frac{HeTI_r}{4\pi m}\log\frac{r_2}{r_1}, \tag{1}$$

wo I_r die radiale Stromstärke ist. T ist gleich l/v, wo l die mittlere freie Weglänge und v eine mittlere Geschwindigkeit; T bedeutet also die mittlere „freie Zeit" zwischen zwei Zusammenstößen. e ist die Ladung und m die Masse eines Elektrons. Für den spezifischen Widerstand findet er den Drudeschen Wert

$$\varrho = \frac{2m}{e^2TN}, \tag{2}$$

wo N die Zahl der Elektronen pro Volumeinheit vorstellt, die an der Leitung teilnehmen.

Gewöhnlich definiert man die Hallkonstante durch die Gleichung

$$\Phi_y = \frac{RHI_x}{d}. \tag{3}$$

Hier bedeuten Φ_y die Potentialdifferenz in der Querrichtung für eine rechteckige Platte, die in der Längsrichtung vom Strom I_x durchflossen wird, H das magnetische Feld, und d die Dicke der Platte. Wenn wir jetzt zur Hallspannung in der Scheibe übergehen, die wir als Integral längs eines Kreises vom Linienelement ds auffassen, so gilt:

$$\Phi_\varphi = -\int E_\varphi\,ds = -\int J_\varphi\,\varrho\,ds = -2\pi r J_\varphi\,\varrho. \tag{4}$$

1) Durch ein Versehen der Druckerei wurde dieser Aufsatz ohne Verfasserkorrektur bereits in der vorhergehenden Nummer abgedruckt.

2) Physik. Zeitschr. **12**, 561, 1911. Im Anschluß an theoretische Betrachtungen von Boltzmann für die kreisförmige Platte hat bereits von Ettingshausen diesbezügliche Versuche gemacht. Vgl. Boltzmann, Ges. Werke III, Abh. 76 und 77.

Definieren wir jetzt die Hallkonstante im Corbino-Effekt, analog zur Gleichung (3), also durch

$$\Phi_\varphi = \frac{RHI_r}{d}, \tag{5}$$

so ergibt sich

$$J_\varphi = -\frac{RHI_r}{2\pi r\varrho d}$$

und der Gesamtstrom wird

$$\left.\begin{aligned} I_\varphi &= \int_{r_1}^{r_2} J_\varphi \, d\sigma \\ &= -\frac{RHI_r}{2\pi\varrho}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} \\ &= \frac{-RHI_r}{2\pi\varrho}\log\frac{r_2}{r_1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir vergleichen diesen Wert mit dem Adamsschen Resultat (1) für I_φ, setzen ϱ ein nach Gleichung (2) und erhalten

$$R = \frac{1}{eN}. \tag{7}$$

Das ist der Wert der Hallkonstante, den man gewöhnlich für die rechteckige Platte angibt.

Prof. Sommerfeld findet für den Fall der Fermischen Geschwindigkeitsverteilung denselben Wert $\frac{1}{eN}$, während die Maxwellsche Verteilung nach Gans (Ann. d. Phys. **20**, 293, 1906) den Wert $\frac{3\pi}{8}\frac{1}{eN}$ ergab. Die zwei letzten Resultate leitet man aus den Gleichungen (69) in Sommerfelds Arbeit ab; sie lauten

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \frac{4\pi}{3}\frac{e^2 m^2 G}{h^3}(F_x K_2 + \mu F_y K_1) \\ J_y &= \frac{4\pi}{3}\frac{e^2 m^2 G}{h^3}(F_y K_2 - \mu F_x K_1). \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Hierbei stellen F_x und F_y die elektrischen Feldstärken in der rechteckigen Platte dar; in μ kommt das magnetische Feld vor. K_1 und K_2 sind Integrale, welche die Geschwindigkeitsverteilung enthalten.

Eine direkte Transformation auf Polarkoordinaten r und φ in den Gleichungen (69) gibt unmittelbar die entsprechenden Beziehungen für den Corbino-Effekt, wenn man die Komponenten des Feldes nach r und φ mit F_r und F_φ bezeichnet und in den entstehenden Gleichungen F_φ gleich Null setzt. Wir haben, mit der Abkürzung $\beta = \frac{4\pi e^2 m^2 G}{3h^3}$,

$$\begin{aligned} J_x &= J_r\cos\varphi - J_\varphi\sin\varphi \\ &= \beta\{(F_r\cos\varphi - F_\varphi\sin\varphi)K_2 \\ &\quad + \mu(F_r\sin\varphi + F_\varphi\cos\varphi)K_1\} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_r\sin\varphi - J_\varphi\cos\varphi \\ &= \beta\{(F_r\sin\varphi + F_\varphi\cos\varphi)K_2 \\ &\quad - \mu(F_r\cos\varphi - F_\varphi\sin\varphi)K_1\} \end{aligned} \tag{9}$$

oder, weil ja F_φ gleich Null sein soll:

$$J_x = \beta\{F_r K_2\cos\varphi + \mu F_r K_1\sin\varphi\} \tag{10}$$

$$J_y = \beta\{F_r K_2\sin\varphi - \mu F_r K_1\cos\varphi\}. \tag{11}$$

Deshalb, durch Addieren oder Subtrahieren

$$J_r = \beta F_r K_2 \tag{12}$$

$$J_\varphi = -\beta F_r \mu K_1. \tag{13}$$

Also:

$$\frac{J_\varphi}{J_r} = -\mu\frac{K_1}{K_2}. \tag{14}$$

Definieren wir anderseits ein elektrisches Gegenfeld, dessen negatives Integral die Hallspannung geben soll, nämlich, für σ = Leitfähigkeit,

$$F'_\varphi = -\frac{J_\varphi}{\sigma}; \tag{15}$$

dann gilt

$$F'_\varphi = +J_r\frac{\mu}{\sigma}\frac{K_1}{K_2}, \tag{16}$$

und das stimmt mit Gleichung (70) bei Sommerfeld überein. Die Gleichung, die für den Fall der Kreisscheibe zur Bestimmung der Hallkonstante führt, ist also genau dieselbe wie für die rechteckige Platte.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Sommerfeld und Herrn Dr. Bechert für Anleitung und Förderung beim Studium dieser Frage meinen besten Dank aussprechen.

(Eingegangen 6. Juli 1928.)

BESPRECHUNGEN.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. III. Band. Physikalische, chemische und technische Thermodynamik (einschließlich Wärmeleitung) 1. Hälfte. Herausgegeben von A. Eucken. Gr. 8⁰. XXVIII u. 1185 S. Mit 575 Fig. 11. Auflage. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. A.-G. 1926. Geh. M. 63.—, geb. M. 68.—.

Ebenso wie die übrigen Bände der Neuauflage des Müller-Pouilletschen Lehrbuches der Physik

hat auch der Band über die Wärmelehre eine vollständige Neubearbeitung erfahren. Ein besonders glücklicher Griff war es dabei, die Behandlung der kinetischen Theorie der Wärme, welche der zweiten von Herzfeld verfaßten Bandhälfte zugewiesen wurde, von der Thermodynamik abzutrennen. Dabei verbleiben der hier zu besprechenden ersten Bandhälfte die Lehre von den Gleichgewichtszuständen und die phänomenologische Behandlung der irreversiblen Vorgänge. Gegenüber den Vorteilen, welche sich aus dieser Teilung in methodischer Hinsicht ergeben, fällt es nicht ins Gewicht, daß in der zweiten Bandhälfte einige thermodynamische Dinge wiederholt, und in der ersten Bandhälfte einige kinetische Vorstellungen angedeutet werden mußten, die in der zweiten Hälfte ihre Ausführung finden. Bei einem so umfangreichen Werke ist es nur von Vorteil, wenn die einzelnen Teile in sich möglichst abgeschlossen und verständlich sind.

Entsprechend der Tendenz des Müller-Pouilletschen Werkes, nicht nur die reine Physik, sondern auch die angewandte Physik zu behandeln, enthält die vorliegende Bandhälfte außer den rein physikalischen (bzw. physikalisch-chemischen) Abschnitten auch einige Kapitel über wärmetechnische Vorgänge, sowie einen Anhang über Physiologie der Wärme (von U. Ebbeke).

Die Einteilung des rein physikalischen Teils (an dem als Verfasser A. Eucken, A. Magnus und R. Suhrmann beteiligt sind) gliedert sich einmal nach dem Prinzip, die experimentellen Grundlagen und Methoden der theoretischen Behandlung voranzustellen; andererseits ist die Einteilung nach der Art der zu betrachtenden Systeme vorgenommen. Das Werk beginnt mit einem allgemeinen Teil, welcher in den zwei ersten Kapiteln die experimentellen Grundlagen und Methoden der Thermometrie und Kalorimetrie behandelt (Verfasser R. Suhrmann bzw. A. Eucken); die folgenden Kapitel sind den Grundgesetzen der Wärmelehre und ihrer historischen Entwicklung gewidmet (Verfasser A. Eucken). Hier verdient die vortreffliche Darstellung des zweiten Hauptsatzes, dessen Verständnis erfahrungsgemäß dem Anfänger besondere Schwierigkeiten bereitet, besondere Erwähnung. In diesem Abschnitt findet auch der Nernstsche Wärmesatz seine Behandlung. Dabei werden die Prämissen, aus denen er sich ohne Zuhilfenahme molekularer (quantentheoretischer) Theorien ableiten läßt, klar herausgearbeitet. Was die experimentelle Bestätigung dieses Satzes anbetrifft, wird der Standpunkt eingenommen, daß auf Grund des bis jetzt bekannten Materials das Auftreten von Abweichungen als nahezu erwiesen angesehen werden könne; dementsprechend wird dieser Satz nicht als gleichwertiger Hauptsatz den beiden klassischen Hauptsätzen der Thermodynamik an die Seite gestellt.

Dem allgemeinen Teil folgt ein spezieller Teil, eingeteilt in die beiden Hauptabschnitte: Systeme gleichförmiger Temperatur und Systeme ungleichförmiger Temperatur. Der erstere dieser Abschnitte gliedert sich in die Behandlung von Einkomponentensystemen (A = homogene, B = heterogene Einkomponentensysteme) und von Mehrkomponentensystemen (C = homogene, D = heterogene Mehrkomponentensysteme). Diese Einteilung entspringt also wesentlich systematischen Gesichtspunkten und hat den Vorteil einer logischen Gliederung des Stoffes. Allerdings bringt sie es mit sich, daß einige von anderen Standpunkten aus zusammengehörige Erscheinungsgebiete an verschiedenen Stellen behandelt werden mußten. So findet man z. B. die Besprechung der Grenzflächenerscheinungen einmal bei den Einkomponenten- und ein anderes Mal bei den Mehrkomponentensystemen. Entsprechendes gilt für die Behandlung der Geschwindigkeitsphänomene. Hier wäre auch eine Einteilung nach Abschnitten: Gleichgewichte ohne Rücksicht auf Oberflächenerscheinungen. Gleichgewichte mit Rücksicht auf Oberflächenerscheinungen; Geschwindigkeitsphänomene, und eine Unterteilung dieser Abschnitte nach den vorliegenden Systemen möglich gewesen. Eine solche Einteilung wäre vom systematischen Standpunkte aus noch befriedigender. Sie hätte aber andererseits auch Nachteile mit sich gebracht, so daß die getroffene Anordnung, welche die Systematik nicht so weit treibt, wohl doch den Vorzug verdient.

Aus diesem Teil möchte der Referent das Kapitel über die Grenzflächenerscheinungen bei Mehrkomponentensystemen (Oberflächenspannung von Lösungen, Adsorption) als in sachlicher Weise und in der Darstellung besonders gelungen hervorheben. Hingegen dürfte das Verständnis der Darstellung über Zustandsdiagramme — gegen die sachlich nichts eingewendet werden soll — einem Leser, der noch gar nichts von diesen Dingen weiß, stellenweise Schwierigkeiten bieten.

Der zweite Abschnitt des speziellen Teils (Systeme mit ungleichförmiger Temperatur) zerfällt in drei Unterabschnitte: A. Thermische und kalorische Vorgänge ohne Berücksichtigung einer äußeren Arbeitsleistung (Gleichgewicht und chemische Reaktionsgeschwindigkeit [A. Eucken); Wärmeleitung [M. Jakob]). B. Wärmetechnische Vorgänge mit Arbeitsabgabe (G. Zerkowitz) (Allgemeine thermodynamische Grundlagen der Wärmekraftmaschinen; Wärmekraftmaschinen mit äußerer Verbrennung; Wärmekraftmaschinen mit innerer Verbrennung). C. Wärmetechnische Vorgänge mit Arbeitsaufwand (Verdichtung von Gasen [Kompressoren]) (G. Zerkowitz); Wärmetransport unter Arbeitsaufwand; Zerlegung von Gasgemischen unter Arbeitsaufwand (F. Pollitzer).

Das Werk, das eine Mittelstellung zwischen einem Lehrbuch und einem Handbuch einnimmt, stellt alles in allem eine sehr gut gelungene moderne Darstellung der phänomenologischen Wärmelehre dar, die sich ganz besonders durch ihre Einheitlichkeit auszeichnet; für diese wird man wohl vor allem dem Herausgeber Dank wissen müssen. Dr. E. Hückel.

Jo Engl, Der tönende Film. (Sammlung Vieweg Heft 89.) 8⁰. 98 S. Mit 59 Figuren. I. Auflage. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1927. Geh. M. 6.50.

Wenn der tönende Film nach dem Tri-Ergon (drei Bearbeiter: Jo Engl, H. Vogt und J. Massolle) -Verfahren bisher keine größere Verbreitung in den Filmtheatern gefunden hat, so liegt der Grund wohl hauptsächlich in pekuniären Verhältnissen.

Denn jeder, der einer Probevorführung beigewohnt hat, wird zugeben, daß das Verfahren bereits einen hohen Grad von Vollkommenheit erreicht hat und in vielen Fällen zweifellos eine wesentliche Belebung des Films bieten kann.

Es ist nun sehr erfreulich, daß sich der Verf. bereitgefunden hat, eine zusammenfassende Darstellung der allmählichen Entwicklung des Verfahrens zu geben.

Gerade den Umstand finde ich so bestechend an dem vorliegenden Buche, daß man erkennt, wie eigentlich alle physikalischen Grundlagen fertig vorlagen, welch außergewöhnlicher Arbeit es aber be-

durfte um diese Grundlagen so durchzuarbeiten, daß sie ein brauchbares Resultat lieferten. Sehr leicht kann man sich beispielsweise vorstellen, wie mit Hilfe eines Mikrophons bzw. Kathodophons die Sprachfrequenzen in elektrische Spannungsfrequenzen umgesetzt werden und diese einen Glimmlichtoszillographen steuern, dessen Lichtschwankungen veränderliche Schwärzungen auf dem Filmband hervorrufen.

Welche Schwierigkeiten aber überwunden werden mußten, bis die Intensität der Schwärzung der Schallintensität entsprach, darüber kann man sich nicht so ohne weiteres eine richtige Vorstellung machen.

Und gerade von derartigen Schwierigkeiten und ihrer Überwindung gibt uns das Buch eine ausführliche Darstellung. Außer den Entladungscharakteristiken des Kathodophons und denjenigen von Glimmentladungsröhren finden wir daher auch Kurven für die Abhängigkeit zwischen Positivschwärzung und Glimmlampenstrom und eine eingehende Behandlung des Schwärzungsgesetzes von Schwarzschildt mit Anwendung auf den vorliegenden Fall.

Ein Verzeichnis der wichtigsten Kapitel möge dem Leser einen Überblick über den Inhalt geben: Das Mikrophon, die Verstärkungseinrichtung, die Glimmlampe, die optische Anordnung, der Entwicklungs- und Kopierprozeß, die Wiedergabe bis zum Lautsprecher, die Lautsprecher und die Schallwiedergabe. Recht interessant ist auch das Kapitel über die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der Erfindung.

Die Darstellung ist klar und spannend, das beigegebene Bildmaterial gut gewählt. Das Buch scheint mir für Fachkundige und Fernerstehende gleich interessant. J. Herweg.

C. F. Gauß' Werke. Band XI, 1. Abteilung: Nachträge zur Physik, Chronologie, und Astronomie. Herausg. von der Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen. 4°. 518 S. In Komm. bei J. Springer, Berlin. 1927.

Der vorliegende Band XI, 1 der Gaußschen Werke bringt die Nachträge zum V., VI. und VII. Bande. In seinem physikalischen Teil, den Prof. Clemens Schäfer (Breslau) bearbeitet und kommentiert hat, sind aus den amtlichen Berichten, dem Nachlaß und den Briefwechseln unter den Überschriften: Mechanik, Maß und Messen — Magnetismus und Galvanismus — Dioptrik — Vermischtes zur Physik — Gauß' Aufzeichnungen und Zusammenfassungen mehr vorläufigen Charakters, sowie Aperçus und einzelne Bemerkungen vereinigt, die im Gegensatz zu den großen Abhandlungen und Aufsätzen, deren vollkommene Form und streng sachlicher Inhalt so wenig von dem Entwicklungsgange Gaußischer Ideen verrät, dem aufmerksamen Leser einen erwünschten Einblick in die Werkstatt Gaußischen Denkens und Arbeitens gewähren.

Der „Bericht über die Art, wie die Hannoverschen Normalpfunde dargestellt sind", zeigt den minutiös sorgfältigen Experimentator, dem zwei Platinstücke nicht „einerlei", sondern nur mehr „gleichnamiges Metall" bedeuten, und dem die Aufgabe zum Ausgangspunkt für wesentliche Verbesserungen der Wägemethoden wird.

Auf S. 16 und 18 begegnet man einer außerordentlich umfassenden Formulierung des d'Alembertschen Prinzips, dem (S. 22) sich Bemerkungen über das Prinzip des kleinsten Zwanges anschließen, samt einem Hinweis auf dessen Zusammenhang mit dem Satz von den Fehlerquadraten.

Es folgen Erläuterungen zum Foucaultschen Pendelversuch und Angaben über seine Versuche, eine einwandfreie Aufhängung für das Pendel zu finden u. a.

In der Begründung für „das Bedürfnis eines besonderen Lokals für magnetische Beobachtungen" liest man den für Gauß' Einstellung und Wünsche so überaus charakteristischen Satz, „daß die Scheidewand zwischen eigentlich sogenannter Physik und angewandter Mathematik zu sinken und die tiefer eingreifende Bearbeitung dem Mathematiker anheimzufallen anfängt". — Es folgen dann Ausführungen über zahlreiche magnetische Beobachtungsmethoden und über die Aufgaben des magnetischen Vereins, bis schließlich „die theoretischen Eroberungen im Gebiet des Elektromagnetismus" (Erdinduktor, Telegraph) ihm neue „Satisfaktion geben".

In der Dioptrik nehmen eingehende Linsenberechnungen einen größeren Raum ein, sowie Urteile über Plößls dialytisches Fernrohr.

Im Schlußkapitel ist es höchst überraschend zu erfahren, daß Gauß Versuche über das Leitvermögen pulverisierter Kohle zwischen zwei Metallplatten angestellt hat. Der fragmentarische Aufsatz aus dem Nachlaß über die „Zurückführung und Wechselwirkungen zwischen galvanischen Strömen und Magneten auf absolute Maße" enthält im ersten Abschnitt die Theorie der Tangentenbussole.

Die mit großer Akribie behandelten Texte — deren Auswahl von sicherem Takt und souveräner Beherrschung des gesamten Materials zeugt — verbinden sich mit den eindringenden Kommentaren zu einem organischen Ganzen, das die zusammenhängende Lektüre zu einem feinen Genuß macht und von dem, vom Herausgeber für den zweiten Teil des Bandes versprochenen Essay über Gauß als Physiker Abschließendes erwarten läßt.

Die Abteilung „Chronologie", herausgegeben von Prof. Löwy (Freiburg), enthält im wesentlichen Ostertermin-Berechnungen aus Gauß' Frühzeit.

Der dritte Teil, „Astronomie" (herausgeg. von Prof. Brendel (Frankfurt a. M.) bringt Bahnbestimmungsmethoden, Planeten- und Fixsternbeobachtungen, Beiträge zur Theorie der astronomischen Instrumente und Apexberechnungen. Paul Hahn.

K. Gaß, Methodik des Physikunterrichts an höheren Lehranstalten. (Handbuch des Unterrichts an höheren Schulen, hrsg. v. Roller-Weinstock-Zühlke, Band 9.) Gr. 8°. 214 S. Frankfurt (Main), M. Diesterweg. 1928. Geb. M. 6.20.

Der Physikunterricht an höheren Schulen hat dank der Kleinschen „Reformbewegung" in den letzten Jahrzehnten einen bemerkenswerten Aufschwung genommen, während die neue preußische Schulreform von vielen Seiten als ein Rückschlag in dieser Entwicklung bezeichnet wird, da sie das den naturwissenschaftlichen Fächern zugebilligte Stundenmaß stark beschnitten hat. Daher ist das vorliegende Buch besonders begrüßenswert, weil es als Auseinandersetzung mit der neuen Lehrordnung geschrieben ist und auf Grund eingehender Erfahrungen zeigt, daß für verständnisvolle und arbeitsfreudige Lehrer aus den neuen Bestimmungen außerordentlich viel herauszuholen ist. Ausführliche Behandlung finden: Freie Arbeitsgemeinschaften, Jahresarbeiten, Reifeprüfung, „abgerundete Teilgebiete", „Querverbindungen" zu andern Fächern. Doch sind auch Fragen die nicht unmittelbar mit der preußischen Schulreform zusammenhängen, wie Lehrerausbildung und -weiterbildung, Sammlungsverwaltung, Schülerübungen u. a. besprochen.

Sehr sympathisch berührt das Hauptbekenntnis des Verfassers, daß nämlich Physik sachlich und

gründlich als Physik zu betreiben ist, nicht als angewandte Mathematik — wie sich nach der „Reformbewegung" von selbst versteht — noch aber auch als Lehre von der Technik oder als mißverstandene „Kulturgeschichte" oder sonst etwas. Besonders interessiert die Stellung zur Technik: im Unterricht wird sie als hervorragend geeignet erachtet als Ausgangspunkt physikalischer Probleme, bei vielen Gelegenheiten können Aufgaben, Methoden und Leistungen der Technik ins rechte Licht gesetzt werden, aber technische Einzelheiten wandeln sich, physikalische Gedanken haben längeren Bestand und müssen darum den Unterricht bestimmen. Im Sinn der Reformbewegung wird die besondere Bedeutung des Experiments unterstrichen, gleichzeitig aber scharf betont, daß es sich dabei weder um gedankenloses Vorführen blendender Schauversuche noch um einen geistlosen Meßdrill handeln darf, sondern daß alles in den Dienst der Förderung physikalischen Denkens zu stellen ist. Auch die philosophische Aufgabe des Physikunterrichtes wird umrissen. Methodisch beachtlich ist die Auffassung, daß der historische Weg physikalischen Erkennens — der ja sehr häufig als der didaktisch einzig richtige bezeichnet wird — gar oft sich mit Vorteil durch eine einfachere Gedankenreihe ersetzen läßt. (Merkwürdig erscheint es allerdings in diesem Zusammenhange, daß der Verfasser sich trotz Mie und Pohl nicht entschließen kann, die absoluten elektrischen Einheiten völlig über Bord zu werfen oder doch nur historisch zu würdigen.)

Das Buch verrät außer einer tiefen Liebe zum Gegenstand ein hervorragendes Verständnis für die Psychologie der Jugend sowohl als für die Forderungen unserer Zeit. Darum wird jeder, dem die Zukunft unseres Volkes und unserer Wissenschaft am Herzen liegt, sich mit Wärme dem Leitgedanken des Verfassers anschließen, daß es nämlich die vornehmste Aufgabe des Lehrers sei, die Eigenkräfte des Schülers zu entbinden und zu entwickeln, und darum sei das Buch all denen, die in der Physik an dieser Aufgabe mitarbeiten, nachdrücklich empfohlen.

E. Nies.

Tagesereignisse.

Strömungsmesser-Ausschuß beim Verein deutscher Ingenieure. Um die Genauigkeit bei der Messung von Durchflußmengen flüssiger, dampf- oder gasförmiger Stoffe mehr als bisher den steigenden Anforderungen des technischen Betriebes anzupassen und für eine Vergleichbarkeit der Meßwerte die bestgeeigneten Unterlagen zu schaffen, ist in diesem Monat beim Verein deutscher Ingenieure ein Strömungsmesser-Ausschuß (Geschäftstelle: Berlin NW 7, Ingenieurhaus) eingesetzt worden. Dieser umgrenzte in seiner Grundstücksitzung in München sein Arbeitsgebiet auf die Messung strömender Medien (Gase, Dämpfe und tropfbare Flüssigkeiten) mit Stauscheiben, Düsen und Schwimmermessern. Als letztes erreichbares Ziel wird die Schaffung einer für alle Medien gleich verwendbaren Mündungsform angestrebt. Zu diesem Zweck ist zunächst die einheitliche Festlegung der Begriffsbestimmung, die Aufstellung der grundlegenden Gleichungen, sowie die Sammlung und der Ausbau des Versuchsmaterials vorgesehen. Eine Anregung, Strömungsmesser als eichfähige Instrumente im öffentlichen Gebrauch zuzulassen, wurde bereits seitens des Strömungsmesser-Ausschusses an die Physikalisch-Technische Reichsanstalt weitergegeben.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Köln Dr. H. Lassen für technische Physik, an der Universität Jena Dr. Karl Wagner (bisher in München) für Chemie.

Ernannt: Der Professor Dr. Gerald Wendt zum Hilfspräsidenten und Professor für Physik und Chemie am Pennsylvania State College, der Assistant-Professor für Chemie an der Universität Manitoba Is. John W. Shipley zum Präsidenten des Canadian Institut of Chemistry.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Würzburg Dr. Hans Grimm (unter Ernennung zum Honorarprofessor daselbst, zwecks Eintritt in das Forschungslaboratorium Oppau der I. G. Farbenindustrie in Ludwigshafen a. Rhein), der ord. Professor der Physik an der Universität Würzburg Dr. Ernst Wagner.

In den Ruhestand: Der a. o. Professor der Astronomie an der Universität Leipzig Dr. Friedrich Hayn.

Berichtigung zu Seite 320: Professor Robert A. Millikan bleibt weiter Director of the Norman Bridge Laboratory of Physics of the California Institute of Technology in Pasadena. (Die Notiz Dr. Milliken betrifft einen neuen Forscher.)

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye,** Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 18. Ausgegeben am 15. September 1928. **29. Jahrgang.**

Nr. 766. Printed in Germany.

INHALT:

Originalmitteilungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 18 | 15. September 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 20 am 10. Oktober 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den Einfluß der molekularen Anziehungskräfte auf die innere Reibung und Wärmeleitfähigkeit von Gasgemischen.

Von Hans Schmick.

In einer soeben an anderer Stelle erschienenen Arbeit[1]) berichten H. Grüss und der Verfasser über Messungen der Wärmeleitfähigkeit von Gasgemischen bei Atmosphärendruck und Temperaturen zwischen 20 und 80° C. Diese Versuche ergaben auffallende Abweichungen von der einfachen Mischungsregel. Daran anschließend wurden vom Verfasser die zwischen Dipolen und Quadrupolen in Gasgemischen wirkenden Anziehungskräfte und ihr Einfluß auf die gaskinetischen Stoßzahlen untersucht. Da das Ergebnis der Rechnung auch auf andere Vorgänge, z. B. die innere Reibung von Gasgemischen, übertragen werden kann, so sei der Gedankengang hier mitgeteilt.

§ 1.

Die wichtigsten Meßergebnisse der oben genannten Arbeit sind in den Fig. 1 und 2 dargestellt. Abszisse ist der Partialdruck des zu Luft (bzw. in einem Falle zu Kohlenoxyd) hinzugemischten Gases, als Ordinaten sind die Werte der Wärmeleitfähigkeit aufgetragen; der Luftwert wurde bei der jeweiligen Meßtemperatur jedesmal gleich Eins gesetzt.

Die Mischungscharakteristiken von Luft-Kohlenoxyd und Luft-Methan verlaufen geradlinig, sie folgen also der einfachen Mischungsregel, das ebenfalls geradlinige Beispiel Luft-Kohlensäure ist nicht eingezeichnet. Maxima der Wärmeleitfähigkeit sind vorhanden bei Luft-Ammoniak, Kohlenoxyd-Ammoniak, Luft-Wasserdampf und in einem Falle (65° C) bei Luft-Acetylen. Bemerkenswert ist der anfänglich langsamere Anstieg bei den Luft-Ammoniak-Kurven, es ist unwahrscheinlich, daß hier Versuchsfehler eine Rolle gespielt haben sollten. Die maximale Vergrößerung gegenüber den einfachen Mischungswerten beträgt für Luft-Ammoniak 7—8 Proz., für Kohlenoxyd-Ammoniak etwa 6 Proz., für Luft-Acetylen nur 2 Proz. Im Falle Luft-Wasserdampf war der genaue Wert der Leitfähigkeit des reinen Wasserdampfes nicht bekannt, da bei 80° C gemessen wurde, die Abweichung ist aber jedenfalls von derselben Größenordnung wie bei Luft-Ammoniak.

Um eine Erklärung für die Vergrößerung der Leitfähigkeit zu finden, muß man von der Wechsel-

1) H. Grüss und H. Schmick, Wiss. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern, Bd. VII, 1, 202, 1928.



wirkung verschiedenartiger Moleküle in dem Gasgemisch ausgehen. Setzt man voraus, daß die Moleküle harte elastische Kugeln sind, die aufeinander Anziehungskräfte ausüben, so hat

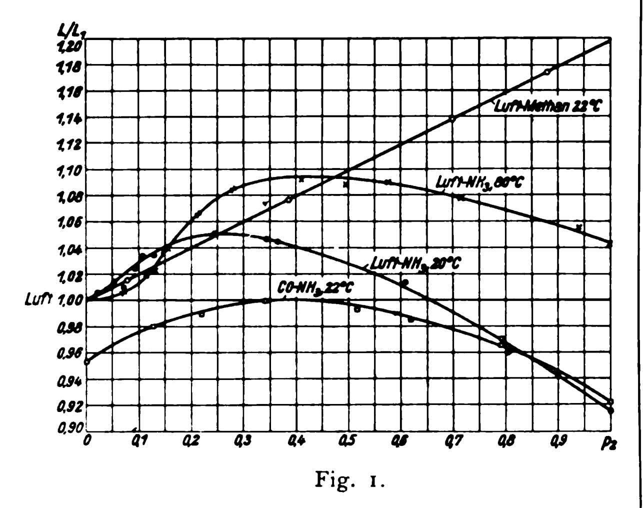


Fig. 1.

man im wesentlichen drei Größen zu unterscheiden, die bei den Zusammenstößen eine Rolle spielen: 1. die Masse, 2. den Durchmesser, 3. die gegenseitige potentielle Energie zweier Moleküle. Letztere ist zahlenmäßig z. B. durch die Sutherlandsche Kohäsionskonstante C gegeben.

Berechnet man nun aus der Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung den Moleküldurchmesser[1]), so ergibt sich für alle oben angeführten Gase nahezu der gleiche Wert. Ferner ist das Verhältnis der Molekulargewichte immer kleiner als 2 : 1, hinzu kommt, daß für

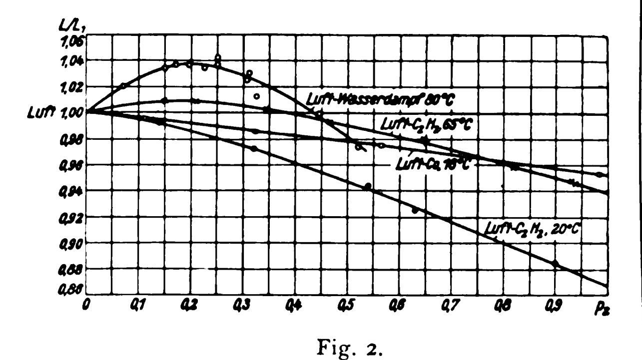


Fig. 2.

die beiden Gaspaare Luft-Methan und Luft-Ammoniak das Massenverhältnis fast genau das gleiche ist, obwohl hier gerade das zu erklärende unterschiedliche Verhalten vorliegt. Endlich lassen sich auch aus dem Größenverhältnis der Sutherlandschen Konstanten C zunächst keine Folgerungen ziehen.

1) Vgl. z. B. eine Tabelle in Dushman, Hochvakuum S. 29, deutsch bei Springer 1928.

Dagegen besteht ein prinzipieller Unterschied hinsichtlich des elektrischen Aufbaues, wenn man zwischen heteropolaren und homöopolaren Molekülen unterscheidet. Nach den neueren Vorstellungen[1]) werden die Anziehungskräfte auf die Wirkungen der elektrischen Ladungen zurückgeführt. Das Molekül ist im ganzen elektrisch neutral, die Ladungsverteilung ist die eines Dipols oder Quadrupols, oder sie stellt ein Gebilde noch höherer Symmetrie dar. Die Beispiele der Fig. 1 und 2 zeigen, daß die Erhöhung der Leitfähigkeit nur dann eintritt, wenn ein Dipolgas mit einem Quadrupolgas gemischt wird, während die Mischungen zweier Quadrupolgase keine Abweichungen zeigen. H_2O und NH_3 sind heteropolare Verbindungen, deren Dipolmoment zur Erklärung der Größe des Sutherlandschen C sowie des van der Waalsschen a ausreicht. Die Gase O_2, N_2, CO, CO_2 dagegen wirken wie Quadrupole, ihr Dipolmoment ist sehr klein oder Null. Auch die Kohlenwasserstoffe CH_4, C_2H_2 und C_2H_4 (vgl. unten) müssen der homöopolaren Gruppe zugerechnet werden. Bei H_2O und NH_3 ist die gemessene Größenordnung der Dipole 1 bis $2 \cdot 10^{-18}$ el. st. Einh. · cm, die Momente von CO und CO_2 sind etwa zehnmal kleiner[2]). Aus einer neuen Arbeit von H. A. Stuart[3]) geht übrigens hervor, daß die CO_2-Molekel wahrscheinlich völlig gestreckt ist, daß also das elektrische Moment der Kohlensäure exakt Null ist.

Wir werden nun die potentielle Energie beim Zusammentreffen eines Dipolmoleküls mit einem Quadrupolmolekül berechnen und daraus eine Abweichung vom einfachen Mischungsgesetz ableiten, die mit den Beobachtungen qualitativ übereinstimmt.

Es liegt nahe, die Ergebnisse der Messungen der inneren Reibung von Gasgemischen zum Vergleich heranzuziehen. Leider sind nur wenige Beispiele untersucht, bei denen das Verhältnis der Molekülmassen hinreichend klein ist. E. Thomsen[4]) untersuchte Äthylen-Ammoniak, Gilchrist[5]) trockene und feuchte Luft, ferner wurden untersucht[6]): Äthylen-Luft, Sauerstoff-

1) Vgl. Handb. d. Physik von Geiger u. Scheel, Bd. 22, Artikel Herzfeld, Größe und Bau der Moleküle.
2) Vgl. den zitierten Handbuchartikel, Tabelle XXI, S. 486.
3) H. A. Stuart, Zeitschr. f. Phys. **47**, 457, 1928.
4) E. Thomsen, Ann. d. Phys. **36**, 815, 1911.
5) Gilchrist, Physik. Zeitschr. **14**, 160, 1913.
6) Vgl. die Zusammenstellung in Landolt-Börnstein, Bd. I, Nr. 56, S. 181.

Stickstoff, Helium-Wasserstoff. Die in Fig. 3 gezeichnete Kurve von Thomsen zeigt ein Maximum mit etwa 4 Proz. Abweichung. Bei feuchter Luft wurde ein etwas höherer Reibungskoeffizient beobachtet als bei trockener, obwohl der Koeffizient von reinem Wasserdampf be-

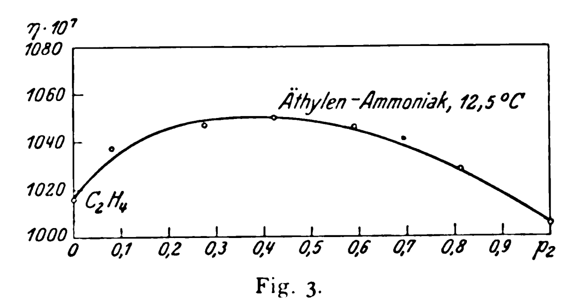


Fig. 3.

deutend tiefer liegt als der von Luft. Die anderen Kurven verlaufen geradlinig, vgl. Fig. 4. Diese Ergebnisse stehen insofern in Übereinstimmung mit den Messungen der Wärmeleitfähigkeit, als nur Wasserdampf und Ammoniak ausgesprochen polaren Charakter tragen, während Äthylen und

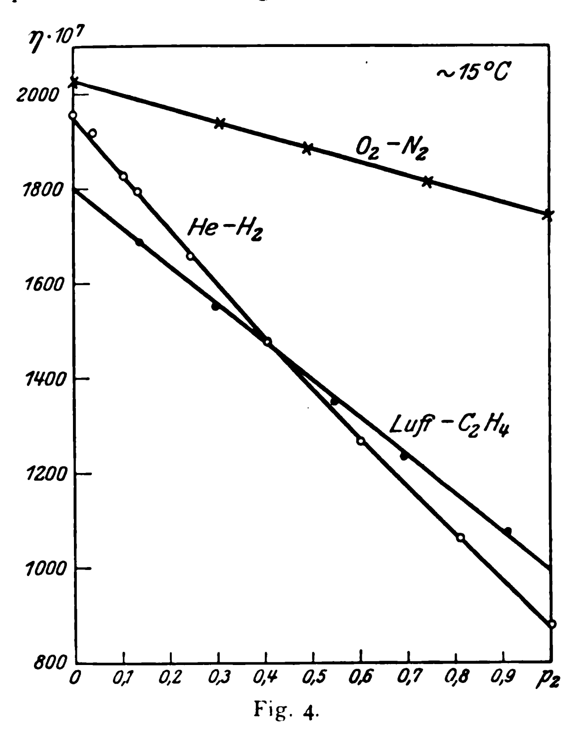


Fig. 4.

die übrigen genannten Gase als vorwiegend homöopolar angesehen werden müssen.

In allen übrigen untersuchten Fällen (vgl. Landolt-Börnstein) ist die eine Komponente Wasserstoff und daher offenbar der Einfluß des Massenunterschiedes vorwiegend. Es werden ebenfalls Maxima und z. T. außerordentliche Vergrößerungen der inneren Reibung über die einfachen Mittelwerte beobachtet. Wendet man die von Kuenen[1]) aufgestellte Mischungsformel an, in der von der Jeansschen Persistenz der Geschwindigkeit Gebrauch gemacht wird, so gelingt es, diese Abweichungen wenigstens qualitativ zu erklären. In seinen neueren Arbeiten über die innere Reibung von Gasgemischen haben M. Trautz und seine Mitarbeiter[2]) die Notwendigkeit betont, den Einfluß der Anziehungskräfte neben dem der Massen gesondert zu behandeln, die Arbeit (Ann. d. Phys. **79**), enthält aber bezüglich der Auswertung der Kuenenschen Formel mehrere Rechenfehler, so daß die daraus gezogenen Folgerungen nicht zu Recht bestehen.

Anschließend sei noch erwähnt, daß mehrere Arbeiten über die Wärmeleitfähigkeit von Gasgemischen vorliegen, bei denen ebenfalls die Massenunterschiede groß sind. S. Weber[3]) z. B. untersuchte $CO_2 - H_2$, die Mischkurve verläuft hier unterhalb der einfachen Mischungsgeraden. Weber berücksichtigte im Sinne der Persistenz den Einfluß der Molekülmasse, gelangte aber zu keiner befriedigenden Übereinstimmung mit der Erfahrung.

§ 2.

Eine allgemeine Mischungsformel erhält man in folgender Weise. Die innere Reibung η eines Gemisches kann in zwei Summanden zerlegt werden:

$$\eta = k \cdot n_1 m_1 u_1 \lambda_1' f_1' + k \cdot n_2 m_2 u_2 \lambda_2' f_2', \qquad (1)$$

hierin bedeuten n die Molekülzahlen, m die Massen, u die mittleren Geschwindigkeiten, λ' die für das Gasgemisch gültigen mittleren freien Weglängen, f' die Persistenzfaktoren nach Jeans-Kuenen[4]), keine Konstante. Für die Weglängen gelten bei Einführung der Anziehungskräfte die bekannten Formeln

$$\lambda_1' = \frac{1}{\pi\left(n_1 s_1^2 \sqrt{2}\cdot\gamma_1 + n_2 \sigma^2 \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}\cdot\gamma_{12}\right)}$$
$$\lambda_2' = \frac{1}{\pi\left(n_2 s_2^2 \sqrt{2}\cdot\gamma_2 + n_1 \sigma^2 \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\cdot\gamma_{12}\right)} \qquad (2)$$

s_1 und s_2 sind die Moleküldurchmesser, $\sigma = \frac{s_1 + s_2}{2}$;

ferner bedeuten

$$\gamma_1 = 1 + \frac{C_1}{T}; \quad \gamma_2 = 1 + \frac{C_2}{T}; \quad \gamma_{12} = 1 + \frac{C_{12}}{T} \qquad (3)$$

1) J. P. Kuenen, Die Eigenschaften der Gase, S. 111. Leipzig 1919.

2) Ann. d. Phys. **78**, 305, 1925; **79**, 637, 1926; **82**, 227, 1927.

3) S. Weber, Ann. d. Phys. **54**, 481, 1917.

4) Vgl. Kuenen, l. c.

die Sutherlandschen Faktoren. Nach Sutherland[1]) sind die C proportional der potentiellen Energie zweier sich berührender Moleküle, C_{12} gilt für die Zusammenstöße eines Moleküls der Sorte 1 mit einem Molekül der Sorte 2, C_1 und C_2 beziehen sich auf die Zusammenstöße je zweier Moleküle der Sorten 1 und 2 untereinander. Durch die Anziehungskräfte werden die Nenner in (2), die den Stoßzahlen proportional sind, vergrößert. f_1 ist gegeben durch

$$f'_1 = \frac{0{,}797}{1 - \frac{1}{2}\pi n_1 s_1^2 \sqrt{2}\,\gamma_1 \cdot \lambda'_1 \cdot 0{,}406 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\pi n_2 \sigma^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} \cdot \gamma_{12} \lambda'_1 \Theta_1} \tag{4}$$

worin

$$\Theta_1 = \frac{m_1}{2(m_1 + m_2)} + \frac{1}{4}\,\frac{m_1^2}{m_2^{1/2}(m_1 + m_2)^{3/2}} \lg \frac{\sqrt{m_1 + m_2} + \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1 + m_2} - \sqrt{m_2}}$$

zu setzen ist. Entsprechend bilde man f_2 und $\Theta_2 \cdot \Theta_1$ ist die Persistenz der Geschwindigkeit eines Moleküls 1 beim Zusammenstoß mit einem Molekül 2, sind die Moleküle gleich schwer, so nimmt Θ_1 den Wert 0,406 an. Ist m_1 groß im Verhältnis zu m_2, so nähert Θ_1 sich dem Werte eins, ist m_1 klein gegen m_2, so geht Θ_1 gegen Null. Ohne auf den Begriff der Persistenz näher einzugehen, wollen wir nur einige zahlenmäßige Folgerungen ziehen.

Das kompliziert aussehende Formelsystem (1) bis (4) läßt sich vereinfachen, wenn man noch die Reibungskoeffizienten der Komponenten einführt:

$$\eta_1 = \frac{k \cdot m_1 u_1}{\pi s_1^2 \sqrt{2}\,\gamma_1}$$

$$\eta_2 = \frac{k \cdot m_2 u_2}{\pi s_2^2 \sqrt{2}\,\gamma_2}.$$

Dann erhält man leicht ohne Vernachlässigung

$$\eta = \frac{\eta_1}{1 + \frac{n_2}{n_1} A_1} + \frac{\eta_2}{1 + \frac{n_1}{n_2} A_2}, \tag{5}$$

worin zu setzen ist

$$A_1 = \left(\frac{\sigma}{s_1}\right)^2 \frac{1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\Theta_1}{0{,}797} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2 m_2}} \cdot \frac{\gamma_{12}}{\gamma_1}$$

$$A_2 = \left(\frac{\sigma}{s_2}\right)^2 \frac{1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\Theta_2}{0{,}797} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2 m_1}} \cdot \frac{\gamma_{12}}{\gamma_2}. \tag{6}$$

Die Ausdrücke A enthalten den Einfluß der Durchmesser, Massen und Anziehungskräfte. Vom Einfluß der Durchmesser sehen wir im folgenden ganz ab; die Durchmesser seien also einander gleich.

Vernachlässigt man die Abweichungen vom Avogadroschen Gesetz, so kann man in (5) das Verhältnis der Molekülzahlen n_1/n_2 durch das der Partialdrucke p_1/p_2 ersetzen, wobei $p_1 + p_2 = 1$. Der Charakter der Mischkurven wird dadurch in keiner Weise verändert, da die Abweichungen nur wenige Prozente betragen. Die Mischungsformel lautet dann

$$\eta = \frac{\eta_1}{1 + \frac{p_2}{p_1} A_1} + \frac{\eta_2}{1 + \frac{p_1}{p_2} A_2}. \tag{7}$$

Zwischen der Wärmeleitfähigkeit L und der inneren Reibung η besteht die Beziehung

$$L = K \cdot c_v \cdot \eta,$$

wo K ein Zahlenfaktor und c_v die spezifische Wärme ist. Eucken[1]) hat in einer bekannten Arbeit Betrachtungen über den Wert von K angestellt. Danach hängt K wesentlich ab von der Verteilung der molekularen Energie auf die verschiedenen Freiheitsgrade, ist also ebenso wie c_v charakteristisch für das Einzelmolekül. Dann gilt auch für die Wärmeleitfähigkeit eine ganz analoge Mischungsformel,

$$L = \frac{L_1}{1 + \frac{p_2}{p_1} A_1} + \frac{L_2}{1 + \frac{p_1}{p_2} A_2}, \tag{8}$$

wo die A wieder durch (6) gegeben sind. Allerdings bemerkt Eucken, daß bei einigen Gasen, z. B. CO, CO_2, H_2O und NH_3 der Wärmeaustausch anscheinend behindert ist, wodurch K zu klein ausfällt. Danach wäre möglicherweise ein besonderer Mischungseffekt zu erwarten. Genaueres darüber ist aber nicht bekannt.

Die bereits mehrfach angewandten[2]) Formeln (7) und (8) gestatten durch geeignete Wahl der A eine Anpassung an die Beobachtung. Zunächst untersuchen wir formal den Einfluß der Größen A in (7) oder (8). Setzt man $A_1 = A_2 = 1$, so erhält man die einfache Mischungsformel, z. B.

$$L = p_1 L_1 + p_2 L_2.$$

Die allgemeine Diskussion von (7) oder (8) ist umständlich; es genügt hier eine Beschränkung auf den Fall $L_1 = L_2$. Diese Bedingung ist z. B. für Luft-Ammoniak bei einer Temperatur von 60° C erfüllt. Dann kann man leicht zeigen:

1) W. Sutherland, Phil. Mag. (5) **36**, 507, 1893.

1) A. Eucken, Physik. Zeitschr. **14**, 324, 1913.
2) Vgl. z. B. S. Weber, l. c.

Ist

$$A_1 \cdot A_2 < 1 , \quad (9)$$

so ist ein Maximum vorhanden, im umgekehrten Falle ergibt sich ein Minimum.

Setzen wir die Anziehungskräfte zunächst einmal gleich Null, so sind die $\gamma = 1$. Wir betrachten den Fall Luft-Ammoniak, das Verhältnis der Massen ist 29 : 17. Dann erhalten wir nach (6):

$$A_1 = 0{,}96, \qquad A_2 = 1{,}01, \qquad A_1 \cdot A_2 = 0{,}97 .$$

Diesen Werten entspricht ein Maximum von etwa 1 Proz. Bei Vernachlässigung der Persistenz hätte man in (6) nur die Wurzeln zu berücksichtigen, dann erhielte man

$$A_1 = 1{,}16, \qquad A_2 = 0{,}89, \qquad A_1 \cdot A_2 = 1{,}03.$$

Das ergibt ein Minimum mit etwa 1 Proz. Abweichung. In beiden Fällen ist also der Einfluß der Massen gering.

Übrigens sei bemerkt, daß der Ausdruck (7) in Verbindung mit (6) bei großem Massenunterschiede (z. B. CO_2—H_2) die beobachtete große Abweichung des Reibungskoeffizienten vom einfachen Mittelwert qualitativ richtig wiedergibt. Nicht dagegen erhält man die Unterschreitung des Mittelwertes bei der Wärmeleitfähigkeit von CO_2—H_2-Gemischen, wenn man (8) und (6) auswertet (vgl. § 1). Man beachte hierbei, daß je nach dem Größenverhältnis der Einzelwerte γ oder L der Einfluß der A auf die Mischungscharakteristik sehr verschieden ausfällt.

Für die weitere Diskussion setzen wir $s_1 = s_2$ und $m_1 = m_2$, betrachten also die Anziehungskräfte gesondert. Sind Anziehungskräfte vorhanden, so sind die $\gamma > 1$ und nach (9) ist die Bedingung für das Auftreten eines Maximums

$$\gamma^2_{12} < \gamma_1 \gamma_2 \quad (10)$$

Man kennt nun γ_1 und γ_2, die Größe γ_{12} dagegen ist vorläufig unbekannt, sie enthält die Konstante C_{12} der gegenseitigen Anziehung verschiedener Gasmoleküle. Zur Berechnung von C_{12} aus C_1 und C_2 muß man das zwischen den Molekülen herrschende Kraftgesetz in Betracht ziehen. Unter Zugrundelegung einer Newtonschen Massenanziehung erhält man

$$C_{12} = \sqrt{C_1 C_2} , \quad (11)$$

wir erinnern daran, daß die C der potentiellen Energie proportional sind. In der Tat ist dann die Ungleichung (10) erfüllt, falls nicht gerade $C_1 = C_2$, der Effekt ist aber gering, auch bei großer Verschiedenheit der C. Zur Erläuterung bringen wir eine Tabelle der C. Die Spalten 2 bis 4 sind einer Arbeit von Vogel[1]) entnommen, die letzte Spalte enthält neuere Werte aus Landolt-Börnstein, Ergänzungsband. Die Werte der Spalte 3 sind aus den Siedetemperaturen T_s vermöge der angenäherten Beziehung $C = 1{,}47 \cdot T_s$ berechnet. Für den Idealfall zweier Gase mit gleichen Molekulargewichten, Durchmessern und Leitfähigkeiten, die sich aber in den Sutherlandschen Konstanten unterscheiden, erhält man unter Annahme des Gesetzes (11) und der Werte C_1 für Luft und C_2 für Ammoniak eine Abweichung von nur 1,8 Proz. Haben also die Anziehungskräfte der Moleküle beider Komponenten gleiche Symmetrie, hier Kugelsymmetrie, so ist ihr Einfluß gering.

1) H. Vogel, Ann. d. Phys. **43**, 1235, 1914.

Tabelle I.

Gas	T_S	C berechnet aus T_S	C Vogel	C Landolt-Börnstein
Luft	81	119	117	117
N_2	77,5	114	110,6	—
O_2	90,6	133	138	—
CO	83	122	100	118
CO_2	194	285	277	274
NH_3	240	353	352	—
H_2O	373	548	—	673
C_2H_2	189	278	—	—
CH_4	108	159	144	—

§ 3.

Wir wollen nun Moleküle verschiedener Symmetrie betrachten, also z. B. Dipole und Quadrupole. Debye und Keesom haben aus der Vorstellung elektrostatischer Kräfte die van der Waalssche Anziehung berechnet. Wir benutzen hier die Ansätze von Keesom[1]), der gezeigt hat, daß für mehratomige Moleküle bei normalen Temperaturen die Richtwirkung im gegenseitigen Feld jedenfalls viel stärker ist als die Induktionswirkung, bei der die elektrischen Momente erst im Felde schon vorhandener Quadrupole entstehen.

Die potentielle Energie zweier Teilchen aufeinander ist nicht nur vom Abstand σ ihrer Mittelpunkte abhängig, sondern auch von den Winkeln, welche ihre Symmetrieachsen miteinander bilden. Man hat also unter Berücksichtigung des Boltzmannschen Verteilungsgesetzes über die verschiedenen Richtungen zu mitteln. Die hieraus resultierende Anziehungskraft wird also durch einen „Richtungseffekt“ hervorgerufen. Bei der folgenden Rechnung muß man voraussetzen, daß der Abstand der elektrischen Systeme voneinander groß ist gegenüber ihrer Ausdehnung, sonst treten bei Quadrupolen auch Dipol- und Polwirkungen auf, d. h. in

1) W. H. Keesom, Physik. Zeitschr. **22**, 129, 643, 1921; **23**, 225, 1922.

der Entwicklung der potentiellen Energie nach Kugelfunktionen fallen die ersten Glieder nicht fort. Es scheint, daß die Dipole und Quadrupole mit einigem Spielraum innerhalb des gaskinetischen Volumens untergebracht werden können.

Die Dipole bestehen aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen $\pm e$ im Abstande ε, die Quadrupole denken wir uns am einfachsten

$-e \quad +e$ (ε) $\qquad +e \quad -2e \quad +e$ ($\varepsilon \quad \varepsilon$)

Fig. 5.

gebildet aus zwei Dipolen, die so aneinandergelegt sind, daß z. B. die negativen Ladungen in der Mitte zusammenfallen, vgl. Fig. 5. Die gegenseitige Lage eines Molekülpaares ist gekennzeichnet durch drei Winkel ϑ_1, ϑ_2, φ, vgl. Fig. 6. Das linke Molekül (Index 1) ist um den Winkel φ aus der $(x-z)$-Ebene herausgedreht, das rechte (Index 2) liegt in der $(x-z)$-Ebene, ϑ_1, ϑ_2 sind die Winkel, welche die Mole-

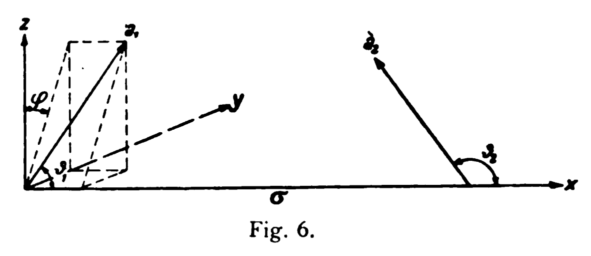


Fig. 6.

külachsen mit der x-Achse bilden. Wir definieren die elektrischen Momente:

Dipolmoment: $\lambda = e \cdot \varepsilon$

Quadrupolmoment: $\mu = 2e\varepsilon^2$.

Dann erhält man folgende Ausdrücke für die gegenseitige Energie:

1. Dipol—Dipol

$$E_{dd} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\sigma^3}\{2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\varphi\}. \tag{12}$$

2. Dipol—Quadrupol

$$E_{dq} = -\frac{3}{2}\frac{\lambda_1\mu_2}{\sigma^4}\{-2\cos\vartheta_1\cos^2\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin^2\vartheta_2 + 2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2\cos\varphi\}. \tag{13}$$

3. Quadrupol—Quadrupol

$$E_{qq} = -\frac{3}{4}\frac{\mu_1\mu_2}{\sigma^5}\left\{\begin{array}{l}1 - 5\cos^2\vartheta_1 - 5\cos^2\vartheta_2 - 15\cos^2\vartheta_1\cos^2\vartheta_2 \\ + 2(4\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\varphi)^2\end{array}\right\}. \tag{14}$$

Die Integration über alle möglichen Lagen ergibt den Mittelwert der Energie:

$$\bar{E} = \frac{\int E_\tau e^{-\frac{E_\tau}{kT}} d\tau}{\int e^{-\frac{E_\tau}{kT}} d\tau}, \tag{15}$$

wo

$$d\tau = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi$$

das Element des Winkelraums und $k = 1{,}372 \cdot 10^{-16}$ erg/Grad die Boltzmannsche Konstante ist. Wir machen nun die Voraussetzung, daß das Verhältnis der potentiellen zur kinetischen Energie so klein ist, daß man ohne allzu große Fehler die Entwicklung der e-Funktion mit dem ersten Gliede abbrechen darf. Im Sinne des Ansatzes von Reinganum[1]), der den Faktor $e^{C/T}$ für die Schwarmbildung einführte, ist auch der Sutherlandsche Ausdruck $1 + C/T$ eine derartige Annäherung. Da jedenfalls Sättigung der Richtungseinstellung kaum in Frage kommt, wird die gemachte Vereinfachung genügen. Es ist nun

$$\int E_\tau d\tau = 0,$$

dies bedeutet, daß alle Kraftlinien, die vom Molekül ausgehen, zu ihm zurückkehren. Wir erhalten dann statt (15)

$$\bar{E} = -\frac{1}{8\pi kT}\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{2\pi} E^2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \, d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi$$

und gelangen zu folgenden Mittelwerten:

$$\bar{E}_{dd} = -\frac{2}{3}\frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{kT\cdot\sigma^6}$$

$$\bar{E}_{dq} = -\frac{\lambda_1^2\mu_2^2}{kT\cdot\sigma^8} \tag{16}$$

$$\bar{E}_{qq} = -\frac{14}{5}\frac{\mu_1^2\mu_2^2}{kT\cdot\sigma^{10}}.$$

Sind die Dipole und ebenso die Quadrupole untereinander gleich, so ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu_1 = \mu_2$ und man erhält die Beziehung

$$\bar{E}_{dq} = 0{,}733\sqrt{\bar{E}_{dd}\cdot\bar{E}_{qq}}. \tag{17}$$

Die Anziehungskräfte beim Zusammentreffen von Dipolen mit Quadrupolen liegen also erheblich unter dem geometrischen Mittel (vgl. mit [11]). Das Zustandekommen dieses Ergebnisses läßt sich mathematisch folgendermaßen verständlich machen. Formel (12) entsteht durch

1) M. Reinganum, Ann. d. Phys. **38**, 649, 1912.

zweifache, (13) durch dreifache, (14) durch vierfache Gradientenbildung des Newtonschen Potentials $1/r$. Die bei der Differentiation auftretenden Zahlenfaktoren steigen dabei stärker an, als es einer geometrischen Reihe entspricht. Bei der Mittelwertbildung bleibt dieses Inhomogenerwerden der Felder erhalten.

Da sowohl E/kT als auch C/T das Verhältnis der potentiellen zur kinetischen Energie darstellen, muß $E \sim C \cdot k$ sein. Setzt man folgende Werte ein: $C =$ einige Hundert, $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$, $T = 3 \cdot 10^2$, $\sigma = 3 \cdot 10^{-8}$, so erhält man die richtige Größenordnung für die Momente:

$$\lambda \sim 10^{-18} \text{ el. st. Einh.} \cdot \text{cm}$$

$$\mu \sim 10^{-26} \text{ el. st. Einh.} \cdot \text{cm}^2.$$

Die Ausdrücke (16) sind umgekehrt proportional der absoluten Temperatur, da ja die Temperaturbewegung der Richtwirkung entgegenarbeitet. Ohne uns um die Frage nach der wahren Temperaturabhängigkeit der C zu kümmern, wollen wir hier das Ergebnis der Formel (17) auf die C übertragen, um die numerische Auswertung durchführen zu können; dann erhalten wir

$$C_{12} = 0{,}733 \cdot C_1 \cdot C_2 \,. \tag{18}$$

Diese Formel kann im Sinne der Beobachtungen gedeutet werden, sie besagt, daß die Anziehungskräfte beim Zusammentreffen von Molekülen verschiedener Symmetrie vergleichsweise erheblich verringert sind, woraus nach den Gleichungen (1) bis (3) eine Vergrößerung der freien Weglänge und damit der inneren Reibung folgt. Die maximale Abweichung tritt naturgemäß dann ein, wenn die Gase angenähert im Verhältnis 1 : 1 gemischt werden. Setzt man im Idealfall zwei Gase mit gleichen Molekulargewichten, Durchmessern und Konstanten der Wärmeleitfähigkeit bzw. inneren Reibung, sowie gleichen Sutherlandschen Konstanten voraus, wobei etwa $C_1 = C_2 = T = 300$ sei, so erhält man bei Anwendung von (18), (3), (6) und (7) die in Fig. 7 gezeichnete Abweichung von etwa 7 Proz.

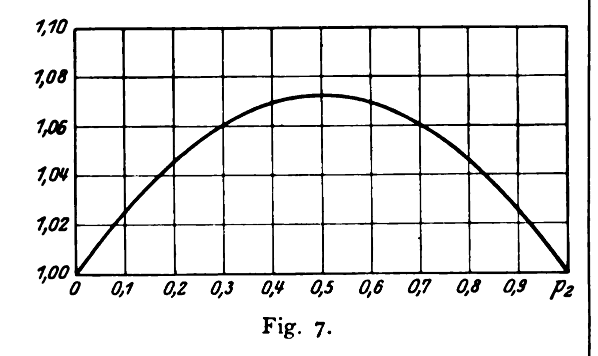


Fig. 7.

Für das Beispiel Luft-Ammoniak hat man (Luft: Index 1, Ammoniak: Index 2)

$$m_1 = 29, \; m_2 = 17, \; C_1 = 117, \; C_2 = 352$$
$$C_{12} = 149 \,.$$

Daraus ergibt sich folgende Tabelle für die A in Gleichung (8).

Tabelle II.

Temperatur	A_1	A_2
20 °C	1,03	0,69
60 °C	1,025	0,71
80 °C	1,02	0,72

Ähnliche Werte erhält man für CO—NH_3. Die entsprechenden Kurven sind in Fig. 8 dargestellt.

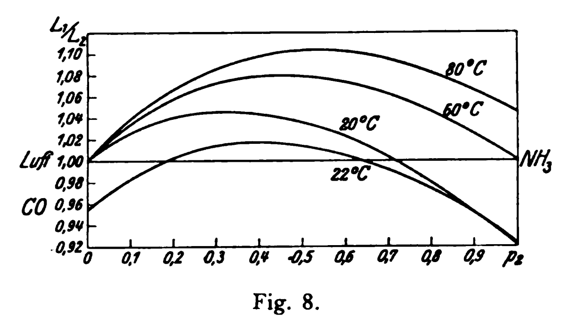


Fig. 8.

Ein Vergleich mit Fig. 1 zeigt, daß sowohl die Größenordnung als auch die Form der Mischungscharakteristik richtig wiedergegeben sind. Das Maximum verschiebt sich mit steigender Temperatur zu größeren p_2-Werten. In der Fig. 8 bewirkt der Einfluß des Massenunterschiedes in den A noch eine Vergrößerung des eigentlichen Anziehungseffektes um etwa 1 Proz. Die Beobachtungen an Luft-Acetylen zeigen, daß hier die Dipolwirkung stark zurücktritt, immerhin ist ein deutlicher Einfluß vorhanden. Setzt man ähnliches für Äthylen voraus, so müßte Äthylen-Ammoniak eine stärkere Abweichung ergeben, die Kurve der inneren Reibung in Fig. 3 bestätigt dies. Die innere Reibung von Luft-Äthylen zeigte überhaupt keine Abweichung. Eine Vervollständigung des Versuchsmaterials besonders hinsichtlich der Reibungskoeffizienten, für welche die hier ausgeführte Überlegung mit höherer Sicherheit gilt als für die Wärmeleitfähigkeit, wäre dringend erwünscht. Es sei noch bemerkt, daß ein Maximum nur dann zustande kommt, wenn die Leitfähigkeiten bzw. Reibungskoeffizienten der Komponenten nahezu gleich sind, vgl. das Beispiel Luft-Acetylen. Charakteristisch ist nicht das Maximum als solches, sondern die Abweichung von der einfachen Mischungsregel, die z. B. durch den Ausdruck

$$L/(p_1 L_1 + p_2 L_2)$$

definiert werden kann.



Zusammenfassend kann gesagt werden: Die Unterscheidung zwischen homöopolaren und heteropolaren Molekülen läßt eine Abweichung von der einfachen Mischungsregel von maximal etwa 7 Proz. erwarten, daneben sind natürlich alle Zwischenstufen möglich, falls nicht der ideale Fall vorliegt.

Der Notgemeinschaft hat der Verfasser für die Gewährung eines Forschungsstipendiums zu danken.

Greifswald, Juni 1928.

(Eingegangen 2. Juli 1928.)

Theorie der Erzeugung von sehr kurzen elektromagnetischen Wellen mittels Elektronenröhren. II. Teil[1]).

Von Josef Sahánek.

Im ersten Teile dieser Arbeit[2]) habe ich nachgewiesen, daß bei einer bestimmten Schaltung der Elektronenröhre (Triode), bei der die statische Charakteristik eine steigende ist, diese in einem bestimmten Bereich der Schwingungszahlen, der durch Ausmaß und Gestalt der Elektroden und durch die benutzten Elm. Kräfte bedingt ist, zu einer fallenden wird. Im weiteren will ich zuerst in einigen Punkten die Darstellung des ersten Aufsatzes ergänzen.

Die Schaltung der Röhre ist folgende[2]): Längs der Kathode ist der Potentialfall vom Glühstrome V_t; zwischen dem negativen Ende der Kathode und dem Gitter ist die Batterie mit der Elm. Kraft V_m eingeschaltet. Die Platte (Anode) ist durch den ziemlich großen Widerstand R an das Gitter angeschlossen. Der Widerstand R ist so zu wählen, daß durch jenen Strom, der in der Richtung vom Gitter zur Platte durchfließt, die Platte auf dem Potential irgendeines Punktes der Kathode erhalten werde. Weiter ist an die Bahn „Gitter—Platte" ein oszillationfähiges System angeschlossen, und zwar mit einer geeigneten Eigenfrequenz.

Eine Charakteristik der Leitungsbahn bezeichnet man als eine allgemein steigende dann, wenn innerhalb der Bahn dem Anwachsen der Elm. Kraft auch das Anwachsen der Stromstärke in der Richtung vom Potentialgefälle entspricht, und als eine fallende dann, wenn bei Eintritt des Fallens der Elm. Kraft die Vergrößerung der Stromstärke in der Richtung vom Potentialgefälle eintritt. In unserem Falle ist das Potentialgefälle in der Bahn „Gitter—Platte" gegen die Stromstärke gerichtet. Hat diese Bahn eine steigende Charakteristik, dann muß die Vergrößerung des Potentialgefälles innerhalb der Bahn notwendigerweise die Vergrößerung der Stromstärke in der Richtung des Gefälles d. h. das Sinken der wirklichen Stromstärke bewirken. Dem ist auch tatsächlich in unserem Falle so und es ist somit die statische Charakteristik der erwogenen Leitungsbahn eine steigende.

Die Leitungsfähigkeit der Bahn ist durch die Bewegung der Elektronen bedingt. Erwägen wir genauer deren Bewegung nach der energetischen Seite hin, um die entstehenden Änderungen feststellen zu können, wenn die Periode des angeschlossenen Systems reihenmäßig kongruent wird zur Zeit, innerhalb welcher die Elektronen die Bahn Gitter—Platte durchlaufen.

a) In den Raum Gitter—Platte bringt die durchs Gitter eintretende Ladung in jedem Zeitmoment eine gleich große Energie mit, die durch die Elm. Kraft der Batterie V_m und durch die Intensität des Emissionsstromes i_e gegeben ist. Mit Rücksicht auf das Potentialgefälle an der Kathode bringt keineswegs ein jedes Elektron die gleiche Energie zustande. Hiermit ist die in den Raum Gitter—Platte abgegebene Energie durch das Produkt der Intensität in der Richtung vom Gitter zur Platte i und der mittleren Potentialdifferenz zwischen Kathode und dem Gitter gegeben ($e_{MK} = V_m - {}^1/_2\, V_t$).

b) Von dieser Energie wird im Widerstand R der Teil $e_{MD} \cdot i_D$ verbraucht, wenn i_D die Stromintensität im Kreise der Außenelektrode (Platte) und $e_{MD} = Ri_D$ bezeichnet. Dabei hat jedes einfallende Elektron die mittlere kinetische Energie ${}^1/_2 e \cdot (V_m - e_{MD})$ (Fig. 1), die sich beim Einfall in Wärme umsetzt. Der gesamte Verlust beim Einfall innerhalb einer Sekunde ist daher ${}^1/_2 \cdot (V_m - e_{MD}) \cdot i_D$ und die gesamten Verluste überhaupt machen in einer Sekunde $e_{MD} \cdot i_D + {}^1/_2 \cdot (V_m - e_{MD}) \cdot i_D = {}^1/_2 \cdot (V_m + e_{MD}) \cdot i_D$. Das ist aber jene Energie, die die Ladung i_D aus dem Raume Kathode—Gitter mitbringt. Die zurückkehrende Ladung verläßt den Raum Platte—Gitter mit derselben Energie, mit welcher sie in den Raum eingetreten ist.

c) Ist nun die Elm. Kraft Gitter—Platte eine periodisch wechselnde $e'_{MD} = e_{MD} + e_0 \sin \omega t$, so ist die kinetische Energie des eintretenden Elektrons freilich wieder $e \cdot (V_m - {}^1/_2\, V_t)$; denn die Elm. Kraft zwischen Gitter und Kathode (V_m, V_t) hat sich nicht geändert. Dagegen trägt das zurückkehrende Elektron die mittlere kinetische Energie ${}^1/_2 e \cdot (e'_{MD} + V_m - V_t) = {}^1/_2\, e \cdot (e_{MD} + V_m - V_t) + {}^1/_2\, e\, e_0 \sin \omega t$, falls $\tau \gg \vartheta$, wo $\tau = 2\pi/\omega$ und ϑ den Zeitraum darstellt, in dem

---

1) Tschechisch als Nr. 92. Spisy přír. fak. Masarykovy university (Publications de la faculté des sciences de l'université Masaryk).

2) Physik. Zeitschr. **26**, 368–376, 1925; Bild 2 und 4.

das Elektron die Strecke Gitter—Platte durchläuft. Dabei ist die Intensität des zurückkehrenden Stroms um $i_0 \sin \omega t$ größer, so daß sich die Energie pro Zeiteinheit bei dem Ladungsabgang aus dem Raum Gitter—Platte, um

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{e_0}{2} i_0 \int\limits_0^\tau \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{4} e_0 i_0 \text{ vergrößert hat.}$$

Ebenso hat sich die mittlere kinetische Energie des einfallenden Elektrons auf $\frac{1}{2} e (V_m - e'_{MD})$,

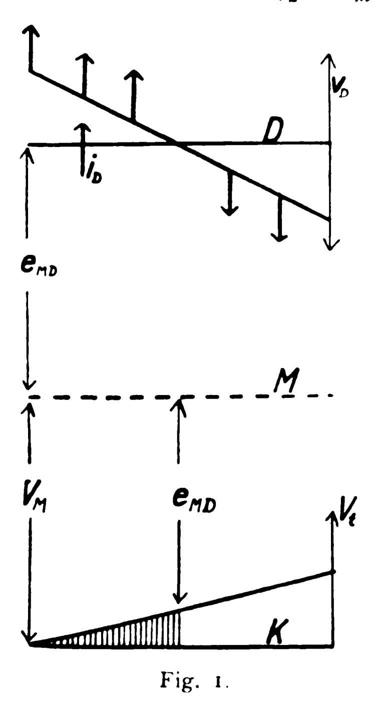


Fig. 1.

also um $-\frac{1}{2} e e_0 \sin \omega t$ verändert. Zugleich ist die Intensität der einfallenden Ladung in $i_D - i_0 \sin \omega t$ übergegangen. Es ist demnach der Verlust an Energie durch den Einfall der Ladung auf die Platte um $\frac{1}{4} e_0 i_0$ innerhalb einer Zeiteinheit gewachsen. Durch die Superposition der Elm. Kraft $e_0 \sin \omega t$ haben also die Verluste in der Bahn G.—P. um $\frac{1}{2} e_0 i_0$ in einer Sekunde zugenommen. Die Bahn verhält sich für die Perioden $\tau \gg \vartheta$ wie der Ohmsche Widerstand. Und das ist mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung.

d) Nehmen wir abermals an, daß der konstanten Elm. Kraft e_{MD} die wechselnde Elm. Kraft $e_0 \sin \omega t$ superponiert ist. Aber nun sei $\tau = 2\pi/\omega$ reihenmäßig kongruent mit ϑ. In der Platte ist die Intensität $i_D + i_0 \sin \omega t$ und die Energie des einfallenden Elektrons ist durchschnittlich um $-\frac{1}{2} e e_0 \sin \omega t$ vergrößert, so daß die Verluste an der Platte wieder um $\frac{1}{4} e_0 i_0$ in der Sekunde größer sind als bei einer konstanten Elm. Kraft. Aber die Intensität des zurückfließenden Stroms ist von Stelle zu Stelle verschieden, und zwar so, daß sie sich in der Nähe der Platte D (Fig. 2) praktisch in Phase mit der Elm. Kraft $e_0 \sin \omega t$ befindet, wogegen sie an dem Gitter phasenmäßig um ϑ zurückgeblieben ist, wobei ϑ den Zeitraum angibt in welchem die Ladung von der Platte zum Gitter gelangt. Die Energie, die von der Ladung in den Raum Gitter—Kathode in der Sekunde zurückgebracht wird, erhält man durch Integration über den Raum DM. In der Berechnung habe ich nachgewiesen, daß diese Energie bei ebenen Elektroden zwar kleiner werden kann, als die durch die Ladung gelieferte Energie, aber niemals um soviel, daß dies die Verluste an der Platte $\frac{1}{4} e_0 i_0$ übersteigen könnte, so daß die durch den Einfall bewirkten Verluste immer die gewonnene Energie übersteigen müssen und daß sie von der Quelle der wechselnden Elm. Kraft geliefert werden muß. Die Charakteristik der Bahn ist auch für diese Schwingungen eine steigende. Für diese Schlußfolgerung der Theorie sprechen sowohl die Erfahrungen des Verfassers selbst aus früherer Zeit, als auch diejenigen an

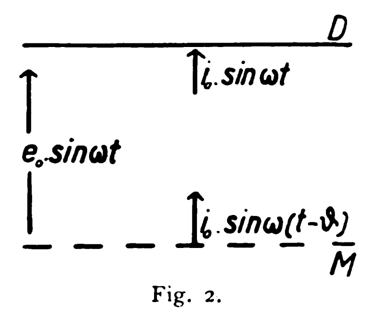


Fig. 2.

abweichenden Röhrenkonstruktionen erprobten Resultate anderer Autoren der jüngsten Zeit.

e) Wählt man Walzenelektroden, so erscheint das Potentialgefälle um so jäher am Gitter, als das Verhältnis der Halbmesser $r_D/r_M = d$ größer ist. Das Elektron, das von der Platte D im Moment der größten Potentialdifferenz e_{MD} angefangen hat zurückzulaufen, gelangt zu den Punkten des größten Gefälles, wenn bereits die Potentialdifferenz stark gesunken ist, und die Folge davon ist, daß es mit einer kleineren Energie abgeht, als bei den ebenen Elektroden. Nun hat die Rechnung gezeigt, daß das Plus an Energie beim Abgehen der Ladung aus dem Raum DM erst beim Verhältnis der Halbmesser $d > 2$ größer wird als die erhöhten Verluste an der Platte $\frac{1}{4} e_0 i_0$. Ist also das Verhältnis von dem Halbmesser der Platte und des Gitters größer als zwei, so entsteht für bestimmte Schwingungszahlen die Inversion der Charakteristik der Bahn P.—G. Die Charakteristik beginnt fallend zu werden, und die Bahn kann zur

Oszillationserzeugung verwendet werden, freilich in einem bestimmten Bereich der Schwingungszahlen, welcher durch die benützten Elm. Kräfte und Elektrodendurchmesser bedingt erscheint. Diese Folgerung wurde durch die experimentelle Prüfung immer bisher bestätigt. Nur die Röhren mit $d > 2$ gaben Oszillationen. So entspricht von den tschechischen Röhren dieser Bedingung z. B. die Röhre Mars *X* und liefert leicht Oszillationen. Dagegen liefern andere Röhren derselben Firma bei denen die Bedingung nicht erfüllt ist (z. B. Mars *G*) keine Oszillationen. Auch in den Arbeiten anderer Autoren kann man sich überzeugen, insofern sie die Ausmaße der Elektroden angeben, daß die zu Oszillationen geeigneten Röhren dieser Bedingung entsprechen[1]).

2. Zwischen den Resultaten, die von verschiedenen Autoren betreffs der Kurzwellenerzeugung mittelst der Methode Barkhausen-Kurz gemacht worden sind, und deren Variationen, besteht der wesentliche Unterschied: die einen Beobachter haben gefunden, daß die Wellenlänge der entstehenden Oszillationen nur von dem Elektrodenausmaß und von den benützten Elm. Kräften, aber keineswegs auch von dem angeschlossenen oszillationsfähigen System abhängig ist[2]), die anderen dagegen haben zwar gleichfalls die Abhängigkeit von den Elektroden und von Elm. Kräften gefunden, aber in dem Sinne, daß durch diese nur ein bestimmter Oszillationsbereich bedingt ist, innerhalb dessen jedwelche Oszillationen zu gewinnen seien durch Anschließung eines passenden Oszillationssystems. Die Wellenlänge ist daher in einem bestimmten Bereich durch das angeschlossene oszillationsfähige System mitbestimmt[3]). Man hat auch Oszillationen beiderlei Art an derselben Röhre gefunden[4]). Manchmal treten auch infolge der Wirkung von Oszillationskreisen Änderungen der Wellenlänge von wenig Prozenten zutage, so daß man sie leicht für Messungsfehler halten kann. Aufgabe der weiteren Abhandlung besteht darin, die im ersten Teile dargelegte Theorie in der Weise zu erweitern, um durch sie einige später angeführte Tatsachen zu erklären, evtl. eine gemeinsame Grundlage für die Erklärung der Wellen beider hier angeführten Arten ausfindig zu machen. Vorher will ich hier einige an der Röhre Mars *X* gemachte Messungen anführen, die die Fakta aus dem ersten Teil dieser Arbeit ergänzen sollen. Bei den Mars-*X*-Röhren ist nämlich das Verhältnis *d* günstiger als bei den Schrack-Röhren, die bei den ersten Versuchen benutzt worden sind, und man kann daher einen breiteren Oszillationsbereich erwarten als bei diesen.

Das Oszillationssystem wurde anfangs nur durch Ableitungen von den Elektroden hergestellt, die ca. 40 cm lang, vertikal und parallel waren. Von ihren Enden war die weitere Leitung zu einer vierfachen Schnur zusammengeflochten, die zu den Batterien und zum Widerstand *R* führte. Bei Änderung der Elm. Kraft zwischen Gitter und Platte in Grenzen $110 \geqq e_{MD} \geqq 65$ Volt fand ich eine Änderung der Wellenlänge zwischen $92,6 \leqq \lambda \leqq 94,4$ cm vor (Tab. I).

Tabelle I.

$R = 10^5 \Omega \; e_{MD} = R i_{MD}$

i_{MD} MA	e_{MD} Volt	λ cm
1,1	110	
1,0	100	93,8
0,9	90	93,8
0,88	80	92,6
0,7	70	94,4
0,65	65	—
Röhre	80,5	86,5
2	116,5	86,0

Tabelle II.

$e_{MD} = 60$ Volt.

a cm	λ cm
16	96,2
24	108,5
29	120,2
40	150,6
45	152,8
52	157

Tabelle III.

Röhre 1			Röhre 2		
e_{DM}	I	λ	e_{MD}	I	λ
49	54,5	115	44	45	111
49	50	113	52	45	108
49	36	108	84	45	100
49	40	107			
79	30	99	80,5	25	86,5
81	25	94	94	25	85
			98	25	85
			108	25	86
			116	25	86

1) Lewi Tonks (Physical Rev. **30**, 510, 1927) kommt zu derselben Bedingung für $r_D / r_M > 2$. Er bestätigt auch daß man bisher experimentell keine Oszillationen gewinnen konnte für Röhren, bei denen $r_0 / r_M > 2$. — Kapzov-Gwosdower, Zeitschr. f. Phys. **45**, 117, 1927.

2) Barkhausen u. Kurz, Physik. Zeitschr. **21**, S. 1—6, 1920; Scheibe, Ann. d. Phys. **73**, 54—88, 1924.

3) Gill and Morrel, Phil. Mag. **44**, 161, 1922, Sahánek l. c.

4) Kapzov-Gwosdower l. c. S. 114.

Die Änderung der Elm. Kraft um 69 Proz. löste also maximal eine Änderung der Wellenlänge λ um 2 Proz. aus. Die Ableitungen schwangen als Oszillationssystem wie eine Halbwelle mit den Spannungsknoten an den Enden und mit dem Schwingungsbauch in der Mitte. Die Länge der Ableitungen betrug 40 cm; falls man die Länge der Einführung vom unteren Ende der Röhre bis zur Elektrode ca. 7,5 cm dazuzählt, so entspricht im ganzen diesem System die Welle $\lambda \doteq (40 + 7,5) x 2 = 95$ cm. Und dies stimmt mit der gefundenen Wellenlänge ganz gut überein. Bei einer anderen Röhre Mars X entsprach der Änderung e_{MD} um 45 Proz. der Wellenänderung λ nur um 0,6 Proz. (Tab. I).

Hat man am unteren Ende der Röhre 5 mm dicke Drähte als Antennen angeschlossen und die eine am Ausgangsende der Platte, die zweite am Ausgang des Gitters, so daß sie in einer horizontalen Geraden zu liegen kommen (die Ableitungen blieben unverändert, vertikal, 40 cm lang), so entsteht die Möglichkeit durch Längenänderung der Antennen die Wellenlänge bei konst. Elm. Kräften e_{MD} und V_m zu ändern. Eine der Messungen bietet die Tab. II. Bei Änderung der Antennenlänge von 16 cm auf 40 cm, änderte sich die Wellenlänge um 54,4 cm, d. h. 56,5 Proz., wobei die Potentialdifferenz zwischen Gitter und Platte unverändert blieb. Dabei erschienen bei $\lambda = 108,5$ cm die Oszillationen am stärksten. Bei einer weiteren Verlängerung der Antennen kamen wieder Oszillationen mit einer kürzeren Welle zum Vorschein. So z. B. bei Antennen $a = 16$ cm; $e_{MD} = 80,5$ Volt fand man die Welle $\lambda = 94,6$ cm. Nun wurden die Antennen bei der unveränderten Größe e_{MD} so lange verlängert, bis wieder die Welle $\lambda = 94,6$ cm zum Vorschein kam. Es geschah bei $a = 63$ cm. Der Antennenzuwachs betrug 47 cm, was eben der halben Wellenlänge entspricht. Demgemäß sollte die ganze Antenne wie $^3/_4 \lambda$ mit dem Schwingungsbauch am Ende in Schwingungen gebracht werden. Davon konnte man sich durch das Verschieben des vertikalen Drahtes in der Richtung der Antenne, längs dieser überzeugen. Der Draht stand in Verbindung mit dem auf die Welle $\lambda = 94,6$ cm abgestimmten Lecherschen System. Bei weiteren Messungen (die auf Tab. II nicht angegeben sind) wurde e_{MD} auf 37,5 Volt herabgesetzt (Antenne 40 cm), wobei sich die Wellenlänge nicht änderte. Bei Verlängerung der Antennen nahm die Wellenlänge nur allmählich zu und die Oszillationsintensität blieb gering. Das hing offenbar mit der Dämpfung in den Ableitungen zusammen, und zwar war bei diesen Ableitungen jetzt der Spannungsknoten an der Stelle, wo sich diese zur Schnur verbanden. Um den Einfluß von den Zuleitungen zu beseitigen, ersetzt man die Antennen durch Röhrchen, die vom Gitter und von der Platte parallel ausgingen und deren Länge gewechselt werden konnte und deren Enden durch einen Kondensator von 250 cm überbrückt waren. Von diesen führten zusammengedrehte Leiter zum Widerstand R und zur Gitterbatterie. Die Länge der Röhrchen vom unteren Ende der Elektronenröhre zum Kondensator ist mit 1 bezeichnet. Aus Tab. III ist ersichtlich, daß hier wie im früheren Fall an den Antennen, jetzt die Wellenlänge von der Länge der parallelen Leiter 1 abhängig ist. Der Längenänderung dieser von 25 cm auf 54,5 cm entspricht jedoch die Wellenänderung von 94 cm auf 115 cm. Aus dem zweiten Teile der Tab. III ersieht man bei $1 = 25$ cm, daß die Wellenlänge praktisch von der Elm. Kraft zwischen Gitter und Platte nicht abhängig ist. Dagegen aber war es bei $1 = 45$ möglich, durch Abänderung dieser Elm. Kraft von 44 Volt auf 84 Volt eine Änderung der Wellenlänge von 111 cm auf 100 cm auszulösen. Wäre die Änderung der Wellenlänge indirekt proportional der Wurzel der Elm. Kraft, müßte sich die Welle in unserem Fall von 111 cm auf 80 cm ändern und daher ist wirkliche Verkürzung viel geringer.

Aus den angeführten Beobachtungen geht hervor: das günstigere Verhältnis d bei den Röhren Mars X ermöglicht unter Beibehaltung der konstanten äußeren Elm. Kräfte die Oszillationen, und zwar in einem viel breiteren Bereich der Schwingungszahl als es bei Röhren mit kleinerem d der Fall ist, ein Umstand, der mit der Theorie gut übereinstimmt. Änderungen am Oszillationssystem verursachen ebenso Änderungen der Wellenlänge, und zwar so: wenn man das System vergrößert, so vergrößert sich anfangs die Wellenlänge viel langsamer, als es der Vergrößerung des Systems entsprechen sollte, dann aber wächst sie innerhalb eines bestimmten, relativ engen Grenzgebiets gleichmäßig mit der Systemvergrößerung, jedoch nimmt bei einer weiteren Systemvergrößerung die Wellenlänge immer langsamer zu. Die Oszillationen werden dabei immer schwächer bis sie endlich gänzlich aufhören. Es ist ersichtlich, daß die Wellenlänge nicht nur durch das angeschlossene System, sondern auch durch die Verhältnisse innerhalb der Leitungsbahn bedingt ist. Man muß sich dessen bewußt sein, daß die Intensität des alternierenden Stroms innerhalb der Bahn eigentlich immer als phasenmäßig zu der Elm. Kraft verschoben erscheint. Und zwar, geht man von kleinen Schwingungszahlen aus, so ist anfänglich die Elm. Kraft e_{MD} mit der Stromintensität in Phase. Mit wachsender Schwingungszahl bleibt die Intensität immer mehr

und mehr in der Phase zurück, bis endlich bei einer bestimmten Schwingungszahl die Verschiebung gleich π ist. In diesem Fall besitzt die Intensität zahlenmäßig wieder gleiche momentane Werte wie bei den sehr kleinen Schwingungszahlen, von denen sie sich aber durch das Vorzeichen unterscheidet. Die Bahn verhält sich bei dieser Schwingungszahl wie ein konstanter negativer Widerstand, so z. B. wie etwa der elektrische Bogen bei kleinen Amplituden und bei einer kleinen Schwingungszahl. In diesem Falle hat die Bahn keinen Einfluß auf die Schwingungszahl der Oszillationen, die durch die Thomsonsche Formel ($\lambda = 2\pi\sqrt{LC}$) gegeben ist. Im Hinblick auf diesen Punkt entsteht nun bei höheren Schwingungszahlen eine Phasen-Verspätung der Intensität gegenüber der Elm. Kraft, geradeso wie sie bei dem Bogen durch Einfluß von Hysterese zu entstehen pflegt. An der Seite kleinerer Schwingungszahlen erscheint dagegen die Intensität gegen die Elm. Kraft voraus. Im ersteren Fall verursacht die Phasenverschiebung im Oszillationskreis dieselbe Änderung wie die Einschaltung einer Selbstinduktion, und zwar eine um so größere, je größer die Phasenverschiebung ist. Die wirkliche Schwingungszahl ist kleiner, als sie dem Ausmaße des Oszillationssystem entsprechen sollte. Diese Abweichung von der Thomsonschen Formel wurde bereits früher bei dem elektrischen Bogen beobachtet[1]). Dementgegen erscheint an der Seite der kleineren Schwingungszahlen die Intensität der Elm. Kraft vorausgehend, was ähnlich wirken muß wie die Einschaltung der Kapazität in den Kreis, und zwar einer um so geringeren als die Verschiebung in der Phase größer ist. Die Wirkung der Phasenverschiebung muß also als Verkürzung der wirklichen Wellenlänge gegenüber der berechneten zutage treten, was wieder mit den oben angeführten Messungsresultaten völlig übereinstimmt.

3. Das einer ganzen Reihe von Methoden zur Erzeugung der kurzen elektromagnetischen Wellen gemeinsame Kennzeichen ist der Umstand, daß in dem Raum zwischen den Elektroden, der die oszillationsfähige Bahn bildet, ein doppelter Elektronenstrom besteht. In der einen Richtung läuft der konstante Strom. Beispielsweise bei der Triode zwischen Gitter und Platte in der Richtung vom Gitter, oder bei der Diode (Magnetron), der von der Kathode zur Anode laufende Strom. Der zweite Elektronenstrom hat eine entgegengesetzte Richtung und seine Intensität ändert sich periodisch nach der Periode der Elm. Kraft des angeschlossenen Oszillationssystems. Bei der in dieser Arbeit benutzten Methode entstehen nun diese Änderungen dadurch, daß den Elektronen, die durch das Gitter einfliegen, verschiedene Geschwindigkeiten zukommen. Die Variation der Geschwindigkeit wird dabei vom Gefälle des Kathodenpotentials bestimmt. (v_t Heizstrom.) Bei der Methode Gill-Morell wird die Intensitätsänderung durch die verschiedene sekundäre Elektronenemission auf der Platte herbeigeführt, die ihrerseits von den Änderungen der Gefällegeschwindigkeit des konstanten (primären) Elektronenstroms veranlaßt worden ist, beim Magnetron erscheint (durch das magnetische Feld) der konstante Teil der Elektronen von der Anode abgekehrt. Änderungen der Elm. Kraft an den Elektroden rufen Änderungen der Intensität der einfallenden Ladung hervor und hiermit auch Änderungen der Intensität des zurücklaufenden Elektronenstroms.

Wir werden also im weiteren die Eigenschaften der Leitungsbahn erwägen, die durch zwei Elektroden begrenzt ist. Von diesen wird eine zur Quelle der veränderlichen Elektronenemission (Kathode), während die andere ein positives Potential gegenüber der ersten (Anode) haben wird. Zwischen Kathode und Platte (Anode) möge nebst der konstanten Elm. Kraft e_D, eine mit der ersten in Serie eingeschaltete veränderliche Elm. Kraft $e_0 \sin \omega t$ wirken. Die statische Charakteristik der Bahn ist eine steigende; denn, wenn wir die Potentialdifferenz zwischen Platte und Kathode vergrößern, vergrößert sich auch innerhalb der Röhre die Intensität in dieser Richtung.

Gehen wir von der Bewegungsgleichung des sich von der Kathode zur Platte bewegenden Elektrons aus

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = e e_D f(x) + e e_0 \cdot \sin \omega t \cdot f(x)\,,$$

wo $f(x)$ die Funktion ist, die die Art des Potentialgefälles zwischen den Elektroden angibt und durch die Form und Größe der Elektroden bestimmt ist. Im Falle von Ebenenelektroden ist $f(x) = 1/d$ eine Konstante (d bezeichnet die Entfernung beider Elektroden). Es gibt dann:

$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{e}{m}(e_D + e_0 \sin \omega t) \cdot \frac{1}{d}\,. \qquad (1)$$

Durch Integration bekommen wir für die Geschwindigkeit in einem Moment t, falls sich die Ladung von der Kathode in der Zeit t_0 angefangen hat zu bewegen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \cdot \frac{e_D}{d}(t - t_0) + \frac{e}{m} \cdot \frac{e_0}{d} \cdot \frac{1}{\omega}(\cos \omega t_0 - \cos \omega t)\,.$$

1) H. Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung. 1907, S. 70.

Der zweite Teil des Ausdrucks rechts ist für $\omega = 0$ gleich Null und für große Frequenzen kann man immer den Ausdruck $\frac{e_0}{d} \cdot \frac{1}{\omega}$ gegenüber $\frac{e_D}{d}$ vernachlässigen. Also gilt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \cdot \frac{e_D}{d} (t - t_0) . \qquad (1')$$

Aus dieser Gleichung resultiert dann infolge weiterer Integration für diejenige Zeit, die verstreicht, bevor das Elektron von der Kathode zur Anode gelangt,

$$\vartheta = d \sqrt{\frac{2m}{e} \cdot \frac{1}{e_D}} . \qquad (2)$$

Die auf ein Elektron wirkende Kraft ist nach (1)

$$f = \frac{e}{d} (e_D + e_0 \sin \omega t) .$$

Die Arbeit, die durch diese Kraft bei der Bewegung des Elektrons von der Kathode zur Anode geleistet worden ist, ist dann durch das Integral

$$\begin{aligned} A &= \int_0^d f \cdot dx = \frac{e}{m} \cdot \frac{e e_D}{d^2} \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} (e_D + e_0 \sin \omega t) \cdot (t - t_0)\, dt \\ &= \frac{2e}{\vartheta^2} \left\{ \frac{1}{2} \vartheta^2 e_D - e_0 \left[\frac{\vartheta}{\omega} \cos \omega (t_0 + \vartheta) + \frac{1}{\omega^2} (\sin \omega t_0 - \sin \omega (t_0 + \vartheta)) \right] \right\} \\ &= e \left\{ e_D - \frac{2 e_0}{\omega \vartheta} \cos \omega (t_0 + \vartheta) + \frac{2 e_0}{(\omega \vartheta)^2} [\sin \omega (t_0 + \vartheta) - \sin \omega t_0] \right\} \\ &= e \left\{ e_D - \frac{2 e_0}{\omega \vartheta} [\cos \omega t_0 \cdot \cos \omega \vartheta - \sin \omega t_0 \cdot \sin \omega \vartheta] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 e_0}{(\omega \vartheta)^2} [\sin \omega t_0 \cdot \cos \omega \vartheta + \cos \omega t_0 \cdot \sin \omega \vartheta - \sin \omega t_0] \right\} \end{aligned} \qquad (3)$$

gegeben.

Die Energie, welche die elektromotorischen Kräfte e_D und $e_0 \sin \omega t$ in einer Sekunde liefern, ist im Hinblick darauf, daß zur Zeit t_0 von der Kathode die Elektronenanzahl in der Zeit dt ausgeht, nach der Voraussetzung:

$$dN = \frac{1}{e} (i_D + i_0 \sin \omega t_0)\, dt$$

gleich:

$$E_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} A \cdot dN = e_D i_D + \frac{e_0 i_0}{\omega \vartheta} \sin \omega \vartheta + \frac{e_0 i_0}{(\omega \vartheta)^2} [\cos \omega \vartheta - 1] . \qquad (5)$$

Im Hinblick darauf, daß $\cos \omega \vartheta - 1 = -2 \sin^2 \frac{\omega \vartheta}{2}$ ist, bekommen wir für die in der Zeiteinheit gelieferte Energie den Ausdruck

$$E_k = e_D i_D + e_0 i_0 \left[\frac{\sin \omega \vartheta}{\omega \vartheta} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\omega \vartheta}{2}}{\left(\frac{\omega \vartheta}{2} \right)^2} \right] . \qquad (6)$$

Wir wollen nun den Wert dieser Energie für bestimmte Werte $\omega \vartheta$ untersuchen.

a) Ist $\omega \vartheta$ äußerst gering, was bedeuten soll, daß die Periode der wechselnden Elm. Kraft im Verhältnis zum Zeitraume, binnen dessen das Elektron die Strecke Kathode—Platte durchfliegt, groß erscheint, ist

$$E_k = e_D i_D + \frac{e_0 i_0}{2} .$$

Der Ausdruck $e_D i_D$ bedeutet aber die durch die Quelle der konstanten Elm. Kraft abgegebene Energie. Es mußte demnach die Quelle der periodischen Elm. Kraft das Energiequantum $\frac{e_0 i_0}{2}$ liefern und das stimmt mit der Wirklichkeit überein, denn die statische Charakteristik der Diode ist eine steigende.

Bei geringen Schwingungszahlen verhält sich die erwogene Leitungsbahn der periodischen Elm. Kraft gegenüber wie ein Ohmscher Widerstand.

b) Für $\omega \vartheta = 2 \pi k$ ist

$$\frac{\sin \omega \vartheta}{\omega \vartheta} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\omega \vartheta}{2}}{\left(\frac{\omega \vartheta}{2} \right)^2} = 0$$

und demnach

$$E_k = e_D i_D .$$

Ist der Zeitraum, in welchem das Elektron die Strecke Kathode—Platte durchläuft, das gesamte Vielfache der Schwingungsdauer der periodischen Elm. Kraft, so besteht zwischen dieser und der periodischen Intensität die Phasenverschiebung $\pi/2$.

c) Den eingeklammerten Teil des Ausdrucks (6) kann man auch schreiben wie folgt:

$$\eta = \frac{2 \sin \frac{\omega \vartheta}{2}}{\omega \vartheta} \left(\cos \frac{\omega \vartheta}{2} - \frac{1}{\omega \vartheta} \sin \frac{\omega \vartheta}{2} \right). \quad (7)$$

Wir wollen nun die Fälle kennenlernen, in denen dieser Ausdruck gleich Null ist. Das kommt vor, wenn

I. $\frac{\sin \omega \vartheta}{\frac{\omega \vartheta}{2}} = 0$, das ist für $\omega \vartheta = 2\pi k$,

$k = 1, 2, 3 \ldots$

Die zweite Reihe der genügenden Werte sind die Wurzeln der Gleichung

II. $$\operatorname{tg} \frac{\omega \vartheta}{2} = \omega \vartheta,$$

was der annullierte Ausdruck in der Klammer (7) ist. Bestimmen wir aus den Wurzeln der Gleichungen I und II die Werte der Verhältnisse τ/ϑ und ordnen wir sie nach der Größe, so bekommen wir

$$\frac{\tau}{\vartheta} = \infty, 2{,}7, 1, 0{,}68, 0{,}50, 0{,}40, 0{,}33, 0{,}29 \text{ usw.}$$

Für diese Werte, die zum Teile mit den in b) erhaltenen Werten als kongruent erscheinen, ist immer die durch die Quelle der Elm. Kräfte aufgebotene Energie binnen einer Sekunde wieder gleich

$$E_k = e_D i_D.$$

Da außer den hier angegebenen Werten keine solchen vorkommen, die den Ausdruck (7) Null gleich setzen, begrenzen diese abwechselnd die Bereiche, innerhalb deren der Ausdruck (7) einmal positiv, das zweitemal negativ ist. Wir wollen nun diese Bereiche feststellen, und kennzeichnen zugleich das entsprechende Vorzeichen des η (7).

I.	$\infty \geqq \tau \geqq 2{,}7\,\vartheta$	$\eta > 0$	$0 < \vartheta < 0{,}37\tau$	
II.	$2{,}7\,\vartheta \geqq \tau \geqq 1\,\vartheta$	$\eta < 0$	$0{,}37\,\tau < \vartheta < \tau$	
III.	$1\,\vartheta \geqq \tau \geqq 0{,}68\,\vartheta$	$\eta > 0$	$\tau < \vartheta < 1{,}47\tau$	
IV.	$0{,}68\vartheta \geqq \tau \geqq 0{,}50\,\vartheta$	$\eta < 0$	$1{,}47\tau < \vartheta < 2{,}0\tau$	(8)
V.	$0{,}50\vartheta \geqq \tau \geqq 0{,}40\,\vartheta$	$\eta > 0$	$2{,}0\,\tau < \vartheta < 2{,}5\tau$	
VI.	$0{,}40\vartheta \geqq \tau \geqq 0{,}33\,\vartheta$	$\eta < 0$	$2{,}5\,\tau < \vartheta < 3\,\tau$	
VII.	$0{,}33\vartheta \geqq \tau \geqq 0{,}29\,\vartheta$	$\eta > 0$	$3\tau < \vartheta < 3{,}5\,\tau$	

Es folgen demnach hintereinander Bereiche von Schwingungszahlen die immer enger sind und innerhalb deren die erwogene Bahn abwechselnd einen positiven und negativen Widerstand hat. In den Bereichen II, IV, VI ist der Bahnwiderstand negativ und man kann daher die Bahn zur Erzeugung von Oszillationen benützen, deren Schwingungszahl durch die entsprechende Ungleichung (8) begrenzt erscheint. Weil die Wellenlänge $\lambda = c\tau$ ist, geben (8) die Wellenlängen an, die zu gewinnen sind. So ist es im Idealfall möglich durch Abänderung des Oszillationssystems, ohne die Elm. Kräfte zu ändern, im Bereich II diese Wellen zu erzeugen: $\lambda_1 = 2{,}7c\vartheta$ bis $\lambda_2 = c\vartheta$, d. i. die Wellenlänge könnte man von dem Randwerte bis auf ein Drittel herabsetzen. Der zweite Oszillationsbereich ist schon viel enger, der dritte wieder enger als der zweite usw. Während man in II nach (8) die kleinste Welle lediglich durch Abänderung des Oszillationssystems um 170 Proz. vergrößern kann, ist im Bereiche IV eine Vergrößerung nur noch um 30 Proz., im Bereiche VI lediglich 21 Proz. möglich. Bezeichnet man $\lambda_1 = c\vartheta$, so sind die mittelgroßen Wellen in den hier angeführten Bereichen $1{,}85\,\lambda_1$, $0{,}59\,\lambda_1$, $0{,}37\,\lambda_1$. Diese Wellen sind nicht harmonisch, und es steht auch in Hinblick auf das Ausmaß der Bereiche (8) nicht zu erwarten, daß beim Übergang von Bereich zu Bereich gerade die harmonischen Wellen zum Vorschein kommen.

Das, was hier für Ebenenelektroden gefunden worden ist, gilt allerdings auch für Walzenelektroden, wenigstens qualitativ. Die Feststellung und Abgrenzung der Bereiche würde vielleicht nach der quantitativen Seite hin ein wenig abweichend ausfallen, von besonderer Wichtigkeit sind aber die Änderungen hinsichtlich der Energie. Wird die Kathode zur Elektrode mit geringerem Durchmesser, so werden die energetischen Verhältnisse für Oszillationen minder günstig erscheinen, denn die von der Kathode abgehende Ladung wird sofort an der Stelle des größten Potentialgefälles sein und folgerichtig wird die Geschwindigkeit, mit der die größte Ladung auf die Anode einfallen wird, größer werden, die Wärmeverluste werden sich auf Kosten der Oszillationsenergie vergrößern. Wählt man dagegen zur Kathode die Elektrode, welche von größerem Durchmesser ist, als ihn die Anode hat, so wird die von der Kathode ausgehende Ladung anfangs in einen Raum mit geringerem Potentialgefälle sich bewegen, und wird in die Stellen ihres jähen Aufstieges evtl. gelangen, bis sich die periodische Elm. Kraft bereits mit der Zeit wesentlich verändert

hat. Also wird beispielsweise die größte Ladung auch die größte Beschleunigung erhalten, wenn die periodische Elm. Kraft von positiven Werten auf negative gesunken ist. Demzufolge wird die Beschleunigung der größten Ladung kleiner und es bleibt ein desto größerer Energieüberschuß, den man in Oszillationsenergie umsetzen kann. Den ganzen Vorgang kann man sich noch einmal kurz folgendermaßen vergegenwärtigen: Die Batterie einer konstanten Elm. Kraft e_D liefert in der Zeiteinheit in den Raum zwischen den Elektroden ein bestimmtes Energiequantum, das nicht wechselt, wenn man mit ihr in Reihe eine periodische Elm. Kraft eingeschaltet hat, denn die mittlere Intensität erfuhr hierdurch keine Änderung. Insolange es keine periodische Elm. Kraft gibt, geht die sämtliche abgegebene Energie in Wärme an der Anode bei Elektroneneinfall über. Schaltet man nun auch eine periodische Elm. Kraft ein, so ändert sich die Energie der einfallenden Ladung, und zwar so, daß sie in bestimmten Fällen wächst, dann muß der Zuwachs durch die Quelle der periodischen Elm. Kraft wettgemacht werden; in bestimmten Bereichen der Schwingungszahlen wird sie im Gegenteil geringer, d. h. der Energieüberschuß wird in Oszillationsenergie umgewandelt, so daß man als Quelle der periodischen Elm. Kraft ein oszillationsfähiges System wählen kann. Ist nun seine Dämpfung entsprechend gering, so können sich die Oszillationen dauernd erhalten.

Aus der dritten Kolonne der Ungleichungen (8) ersieht man, daß man umgekehrt eine und dieselbe Schwingungszahl $n = \frac{1}{\tau}$ in einem bestimmten Bereich für ϑ gewinnen kann. Und zwar hat man wieder eine Gruppe von Bereichen für ϑ, in denen man Wellen von bestimmter Länge gewinnen kann. ϑ ist aber von der Elm. Kraft e_D bestimmt, falls man die Entfernung der Elektroden nicht wechselt. Das bedeutet, daß man eine bestimmte Welle in einigen Bereichen der Elm. Kraft e_D gewinnen kann. In einem gegebenen Bereich kann man sie fließend ändern und immer durch eine entsprechende kleine Abänderung des Oszillationssystems dieselbe Schwingungszahl erreichen.

Der Konstruktion einer unseren Voraussetzungen genügenden Röhre stehen einige Schwierigkeiten entgegen. Denken wir an Ebenenelektroden, dann ist die Oszillationsenergie nach (6) und (7) $e_0 i_0 \cdot \eta$. Dabei ist $e_0/i_0 = e_D/i_D = R$ der Röhrenwiderstand. Ausdruck für die Oszillationsenergie kann man daher mit $E_0 = \frac{e_0^2}{R} \cdot \eta$ wiedergeben.

Bei den Dioden ist gewöhnlich der Widerstand R von der Ordnung $10^4\,\Omega$ und da wir e_0 im Verhältnis zu e_D als gering angesetzt haben, ist die Oszillationsenergie derart klein, daß sie für uns nicht zum Vorschein kommt. Es wäre notwendig eine Diode mit kleinem Innenwiderstand herzustellen, also eine mit steiler statischen Charakteristik. Vorteilhafter wäre eine Diode mit Walzenelektroden. Die Kathode muß aber als Außenelektrode gewählt werden, mit einem größeren Durchmesser als die Anode. Hierdurch aber wird wieder die Steilheit der Charakteristik verschlechtert, denn das Elm. Kraftgefälle ist in der Nähe der Kathode gering. Es wäre notwendig die Durchmesser der Elektroden klein zu wählen. Dadurch wird freilich ϑ auch kleiner und es ist daher nicht ausgeschlossen, daß man mittels einer solchen Diode noch kürzere Wellenlängen als die bisher erreichten, gewinnen könnte. Es war mir bisher nicht möglich, eine Röhre mit den hier angegebenen Eigenschaften herzustellen und daher werde ich die Resultate der Theorie an Hand der im ersten Teile der Arbeit benützten Methode verifizieren.

4. Bei dieser Methode kann man sich den Vorgang im Raume Gitter—Platte so vorstellen: der durchs Gitter eintretende konstante Strom bringt in jeder Sekunde ein gleich großes Quantum Energie mit, so daß er sich wie eine die konstante Energie in der Sekunde liefernde Batterie benimmt. In der Richtung von der Platte zum Gitter fließt der Elektronenstrom, dessen Intensität in der Nähe der Platte der Elm. Kraft zwischen Platte und Gitter proportional ist. Also beziehen sich die Ausführungen der vorigen Abteilung (3) der Arbeit auf ihn. Ein Unterschied besteht nur darin, daß beim Entstehen der Oszillationen ein Teil der gelieferten Energie an der Platte in Wärme umgesetzt wird. Im ersten Teile dieser Arbeit ist nun gezeigt worden, daß diese Verluste bei Ebenenelektroden größer sind als die gewonnene Energie nach (6) und daß daher bei Ebenenelektroden überhaupt keine Oszillationen entstehen können. Erst bei Benutzung von Walzenelektroden, wo $d = r_D/r_G > 2$, ist der Gewinn nach der zu (6) analogen Gleichung größer als die Verluste an der Platte und die Oszillationen sind möglich. Nach (8) existiert nun eine ganze Reihe von Bereichen, wo der zweite Teil des Ausdrucks an der rechten Seite der Gleichung (6) negativ ist. Ist der Verlustzuwachs in der Platte bei der Oszillationsentstehung kleiner als dieser negative Wert, müßte es möglich sein, auch in diesen weiteren Bereichen Oszillationen zu gewinnen. Weil nun die Energie, die man in Oszillationen umsetzen kann, im zweiten, dritten usw. Bereich immer kleiner ist, so ist es klar, daß bei

den Ebenenelektroden, da man in dem ersten Bereich keine Oszillationen erzeugen kann, um so weniger die Möglichkeit besteht, solche in den weiteren Bereichen gewinnen zu können. Bei den Walzenelektroden dagegen ist diese Möglichkeit nicht ausgeschlossen. Im ersten Teil dieser Arbeit habe ich darauf (S. 13) hingewiesen. Durch die Ungleichungen (8) wurde die Breite der einzelnen Oszillationsbereiche festgesetzt. In unserem Falle aber wird die Breite der Bereiche unter dem Einfluß des Verlustzuwachses in der Platte bei Oszillationenentstehung wesentlich vermindert.

Ich habe den Versuch unternommen, diese weiteren Bereiche unter abermaliger Benutzung der Röhre Mars *X* zu finden. Für

$i_a = 1{,}05\,MA$, $R = 6{,}10^4\,\Omega$ und daher $e_D = 63$ Volt

wurde es möglich zwei Oszillationsbereiche zu gewinnen, lediglich durch Änderung der Ausmaße des angeschlossenen Oszillationssystems (Antennen a). Für $a = 18$ cm fand ich die Wellenlänge $\lambda = 110$ cm, bei der allmählichen Kürzung der Antennen sank sie jäh, und zwar

bei $a = 16$ cm fand ich die Wellenlänge $\lambda = 54$ cm
bei $a = 6$ cm fand ich die Wellenlänge $\lambda = 48$ cm.

Während die erste Welle mit den schon früher gefundenen Wellen übereinstimmt, welche dem ersten Oszillationsbereich angehören, gehört die zweite Welle, da die Elm. Kraft e_D unverändert geblieben ist, offensichtlich dem zweiten Bereich an. Nach (8) ist die mittlere Welle des zweiten Bereiches $\lambda_2 = 0{,}39\,\lambda_1$ für Ebenenelektroden.

In unserem Falle würde unserer Mittelwelle des zweiten Bereiches $\lambda_2 \doteq 50$ cm die mittlere Welle im ersten Bereich $\lambda_1 = 128$ cm entsprechen. Nach Tab. II befindet sich bei gegebenem $e_D = 63$ Volt die gefundene Welle $\lambda = 110$ cm am Rande der kürzeren Wellen des ersten Bereichs. Im Bereich war es möglich die Wellenlänge von 96 cm bis 150 cm abzuändern, so daß die mittlere Welle des Bereiches $\lambda \doteq 123$ cm war. Diese steht mit λ_1 ganz gut in Übereinstimmung. Da es nur mittels Abänderung des Oszillationssystems möglich ist, die Welle $\lambda = 54$ cm auf $\lambda' = 48$ cm abzuändern, wobei die Oszillationen noch intensiv genug waren, so daß es möglich wäre, die Wellenlänge noch weiterhin zu verkürzen, gehört der gegebenen Elm. Kraft e_D wiederum der ganze Wellenbereich an, freilich ein viel engerer als derjenige des ersten Bereichs, was wieder in Übereinstimmung steht mit den Folgerungen der Theorie (Ungleichungen [8]).

Viel leichter waren weitere Bereiche aufzufinden, wenn man zur Oszillationserzeugung zwei parallel eingeschaltete Röhren benutzt hat. Fig. 3 zeigt den Sockel für beide Röhren. Es ist eine Ebonitplatte, in die 3 cm lange Messingröhrchen gut passend eingelassen wurden, die mit den Klemmen *s* leitend verbunden wurden. Ein hölzernes Stäbchen *p* hielt den Sockel in der Höhe ca. 40 cm über der Tischebene. Beide Elektronenröhren wurden beiderseits des Sockels derart eingeschoben, daß sich innerhalb der Röhrchen die Füße der Elektronenröhren gegebenenfalls berührten. Die Ableiter von den Klemmen wurden sofort zu einer einzigen nach unten gerichteten Schnur gewunden. Bei dieser Schaltung zeigte sich, daß die Oszillationen nun in sehr geringem Maße in ihrer Intensität von

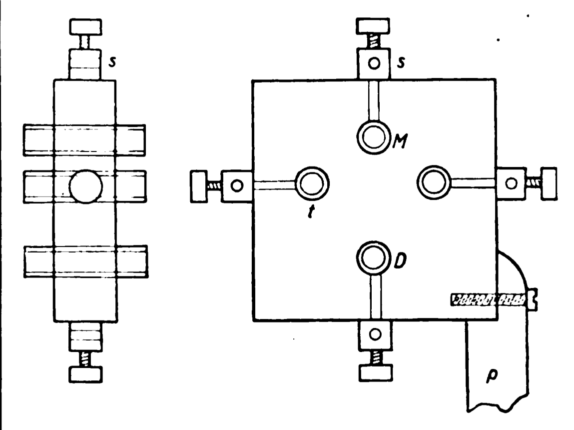


Fig. 3.

den Zuleitungen beeinflußt werden, besonders für den zweiten und für den dritten Bereich. Auch der Anschluß von Antennen in der Nähe der Klemmen *s* hatte einen geringen Einfluß auf die Wellenlänge, wie noch nachgewiesen werden wird. Aus welchem Bereich die Oszillationen bei der gegebenen Elm. Kraft e_D kommen, das entschied die Intensität des Heizstromes. Manchmal stellten sich bei höherer Heizintensität Oszillationen des ersten Bereichs, bei niedrigerer Oszillationen des zweiten, evtl. auch des dritten Bereiches ein, sonst aber auch umgekehrt. So z. B.:

i_t Amp.	e_D Volt.	λ cm	Oszillationsintensität
0,122	$\geqq$ 106	—	oszilliert nicht
0,122	105	45,6	wenig intensiv
0,122	100	46	intensiv
0,122	96	46	minder stark
0,122	94	—	oszilliert nicht
0,128	100	89	intensiv

Aus den angeführten Daten ist zugleich ersichtlich, daß man im zweiten Bereich gerade so wie im ersten wiederum innerhalb gewisser Grenzen die Elm. Kraft abändern kann, ohne daß sich die Wellenlänge praktisch änderte. Es ändert sich dabei nur die Oszillationsintensität.

Das Oszillationssystem wird dabei durch die Elektroden und durch ihre Ableiter gebildet. Durch Verschieben eines senkrecht auf der gemeinsamen Achse der Röhre stehenden und mit einem abgestimmten Lechersystem verbundenen Drahtes konnte man sich überzeugen, daß bei den Klemmen der Spannungsknoten, an den Elektroden aber die Spannungsbäuche liegen. Änderte man die Länge dieses Systems durch Verschiebung der Gußstifte in den Röhrchen am Sockel und bezeichnete man die Entfernung der unteren Isolationsflächen der Röhren l, so fand man:

$i_t = 0{,}122$ Amp.	$e_D = 95$ Volt	$l = 4{,}0$ cm	$\lambda = 46$ cm
$i_t = 0{,}122$ Amp.	$e_D = 95$ Volt	$l = 5{,}0$ cm	$\lambda = 47$ cm
$i_t = 0{,}122$ Amp.	$e_D = 95$ Volt	$l = 6{,}2$ cm	$\lambda = 48$ cm
$i_t = 0{,}129$ Amp.	$e_D = 97$ Volt	$l = 6{,}2$ cm	$\lambda = 86$ cm
$i_t = 0{,}128$ Amp.	$e_D = 100$ Volt	$l = 6{,}2$ cm	$\lambda = 89$ cm

Mit der Vergrößerung des Systems wenigstens innerhalb der kleinen hier angeführten Grenzen, wuchs wiederum die Wellenlänge und die Vergrößerung der Heizintensität hatte wieder das Hinüberschwenken der Oszillationen in den ersten Bereich zur Folge, gleichzeitig tritt ein bedeutender Einfluß auf die Wellenlänge hervor, der durch den Wechsel des Heizstroms verursacht ist. Die Herabsetzung der Heizintensität um ein Tausendstel Ampere bewirkt bei gleichzeitiger Steigerung der Elm. Kraft zwischen Platte und Gitter um 3 Proz. eine Verlängerung der Welle um 3 cm. Die am Lechersystem zustandegekommenen Maxima waren bei diesen Messungen so scharf, daß man sie wiederholt bis auf einen Millimeter auffinden konnte.

Während bei Benutzung von einer Röhre die Antennen einen wesentlichen Teil des Oszillationssystems bildeten, durch deren Änderung man wesentlich die Wellenlänge abändern konnte, hatten die Antennen bei Benutzung von zwei Röhren und unter Befestigung der Antennen in der Nähe des Spannungsknotens, also an den Klemmen s, auf die Wellenlänge keinen Einfluß. Stellte man sie senkrecht zur Richtung der gemeinschaftlichen Röhrenachse, so konnte man die von ihnen ausgestrahlten Wellen in ihrer Abhängigkeit von ihrer Länge verfolgen. In der folgenden Tafel bedeutet a die Länge der Antennen, von denen die eine wieder an die Plattenklemme, die zweite an die Gitterklemme angeschlossen ist, max zeigt die Lage der Brücke an Lecher-Drähten für die drei nacheinanderfolgenden Maxima der Galvanometerausschläge, α bedeutet die Größe des ersten Maximums, welches in Teilstrichen der Skala ausgedrückt ist:

a		8,5	10	10,5	11	11,5	12	13	15 cm
max		33	33	33	33	33	33	33	33 cm
		56	56	56	56	56	56	56	56 cm
		79	79	79	79	79	79	79	79 cm
α		47	59	65	66	65	56	21	7 mm

Die Wellenlänge ist für a in den Grenzen von 8,5 cm bis 15 cm vollständig konstant und gleich $2 \cdot 23 = 46$ cm. Dagegen wechselt die von den Antennen ausgestrahlte Energie, indem sie bei $a = 11$ cm ihr Maximum erreicht, worauf sie mit dem Anwachsen der Antennen viel schneller sinkt, als sie vor dem Maximum gestiegen ist.

Zu den Versuchen wurden im ganzen 6 Röhren Mars X verwendet, die in vielen verschiedenen Paaren benutzt worden sind, wobei man immer Oszillationen finden konnte. Ich führe im weiteren einige Fälle an. Die im Rahmen stehenden Zahlen bedeuten die Nummern bestimmter Röhren.

1,2	$i_t = 0{,}140$ Amp.	$e_D = 100$ Volt	$\lambda = 46$ cm
1,3	$i_t = 0{,}140$ Amp.	$e_D = 49$ Volt	$\lambda = 110{,}4$ cm
	0,148 Amp.	63	51 cm
	0,150 Amp.	90	23,3 cm
	0,150 Amp.	100	23,1 cm
1,4	$i_t = 0{,}118$ Amp.	$e_D = 40$ Volt	$\lambda = 124$ cm
	0,142 Amp.	56,4 Volt	$\lambda = 111$ cm
	0,154 Amp.	113 Volt	$\lambda = 56$ cm
4,5	$i_t = 0{,}152$ Amp.	$e_D = 113$ Volt	$\lambda = 45{,}2$ cm
	0,142 Amp.	47 Volt	113,2 cm
1,5	$i_t = 0{,}154$ Amp.	$e_D = 80$ Volt	$\lambda = 92{,}4$ cm
1,6	$i_t = 0{,}156$ Amp.	$e_D = 80$ Volt	$\lambda = 46{,}2$ cm
2,3	$i_t = 0{,}152$ Amp.	$e_D = 100$ Volt	$\lambda = 47$ cm

Interessant ist besonders die Kombination der Röhre Nr. 1 und Nr. 3, wobei durch Wechsel der Elm. Kraft e_D von 49 Volt auf 100 Volt fortschreitend Wellen 110,4 cm, 51 cm und 23,1 cm erreicht wurden, die offenbar drei verschiedenen Bereichen angehören. Kombinationen von Röhren Nr. 1 und 4 und Nr. 4, 5 liefern unter gleichen Bedingungen die Wellen 56 cm und 45,2 cm. Sehr deutlich zeigte sich die Verschiebung aus dem einen in den anderen Bereich bei dem Paar von Röhren Nr. 1, 5, wie folgende Tabelle angibt:

$i_t = 0{,}142$ Amp.

e_D Volt	90	91	92,5	93	100	101	113	115
λ cm	49,0	23,4	23,4	23,2	23,0	nichtosz.	46,0	45,6

Die Intensität des Heizstromes (i_t) war dabei konstant. Die Welle 49 cm bei $e_D = 90$ Volt, die den früheren Erfahrungen gemäß dem zweiten Oszillationsbereich gehörte, ging plötzlich bei $e_D = 91$ Volt in Oszillation über, die kürzer als die halbe Länge, $\lambda = 23{,}4$ cm, war und daher dem dritten Oszillationsbereich angehörte. Die Steigerung e_D um weitere 9 Proz. veranlaßte die Kürzung dieser Welle um nicht ganze 2 Proz., so daß wir wieder ersehen, daß es wieder einen, nur aber einen äußerst engen Bereich der Elm. Kraft gibt, in welchem es möglich ist, elektromagnetische Wellen zu erzeugen, deren Länge nur in geringem Maße von der Elm. Kraft abhängt (e_D). Bei $e_D = 101$ Volt hören die Oszillationen auf. Erst bei 113 Volt kamen sie wieder zum Vorschein, aber es entspricht ihnen die Welle 46 cm. Es sind also wieder die Oszillationen in den zweiten Bereich übergegangen. Es war möglich, auch Oszillationen des ersten Bereichs zu gewinnen, wenn innerhalb der Grenzen 101—113 Volt, wo es keine Oszillationen gab, die Intensität des Heizstroms gesteigert worden ist. So wurde z. B. gefunden

$$i_t = 0{,}160 \text{ Amp.}, \quad e_D = 105 \text{ Volt}, \quad \lambda = 86 \text{ cm}.$$

Es gab aber auch Fälle, wo zugleich zwei Wellen zweier Bereiche zum Vorschein kamen. Ich führe abermals als Beispiel an, die Messung an einem Röhrenpaar Nr. 1, 5. n bedeutet die Lage der Brücke des Lecherschen Systems am Punkte des Maximums, α den entsprechenden Ausschlag des Galvanometers, Δ dann die Differenzen der n für die einander entsprechenden α.

n cm	13,5	17,5	25,4	37,3	41,6	49,2	61,1	65,8	73,0
α mm	100	74	96	95	74	94	93	75	93
Δ cm	—	—	11,9	11,9	24,1	11,9	11,9	24,2	11,9

Es entstanden also gleichzeitig die Wellen $\lambda_1 = 23{,}8$ cm und $\lambda_2 = 48{,}3$ cm.

Die oben angeführten experimentellen Erfahrungen zeigen, daß man bei gegebener Anordnung elektromagnetische Wellen gewinnen kann, deren Länge einerseits vom Oszillationssystem, andererseits von der verwendeten Elm. Kraft abhängt. Bei unverändertem Oszillationssystem und im kleinen Grenzbereich der Elm. Kraft e_D kann man drei Wellen gewinnen, deren Längen nahezu ganze Brüche derselben Zahl sind, aber nicht genau, so daß es keine harmonischen Wellen sind. Bei der längsten Welle kann man die Elm. Kraft e_D in einem recht breiten Grenzbereich abändern, ohne daß sich die Welle wahrnehmbar geändert hätte. Auch den zwei anderen Wellen entsprechen gewisse, nun aber bedeutend engere Bereiche der Elm. Kraft e_D, in denen sich die Wellenlänge nur wenig ändert. Einen wesentlichen Einfluß auf das Erscheinen der Wellen, hat der Heizstrom.

Es wurden aber auch zwei Wellen gewonnen, die zwei benachbarten Bereichen angehörten. Die Resultate stehen in guter Übereinstimmung mit den Folgerungen der oben angeführten Theorie.

5. Wählt man bei der hier zur Wellenerzeugung benutzten Methode den Widerstand zwischen Gitter und Platte recht groß, so daß der konstante Strom in der Platte i_D gering ist und steigert man die Gitterspannung allmählich von Null ab, so entstehen die Oszillationen unter bestimmter Spannung. Dabei zeigt es sich, daß sich im Augenblick der Oszillationsentstehung der Plattenstrom i_D einigermaßen verstärkt. Die Steigerung rührt her offensichtlich von der Krümmung der Charakteristik an ihrem Ende, an dem nun die Röhre tätig ist. Die Vergrößerung i_D entspricht der Vergrößerung der Verluste im Widerstand R. Da sich die von dem Gitterkreis gelieferte Energie nicht ändert, ist es klar, daß dies auf Kosten der Oszillationsenergie geschehen ist. Der Spannungsbereich in welchem Oszillationen möglich sind, muß sich daher verengen. Ersetzen wir den Widerstand R durch eine Batterie, die eine größere Elm. Kraft hat, als die Gitterspannung ausmacht, und schalten wir diese mit dem negativen Pol an die Platte ein, wird die Platte mehr negativ als die Kathode und wir gehen hiermit zu der Methode Barkhausen-Kurz über. Diese Methode ist dadurch gekennzeichnet, daß die Länge der gewonnenen



Wellen nur von den benutzten Elm. Kräften abhängt. Beim Oszillationseintritt erscheint im Kreis Platte—Gitter ein die Plattenbatterie ladender Strom, der eine höhere Elm. Kraft besitzt als die Gitterbatterie. Das Auftreten dieses Stroms kann man sich durch das Entstehen einer virtuellen Kathode in der Nähe der Platte als die Folge einer starken Raumladung erklären[1]). Ist der Strom einmal entstanden, dann sind die für die Entstehung der Oszillationen notwendigen Bedingungen dieselben wie bei der in dieser Arbeit benutzten Methode, denn die Elm. Kraft wird wieder periodische Schwankungen des Stromes P.—G. hervorbringen.

Da nun ein Teil der Elektronen, die jetzt auf die Platte einfallen, die Plattenbatterie ladet, und also dieser ein größeres Energiequantum abgibt, als in dem Raum Kathode—Gitter gewonnen worden ist, kommt es zu einer weiteren wesentlichen Einschränkung der Oszillationsbereiche. Wird der Bereich sehr eng, so scheint dann die Länge der gewonnenen Welle nur von benutzten Spannungen abzuhängen und ist überhaupt nicht durch die angeschlossenen Systeme bedingt. Bei den zu diesem Zwecke von mir unter kleinen negativen Elm. Kräften an der Platte vorgenommenen Proben zeigte sich, daß eine Möglichkeit besteht, die Wellenlänge bei konstanter Spannung an der Platte und dem Gitter durch Vergrößerung des Oszillationssystems innerhalb der Grenzen von einigen Prozenten abzuändern. Diese Änderungen kann man nicht für Beobachtungsfehler halten, denn die Maxima erscheinen derart scharf, daß man die Wellenlänge wie üblich ohne Schwierigkeiten bis 0,1 Proz. festzustellen vermag.

Aus dieser Theorie folgt, wenn das Plattenpotential niedriger ist als das Kathoden-Potential, daß der Bereich, in welchem die Oszillationen unabhängig von der Elm. Kraft e_D erscheinen, desto enger wird, je niedriger das Plattenpotential ist. Nach (6) ist die Oszillationsenergie bei bestimmten τ und ϑ, die der Gleichung (7) genügen, dem Produkt $e_0 i_0$ proportional. Da bei der Einschränkung bei (2) e_0 im Vergleich zu e_D gering sein soll, wird man eine desto größere Energie gewinnen können, je größer e_D sein wird. Der Oszillationsbereich wird um so breiter, je höher e_D wird. Diese Folgerungen der Theorie stehen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten Kapzov-Gwosdowers[1]). Die zitierte Stelle bezieht sich zwar auf Oszillationen der Gill-Morell-Art, aber auch bei Oszillationen von der Art Barkhausen ist aus Fig. 2 in derselben Arbeit der Einfluß des angeschlossenen Systems auf die Wellenlänge ersichtlich. Die durch Kurve I und Kurve IX gekennzeichneten Oszillationen wurden durch dieselbe Röhre in den gleichen Bereichen der Elm. Kraft $e_D = e_G$ gewonnen und auch bei derselben Heizung, nur das Oszillationssystem wurde abgeändert.

I. $e_D = 50$—90 Volt $\lambda = 130$—95 cm
$= 40$—90 Volt $\lambda = 125$—90 cm.

Die Verminderung des Oszillationssystems hatte eine durchschnittliche Kürzung der Wellenlänge von 5 Proz. zur Folge.

Der Umstand, daß bei der Methode Barkhausen-Kurz die Wellenlänge ohne Anschluß irgendeines bestimmten Oszillationssystems an die Röhre den Änderungen der Elm. Kraft e_D entsprechend wechselt, läßt sich dadurch erklären, daß die Elektroden nebst ihren Ableitungen und Zuführungen eine mannigfaltige Reihe von Oszillationssystemen bilden, deren Schwingungszahlen ordnungsmäßig mit den möglichen Schwingungszahlen kongruent erscheinen, so daß man in der Praxis einen stetigen Bereich der Schwingungszahlen erzwingen kann. Der Bereich der möglichen Oszillationen ist bei bestimmter Elm. Kraft e_D, wie nachgewiesen worden ist, ein sehr enger und die Oszillationen außerhalb des Bereiches werden von der Röhre gedämpft. Bei stetiger Änderung von e_D rückt der Bereich von möglichen Oszillationen ebenfalls stetig vor und erzwingt Oszillationen der entsprechenden Schwingungszahl. Für diese Erklärung spricht auch die Erfahrung, daß Barkhausen-Kurzsche Schwingungen leichter durch kleinere Senderöhren als durch Empfangsröhren zu gewinnen sind, denn bei letzteren sind die Längenausmaße der Elektroden und Zuleitungen gewöhnlich viel zu klein für die vorkommenden Schwingungszahlen. Dagegen werden Oszillationen vom Typus Gill-Morell durch die letzteren leicht erzeugt. Diese Erklärung wird auch durch die Messungen Kapzov-Gwosdower[2]) bestätigt, die zeigten,

1) Levi Tonks (Physical Review **30**, 50, 1927) geht von der Gleichung für die Raumladung im Raume Gitter—Platte aus. Das Entstehen des Plattenstroms erklärt er eben durch die Einführung der virtuellen Kathode und zeigt, daß der Kreiswiderstand unter bestimmten Bedingungen negativ wird und daß man die Röhre dann zur Oszillationserzeugung verwenden kann.

1) (L. c. 3), S. 119. Gehen wir jetzt zur näheren Betrachtung der Eigenschaften der Schwingungen der GM-Art über, so sehen wir schon aus Fig. 2, daß die Forderung der Theorie, λ sollte von der Gitterspannung unabhängig sein, desto strenger erfüllt ist, je höher die Gitterspannung und je positiver oder je weniger negativ die Anodenspannung ist. Bei negativer Anodenspannung verkürzt sich der Bereich, in welchem die GM-Schwingungen vorkommen.

2) l. c. S. 119.

daß Barkhausen-Kurzsche Schwingungen dann entstehen, wenn im Bereich der möglichen Oszillationen die Wellen viel kürzer sind, als die Grundwelle des angeschlossenen Systems und viel länger sind als die erste Oberwelle des Systems. Dagegen entstehen Oszillationen von der Art Gill-Morell, falls die Schwingungszahl des Systems den Schwingungszahlen des möglichen Bereichs entsprechend ist.

Bei der Methode Barkhausen-Kurz kommen auch Oszillationen von höheren Bereichen vor, wie schon Scheibe[1]) gezeigt hat. Das Verhältnis zwischen der Welle des ersten und des zweiten Bereichs bewegte sich hier zwischen 1,54 bis 2,04 (Taf. VII, p. 82), was wiederum mit den Folgerungen der oben ausgearbeiteten Theorie in guter Übereinstimmung steht.

6. Einen speziellen Fall der Theorie aus dem dritten Teile dieser Arbeit bildet die Erklärung der Oszillationserzeugung durch die Methode Gill-Morell, die die sekundäre Emission (Dynatron) gebraucht[2]). Bei dieser Methode wird die Elektronenquelle von der Platte gebildet. Die Emission hängt ab von der momentanen Geschwindigkeit, mit der die primären Elektronen auf sie einfallen. Das primäre Elektron erhält eine bestimmte Geschwindigkeit v_0 zwischen Kathode—Gitter, welche durch die konstante Elm. Kraft der Gitterbatterie e_{KG} gegeben ist. Im Raume Gitter—Platte vermindert sich die Elektronengeschwindigkeit durch Einfluß der Elm. Kraft zwischen Gitter—Platte $e_{GP} = e_P + e_0 \sin \omega t$, vorausgesetzt, daß die sekundäre Emission dem momentanen Werte der Differenz der Elm. Kraft $e_{KG} - e_{GP}$ proportional ist. Die Elm. Kraft e_{GP} sinkt innerhalb der Bahn in der Richtung vom Gitter zur Platte. Das bedeutet, daß in dem Augenblick, da $e_0 \sin \omega t$ den größten Wert passiert, die sekundäre Emission am geringsten ist und daher die durch die sekundäre Emission und die Elm. Kraft e_{GP} hervorgerufene Stromintensität in der Ebene der Platte den Wert $i_P - i_0 \sin \omega t$ besitzt. Ist wiederum ϑ die Zeit, innerhalb der das Elektron die Strecke von der Platte zum Gitter durchläuft, so verläßt die Platte in der Zeit t_0 bis $t_0 + dt$ die folgende Anzahl Elektronen:

$$dN = \frac{1}{e}\,(i_P - i_0 \sin \omega t_0)\,dt. \qquad (9)$$

Dadurch ändert sich für uns in der Gleichung (5) bloß das Vorzeichen bei den Ausdrücken mit $e_0 i_0$ und die durch die Elm. Kräfte während einer Sekunde zur Bewegung der Ladung gelieferte Energie ist analog wie bei (6):

$$E_K = e_P i_P + e_0 i_0 \left\{ \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 \frac{\omega\vartheta}{2}}{\left(\frac{\omega\vartheta}{2}\right)^2} - \frac{\sin \omega\vartheta}{\omega\vartheta} \right\}. \qquad (10)$$

Dies besagt, daß dort, wo wir früher den Bereich von fallenden Charakteristiken hatten, es nunmehr steigende Charakteristiken gibt und umgekehrt. In diesem Falle ist die Berechnung ganz analog derjenigen, die schon Gill und Morell in ihrer Arbeit gefunden, so daß sie durch die Ungleichungen (8) gegebenen Bereiche, und zwar I und III durch dieselben Werte begrenzt erscheinen, welche die genannten Autoren bereits festgesetzt haben.

Für kleine Frequenzen ist nun die Charakteristik eine fallende und liefert die maximale Oszillationsenergie $e_0 i_0/2$, was zu bedeuten hat, daß sie sich bei kleinen Frequenzen benimmt wie der konstante negative Widerstand. Mit wachsender Schwingungszahl wird die Oszillationsenergie vermindert, bis sie für $\tau = 2{,}7\,\vartheta$ endlich Null wird. Es folgt dann ein Bereich mit steigender Charakteristik bis für $\tau = \vartheta$, dann wieder ein Oszillationsbereich in den Grenzen $\vartheta \geqq \tau \geqq 0{,}68\,\vartheta$. Diese zwei Bereiche haben auch die Autoren gefunden. Betreffs weiterer Bereiche existieren bis jetzt keine experimentellen Daten. Oszillationen können freilich hier nicht im ganzen Bereich gewonnen werden, hängen sie ja doch obendrein von der Dämpfung der benutzten Oszillationssysteme ab. Für die Bereichsbreite sind bei dieser Methode die Verhältnisse günstiger als bei den früher besprochenen. Auf die Platte fällt hier nämlich immerfort ein konstanter Elektronenstrom ein, so daß der ganze in einer Periode durch die oszillierende Elm. Kraft bewirkte Energieverlust null ist, zum Unterschied von den früheren Methoden, wo letzterer die Unmöglichkeit einer Oszillationserzeugung mittels der Ebenenelektrodenröhren und die Verengung der Bereiche bei zylindrischen Elektrodenröhren zur Folge hatte. Wir können also erwarten, daß es gelingt, durch die Methode Gill-Morell, die die sekundäre Emission benutzt, Oszillationen sogar bei Röhren mit ebenen Elektroden zu erzeugen.

7. Es kommt hier auch die Methode von Žáček[1]) in Betracht. Bei dieser wurde zur Erregung von kurzen Wellen die Hullsche Schaltung für das Magnetron benutzt. Der Unterschied gegenüber dem Fall, wo man sich des Magnetrons zur Erregung von langen Wellen bedient hat, liegt darin, daß das Oszil-

1) A. Scheibe, Ann. d. Phys. **73**, 81, 1924.
2) Gill u. Morell, Jahrbuch d. dr. Tel. **27**, 54—56, 1926.

1) A. Žáček, Čas. pro pěst. mat. a fysiky **53**, 378, 1923—24 (Praha).



lationssystem hier keine Änderungen des magnetischen Hilfsfeldes bewirkt, sondern, indem es an beide Elektroden gebunden ist, Variationen der Elm. Kraft zwischen Kathode und Anode hervorruft.

Erwägt man vorerst den stationären Zustand, so wird durch die Einwirkung des magnetischen Feldes ein Teil der von der Kathode zur Anode fliegenden Elektronen wieder zur Kathode zurückgekrümmt. Hierdurch vermindert sich der Strom im Kreis Platte—Kathode, der ohne die Einwirkung des magnetischen Feldes den Emissionsstrom der Kathode bildete. Steigert man bei unverändertem magnetischem Feld die Elm. Kraft e_D zwischen Kathode und Platte, steigt die Intensität innerhalb dieser Bahn und umgekehrt. Die statische Charakteristik dieser Bahn ist also eine steigende. Die Verhältnisse innerhalb der Diode sind dabei analog zu denjenigen in der Triode bei der in dieser Arbeit benutzten Methode. Wir haben hier wieder einesteils einen konstanten Elektronenstrom von der Kathode zur Platte, dem durch die konst. Elm. Kraft eine bestimmte Energie verliehen wird. Die oszillierende Elm. Kraft leistet im Hinblick auf den konstanten Strom während einer Periode eine Arbeit, die null ist. Gibt es keine oszillierende Elm. Kraft, so fällt ein Teil der Ladung auf die Platte, der andere Teil kehrt zurück, geradeso wie in der Triode. Der Unterschied ist nur der, daß das zurückkehrende Elektron in der Triode seine Energie zurückgewinnt, mit der es hinter das Gitter von der Kathode aus eingetreten ist, hier aber diese gewonnene Energie zurückgibt. Wirkt jetzt eine oszillierende Elm. Kraft, so beginnt mit ihr synchron die Intensität des rückkehrenden Stroms sich zu ändern. Um in Übereinstimmung mit früheren Erörterungen zu bleiben, betrachten wir die periodische Elm. Kraft als positiv, wenn sie wieder von der Kathode zur Platte sinkt. Dann ist die momentane Intensität des zurückfließenden Stroms in der Plattenebene mit der Elm. Kraft in Phase. In der Zeit t_0 bis $t_0 + dt$ verschiebt sich in der Plattenebene (ungefähr) folgende Anzahl Elektronen:

$$dN = \frac{1}{e}(i_P + i_0 \sin \omega t_0)\, dt.$$

Auf das zurückkehrende Elektron wirkt nun die Kraft

$$f = \frac{e}{d}(e_0 \sin \omega t - e_D),$$

denn e_D strebt in umgekehrter Richtung als das positive e_0. Wir beachten dabei die magnetischen Kräfte nicht, da sie keine Arbeit leisten. Dem Elektron aber kommt nun beim Bewegungsanfang die Energie $e \cdot e_D$ zu, die es bei der Bewegung von der Kathode zur Platte gewonnen hat. Die Arbeit, die die Elm. Kräfte bei der Bewegung des Elektrons von der Platte aus zur Kathode leisten, ist wie früher (in 3)

$$A = \int_0^d f\, dx = -e e_D + \frac{e}{d}\int_0^d e_0 \sin \omega t \cdot dx.$$

Addiert man zu der ursprünglichen Energie ee_D des Elektrons, die von den Elm. Kräften gelieferte Arbeit A, so bekommen wir die resultierende, von den Elm. Kräften tatsächlich geleistete Arbeit $A' = \frac{e}{d}\int_0^d e_0 \sin \omega t\, dx.$

Es liegt auf der Hand, daß die Berechnung wieder zu einem analogen Resultat führen würde, wie wir es in (6) erhalten haben. Es werden sich hier wiederum den Bereichen II, IV und VI usw. entsprechende Bereiche vorfinden (8), innerhalb deren wieder Oszillationen möglich sein werden. Da aber auch die Geschwindigkeit der einfallenden Elektronen synchron abwechselt und in Phase mit der Oszillations-Elm. Kraft wechselt, entstehen abermals Verluste, wie bei der Triode, die notwendigerweise die wirklichen Oszillationsbereiche im Vergleich zu den Bereichen in (8) verengen müssen.

8. Das Resultat der Arbeit kann man folgendermaßen zusammenfassen. Man hat eine gemeinsame Grundlage für die Erklärung einer Reihe der zur Erzeugung kurzer elektromagnetischer Wellen benutzten Methoden darin gefunden, daß man die Energieänderungen in der Diode mit Ebenenelektroden erwogen hat, bei der aus der Kathode ein Elektronenstrom ausgeht, der mit der äußeren periodischen Elm. Kraft synchron abwechselt. Durch die Gleichung (6) ist der Arbeitseffekt der wirkenden Elm. Kräfte gegeben. Da der Arbeitseffekt einer konstanten Elm. Kraft durch den Anschluß einer periodischen Elm. Kraft nicht abgeändert wird, bestimmt der zweite Teil des Ausdrucks die Bedingung, unter der sich die Diode wie ein positiver und unter der sie sich wie ein negativer Widerstand benimmt. Es gibt in diesem Fall eine Reihe von Bereichen, innerhalb deren bei Beibehaltung derselben Elm. Kräfte Oszillationen möglich sind. Die mittleren Wellen dieser Bereiche sind keine harmonischen Wellen.

Im weiteren ist hier nachgewiesen, daß der in der erwogenen Diode vor sich gehende Verlauf analog ist demjenigen in den Röhren bei einer Reihe von benutzten Methoden. Bei diesen erscheinen nur durch evtl. weitere Bedingungen die Oszillationsbereiche eingeschränkt.

Experimentell ist an der Hand einer bestimmten Röhrenart die Existenz dieser unter der Einwirkung derselben äußeren Elm. Kräfte stehenden Oszillationsbereiche erbracht worden. Weiter ist eine Reihe von Messungen durchgeführt worden, welche das Ausmaß des ersten Bereiches sowohl hinsichtlich der Wellenlänge, als auch der Elm. Kraft bei konstanter Wellenlänge bestimmen. Desgleichen hat man eine Reihe von Theoriefolgerungen an experimentellen Resultaten anderer angeführter Autoren verifizieren können.

Brünn, Januar 1928.

Physikalisches Institut, Masaryk Universität.

(Eingegangen 14. Mai 1928.)

Eine neue Methode unmittelbarer Steuerung der Luft durch elektrische Schwingungen.

Von Max Brenzinger und Friedrich Dessauer.

Nahezu alle Einrichtungen, die elektrische Schwingungen in akustische oder auch umgekehrt akustische Schwingungen in elektrische umsetzen, benutzen dazu ein mechanisches Zwischenglied, eine Membran, schwingende Drähte oder Metallbänder. Dadurch kommen aber Fehlerquellen herein, da es schwer ist, mechanisch schwingende Gebilde herzustellen, die einer elektrisch aufgedrückten Schwingung in dem weiten Bereich zwischen 100 und 10000 Hertz gleichmäßig und ohne Überlagerung von Eigenschwingungen folgen. Bei einem idealen Lautsprecher müßte offenbar unter Vermeidung jedes Zwischengliedes die Luft unmittelbar durch das schwingende elektrische Feld gesteuert werden. Die Umkehrung als Mikrophon bedingt eine Umsetzung der Luftwellen in elektrische Feldänderungen. Eine Beeinflussung der Luft durch elektrische Felder kann aber offenbar nur dann geschehen, wenn sie stark ionisiert ist. Eine Lösung dieses Problems ist das Kathodophon, bei dem die notwendigen Elektrizitätsträger durch einen glühenden Oxydstift geliefert werden. Wir beobachteten nun, daß Glimmentladungen unter gewissen Bedingungen von Tönen begleitet sind, deren Höhe von der Frequenz des Wechselstromes abhängt. Das brachte uns auf den Gedanken, derartige Entladungen als Lautsprecher und auch als Mikrophon zu verwenden. Die Anordnung für den Lautsprecherversuch wurde folgendermaßen getroffen:

An zwei Elektroden, deren eine so ausgebildet war, daß Glimmentladungen auftreten konnten, wurde eine Gleichspannung von 10000 Volt gelegt. In die Verbindungsleitung zwischen der einen Elektrode und der Gleichspannungsquelle schalteten wir einen Niederfrequenztransformator, dessen Primärseite über einen Verstärker Musik- und Sprachschwingungen eines Rundfunksenders aufgedrückt werden konnten. Fig. 1 zeigt die gesamte Anordnung. Der Glimmelektrode A steht die großflächige Elektrode B gegenüber. Die Glimmentladung wird eingeleitet durch die Gleichspannungsquelle C, einen Kondensator, der von einem Wechselstromtransformator D über das Glühventil E

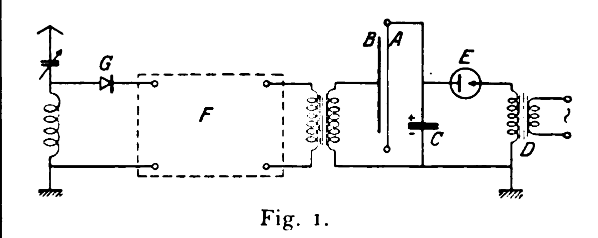


Fig. 1.

aufgeladen wird. F stellt einen Widerstandsverstärker dar, der die mit dem Detektor G aufgenommenen Darbietungen eines Rundfunksenders bis zur Erreichung einer genügenden Ausgangsenergie verstärkt. Die Steuerung des Glimmstromes geschieht dann durch den Transformator. Auf diese Weise ist es möglich, jeder beliebigen Glimmentladung elektrische Schwingungen zu überlagern, die dann als akustische Luftwellen in Erscheinung treten. Die Güte der Wiedergabe hängt stark von der Art der Glimmentladung ab. Es ist ohne weiteres möglich, als Glimmelektrode z. B. scharfe Kanten, Spitzen, Messerschneiden und ähnliche Dinge zu benutzen. Legt man aber Wert auf gute Wiedergabe, so muß eine Form der Glimmelektrode gewählt werden, die keinerlei Sprühentladungen, sondern reines Glimmen zeigt, das bei Gleichspannung und sorgfältig behandelter Oberfläche keinerlei hörbares Eigengeräusch verursacht. Als beste Anordnung hat sich ein sehr dünner Draht erwiesen, der zentrisch durch ein aufgeschlitztes Metallrohr gespannt ist. Gibt man dem Glimmdraht eine hohe positive Spannung gegenüber dem Rohr, so bildet sich auf seiner Oberfläche durch den starken Gradienten des elektrischen Feldes ein bläuliches Glimmlicht, das vollkommen geräuschlos ist. Trägt man den Glimmstrom in Abhängigkeit von der angelegten Gleichspannung auf, so erhält man eine Kurve, wie sie in Fig. 2 zu sehen ist. Bei einer bestimmten Höhe der Spannung (Punkt l) setzt die Glimmentladung ein, der Strom steigt von

da ab mit wachsender Spannung sehr stark an bis zu einem Punkte K, bei dem dann der Überschlag erfolgt. Man muß ähnlich wie bei einer Verstärkerröhre dem Glimmlautsprecher eine Vorspannung erteilen, die so groß ist, daß man etwa in die Mitte des Bereiches (Punkt L) zwischen Beginn der Entladung und Überschlagspunkt kommt. Dann wird durch die überlagerte Wechselspannung des Transformators H die Spannung periodisch verringert und erhöht und damit auch der Strom. Einer überlagerten Schwingung, die z. B. vom Punkte M bis zum Punkte N reicht, würde eine Stromschwankung vom Punkte O bis P entsprechen. Diese Schwankung bedeutet periodische Änderung des von der Glimmelektrode ausgehenden elektrischen Windes und damit Verdichtungen und Verdünnungen der Luft.

Bei Beachtung aller dieser Punkte gelingt es, eine recht gute und auch ziemlich laute Wiedergabe von Musik und Sprache zu erhalten. Auffallend ist die klare Aussprache der Konsonanten, insbesondere der Zischlaute, deren Wiedergabe ja ein Schmerzenskind der meisten Lautsprecheranlagen ist. Der praktischen Anwendung stehen noch zwei Schwierigkeiten im Weg: Die Energie, die zum Aufrechterhalten des Glimmvorganges notwendig ist, ist beträchtlich. Sie betrug z. B. bei unseren Versuchen 20—40 Watt, in der Form eines gut konstanten

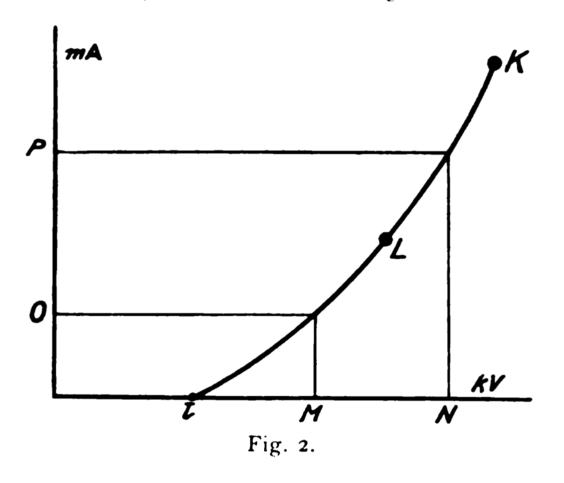


Fig. 2.

Gleichstromes von hoher Spannung. Es bedarf hierzu einer geeigneten Apparatur. Der Hauptnachteil ist aber bis jetzt noch ein Nebengeräusch, das trotz völlig ruhiger Glimmentladung den Tönen überlagert ist und die Wiedergabe insbesondere der Musik etwas rauh macht. Bei negativem Glimmdraht ist es schwerer, eine gleichmäßige Glimmschicht zu bekommen. Es bilden sich leicht Fußpunkte der Entladung aus, die zum Sprühen Veranlassung geben können. Das Steuerungsphänomen tritt ein, die Luft spricht auch bei dieser Schaltung, doch im allgemeinen weniger ruhig und mit mehr Störungen.

Auch als Mikrophon ist die Anordnung zu benutzen. Die Schaltung, Fig. 3, dürfte ohne weiteres verständlich sein. Hier macht sich eine ähnliche Erscheinung störend bemerkbar. Offenbar ist es nicht leicht, die Glimmentladung ganz ruhig zu bekommen. Zwar ist beim unmittelbaren Abhören hinter dem Glimm-Mikrophon nichts von einem Entladungsgeräusch zu

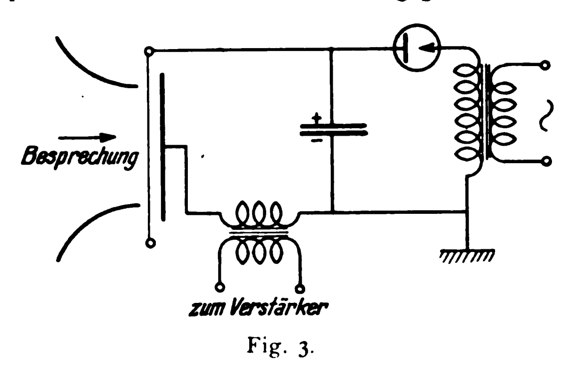


Fig. 3.

hören, nach der Verstärkung durch einen mehrstufigen Widerstandsverstärker tritt aber das Geräusch als Prasseln sehr störend in Erscheinung. Die Wiedergabe selbst wäre, von dieser Störung abgesehen, gut. —

Zusammenfassung.

Versuche haben ergeben, daß es möglich ist, mit Hilfe von Glimmentladungen eine unmittelbare Steuerung der Luft durch elektrische Wechselfelder zu erreichen. Das Resultat ist ein Lautsprecher, die Umkehrung des Prinzips ein Mikrophon.

Frankfurt a. M., Universitätsinstitut für physikalische Grundlagen der Medizin.

(Eingegangen 20. Juli 1928.)

II. Mitteilung zum Detektorproblem [1]).

(Der elektrolytische Detektor.)

Von Dr.-Ing. Georg Günther Reißaus.

In einer früheren Mitteilung habe ich zu zeigen versucht, daß der durch ein Kristalldetektorsystem erzeugte Elektronenstrom in seiner Richtung eindeutig bestimmt ist durch die Richtung „Spitze/Fläche" des Systems. Es wurde betont, daß hier dem Begriff „Spitze" eine ganz andere Definition zugrunde liegt, als sie der bisher geübten makroskopischen Anschau-

1) Vgl. diese Zeitschrift **29**, 223—225, 1928.



ungsweise entspricht. Fassen wir nochmals kurz zusammen, so wird der Kristalldetektor definiert als ein System bestehend aus zwei Elektroden „Spitze“ und „Fläche“ getrennt durch eine dünne dielektrische Zwischenschicht. Es liegt nun nahe, die elektrolytischen Detektoren (Schlömilchzelle) unter dem gleichen Gesichtspunkt zu betrachten. Denn hier haben wir

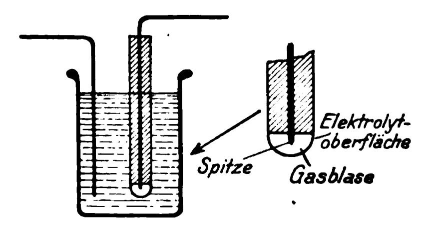


Fig. 1.

scheinbar analoge Verhältnisse: die Spitze, die dielektrische Zwischenschicht (Gashaut) und die Fläche (Elektrolyt) (Fig. 1). Es gelingt jedoch nicht, die Analogie weiter zu treiben, außer in dem unten erwähnten Fall des anomalen elektrolytischen Detektors.

Auch für die Untersuchungen an elektrolytischen Detektoren gilt das gleiche wie für jene an Kristalldetektoren: die nachstehend beschriebenen Gesichtspunkte entwickelten sich aus der Beobachtung der auf völlig falscher Grundlage begonnenen Versuche. Auch hier will ich die zahlreichen Versuche übergehen, deren Ergebnis nachstehend zusammengefaßt ist. Es war mir leider infolge beruflicher Inanspruchnahme versagt, eine umfassende quantitative Untersuchung durchzuführen.

Das Schaltschema eines Detektorkreises mit elektrolytischem Detektor zeigt Fig. 2. Hierin bedeutet D die elektrolytische Zelle, B eine Batterie, P ein Potentiometer und M das Gleichstrommeßinstrument bzw. ein Telephon. Im

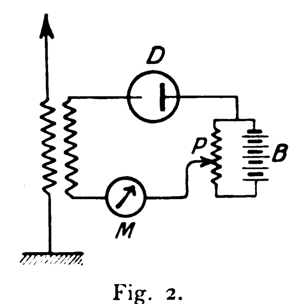


Fig. 2.

allgemeinen regelt man die Vorspannung mittels des Potentiometers P so, daß eben ein schwacher Strom fließt; es kann aber für eine Reihe von Elektrolyten auch die empfindlichere Einstellung erreicht werden, wenn eben noch kein Strom fließt. Die Gründe hierfür werden im folgenden klar werden. Wir wollen nun die Vorgänge in einem elektrolytischen System betrachten, wenn an dasselbe eine Vorspannung gelegt ist, der eine Wechselspannung überlagert wird. Wir wählen zunächst den einfachen und in der Praxis des Detektorempfanges häufigsten Fall, daß die Scheitelwerte der Wechselspannung sehr

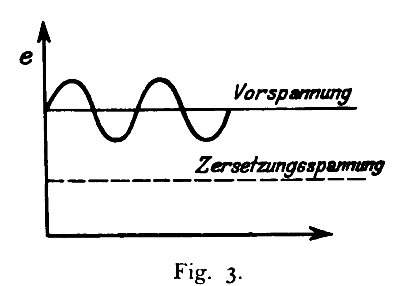


Fig. 3.

klein — kleiner als ein Volt — sind. Es können drei Fälle eintreten:

1. Die Vorspannung ist wesentlich höher als die Zersetzungsspannung des Elektrolyten (Fig. 3). Ein Gleichrichteffekt tritt nicht ein.

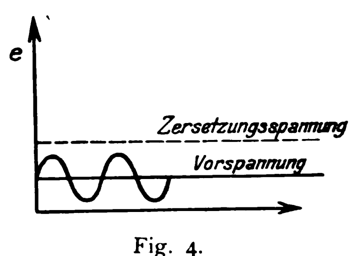


Fig. 4.

2. Die Vorspannung liegt wesentlich unter der Zersetzungsspannung (Fig. 4). Es tritt ebenfalls kein Gleichrichteffekt ein.

3. Die Vorspannung ist gleich oder angenähert der Zersetzungsspannung (Fig. 5). Jetzt tritt der Gleichrichteffekt auf. Zunächst erscheint die Erklärung einfach. Der positive Wechsel erhöht die Zellenspannung über die Zersetzungs-

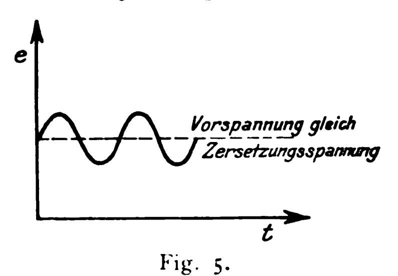


Fig. 5.

spannung und bewirkt verstärktes Fließen des Stromes, der negative Wechsel erniedrigt die Spannung unter die Zersetzungsspannung, womit der Strom aufhört zu fließen. Nun lehrt aber das Experiment, daß der Gleichrichteffekt nur

in solchen Systemen auftritt, deren eine Elektrode sehr klein, fast punktförmig ist. Die experimentellen Beobachtungen führten nun zu folgendem Schluß über die Wirkung der kleinen Elektrode. Eine anderweitige Überlegung führte mich dazu, anzunehmen, daß eine Zelle, die eine konzentrierte Jodkaliumlösung als Elektrolyten enthält, besonders wirksam sein müßte. Die Wirksamkeit bestätigte sich, wenn auch der ursprünglich leitende Gesichtspunkt, der zu ihrer Wahl führte, fallen gelassen werden mußte. Wir wählen zunächst zwei kleine Platinbleche, die in eine konzentrierte Jodkaliumlösung eintauchen. Wir stellen eben auf die Zersetzungsspannung ein und überlagern einen hochfrequenten Wechselstrom. Wir erhalten keinen Gleichrichteffekt aus folgendem Grunde:

Der durch den positiven Wechsel erzeugte Stromfluß lade die Elektroden mit den Zersetzungsprodukten des Elektrolyten auf (*K* bzw. *H* und *J*), wodurch eine Gegenspannung hervorgerufen wird, die im zweiten Wechsel, wo infolge Herabsinkens unter die Zersetzungsspannung kein primärer Strom fließt, einen sekundären Polarisationsstrom zum Fließen bringt, so daß auf das Meßinstrument keine Wirkung ausgeübt wird, also auch keine Gleichrichtung stattfindet. Infolge der sehr kleinen Zeiten, ist hier Ladestrom gleich Entladestrom zunächst anzunehmen.

Bei sehr kleinen Elektroden liegen die Verhältnisse aber anders. Während der Dauer t einer halben Periode werde an der Spitze Jod abgeschieden. Während aber an einer großen Elektrode während der Abscheidungszeit t alles Jod auf der Elektrode Platz findet, wird hier infolge der hohen Stromdichte der Abscheidungsdruck und damit die Jodmenge so groß, daß Jod von der Spitze weg in den Elektrolyten (Jodkalium) diffundiert, was um so leichter geschehen kann, als die Auflösefähigkeit von Jodkalium für Jod recht beträchtlich ist. Während der Zeit t der zweiten Schwingungshälfte fließt kein primärer Strom, da die Spannung unter die Zersetzungsspannung fällt, aber auch nur ein verschwindend kleiner sekundärer Polarisationsstrom, da die die Polarisation hervorbringenden Produkte bereits von der Elektrode entfernt sind (Gasentbindung bzw. Jodabscheidung).

Die an sehr kleinen Elektroden zu beobachtende Überspannung ist also nur als der Ausdruck für die durch den infolge der hohen Konzentration der Abscheidungsprodukte vergrößerten Widerstand hervorgerufene Spannungserhöhung anzusehen. Da bei Überlagerung einer Wechselspannung über die Zersetzungsspannung während jeder zweiten Halbperiode das System Zeit zur Entladung hat, findet die Stoffabscheidung reversibel, also ohne Überspannung statt (vgl. Bennewitz, Zeitschr. f. phys. Ch. **72**, 223, 1910 und Nernst, Theoretische Chemie, 8.—10. Auflage, S. 850/52, 1921). Die Kosten der Stoffabscheidung trägt aber in der Hauptsache der überlagernde Wechselstrom.

Wollte man die Aufnahmefähigkeit des Elektrolyten für das Abscheidungsprodukt durch Rühren des Elektrolyten vergrößern, so wird im Gegenteil der Gleichrichteffekt schließlich bis zum Verschwinden gebracht. Die Ursache liegt darin, daß die Zersetzungsspannung für den bewegten Elektrolyten eine andere ist als für den ruhenden.

Nimmt der Elektrolyt die Zersetzungsprodukte schwer auf, so schwindet das Gleichrichtvermögen der Zelle nach kurzer Zeit, z. B. bei konz. Schwefelsäure.

Zusammengefaßt ergibt sich folgendes Bild der Vorgänge: Mittels des Potentiometers *P* (Fig. 6) sei die Zersetzungsspannung *E* an die

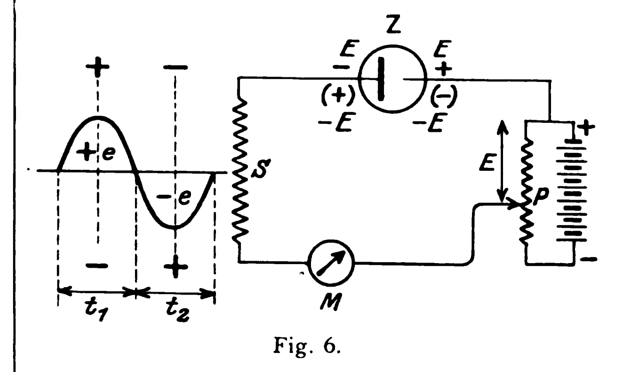


Fig. 6.

Zelle *Z* gelegt. In Reihe mit *Z* liegt die Spule *S*, an deren Enden periodisch die Spannungsdifferenzen e und $-e$ herrschen. Zur Zeit t_1 addiert sich e zu E, so daß an der Zelle die Spannungsdifferenz $(E + e)$ liegt. Diese treibt den Zersetzungsstrom, der an der Spitze Jod abscheidet. Die hierdurch erzeugte Gegenspannung $-E$ liegt während der Zeit t_2 nunmehr in Reihe mit $-e$ und würde — bei großen Elektroden — einen Strom in der Größe des Ladestromes rückwärts über *M* treiben. Infolge der sehr kleinen Spitzenkapazität wird dieser Rückstrom verschwindend klein, so daß durch *M* praktisch nur die Ladeströme der Zelle gehen.

Bei halbwegs gut leitenden Elektrolyten findet eine Beeinflussung des Gleichrichteffekts durch den Elektrodenabstand nicht statt; man kann die Elektroden einander bis auf Bruchteile eines Millimeters nähern. Während des Gleichrichtvorganges findet kräftige Jodentwicklung statt; die braune Jod-Jodkaliumlösung fließt als dichte Schliere von der Spitze zu Boden. Bei Schwefelsäure beobachtet man eine kräftige

Gasentwicklung. Daß bei schwefelsaurem Elektrolyten der Gleichrichteffekt empfindlicher auftritt bei anodischer Spitze als bei kathodischer Spitze hat seine Ursache offenbar in der größeren Löslichkeit des Sauerstoffs im Elektrolyten. Bei konz. Salpetersäure ist die Wirkung nach beiden Richtungen gleich gut. Bei verdünnter Säure (1 : 1) ist der Effekt schwächer. Offenbar wird hier die Entfernung des kathodisch an der Spitze entwickelten Wasserstoffs durch sekundäre Reduktion der Salpetersäure erleichtert. Bei allen Elektrolyten, die an der Spitze Wasserstoff abscheiden (Schwefelsäure, Jodkalium, Kochsalz), der nicht durch sekundäre Reaktionen entfernt wird (wie bei Salpetersäure), ist der Detektoreffekt schlecht, gut dagegen, wenn die an der Spitze anodisch entwickelten Zersetzungsstoffe im Elektrolyten leicht löslich sind.

Da die Ventilwirkung allein von den Spannungszuständen des Systems abhängt, nicht aber durch die elektrolytisch abgeschiedenen Zersetzungsprodukte erst bewirkt wird — wie z. B. bei der Graetzschen Zelle —, ist der Gleichrichtvorgang grundsätzlich frequenz-unabhängig. Der Wirkungsgrad eines bestimmten Detektors muß dagegen für eine bestimmte Frequenz ein Maximum aufweisen, in dem Sinne, daß Spitzenoberfläche, Intensität und Frequenz der Schwingung zur Erreichung der maximalen Leistung in einem optimalen Verhältnis stehen. Exakte Messungen konnten hierzu bisher nicht durchgeführt werden.

Das gleiche gilt übrigens auch für die Kristalldetektoren. Nur in bezug auf den Wirkungsgrad ist Frequenz- und Intensitätsabhängigkeit vorhanden.

Schließlich mag noch der sehr interessante Fall des anomalen elektrolytischen Detektors erwähnt werden, wobei eine elektrolytische Zelle wie ein Kristalldetektor arbeitet also ohne Vorspannung aber mit dünnem festen oder flüssigen Dielektrikum. An die Stelle des Kristalls tritt der Elektrolyt. Die Versuchsanordnung kann mannigfach modifiziert werden z. B.:

1. Auf eine Kochsalzlösung wird ein Tropfen einer dünnen Lösung von Kolophonium in Alkohol gegossen, so daß nach dem Verdunsten des Alkohols eine dünne Harzhaut auf dem Elektrolyten schwimmt. Auf diese Haut setze man vorsichtig eine Nähnadel unter ganz schwachem Druck. Die Stromzuführung zum Elektrolyten bewirke man durch irgendein Stück Draht.

2. Auf die oben erwähnte Jodkaliumlösung werde Paraffinöl (säurefrei!) gegossen. Die in Glas gefaßte Spitze aus Platin werde von oben vorsichtig an die Berührungsfläche Öl/Elektrolyt herangeführt. Unmittelbar dort erhält man einen konstanten Gleichrichteffekt, der verschwindet, sobald die Spitze in den Elektrolyten taucht. Hier tritt er erst wieder auf, wenn die geeignete Vorspannung angelegt wird.

Der Effekt gelingt nicht, wenn man versuchen wollte, ohne Anwendung eines Dielektrikums die Spitze direkt vorsichtig auf die Elektrolytoberfläche zu setzen. Der Grund ist offenbar der, daß infolge elektrostatischer Anziehung sofort Benetzung der Spitze und damit direkte Leitung eintritt. Die nach 1 und 2 erhaltenen anomalen Effekte waren schwächer als die normalen mit Vorspannung.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle Herrn Prof. v. Baeyer von ganzem Herzen für die großzügige Bereitstellung aller verfügbaren Mittel zu danken, die in der kurzen mir zur Verfügung stehenden Zeit der Förderung des Problems dienen konnten.

Ausgeführt im Institut für Physik der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin.

(Eingegangen 20. Juni 1928.)

Über die Assoziation in flüssigen Dielektrika.

(Auszug aus der Dokt.-Diss. an der Techn. Hochschule Warschau.)

Von J. Rolinski.

In den binären Gemischen von flüssigen Dielektrika bei konstanter Temperatur muß bekanntlich, sowohl bei den dipolfreien Substanzen, nach der Formel von Clausius-Mosotti, als auch bei den Dipolsubstanzen nach der Debyeschen Theorie, die Molekularpolarisation jeder Komponente von der Konzentration unabhängig sein und die Polarisation des Gemisches sich additiv aus denjenigen der Komponenten zusammensetzen. Die beobachteten Abweichungen von dieser Regel werden von Debye[1]) als Folge der eintretenden Assoziation der Moleküle gedeutet.

Diese Erscheinungen sind von großer Bedeutung nicht nur vom physikalischen, sondern auch vom chemischen Standpunkt aus, wurden jedoch bis jetzt, außer der eingehenden Arbeit von L. Lange[2]), nur wenig berücksichtigt. Das gab die Veranlassung zu einer systematischen Untersuchung in dieser Richtung, deren Resultate in dieser Abhandlung zusammengefaßt sind.

1) Vgl. den zusammenfassenden Artikel von P. Debye in Marx, Handb. d. Radiologie, Bd. VI, S. 633, 1925.

2) L. Lange, Zeitschr. f. Phys. **33**, 169, 1925.

Bekanntlich lassen sich nach der Debyeschen Theorie alle Dielektrika in zwei Klassen teilen: die dipolfreien und die Dipolsubstanzen. Um das Verhalten dieser beiden Arten von Dielektrika in bezug auf die Assoziation näher zu untersuchen, wurde die Abhängigkeit der Molekularpolarisation von der Konzentration bei konstanter Temperatur untersucht, und zwar in folgenden Gemischen: zweier dipolfreien Substanzen, einer Dipolsubstanz mit einer dipolfreien und zweier Dipolsubstanzen untereinander.

Als zu untersuchende dipolfreie Substanzen wurden Benzol, Tetrachlorkohlenstoff und Schwefelkohlenstoff und als Dipolsubstanzen Äthyläther, Chlorbenzol und Chinolin gewählt. Alle benutzten Substanzen wurden chemisch rein bezogen, jedoch zu jeder Messung wiederholt sehr eingehend und sorgfältig chemisch gereinigt.

Die Reinigung geschah mit allen zur Verfügung stehenden Mitteln im Institut der Organischen Chemie der Techn. Hochschule Warschau[1]).

Die Dielektrizitätskonstante der Gemische und der reinen Substanzen, außer derjenigen des Benzols, wurden mit einer genauen und empfindlichen Resonanzmethode[2]) mittels hochfrequenten ungedämpften Schwingungen gemessen, wobei die Ablesungen des Meßkondensators auf einer in Millimeter geteilten Skala von 5 m Länge und 4 m Radius erfolgten. Für die Dielektrizitätskonstante des reinen Benzols habe ich 2,28 als den wahrscheinlichsten Wert aus anderseitigen Messungen angenommen[1]).

Die Dichte aller Gemische und der reinen Substanzen wurden mit einer hydrostatischen Waage genau bestimmt.

Alle Messungen sind bei einer konstanten Temperatur von $18^0 \pm 1^0$ C ausgeführt worden.

Die Genauigkeit der einzelnen Messung der Dielektrizitätskonstante beträgt etwa 0,5 Proz. Die aus den Messungen berechneten Werte der Molekularpolarisation sind schätzungsweise auf 1 Proz. genau.

I. Gemische von dipolfreien Substanzen.

Bei den Gemischen der dipolfreien Substanzen war im voraus anzunehmen, daß in ihnen keine Assoziation stattfindet, und daß daher die Molekularpolarisation der Komponenten von der Konzentration unabhängig sein wird. Um dies zu prüfen wurden folgende Gemische untersucht: Schwefelkohlenstoff-Benzol, Tetrachlorkohlenstoff-Benzol und Tetrachlorkohlenstoff-Schwefelkohlenstoff. Die erhaltenen Resultate sind in den nachstehenden Tabellen I, II und III zusammengefaßt.

Tabelle I.

Schwefelkohlenstoff-Benzol ($C_2 - C_6H_6$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Schwefelkohlenstoffes	Dichte des Gemisches	Dielektrizitätskonstante	Grammpolarisation des Gemisches	Molekularpolarisation des Schwefelkohlenstoffes
100 c	ϱ	ε	P_{gr}	P
0 Proz.	0,8783	2,28	0,3405	—
40,041 ,,	0,9043	2,370	0,3153	21,1
48,023 ,,	1,0226	2,436	0,3165	22,1
59,993 ,,	1,0701	2,493	0,3105	22,1
70,266 ,,	1,1108	2,530	0,3041	22,0
79,712 ,,	1,1541	2,585	0,2996	22,0
89,979 ,,	1,2070	2,615	0,2900	21,6
100 ,,	1,2634	2,669	0,2829	21,5

In dieser Tabelle in Kolonne 1 sind die Grammkonzentrationen 100 c des Schwefelkohlenstoffes im Gemisch angegeben; in Kolonne 2 sind die Dichten ϱ der Gemische, in Kolonne 3 die entsprechenden Dielektrizitätskonstanten ε und in Kolonne 4 die nach der Clausius-Mosottischen Formel

$$P_{gr} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\varrho} \qquad (1)$$

berechneten Grammpolarisationen P_{gr} der Gemische angegeben. In der letzten Kolonne stehen die Werte der Molekularpolarisation P des

1) An dieser Stelle möchte ich dem Leiter dieses Institutes Herrn Prof. L. Szperl und dem Adjunkt Herrn T. Pytasz für die wertvollen Ratschläge, die sie mir bei den chemischen Reinigungsarbeiten erteilten, meinen Dank aussprechen.

2) Vgl. M. Jeżewski, Journ. de Phys. III, 293. 1922; M. Wolfke u. H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 171b, 1924.

1) B. Turner, Zeitschr. ph. Ch. **35**. 385. 1900; P. Drude, Zeitschr. ph. Ch. **23**. 267. 1897; H. Isnardi, Zeitschr. f. Phys. **9**. 161, 1922.

Tabelle II.
Tetrachlorkohlenstoff-Benzol ($CCl_4 - C_6H_6$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Tetrachlorkohlenstoffes $100\,c$	Dichte des Gemisches ϱ	Dielektrizitätskonstante ε	Grammpolarisation des Gemisches P_{gr}	Molekularpolarisation des Tetrachlorkohlenstoffes P
0 Proz.	0,8783	2,28	0,3405	—
10,852 ,,	0,9236	2,278	0,3234	28,2
20,804 ,,	0,9702	2,275	0,3074	27,9
29,427 ,,	1,0126	2,270	0,2937	27,9
39,330 ,,	1,0689	2,258	0,2764	27,3
49,240 ,,	1,1298	2,251	0,2605	27,4
60,376 ,,	1,2073	2,239	0,2421	27,3
70,843 ,,	1,2943	2,240	0,2260	27,5
81,169 ,,	1,3836	2,251	0,2127	28,1
90,348 ,,	1,4811	2,239	0,1973	28,0
100 ,,	1,5981	2,222	0,1811	27,8

Schwefelkohlenstoffes, die nach der Mischungsregel in folgender Weise berechnet worden sind:

$$P = \frac{M}{c}\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\cdot\frac{1}{\varrho} - (1-c)\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2}\cdot\frac{1}{\varrho_2}\right], \qquad (2)$$

wo M das Molekulargewicht des Schwefelkohlenstoffes, ε_2 die Dielektrizitätskonstante und ϱ_2 die Dichte des Benzols bedeutet.

In gleicher Weise sind in der Tab. II die Werte für die Gemische Tetrachlorkohlenstoff—Benzol zusammengefaßt.

In den Fig. 1 und 2 sind die Dichten, die Dielektrizitätskonstanten der entsprechenden Gemische und die berechneten Molekularpolarisationen der untersuchten Substanzen in Abhängigkeit von der Konzentration graphisch dargestellt.

Sowohl aus den beiden Tabellen I und II, als auch aus den Fig. 1 und 2 ersehen wir, daß die Molekularpolarisation des Schwefelkohlenstoffes und des Tetrachlorkohlenstoffes von der Konzentration vollständig unabhängig ist; bei Schwefelkohlenstoff beträgt nämlich die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert der Polarisation P etwa 0,12 Proz., bei Tetrachlorkohlenstoff etwa 0,1 Proz.

Fig. 1

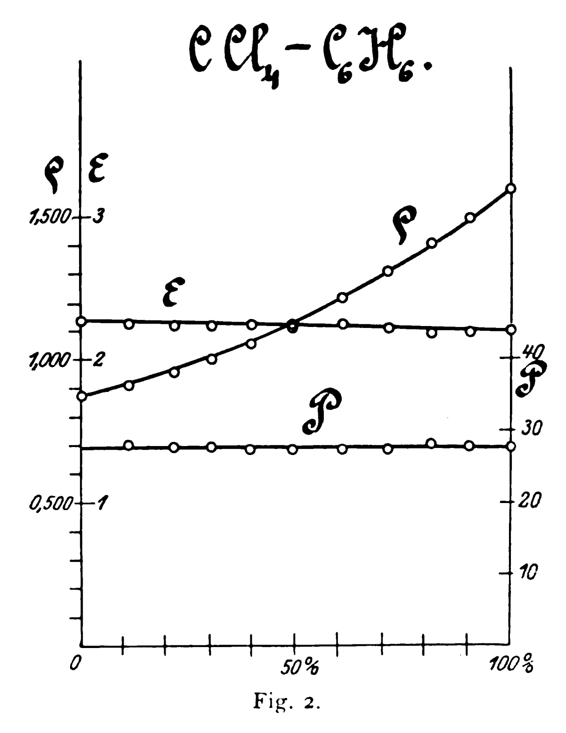


Fig. 2.



Tabelle III.
Tetrachlorkohlenstoff-Schwefelkoklenstoff (CCl_4 — C_2).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Tetrachlorkohlenstoffes	Dichte des Gemisches	Dielektrizitätskonstante	Volumenpolarisation pro 1 Liter des Gemisches	Volumenpolarisation pro 1 Liter berechn. auf der Additivität
100 c	ϱ	ε	P_L	$P_1 m_1 + P_2 m_2$
0 Proz.	1,2634	2,669	357,7	356,7
9,811 „	1,2923	2,639	351,3	350,7
19,487 „	1,3164	2,558	345,3	344,6
28,932 „	1,3411	2,513	339,2	338,8
40,586 „	1,3780	2,477	331,6	331,4
49,807 „	1,4053	2,439	325,2	325,5
60,633 „	1,4411	2,394	317,9	317,7
70,258 „	1,4741	2,359	311,1	311,6
90,209 „	1,5554	2,315	296,8	296,7
100 „	1,5981	2,222	289,4	288,8

In Tab. III sind in den ersten 3 Kolonnen die Konzentrationen, die Dichten und die Dielektrizitätskonstanten, wie in den vorigen Tabellen, angegeben.

Um die Additivität der Polarisation bei diesen dipolfreien Substanzen zu prüfen, wurde die Volumenpolarisation des Gemisches (bezogen auf einen Liter) nach der Formel:

$$P_L = 1000 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \qquad (3)$$

berechnet. Die erhaltenen Werte befinden sich in Kolonne 4. In Kolonne 5 ist die gleiche Größe auf Grund der Additivität, mittels der Formel: $P_1 m_1 + P_2 m_2$ berechnet, wo P_1 die aus der Tab. I entnommene Molekularpolarisation des Schwefelkohlenstoffes, P_2 die in Tab. II angegebene Molekularpolarisation des Tetrachlorkohlenstoffes, m_1 und m_2 die entsprechenden Molkonzentrationen pro Liter bedeuten.

In Fig. 3 sind die Werte der Dichten und der Dielektrizitätskonstanten und die Volumenpolarisation aus Kolonne 4 in Abhängigkeit von der Konzentration graphisch dargestellt. Auf der letzten Kurve sind die Werte aus Kolonne 5 mit Kreuzen eingezeichnet.

Aus der Lage der Punkte und direkt aus dem Vergleich der beiden letzten Kolonnen der Tab. III ersehen wir, daß die Gemische des Tetrachlorkohlenstoffes mit Schwefelkohlenstoff das Additivitätsgesetz genau befolgen. Die größte Differenz beträgt etwa 0,3 Proz.

II. Gemische von einer Dipolsubstanz mit einer dipolfreien (Benzol).

Um die Abhängigkeit der Molekularpolarisation der untersuchten Dipolsubstanzen: Äthyläther, Chlorbenzol und Chinolin von der Konzentration zu bestimmen, wurden Gemische derselben mit Benzol untersucht.

Die erhaltenen Werte sind in den nachstehenden Tab. IV, V und VI in gleicher Weise wie in den Kolonnen der Tab. I und II zusammengestellt.

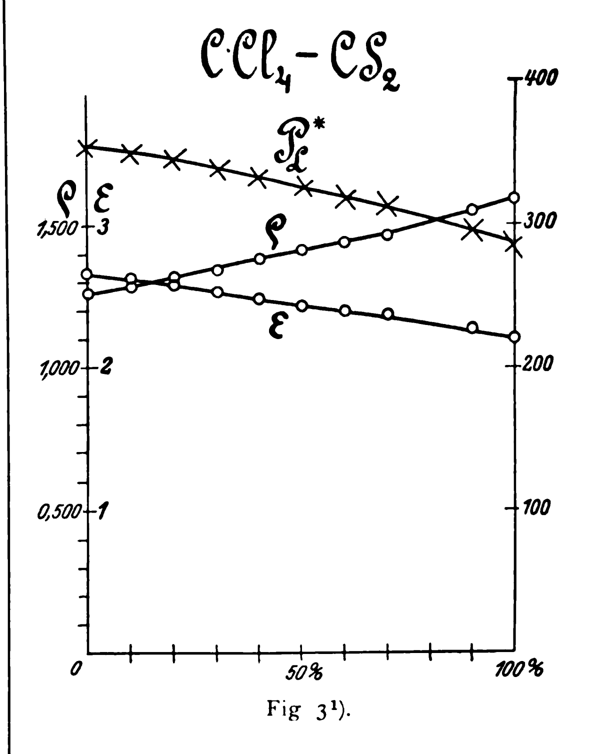


Fig 3[1]).

1) Die mit Sternen bezeichneten Polarisationen sind mit den mittels der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Werten von ε und ϱ berechnet.

Tabelle IV.

Äthyläther-Benzol ($C_4H_{10}O - C_6H_6$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Äthyläthers 100 *c*	Dichte des Gemisches ϱ	Dielektrizitäts-konstante ε	Grammpolarisation des Gemisches P_{gr}	Molekularpolarisation des Äthyläthers P
0 Proz.	0,8783	2,28	0,3405	—
9,020 „	0,8637	2,464	0,3788	56,7
26,928 „	0,8325	2,807	0,4515	55,8
29,772 „	0,8273	2,871	0,4643	56,0
39,546 „	0,8115	3,057	0,5013	55,4
50,140 „	0,7941	3,272	0,5427	55,5
60,274 „	0,7781	3,482	0,5819	55,4
69,743 „	0,7631	3,691	0,6196	54,9
81,295 „	0,7451	3,948	0,6652	54,8
90,491 „	0,7311	4,163	0,7020	54,8
100	0,7168	4,360	0,7370	54,6

Tabelle V.

Chlorbenzol-Benzol ($C_6H_5Cl - C_6H_6$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Chlorbenzols 100 *c*	Dichte des Gemisches ϱ	Dielektrizitäts-konstante ε	Gramm polarisation des Gemisches P_{gr}	Molekularpolarisation des Chlorbenzols P
0 Proz.	0,8783	2,28	0,3405	—
10,640 „	0,8980	2,557	0,3805	83,1
18,677 „	0,9143	2,795	0,4095	79,9
28,905 „	0,9347	3,089	0,4392	76,7
38,635 „	0,9559	3,386	0,4635	74,1
50,849 „	0,9831	3,800	0,4911	71,6
58,324 „	1,0000	4,048	0,5040	69,8
69,652 „	1,0267	4,477	0,5229	67,8
79,517 „	1,0520	4,885	0,5364	66,0
89,064 „	1,0788	5,284	0,5452	64,2
100 „	1,1085	5,723	0,5317	62,1

Tabelle VI.

Chinolin-Benzol ($C_9H_7N - C_6H_6$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Chinolins 100 *c*	Dichte des Gemisches	Dielektrizitäts-konstante	Grammpolarisation des Gemisches	Molekularpolarisation des Chinolins
0 Proz.	0,8783	2,28	0,3405	—
10,397 „	0,8952	2,759	0,4129	133,9
20,550 „	0,9150	3,283	0,4723	126,7
30,714 „	0,9348	3,850	0,5211	120,2
40,613 „	0,9555	4,463	0,5608	114,0
50,764 „	0,9775	5,193	0,5963	109,0
61,228 „	0,9991	5,986	0,6249	103,9
71,803 „	1,0265	6,949	0,6475	99,1
80,733 „	1,0468	7,692	0,6596	96,6
90,108 „	1,0689	8,755	0,6747	91,8
100 „	1,0923	9,559	0,6779	87,5

Diese Resultate sind in den Fig. 4—6 graphisch dargestellt. Sowohl aus den Tabellen als auch aus den Kurven sehen wir, daß die Molekularpolarisation aller dieser Dipolsubstanzen sich mit der Konzentration verändert, und zwar mit steigender Konzentration abnimmt. Auch bei Äthyläther ist dieser Gang deutlich erkennbar. Daraus ist zu schließen, daß die hier untersuchten Dipolsubstanzen, alle eine, mit der Konzentration steigende Assoziation ihrer Moleküle aufweisen. Aus den erhaltenen Werten für Äthyläther geht hervor, daß ebenfalls diese Substanz, wenn auch sehr schwach doch sicher, assoziiert, wovon man bis jetzt in der Literatur das Gegenteil annahm[1]).

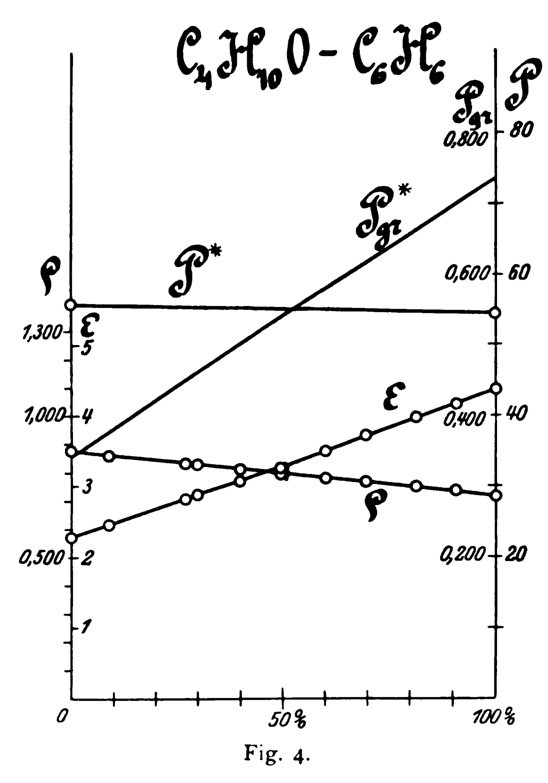


Fig. 4.

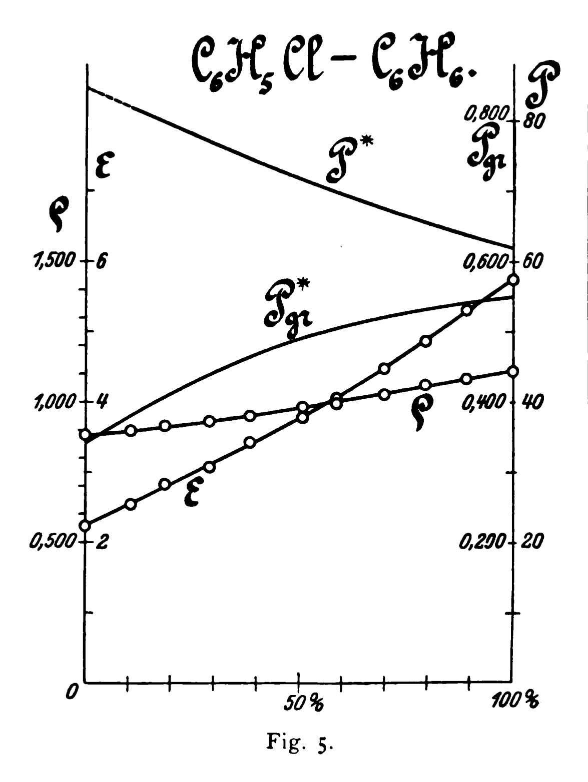


Fig. 5.

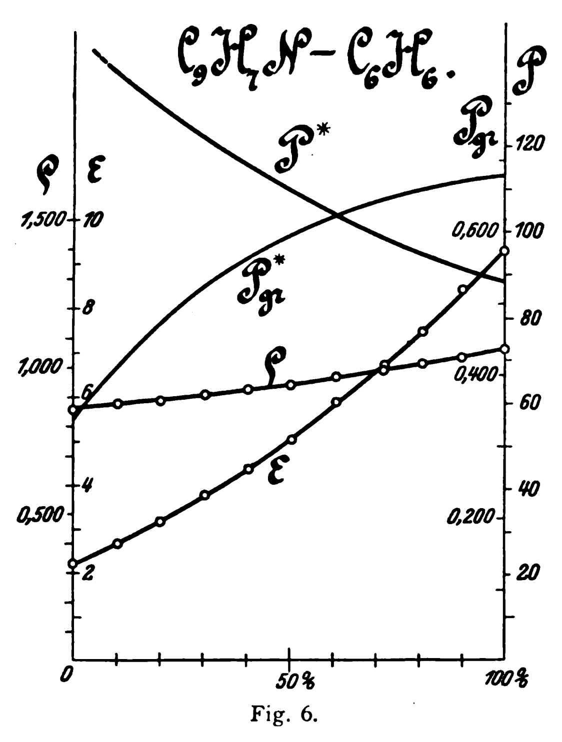


Fig. 6.

III. Assoziationsgrad.

Um die Assoziationserscheinungen auch quantitativ verfolgen zu können, wollen wir als Maß der Assoziation das Verhältnis der Anzahl der assoziierten Molekeln N_a zu der Gesamtzahl der Molekel N der betreffenden Substanz benutzen und dieses Verhältnis mit dem Namen „Assoziationsgrad" bezeichnen: $\eta = \frac{N_a}{N}$. In unserem Fall zeigen alle untersuchten Substanzen mit steigender Konzentration eine Abnahme der Molekularpolarisation. Ein solcher Verlauf kann nach Debye[2]) dadurch erklärt werden, daß das Molekül eine langgestreckte Form in der Richtung

1) L. Lange, Zeitschr. f. Phys. l. c.; J. W. Williams, Physik. Zeitschr. **29**, 174, 1928.
2) P. Debye, l. c. S. 643.



der Achse des Dipols besitzt, und daß bei eintretender Assoziation zweier solcher Moleküle die Dipolmomente sich gegenseitig aufheben, also eine dipolfreie Molekülgruppe bilden. Nehmen wir dies für die hier untersuchten Dipolsubstanzen an, so können wir die Fundamentalgleichung von Debye[1]) in folgender Form schreiben:

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{\varrho} = \frac{4}{3}\pi N \gamma' + \frac{4}{3}\pi N_0 \frac{\mu^2}{3kT}, \quad (4)$$

wo im zweiten Glied anstatt der Gesamtzahl N der

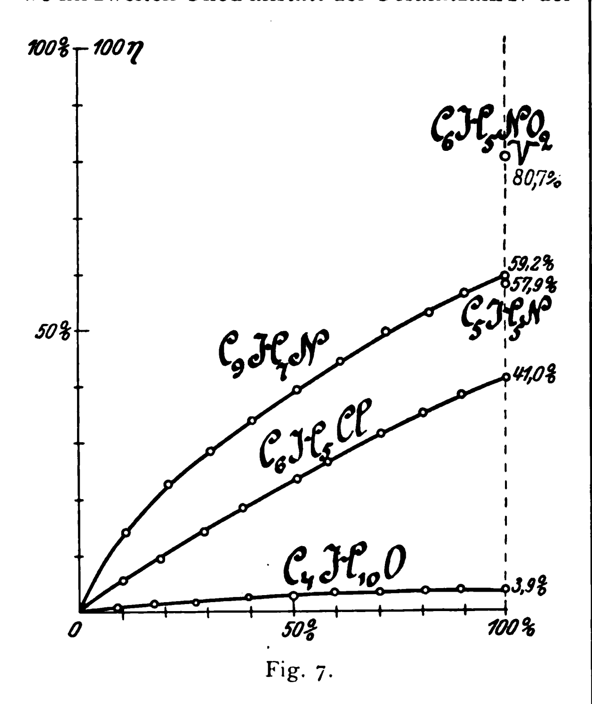


Fig. 7.

Moleküle nur die Zahl N_0 der nichtassoziierten, die das Dipolmoment beibehalten haben, bleibt. In dieser Gleichung setzten wir für $\frac{4}{3}\pi N\gamma'$, d. h. die Verschiebungspolarisation, Werte aus optischen Daten der Molekularrefraktion ein.

Das Dipolmoment μ erhalten wir in üblicher Weise durch Extrapolation der Molekularpolarisation auf die Konzentration 0. Dieses Verfahren ist bekanntlich nicht vollkommen exakt, genügt jedoch in unserem Fall zu Vergleichsschlüssen. Diese Extrapolation ergibt folgende Werte: für Äthyläther $\mu = 1{,}22 \cdot 10^{-18}\, es$, für Chlorbenzol $\mu = 1{,}55 \cdot 10^{-18}\, es$, für Chinolin $\mu = 2{,}25 \cdot 10^{-18}\, es$.

Die hier erhaltenen Dipolmomente für Äthyläther und Chlorbenzol stimmen vollständig mit Werten, die L. Lange[2]) und J. W. Williams[3]) erhielten, überein.

1) P. Debye, l. c. Gleichung (21) S. 617.
2) L. Lange, l. c. S. 182.
3) J. W. Williams, Physik. Zeitschr. **29**, 174. 1928.

Das Dipolmoment für Chinolin wurde hier zum erstenmal bestimmt. Unter Benutzung der obigen Werte läßt sich die Zahl N_0 der nichtassoziierten Moleküle pro Mol der gelösten Dipolsubstanz berechnen. Die Zahl N_a, d. h. diejenige der assoziierten Moleküle, ist danach gleich $N - N_0$, woraus auf Grund unserer Definition folgt:

$$\eta = \frac{Na}{N} = 1 - \frac{N_0}{N}. \quad (5)$$

Die auf diese Weise erhaltenen Werte von η sind in den Tab. VII, VIII und IX für die gemessenen Konzentrationen in Prozenten angegeben und in Fig. 7 graphisch dargestellt.

Tabelle VII.

Assoziation des Äthyläthers.

1	2
Grammkonzentration des Äthyläthers	Assoziationsgrad 100 η
0 Proz.	Proz.
9,020 „	0,5 „
26,720 „	1,8 „
29,772 „	2,1 „
39,546 „	2,7 „
50,140 „	3,3 „
60,274 „	3,6 „
69,743 „	3,6 „
81,295 „	3,9 „
90,491 „	3,9 „
100 „	3,9 „

Tabelle VIII.

Assoziation des Chlorbenzols.

1	2
Grammkonzentration des Chlorbenzols	Assoziationsgrad
0 Proz.	0 Proz.
10,064	5,4
18,677	9,5
28,905	14,1
38,635	18,5
50,849	23,7
58,324	26,8
69,652	31,3
79,517	35,0
89,064	38,3
100	41,0

Tabelle IX.

Assoziation des Chinolins.

1	2
Grammkonzentration des Chinolins	Assoziationsgrad
0 Proz.	0 Proz.
10,397 "	14,2 "
20,550 "	22,7 "
30,714 "	28,5 "
40,613 "	33,9 "
50,764 "	39,1 "
61,228 "	44,0 "
71,803 "	49,2 "
80,733 "	52,3 "
90,108 "	55,9 "
100 "	59,2 "

Wir sehen daraus, daß für alle hier untersuchten Dipolsubstanzen der Assoziationsgrad mit steigender Konzentration wächst.

Außerdem ersehen wir, daß bei konstanter Konzentration der Assoziationsgrad desto größer wird, je stärker das Dipolmoment der betreffenden Substanz ist. In Tab. X sind die Werte für den Assoziationsgrad der hier untersuchten reinen Substanzen und die entsprechenden Dipolmomente angeführt; diejenigen für Nitrobenzol und Pyridin aus den Messungen von L. Lange[1]) berechnet.

Tabelle X.

Dipolflüssigkeit	Assoziationsgrad	Dipolmoment
Nitrobenzol	80,7	$3{,}84 \cdot 10^{-18}$ *es*
Chinolin	59,2	$2{,}25 \cdot$ " "
Pyridin	57,9	$2{,}11 \cdot$ " "
Chlorbenzol	41,0	$1{,}55 \cdot$ " "
Äthyläther	3,9	$1{,}22 \cdot$ " "

IV. Gemische von Dipolsubstanzen.

Nachdem die Molekularpolarisation in Abhängigkeit von der Konzentration für die einzelnen Dipolsubstanzen bestimmt worden ist, konnte man an die Frage der Additivität der Volumenpolarisation bei diesen Substanzen herantreten. Zu diesem Zweck wurden die binären Gemische: Chinolin-Chlorbenzol, Chinolin-Äthyläther und Chlorbenzol-Äthyläther in gleicher Weise wie bei den dipolfreien Substanzen auf die Additivität untersucht. Die Ergebnisse sind in folgenden Tab. XI, XII und XIII zusammengestellt.

In den Tabellen stehen in den Kolonnen 1, 2, 3 und 4 die entsprechenden Werte für die Mischung und in der letzten Kolonne die Volumenpolarisation wie sie aus dem Additivitätsgesetze folgen müßte. Diese letzten Werte

Tabelle XI.

Chinolin-Chlorbenzol ($C_9H_7N—C_6H_5Cl$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Chinolins	Dichte des Gemisches	Dielektrizitätskonstante	Volumenpolarisation pro Liter	Volumenpolarisation pro Liter aus dem Additivitätsgesetz
100 c	ϱ	ε	P_L	$P_1 m_1 + P_2 m_2$
0 Proz.	1,1085	5,723	611,6	611,6
10,106 "	1,1066	6,103	629,7	677,7
19,678 "	1,1065	6,464	645,6	730,1
30,230 "	1,1050	6,863	660,5	761,0
40,502 "	1,1052	7,271	676,4	786,9
50,710 "	1,1020	7,715	691,2	799,5
60,861 "	1,1006	8,056	701,7	806,3
71,126 "	1,0990	8,464	713,3	806,9
80,184 "	1,0968	8,788	722,0	797,6
91,313 "	1,0947	9,235	733,0	770,9
100 "	1,0923	9,559	740,5	740,5

1) L. Lange, l. c. S. 182.

Tabelle XII.
Chinolin-Äthyläther ($C_9H_7N—C_4H_{10}O$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Chinolins	Dichte des Gemisches	Dielektrizitäts-konstante	Volumenpolarisation pro Liter	Volumenpolarisation pro Liter aus dem Additivitätsgesetz
100 c	ϱ	ε	P_L	$P_1 m_1 + P_2 m_2$
0 Proz.	0,7168	4,360	528,3	528,3
9,687 „	0,7460	4,729	554,2	573,5
21,593 „	0,7856	5,242	585,6	623,6
29,837 „	0,8177	5,615	606,0	658,9
39,911 „	1,8507	6,089	629,1	687,8
49,787 „	0,8942	6,578	650,3	720,0
59,609 „	0,9261	7,224	674,8	734,4
70,408 „	0,9699	7,665	689,6	750,1
85,072 „	1,0320	8,758	721,1	750,0
100 „	1,0922	9,559	740,5	740,5

Tabelle XIII.
Chlorbenzol-Äthyläther ($C_6H_5Cl—C_4H_{10}O$).

1	2	3	4	5
Grammkonzentration des Chlorbenzols	Dichte des Gemisches	Dielektrizitäts-konstante	Volumenpolarisation pro Liter	Volumenpolarisation pro Liter aus dem Additivitätsgesetz
100 c	ϱ	ε	P_L	$P_1 m_1 + P_2 m_2$
0 Proz.	0,7168	4,360	528,3	528,3
10,933 „	0,7513	4,518	539,7	555,6
18,349 „	0,7723	4,591	544,8	568,5
29,514 „	0,8094	4,761	556,3	586,8
38,918 „	0,8415	4,895	564,9	600,6
49,925 „	0,8848	5,037	573,7	616,8
60,302 „	0,9229	5,142	580,0	622,2
70,215 „	0,9644	5,317	590,0	627,1
76,540 „	0,9929	5,413	595,3	626,7
90,091 „	1,0566	5,599	605,2	623,7
100 „	1,1085	5,723	611,6	611,6

sind aus den Polarisationskurven Fig. 4, 5, 6 entnommen und auf Konzentrationen Mol/Liter umgerechnet. Aus den Tabellen ersehen wir, daß die Werte der Kolonnen 4 und 5 stark voneinander abweichen, was beweist, daß die Volumenpolarisation bei den Dipolflüssigkeiten das Additivitätsgesetz nicht befolgt.

Diese Verhältnisse sind aus den Fig. 8—10 zu ersehen, wo der Unterschied im Verlauf der punktierten Linie $P_1 m_1 + P_2 m_2$ von der ausgezogenen P_2 als Maß für die Abweichung vom Additivitätsgesetz dienen kann.

Wir finden also, daß die Abweichung von der Additivität desto stärker ist je größeres Dipolmoment die Komponenten besitzen.

Bei sämtlichen hier untersuchten Gemischen ist die tatsächliche Volumenpolarisation immer kleiner als diejenige, welche aus dem Additivitätsgesetz folgen müßte. Diese Erscheinung läßt sich sehr gut dadurch erklären, daß außer den Assoziationen, die zwischen den Molekülen derselben Komponente stattfinden, noch eine gemischte Assoziation zwischen je zwei Molekülen der beiden verschiedenen Komponenten hinzukommt. Ein solches assoziiertes Molekülpaar würde danach ein Dipolmoment aufweisen, daß der Differenz der Dipolmomente der Moleküle der beiden gemischten Substanzen gleich ist, was den Wert des mittleren Dipolmoments des Gemisches schwächen muß.

Zusammenfassung.

1. Es wurde die elektrische Polarisation von binären Gemischen dipolfreier Flüssigkeiten (Benzol, Schwefelkohlenstoff und Tetrachlorkohlen-

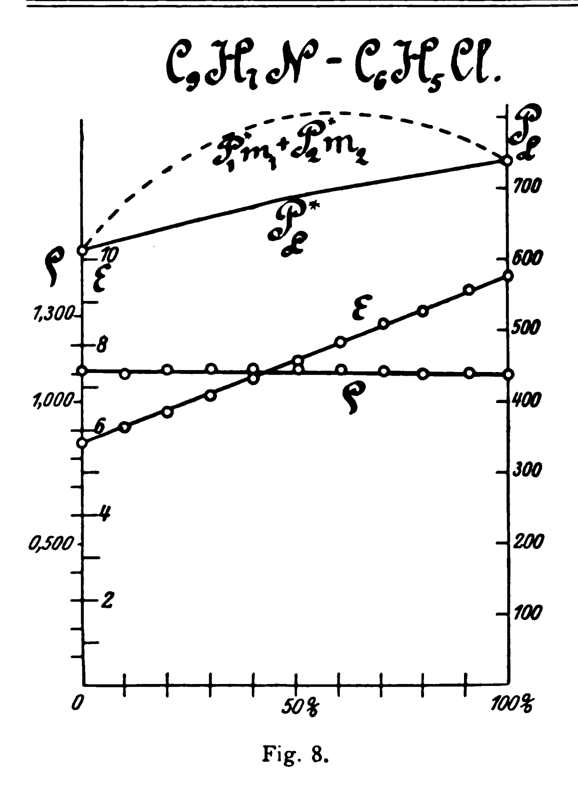


Fig. 8.

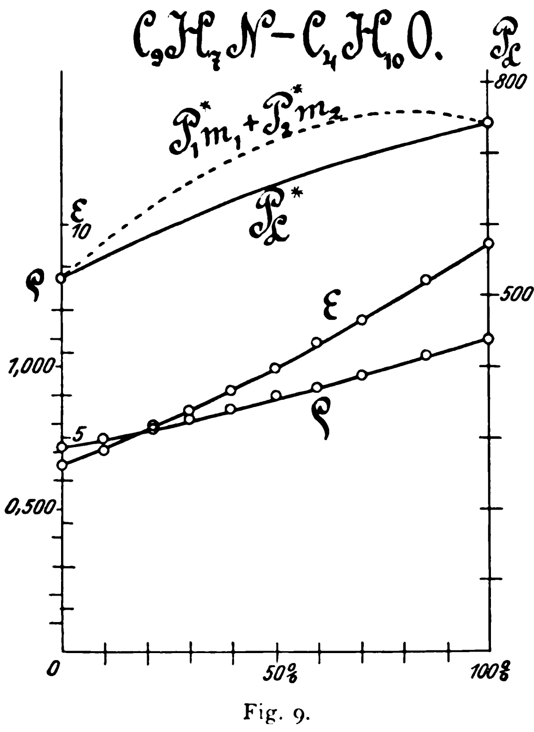


Fig. 9.

stoff) bestimmt; die Unabhängigkeit der Molekularpolarisation von der Konzentration und die Geltung des Additivitätsgesetzes für die Volumenpolarisation in diesen Gemischen festgestellt.

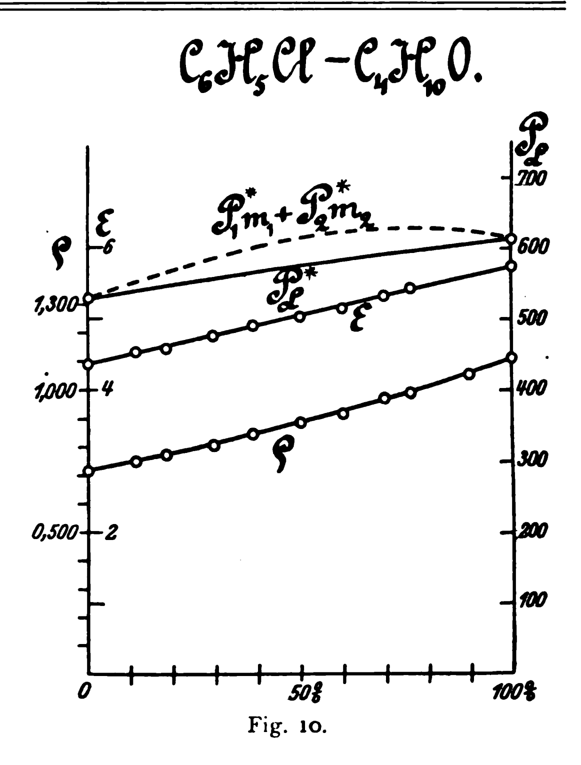


Fig. 10.

2. Es wurden binäre Gemische von Dipolsubstanzen (Äthyläther, Chlorbenzol und Chinolin) mit einer dipolfreien Substanz (Benzol) untersucht und festgestellt, daß die Molekularpolarisation dieser Dipolsubstanzen nicht konstant ist, sondern mit steigender Konzentration fällt; was auf die Assoziation der Moleküle in diesen Flüssigkeiten hinweist.

3. Auf Grund der Annahme, daß in den untersuchten Substanzen das Dipolmoment zweier assoziierter Moleküle verschwindet, wurde der Assoziationsgrad, d. h. das Verhältnis der assoziierten Moleküle zu der Gesamtzahl, berechnet und gefunden, daß derselbe mit steigender Konzentration wächst und bei gleicher Konzentration desto größer wird, je stärker das Dipolmoment der assoziierenden Flüssigkeit ist.

4. Das Additivitätsgesetz in den binären Gemischen der obigen Dipolflüssigkeiten für die Volumenpolarisation wurde als nichterfüllt gefunden und die Abweichung von demselben durch eine gemischte Assoziation erklärt.

Diese Arbeit habe ich im Physikalischen Institut I der Techn. Hochschule Warschau unter Leitung von Herrn Prof. Dr. M. Wolfke ausgeführt. Auch an dieser Stelle danke ich meinem hochverehrten Lehrer für das Thema selbst und die vielen wertvollen Ratschläge, mit denen er meine Arbeit unterstützte.

Physik. Inst. I d. Techn. Hochschule Warschau.

(Eingegangen 25. Juni 1928).

Zur Frage der flüssigen Kristalle.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Reichsuniversität Utrecht.)

Von L. S. Ornstein.

Eine in dieser Zeitschrift[1]) erschienene Arbeit von Herrn J. Errera — das elektrische Moment des Paraazoxyanisols — veranlaßt mich, einige Bemerkungen über das Problem der flüssigen Kristalle zu machen. Herr Errera deutet meine Arbeit[2]) in den Annalen der Physik so, daß ich angenommen habe, daß eine Stabstruktur da sei. Er beweist dann, daß derartige Stäbchen nicht existieren, da sie einen Beitrag zu der Dielektrizitäts-Konstante in ihrer Frequenzabhängigkeit liefern müßten. Nun kann meine Arbeit vielleicht den Eindruck machen, als hätte ich Stäbchen postuliert; das ist aber gewiß nicht so; ich will daher meine Auffassung des Problems hierunter klarzulegen versuchen ohne auf die Rechenmethoden, die verwendet sind, näher einzugehen.

Es sind beim Studium der flüssigen Kristalle zwei Fragen klar zu unterscheiden. Die erste Frage ist die nach den makroskopischen Eigenschaften des trüben flüssig-kristallinen Zustandes z. B. die Diskussion ihrer Extinktion, der Einfluß des Magnetfeldes auf diese letztere und auf die dielektrische Konstante usw. Die zweite vielleicht wesentlichere Frage betrifft die nach den molekularen Eigenschaften, die die Grundlage bilden für die optischen und chemischen Eigenschaften geordneter Gebiete flüssiger Kristalle — also der Eigenschaften des pseudo-isotropen Zustandes, und die Erklärung des Unterschiedes zwischen den makroskopischen Erscheinungen in trüben Schmelzen und dem pseudoisotropen Zustand im selben Temperaturgebiet.

In vielen Arbeiten über flüssige Kristalle ist die Trennung dieser beiden Seiten des Problems nicht genügend im Auge behalten, wodurch Mißverständnisse entstanden. In einigen Arbeiten von meinen Mitarbeitern und mir selbst haben wir uns auf den Standpunkt gestellt, daß man die Eigenschaften der trüben Schmelze auf diejenigen des isotropen Zustandes zurückführen kann, indem man die Schmelze als ein Aggregat von verschieden orientierten Gebieten auffassen kann. Sie befassen sich also nur mit dem makroskopischen Problem, während sie das mikroskopische nicht berühren.

Der pseudo-isotrope Zustand zeigt eine bestimmte Doppelbrechung, die zweifelsohne der Struktur der Moleküle zuzuschreiben ist und wobei ihre Anordnung eine Rolle spielt. Aus Symmetriegründen ist es klar, daß nach verschiedenen Richtungen verschieden polarisierbare Moleküle (oder Dipolmoleküle) nur dann Doppelbrechung zeigen können, wenn eine regelmäßige Anordnung ihrer Achsen vorhanden ist. — Sie können dann weiter räumlich zufällig orientiert sein.

1) Physik. Zeitschr. **29**, 425, 1928.
2) Ann. d. Phys. **74**, 454, 1924.

Die Tatsache, daß die flüssig kristallinische Phase in dickeren Schichten trübe ist — wenn sie nicht speziell gerichtet ist — ist eine makroskopische Erscheinung, die man auf die mikroskopische Doppelbrechung zurückführen kann.

Denkt man sich eine trübe Schmelze als ein Aggregat von aneinander schließenden verschieden orientierten Gebieten, so kann man aus diesem Bilde die Extinktion quantitativ beschreiben mit Hilfe der Doppelbrechung, wie es Frl. Dr. R. Riwlin[1]) in ihrer Utrechter Doktorarbeit gezeigt hat. Wenn ein Lichtbündel, das breit ist im Vergleich zu den Gebieten, woraus das Aggregat aufgebaut ist, dasselbe durchsetzt, wird durch Brechung und Reflexion aus einem parallelen Bündel ein mehr oder weniger weit geöffnetes Büschel entstehen. Hierdurch wird die Intensität in der ursprünglichen Richtung geschwächt. Julius hat für seine Sonnentheorie eine derartige Zerstreuung durch Brechung an Gebieten verschiedener Brechungsindizes dieses angenommen, während Zernike und ich eine Differentialgleichung für dieses Problem aufgestellt haben. Diese Gleichung kann man auch auf den Fall der flüssigen Kristalle anwenden wie in der genannten Dissertation gezeigt wird. Das Resultat ist, daß für Präparate gegebener Durchlässigkeit

$$(n - n')^2 d = \text{const},$$

wo n und n' die Brechungsindizes und d die Dicke des Präparates ist; die Gleichung gilt unabhängig von der Wellenlänge. Ich gebe hier eine Tabelle wieder für eine Reihe von Beobachtungen:

Paraazoxyanisol.

λ	$n - n'$	d	$d(n-n')^2$	d	$d(n-n')^2$
661	0,240	1,02	5,88	0,60	3.48
639	0.246	0.95	5.75	0.57	3.45
617	0.254	0.89	5.70	0.53	3.40
596	0.261	0.84	5.72	0,48	3,28
577	0.272	0,78	5.77	0.46	3.40
560	0,283	0,73	5,82	0.44	3.52
546	0,294	0,66	5.70	0,40	3,45
533	0.305	0,60	5,57	0,38	3.53
521	0,315	0,58	5.76	0,35	3,47
510	0.326	0,54	5.70	0.32	3.34

1) R. Riwlin, Das Wesen der Lichtzerstreuung in flüssigen Kristallen. Diss. Ut. 1923. (Vgl. Archives Need. Serie IIIA VII p. 95, 1923.)

Das Produkt $d(n - n')^2$ ist hier für zwei Durchlässigkeiten (10 und 20) angegeben. Die vorzügliche Übereinstimmung spricht meines Erachtens stark für die Aggregatauffassung.

Meine Beobachtungen über die Versuche von Kast beruhen auf demselben Gedankengang. Ein Aggregat von Gebieten mit anisotroper Dielektrizitätskonstante wird bei willkürlicher Orientierung eine mittlere Dielektrizitätskonstante zeigen. Nun ist es sicher, daß ein Magnetfeld orientierend wirkt; diese Orientierung der Teile des Aggregats kann man entweder auf dieser Grundlage eines magnetischen Momentes der Gruppen oder ihrer diamagnetisch-kristallinen Eigenschaften beschreiben. In beiden Fällen bekommt man Formeln, welche die Tatsachen gut wiedergeben, wenn man das Boltzmannsche Prinzip verwendet; ich glaube kaum, daß hiergegen etwas einzuwenden ist, nachdem die Erfahrung gezeigt hat, daß die statistische Theorie sogar für eine Galvanometerspule gilt, wie die Arbeit von Ising über die Brownsche Bewegung gezeigt hat. Man wird dann auch den sich wie selbständig verhaltenden Aggregaten eine Brownsche Bewegung zuschreiben müssen, was wieder die Grundlage des Boltzmannsatzes gibt. Die fundamentale Frage die aber offen bleibt — und die, so weit ich sehe, noch nicht gelöst ist — ist diejenige nach der Ursache der Bildung von Parallelschwärmen in flüssigen Kristallen. Es ist vielleicht gut zu bemerken, daß es nicht notwendig ist, an streng homogene Gebiete zu denken, sondern daß es vielleicht genügt, sich die Sache so vorzustellen, daß wenn ein herausgegriffenes Molekül irgendwo eine bestimmte Richtung hat, in der Umgebung eine größere Wahrscheinlichkeit existiert für parallele Lagerung als für irgendeine andere; dann wird sich eine gewisse Richtung durch Wahrscheinlichkeitswirkung in der Umgebung durchsetzen, gerade wie in der Nähe des kritischen Punktes eine Schwarmbildung für die Dichte sich äußert.

Errera hat gegen die vertretene Auffassung den Einwand erhoben, daß sie zu einem von der Frequenz abhängigen Beitrag zur Dielektrizitätskonstante führen muß. Moll[1]) und ich haben aber gezeigt, daß die Einstellung der Teilchen oder Gebiete eine sehr langsame Erscheinung ist. Bei Extinktionsversuchen im Magnetfeld, wo eine schnelle Apparatur für die Intensitätswahrnehmung gebraucht wurde, stellte sich heraus, daß die Aufhellung des Präparates unter Einfluß des Magnetfeldes eine Minute oder mehr in Anspruch nahm. Einem elektrischen Wechselfeld werden die Teilchen daher nicht folgen. Wenn übrigens die Gebiete als Kristalle mit von der Richtung abhängiger Dielektrizitätskonstante aufzufassen sind, wird sich im konstanten Felde ein von der Temperatur und der Feldstärke abhängiger Wert ergeben müssen.

1) Proc. Ann. **25**, 682, 1916; **25**, 1112, 1917; **26**, 683, 1917; **26**, 1442, 1918.

Daß Richtungseffekte auftreten, und daß die Wand dabei eine große Rolle spielt, wird durch viele Versuche klargestellt; ich möchte jetzt nur auf zwei Erscheinungen hinweisen.

An erster Stelle auf eine Beobachtung von Moll und mir[1]). Wenn eine Metallplatte (Silber), an welche zur Temperaturmessung ein Konstantan- und ein Manganindraht gelötet sind, in einer flüssig-kristallinischen Substanz sich befindet, so treten bei Einschalten eines Magnetfeldes thermische Effekte auf, wenn das Magnetfeld senkrecht zur Platte steht und keine, wenn es parallel verläuft. Im ersten Falle tritt Erwärmung beim Einschalten, Abkühlung beim Ausschalten auf. Diese Effekte kann man verstehen, wenn man annimmt, daß das Feld die Gebiete in seine Richtung orientiert, während die Wand eine ähnliche Wirkung ausübt. Ein Feld parallel zur Wand unterstützt deren Wirkung und hat keinen Einfluß, ein Feld senkrecht zur Wand deformiert die „Teilchen"; schaltet man das Feld aus, so wird die Verzerrung aufgehoben, wobei eine Abkühlung auftritt.

Eine weitere Erscheinung, die die Auffassung der gerichteten Gebiete stützt, wobei Feld und Wand ihren Einfluß zeigen, ist die folgende, worüber Herr A. van Wyk demnächst berichten wird.

Bringt man eine flüssig-kristallinische Substanz zwischen die Pole eines Magneten und durchleuchtet sie mit konvergentem polarisierten Lichte, dessen Symmetrieachse dem Felde parallel ist, so findet man, wie längst bekannt ist, Kristallinterferenzen. Wird nun die Feldstärke allmählich geändert, so durchläuft das Präparat eine Reihe von Zuständen, wobei die Figur abwechselnd gut ausgebildet ist und verschwindet. Die Feldstärke, bei der die „guten" Figuren auftreten, ist abhängig von der Wellenlänge und der Temperatur. Die Erscheinung tritt auf bei Feldern, wo nach den Kastschen Versuchen die Dielektrizitäts-Konstante ihren Sättigungswert erreicht hat, die Hauptmasse also vollständig orientiert ist. Qualitativ kann man die Erscheinung so verstehen, daß unter dem Einfluß des Feldes Gebiete, welche parallel zur Wand liegen, umklappen. Bei der Interferenzerscheinung spielt eine Schicht an der Wand eine Rolle, die als Kristall parallel zur Wand und eine Schicht, die als parallel zum Magnetfeld auf-

1) Moll en Ornstein l. c.



zufassen ist. Solche Schichten, die ihre Dicke durch den Einfluß des Feldes ändern, können die beobachteten Erscheinungen veranlassen.

Die Wirkung der Wand kann man sich dann so denken, daß diese die Moleküle, welche an der Wand liegen, sich selbst parallel richtet, während die oben schon genannte Schwarmbildung, die den flüssigen Kristallen eigen ist für die Ausbildung von Gebieten, die parallel zur Wand orientiert sind, sorgt. Ich möchte also nochmals hervorheben, daß meines Erachtens das noch ungelöste Hauptproblem bleibt — warum existiert in den flüssig-kristallinischen Substanzen eine Tendenz zur Bildung von Parallelschwärmen? Mit neuen Worten mesomorph oder nematisch löst man das Problem nicht; ich habe darum an der Terminologie des Entdeckers Lehmann festgehalten; die makroskopischen Eigenschaften der betrachteten Substanzen können, wie mir scheint, jetzt lückenlos aus der Aggregat-Schwarm- oder Kristall-Hypothese erklärt werden.

(Eingegangen 23. Juli 1928.)

Eine Methode zur Bestimmung der Kerr-Konstante schlecht isolierender Stoffe mit Hilfe elektrischer Wechselfelder.

Von Waldemar Ilberg.

I. Allgemeines.

Wie der Verfasser schon in einer früheren Arbeit bemerkte[1]), finden sich in der Literatur für den Wert der Kerr-Konstante des Nitrobenzols stark voneinander abweichende Angaben. So werden z. B. folgende Werte mitgeteilt:

W. Schmidt[2]) $B \sim 220 \cdot 10^{-7}$ für $\lambda = 680\,\mu\mu$
Lyon[3]) $B \sim 357 \cdot 10^{-7}$ für $\lambda = 645\,\mu\mu$.

Am Nitrobenzol sind bisher nur Relativmessungen vorgenommen worden, zumeist nach der von Des Coudres angegebenen Methode[4]). Diese gestattet, durch ein Kompensationsverfahren das Verhältnis der Kerr-Konstante der zu untersuchenden Flüssigkeit zu der einer Standardsubstanz (meist Schwefelkohlenstoff) zu ermitteln und erscheint deshalb besonders vorteilhaft, weil sie die Anwendung schneller elektrischer Wechselfelder gestattet. Hierdurch wird eine geringe, etwa vorhandene Leitfähigkeit unschädlich gemacht. Doch gerade beim Nitrobenzol vermag eine Relativmethode nur ungenaue Resultate zu liefern, da die Kerr-Konstante dieser Flüssigkeit eine ganz andere Größenordnung hat als die der in Frage kommenden Vergleichssubstanzen, sie ist nämlich etwa 70 mal so groß wie die des Schwefelkohlenstoffes. Hierauf sind wohl auch die erwähnten Abweichungen verschiedener Autoren voneinander in der Hauptsache zurückzuführen. Um zuverlässigere Werte zu finden, wurde vom Verfasser eine Absolutbestimmung der Kerr-Konstante des Nitrobenzols vorgenommen; die ihr zugrunde gelegte Methode soll im folgenden beschrieben werden.

1) Ilberg, Physik. Zeitschr. **26**, 907, 1925.
2) W. Schmidt, Ann. d. Phys. (4), **7**, 142, 1902. Die dort auf S. 170 angegebene Zahl 2200 ist offenbar ein Druckfehler und so wie oben zu lesen.
3) Lyon, Ann. d. Phys. (4) **46**, 783, 1915.
4) Des Coudres, Verh. Ges. D. Naturf. u. Ärzte Nürnberg 1893 (1) **2**, 67, 1894; vgl. auch W. Schmidt a. a. O.

II. Versuche, die Kerr-Konstante des Nitrobenzols mit Gleichspannung zu messen.

a) Die Leitfähigkeit des Nitrobenzols.

Zunächst war eine Messung der Kerr-Konstante mit Gleichspannung vorgesehen. Allerdings schien dem die erhebliche Leitfähigkeit im Wege zu stehen, die allgemein dem Nitrobenzol zugeschrieben wird[1]). Vorversuche hatten jedoch ergeben, daß diese durch ein einfaches Reinigungsverfahren weitgehend beseitigt werden kann. Legt man nämlich an eine mit Nitrobenzol[2]) frisch gefüllte Kerrzelle eine hohe Gleichspannung an, etwa 10000 Volt/cm, so fließt zunächst ein Strom von einigen Milliampere hindurch. Dieser fällt jedoch innerhalb einiger Minuten ungefähr exponentiell ab und beträgt schließlich nur noch ungefähr den hundertsten Teil des anfänglichen Stromes, um dann konstant zu bleiben. Eine derartige Leitfähigkeitsverringerung durch den hindurchgehenden Strom tritt bei sehr vielen Substanzen auf; zuerst ist sie wohl von H. Hertz am Benzin beobachtet worden[3]). Diese Erscheinung beruht offenbar darauf, daß sich Spuren von dissoziierten Verunreinigungen in der Flüssigkeit befinden, die durch den Stromdurchgang an den Elektroden abgeschieden werden. Als besonders wesentlich ist noch hinzuzufügen, daß beim Ändern der Polarität der anliegenden Gleichspannung merklich momentan die ursprüngliche Leitfähigkeit wieder auftritt, um erst nach einigen Minuten wieder auf den alten, geringen Wert abzusinken. Offenbar wandern durch die Umkehr des Stromes die leitenden Bestandteile durch die Zelle hindurch

1) Vgl. z. B. Lyon a. a. O.
2) Bezogen von Kahlbaum, Bezeichnung: „Nitrobenzol aus krist. Benzol D. Ap. V."
3) Hertz, Ann. d. Phys. (3) **20**, 283, 1883. Vgl. auch L. Graetz, Handbuch d. El. u. d. Magn. **1**, 250 ff., 1914.

an die andere Elektrode, und erst nach Beendigung dieses Prozesses nimmt die Leitfähigkeit wieder ihren alten Wert an. So erklärt sich auch, daß dieser Reinigungsprozeß bei Verwendung von Wechselspannung nicht beobachtet werden konnte, weder bei einer Frequenz von 25 Perioden noch bei Mittel- oder Hochfrequenz. Für die von Karolus angegebene Verwendung der Kerrzelle als trägheitsloses Lichtrelais[1]) ist dieser Punkt von großer Bedeutung geworden, insofern im Interesse eines guten Isolationszustandes der Zelle die Steuerwechselspannung stets mit einer Gleichvorspannung überlagert werden muß, woraus sich oft auch noch andere Vorteile ergeben.

b) Licht-Spannungs-Charakteristik der Kerrzelle, Grundgedanke der Messung.

Legt man an die Kerrzelle eine Gleichspannung E an, so findet darin gemäß dem Kerrschen Gesetz eine Doppelbrechung statt

$$\varphi = \frac{B l E^2}{a^2} \qquad (1)$$

(B Kerr-Konstante, l Länge der Elektroden, a Abstand der Elektroden, E gemessen in abs. elektrostat. Einh.) Die Doppelbrechung verursacht bei gekreuzten Nicols im allgemeinen eine Aufhellung des ursprünglich dunklen Gesichtsfeldes, die Abhängigkeit des durchtretenden Lichtstromes von der Doppelbrechung und mithin von der angelegten Spannung soll gefunden werden. Diese bildet die Licht-Spannungs-Charakteristik der Kerrzelle, deren Kenntnis auch für die technischen Anwendungen der Kerrzelle von großer Bedeutung ist. Hierzu werde folgende Überlegung angestellt.

Die Richtung des elektrischen Feldes sei als Y-, die darauf senkrechte als X-Richtung eines Koordinatensystems bezeichnet; die Richtung des einfallenden geradlinig polarisierten Lichtes sei unter 45^0 gegen X und Y geneigt.

Die Komponenten desselben nach X und Y sind Sinusschwingungen; da hier nicht der zeitliche Verlauf, sondern nur die geometrische Schwingungsbahn interessiert, seien diese dargestellt durch

$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ y &= \sin t, \end{aligned} \qquad (2)$$

wobei t einen beliebigen Parameter bezeichnet.

Nach dem Durchgang durch die Kerrzelle haben die beiden Komponenten eine relative Phasendifferenz von φ Wellenlängen erhalten; da wir vom zeitlichen Verlauf abgesehen haben, können wir diese beliebig einer der beiden Komponenten erteilen, beispielsweise x. Im Bogenmaß ausgedrückt wird diese Differenz $2\pi\varphi$. Die Parameterdarstellung der Schwingungsellipse ist dann also

$$\begin{aligned} x &= \sin(t + 2\pi\varphi) \\ y &= \sin t. \end{aligned} \qquad (3)$$

Hier kann t eliminiert werden, wobei sich ergibt:

$$x = y \cos 2\pi\varphi + \sqrt{1 - y^2} \sin 2\pi\varphi. \qquad (4)$$

Die Intensität des durchgelassenen Lichtes ist nun proportional dem Quadrat der senkrecht zur Polarisationsebene fallenden Ellipsenkomponenten, also im angenommenen Falle der gekreuzten Nicols ist der durchtretende Lichtstrom

$$J = \text{prop. } r_1^2, \qquad (5)$$

wobei r_1 den Radiusvektor für das Azimut 135^0 in Polarkoordinaten bezeichnet. Für die Gleichung (4) ergibt sich in Polarkoordinaten r, Φ umgerechnet

$$r^2 = \frac{\sin^2 2\pi\varphi}{1 - \sin 2\Phi \cos 2\pi\varphi}. \qquad (6)$$

Für $\Phi = 135^0$ kommt dann

$$r_1^2 = \frac{\sin^2 2\pi\varphi}{1 + \cos 2\pi\varphi} = 1 - \cos 2\pi\varphi. \qquad (7)$$

Der Maximalwert, den dieser Ausdruck annehmen kann, ist 2. Dieser tritt dann auf, wenn das austretende Licht geradlinig polarisiert ist und seine Schwingungsebene senkrecht auf der Polarisationsebene des Analysators steht. Die Intensität des austretenden Lichtes ist dann $\frac{J_0}{2}$, wenn J_0 das auf den Polarisator einfallende Licht bezeichnet. (Die Hälfte geht ja im Polarisator verloren, wenn man von der Absorption absieht.) Der bisher unbestimmt gelassene Proportionalitätsfaktor ist daher $\frac{1}{4}$, also

$$J = \frac{J_0}{4}(1 - \cos 2\pi\varphi). \qquad (8)$$

Wird die Doppelbrechung durch den Kerr-Effekt verursacht, so gilt, wie erwähnt, die Beziehung

$$\varphi = B l \mathfrak{E}^2 \qquad (\mathfrak{E} \text{ Feldstärke}).$$

Dies in (8) eingesetzt, ergibt den Lichtstrom J als Funktion der in der Kerrzelle herrschenden Feldstärke:

$$J = \frac{J_0}{4}[1 - \cos(f\mathfrak{E}^2)], \qquad (9)$$

wobei $f = 2\pi B l$ gesetzt ist.

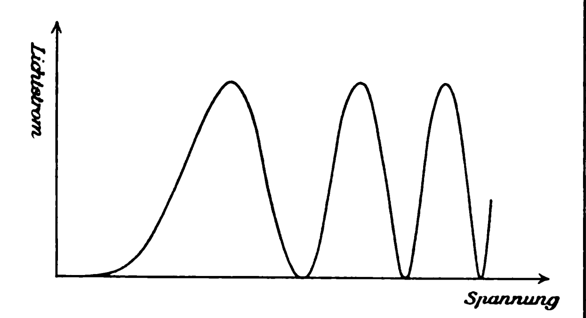
Es folge hier die graphische Darstellung dieser Abhängigkeit (Fig. 1). Diese Kurve gilt infolge der Dispersion des Kerr-Effektes nur für monochromatisches Licht. Bei der Verwendung von

1) Vgl. z. B. Schröter, Zeitschr. f. techn. Phys. **7**, 417, 1926 und Ilberg, Telefunken-Zeitung **45**, **46**, 43, 1927.



weißem Licht treten infolge der Dispersion des Kerr-Effektes Farben auf, die ganz auf dieselbe Weise zustande kommen wie die, welche an Glimmer- und Kalkspatpräparaten im Polarisationsapparat beobachtet werden. Fig. 2 zeigt eine mit Photozelle und Galvanometer aufgenommene Kurve unter Verwendung von weißem Licht, in deren Verlauf natürlich noch die Spektralempfindlichkeit der Photozelle eingeht.

Eine Betrachtung der Kurve (Fig. 1) zeigt, daß sich bei Anwendung von monochromatischem Licht mit wachsender Spannung das Gesichtsfeld periodisch aufhellt und verdunkelt. Die Anwendung auf eine Meßmethode lag nahe: es genügt, die Spannung so lange einzuregulieren, bis die erste oder die zweite Verdunkelung erreicht ist, und man kann dann aus dieser Spannung ohne Zuhilfenahme einer optischen Messung sofort die Kerr-Konstante berechnen.



Licht-Spannungs-Charakteristik der Kerrzelle.

Fig. 1.

Ist nämlich E^* die sog. „erste Dunkelspannung“, so wird nach dem allgemeinen Kerr-Gesetz, da die Doppelbrechung an dieser Stelle den Wert 1 hat, die Kerr-Konstante

$$B = \frac{a^2}{l E^{*2}}.$$

Diese Methode setzt allerdings voraus, daß die zu untersuchende Flüssigkeit derartig hohe Feldstärken verträgt, ohne durchzuschlagen, deshalb ist sie nur bei Substanzen großer Kerr-Konstante verwendbar (bei l = einige cm).

Bei den Versuchen, diese Methode auf das Nitrobenzol anzuwenden, stellte sich nun eine große Schwierigkeit heraus. Es zeigte sich nämlich, daß sich zwar eine einzelne Messung sehr scharf einstellen ließ, daß eine größere Anzahl hingegen voneinander sehr verschiedene Werte ergab, und zwar betrugen die Abweichungen gelegentlich bis zu etwa 20 Proz. Diese Erscheinung fand folgende Aufklärung. Wurde nämlich nicht nur, wie es bei den Messungen stets der Fall war, durch einen Spalt hindurch beobachtet, sondern wurde bei Verwendung von weißem Licht die ganze Kerrzelle gleichzeitig durch den Analysatornicol betrachtet, so zeigte sich, daß beim Anlegen einer hohen Spannung der Raum zwischen den Kondensatorplatten nicht gleichmäßig farbig erschien, sondern daß sich eine eigentümliche Schichtung ausbildete. Das Gesichtsfeld erschien dabei parallel zu den Platten von mehreren farbigen Streifen durchzogen. Diese Linien gleicher Farbe (Isochromaten) sind natürlich auch Linien gleicher Feldstärke; ihr Auftreten beweist, daß diese im Inneren der Zelle nicht überall dieselbe ist. Daher kann sie auch nicht, wie bisher stets angenommen wurde, als Quotient von Spannung und Plattenabstand berechnet werden; die auf dieser Annahme fundierten Messungen müssen daher notwendig fehlerhaft ausfallen, je nach der zufällig vorhandenen Leitfähigkeit und der Blickrichtung zwischen den Platten der Kerrzelle.

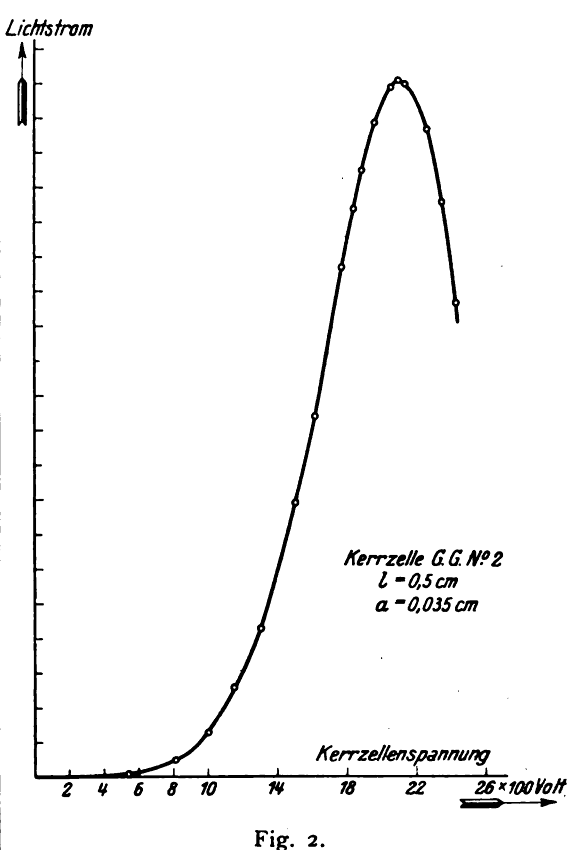


Fig. 2.

Licht-Spannungs-Charakteristik, bei weißem Licht aufgenommen mit Photozelle.

c) Beschreibung der ungleichmäßigen Feldverteilung zwischen den Elektroden der Kerrzelle.

Das Auftreten einer ungleichmäßigen Feldverteilung im Inneren einer Kerrzelle bei Verwendung von Nitrobenzol ist inzwischen[1]) auch von Lohaus[2]) beobachtet worden. Lohaus beurteilt die Inhomogenität des Feldes aus der Verschiedenheit der Aufhellung im Polarisationsapparat und findet, daß sich unmittelbar an der Kathode eine relativ sehr dünne Schicht hoher Feldstärke befindet, während diese im übrigen Raum zwischen den Elektroden einigermaßen konstant ist. Bei den Untersuchungen des Verfassers stellte sich diese Erscheinung wie folgt dar. Die Beobachtung erfolgte dadurch, daß das Gesichtsfeld einer Kerrzelle, die sich unter 45^0 zwischen gekreuzten Nicols befand, mittels einer Linse vergrößert auf einen weißen Schirm projiziert wurde. Legte man jetzt zunächst eine niedrige Gleichspannung an die Kerrzelle, so hellte sich das Gesichtsfeld zwischen den Platten merklich gleichmäßig auf[3]). Steigert man nun nach und nach die Spannung, so tritt zunächst in der Nähe der Anode eine Rotfärbung auf, die dann gegen die Kathode zu an Ausdehnung gewinnt und von einer blauen Zone begleitet

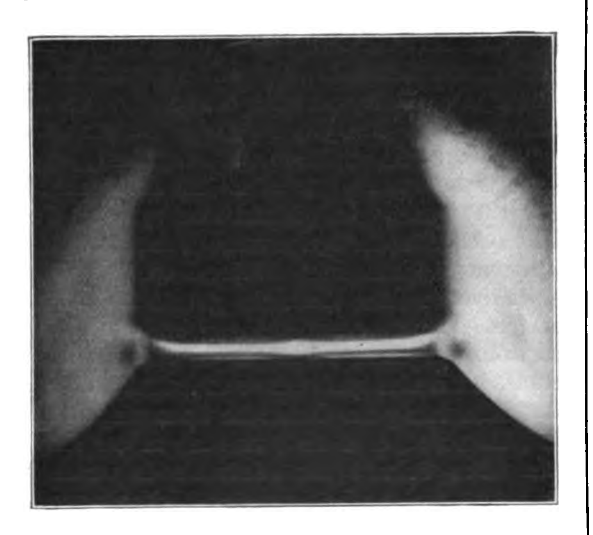


Fig. 3.

wird. Bei noch höherer Spannung lösen sich dann immer mehr rot-blaue Linien von der Anode ab, so daß gleichzeitig oft bis zu vier solcher zwischen den Elektroden zu sehen sind. Die Verteilung dieser Isochromaten läßt nun einen Schluß auf die Feldverteilung zwischen den Platten zu; da die Doppelbrechung quadratisch mit der Feldstärke zunimmt, so entspricht der Abstand zweier Isochromaten einem Verhältnis

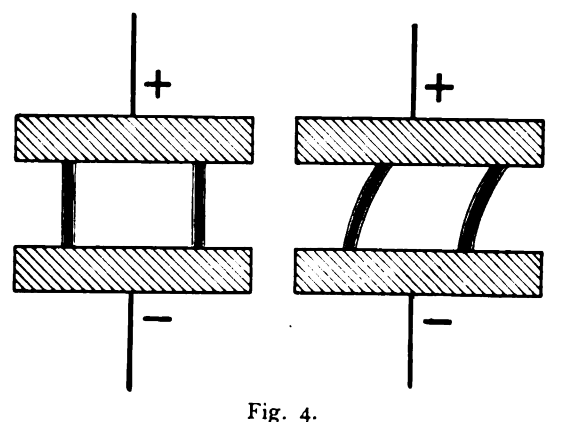


Fig. 4.
Interferenzstreifen des Babinetschen Kompensators links vor, rechts nach dem Einschalten des Feldes.

der Feldstärken wie $1 : \sqrt{2}$. Da, wie erwähnt, gelegentlich bis zu vier solcher Linien gleichzeitig zwischen den Platten beobachtet wurden, so folgt daraus ein maximaler Feldstärkenunterschied wie $1 : (\sqrt{2})^4 = 1 : 4$, der sich zwischen den Platten einstellen kann. Fig. 3 zeigt die Photographie einer Isochromate, die einer relativ geringen Spannung entspricht.

Der eben beschriebene Vorgang des ersten Auftretens von Farben an der Anode zeigt, daß sich dort die größte Feldstärke ausbildet, also dort auch die geringste Leitfähigkeit herrscht. Indessen scheint das nicht ohne Ausnahme so stattzufinden, denn in einem Falle konnte auch das umgekehrte Verhalten beobachtet werden. Auch Lohaus bemerkte die größte Feldstärke an der Kathode. Offenbar ist die Art der Feldverteilung stark von dem Reinheitsgrade des verwendeten Nitrobenzols abhängig.

Auch auf eine andere Art läßt sich die ungleichmäßige Feldverteilung im Inneren der Kerrzelle zeigen. Bringt man bei Verwendung von parallelem Licht zwischen Kerrzelle und Analysator noch einen Babinetschen Kompensator an, so findet man, daß dessen ursprünglich der Feldrichtung paralleles Streifensystem nach dem Einschalten der Spannung gekrümmt wird, und zwar auch wieder so, daß an der Anode die größte Ablenkung stattfindet, vgl. Fig. 4.

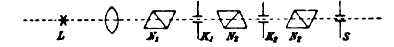
Es liegt nahe, anzunehmen, daß die ungleichmäßige Verteilung der Feldstärke im Inneren der Kerrzelle in engem Zusammenhang steht mit

1) Die hierzu gehörigen Untersuchungen liegen schon einige Jahre zurück, sie wurden vom Verf. schon in seiner Dissertation niedergelegt (Leipzig 1925).
2) Lohaus, Physik. Zeitschr. **27**, 17, 1926.
3) Es ist möglich, daß hierbei eine sehr dünne Schicht größerer Aufhellung der Beobachtung entgehen konnte, da nicht mit dem Mikroskop untersucht wurde, wie dies Lohaus tat.

der unter IIa beschriebenen Erscheinung der Leitfähigkeitsverringerung, die beim Stromdurchgang auftritt. Denn wenn sich hierbei wirklich leitende Verunreinigungen der Versuchsflüssigkeit in der Nähe der einen Elektrode anreichern, wie dort angenommen war, so wird damit der Ohmsche Spannungsabfall und damit die Feldstärke an verschiedenen Stellen der Zelle verschieden sein. Aus der dort mitgeteilten Beobachtung, daß dieser Reinigungsvorgang bei Verwendung von Wechselspannung nicht auftritt, wird so wahrscheinlich gemacht, daß sich dann auch keine räumliche Verschiedenheit der Feldstärke mehr einstellt. Auf dieser Annahme, deren Berechtigung durch den Versuch erwiesen wurde, fundiert die im folgenden auseinanderzusetzende Methode, die eine absolute Messung der Kerr-Konstante unter Verwendung von Wechselspannung erlaubt.

III. Absolute Bestimmung der Kerr-Konstante unter Anwendung von Wechselspannung.

Die oben unter IIb beschriebene Meßmethode, die auf der Einstellung der „ersten Dunkelspannung" beruht, kann dadurch auch für Wechselspannung brauchbar gemacht werden, daß durch eine geeignete Vorrichtung dafür gesorgt wird, daß immer nur einmal während jeder Periode, und zwar immer zur selben Zeit (Phase) beobachtet wird, beispielsweise im Scheitelwert der Spannung. Dies könnte etwa durch



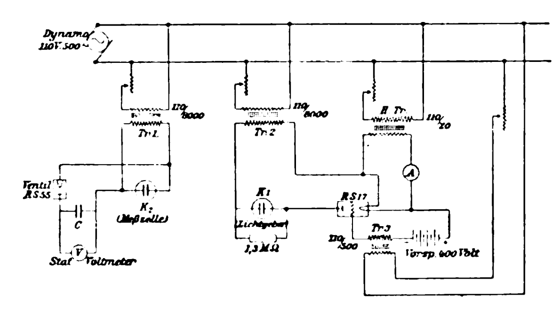


Fig. 5.

eine synchron mit dem Wechselstrom umlaufende Scheibe mit einem am Umfang angebrachten Loch verwirklicht werden. Es liegt jedoch nahe, als momentan sich öffnendes Lichtventil eine zweite Kerr-Anordnung zu verwenden, der nur im Moment des Scheitelwertes Spannung zugeführt wird. Die sich hierbei ergebende Anordnung ist in Fig. 5 wiedergegeben.

Das Licht einer Lichtquelle L geht zunächst durch die erste Kerr-Anordnung $N_1K_1N_2$ hindurch. Diese ist als Lichtgeber gedacht und läßt nur im Scheitelwert der angelegten Spannung Licht hindurchtreten (s. u.). Hierauf kommt die eigentliche Meßzelle K_2; der Polarisator kann in diesem Falle erspart werden, da das Licht ja schon polarisiert aus der ersten Anordnung herauskommt. Schließlich folgt noch der Analysatornicol N_3 und ein Beobachtungsspalt S. Als Lichtquelle diente eine Punktlichtlampe mit dahinter geschaltetem Monochromator, der einen definierten Spektralbereich einzustellen erlaubte. Dieser war etwa 50 Å.-E. breit, sein optischer Schwerpunkt konnte mit Hilfe Fraunhoferscher Linien bestimmt werden. Als Kerrzelle K_2 diente die früher beschriebene[1]) Meßzelle I, als Lichtgeber wurde eine ähnliche, aber wesentlich kürzere Zelle verwendet.

Die elektrische Anordnung war die folgende (Fig. 5 unten): Als Stromquelle wurde ein 500 per.-Generator benutzt; an ihn war über einen Regulierwiderstand und einen Transformator *Tr* 1 110/8000 Volt die Meßzelle K_2 angeschlossen. Da im Scheitelwert gemessen werden sollte, mußte die Scheitelspannung der an der Meßzelle liegenden Wechselspannung gemessen werden. Dies geschah mit einem statischen Voltmeter mit Parallelkondensator, das über ein Glühventil an die Kerrzelle angeschlossen war. Zum Betrieb der Lichtgeberzelle diente der gleiche Wechselstrom. Um ein möglichst kurzzeitiges Aufleuchten dieser Zelle zu erreichen, war folgende Anordnung getroffen. Im Anodenkreis einer Elektronenröhre (Senderöhre 75 Watt) befindet sich außer der Stromquelle (Transformator) noch ein hochohmiger Widerstand. Parallel zu diesem ist die Kerrzelle geschaltet. Wird jetzt eine Steuerwechselspannung auf das Gitter der Röhre gegeben, so macht der Anodenstrom deren Schwankungen mit und mithin ändert sich gleichphasig der Ohmsche Spannungsabfall am Widerstand, d. h. die Spannung an der Kerrzelle. Das Prinzip der Meßmethode verlangt nun, daß die Aufhellung der Lichtgeberzelle möglichst kurz und stets im selben Momentanwert der Spannung erfolgen soll. Zu diesem Zwecke wurde eine Röhre steiler Charakteristik verwendet, deren Gitter mit ca. 400 Volt negativ vorgespannt war. Dieser Vorspannung wurde mit Hilfe eines Transformators *Tr* 3 eine so hohe Wechselspannung überlagert, daß das Gitterpotential während jeder Periode nur sehr kurze Zeit, und zwar immer im Scheitelwert der einen Halbwelle positiv wurde. Als Anodenspannung diente eine Wechselspannung von

1) Ilberg a. a. O.



ca. 5 kV, die durch einen Transformator *Tr* 2 von derselben Maschine geliefert wurde. Beim Anschließen des Transformators war darauf zu achten, daß Anodenspannung und Gitterspannung gleichphasig sein müssen, da sonst zu keiner Zeit durch die Röhre Strom fließen kann.

Der Gang der Messungen war nun folgender. Nachdem am Monochromator die gewünschte Farbe eingestellt worden war, wurden beide Kerrzellen unter Spannung gesetzt und mit Hilfe des Regulierwiderstandes die Spannung der Meßzelle auf Verdunkelung des Gesichtsfeldes eingestellt. Aus der Tatsache, daß diese Verdunkelung im ganzen Gesichtsfeld gleichzeitig eintrat, konnte geschlossen werden, daß in der Kerrzelle tatsächlich eine homogene Feldverteilung herrschte. Hierauf wurde dann das Elektrometer abgelesen. Dies wurde für jede Wellenlänge fünfmal gemacht und auf diese Art sechs verschiedene Wellenlängen durchgemessen. Nach Beendigung jeder Meßreihe wurde das statische Elektrometer mit Hilfe eines Meßwandlers geeicht und hieraus unter Benutzung der bekannten Daten der Meßzelle die Kerr-Konstante des Nitrobenzols berechnet. Die erhaltenen Werte (auf 21° C bezogen) sind die folgenden:

Tabelle I.

Wellenlänge in λ	Kerrkonstante gemessen	Nach der Havelockschen Formel berechnet
467	$31,1 \cdot 10^{-6}$	$30,2 \cdot 10^{-6}$
491	28,8	28,4
527	26,0	25,9
569	23,0	23,2
603	21,6	21,9
639	20,2	20,4

In der letzten Spalte sind die Werte angegeben, die sich aus der von Havelock[1]) gefundenen Dispersionsformel ergeben:

$$B = \text{prop.} \frac{(n-1)^2}{\lambda n}.$$

Der hier vorkommende Brechungsexponent des Nitrobenzols wurde für die verschiedenen Wellenlängen den Tabellen von Landolt und Börnstein entnommen. Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten ist gut, für die kurzwelligen Strahlen sind die beobachteten Werte etwas größer als die berechneten; ein Resultat, das auch durch die von Lyon[2]) mitgeteilte Tabelle bestätigt wird. Die gefundenen Werte, die auch gleichzeitig über die Dispersion Aufschluß geben, sind in Fig. 6 eingetragen.

1) Havelock, Proc. Roy. Soc. (A) **80**, 28—44, 1907.
2) Lyon, a. a. O., S. 783.

Als mittlerer Fehler des Resultates, der sich aus den Unsicherheiten der Messungen für die geometrischen Dimensionen der Kerrzelle, für die Spannung, für die Temperatur und schließlich aus der Einstellgenauigkeit für das Lichtminimum ergibt, kann etwa ± 1,5 Proz. angegeben werden.

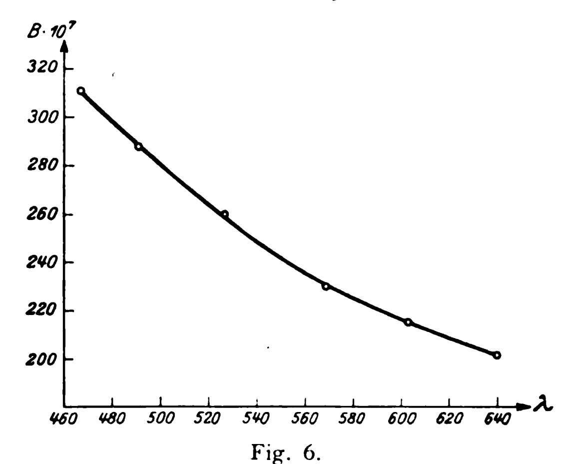


Fig. 6.
Dispersion der elektrischen Doppelbrechung beim Nitrobenzol.

Zusammenfassung.

1. In der Literatur finden sich stark voneinander abweichende Angaben über die Kerr-Konstante des Nitrobenzols, die eine zuverlässigere Bestimmung wünschenswert machen.

2. Zunächst war eine Messung mit Gleichspannung vorgesehen, wobei die Spannung soweit zu steigern ist, bis die auftretende Doppelbrechung gerade ein ganzes Vielfaches einer Wellenlänge beträgt, was durch Verdunkelung des Gesichtsfeldes im Polarisationsapparat festgestellt wird. Dann entfällt jede optische Messung; die Bestimmung der Kerr-Konstante ist auf eine Spannungsmessung und auf die geometrische Ausmessung der Kerrzelle zurückgeführt.

3. Diese Gleichspannungsmethode ist beim Nitrobenzol und bei anderen unvollkommenen Isolatoren nicht anwendbar, da sich zwischen den Elektroden eine nicht berechenbare ungleichmäßige Feldverteilung ausbildet, wobei Feldstärkeunterschiede wie 1 : 4 beobachtet wurden. Wahrscheinlich steht diese Erscheinung im Zusammenhang mit dem schon früher bekannten Vorgang der durch Stromdurchgang bewirkten Reinigung der Versuchsflüssigkeit von leitenden Beimengungen.

4. Diese Reinigung tritt bei Wechselspannung nicht ein. Eine Inhomogenität der Feldstärke wird bei Anwendung von Wechselfeldern nicht beobachtet. Die Messung der Kerr-Konstante nach der Gleichspannungsmeßmethode unter 2. wird deshalb für Wechselspannung dadurch modifiziert, daß nur immer kurzzeitig im Scheitelwert der Wechselspannung beobachtet wird. Dies geschieht durch eine zweite Kerrzellen-Anordnung, die als Lichtventil wirkt und immer nur merklich momentan im Scheitelwert der verwendeten Wechselspannung aufleuchtet.

5. Mit dieser Anordnung wird die Kerr-Konstante des Nitrobenzols bei verschiedenen Wellenlängen des Lichtes gemessen und hieraus eine Dispersionskurve erhalten.

6. Die gefundene Dispersion stimmt mit der aus der Havelockschen Formel berechneten innerhalb der Fehlergrenzen überein.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 14. Juli 1928.)

Ein Erklärungsversuch zu dem sogenannten thermischen Rückstandsphänomen von Majorana.

Von Marie Anna Schirmann.

Im November 1926 erschien in den Rend. d. R. Acc. N. dei Lincei[1]) eine Arbeit von Q. Majorana, in welcher er mit Hilfe eines von ihm konstruierten sehr konstanten Thermostaten (Genauigkeit auf $^1/_{100}{}^0$ C) auf eine thermische Rückstandserscheinung der Metalle Stahl, Eisen, Blei und Kupfer aufmerksam machte.

Da bisnun von keiner Seite irgendeine Erklärung für dieses Phänomen erfolgt ist, soll im nachfolgenden ein Erklärungsversuch gegeben werden, der sich auf die Erfahrungen der Verfasserin in bezug auf Entgasungs- bzw. Aktivierungserscheinungen an Metallen stützt und obengenanntes Phänomen mit diesem Erscheinungskomplex in Zusammenhang zu bringen versucht.

Zufällige Temperaturdifferenzen zweier gleich vorbehandelter Metallproben sind in jenem thermoelektrischen Differentialkalorimeter bereits nach zwei bis drei Tagen vollständig ausgeglichen. Wird aber die eine der beiden Metallproben zuvor geglüht und beide dann auf gleiche Temperatur abgekühlt, so zeigen dann die beiden Proben im Kalorimeter eine Temperaturdifferenz von mehr als $^1/_{10}{}^0$ C, derart, daß die thermisch vorbehandelte (geglühte) immer die höhere Temperatur hat; die Temperaturdifferenz nimmt mit der Zeit ab und ein praktischer Temperaturausgleich tritt erst nach mehreren Wochen ein.

In dem im folgenden kurz skizzierten konstanten Thermostaten (Fig. 1) kann die Temperaturdifferenz zwischen Versuchs- und Vergleichsmetall innerhalb von doppeltem Dewarhüllenschutz mittels Thermobatterien (Konst.-

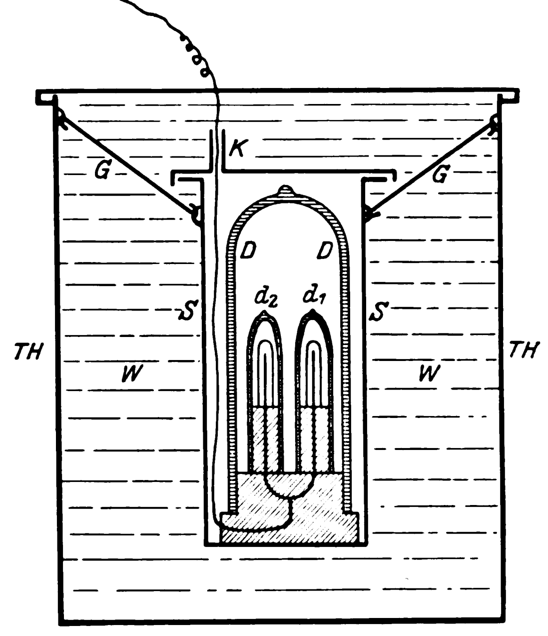


Fig. 1.

Cu oder Konst.-*Fe*) mit einer Empfindlichkeit gemessen werden, der auf einer Skala 1530 mm für einen Grad Celsius bei einem Skalenabstand von 1,50 m vom Galvanometer und im äußersten Falle noch das 10fache desselben entspricht.

In das Wasser W des Thermostaten Th, der durch elektrische Widerstandsheizung mit Relais und thermischen Regulatoren auf einer minimal höheren Temperatur als der der Umgebung gehalten wird (Temperaturgenauigkeit $^1/_{100}{}^0$ C), taucht ein zylindrischer Messingtrog SS ein, der ein großes zylindrisches Dewargefäß aus Porzellan DD (25 × 50 cm) mit der durch lackiertes, trockenes hartes Holz verschlossenen Öffnung nach unten enthält. In diesem Dewarzylinder (Temperaturgenauigkeit $^1/_{100}{}^0$ C) befinden sich die beiden kleinen Versuchs-Dewar-Zylinderchen d_1, d_2 (3 × 10 cm), unten verschlossen mit Stopfen aus schlechtwärmeleitendem, nicht porösem Material (wie Glas, Ebonit, Porzellan usw.) zur Aufnahme der Versuchs-Metallzylinder bzw. der in deren Bohrung hineinreichenden Thermobatterien. Die elektrischen Zuleitungen führen über K ins Freie.

1) Q. Majorana, Su di un fenomeno termico residuo. Rend. d. R. Acc. N. dei Lincei, **4**, 419, 1926.

Von den beiden Versuchszylindern aus Eisen oder besonders Stahl (vom gleichen Block geschnitten) blieb der eine thermisch ganz unbehandelt, bloß auf der Drehbank bearbeitet und poliert, der andere wurde auf Rot-Orange-Glut erhitzt und entweder langsam abgekühlt oder rasch im Wasser abgeschreckt und dann ebenfalls auf der Drehbank poliert. Beide Versuchszylinder wurden dann eine Stunde lang fließendem Wasser ausgesetzt, dann getrocknet und etwa eine weitere Stunde an der Zimmerluft belassen. Nach Einbringen in die kleinen Dewarhüllen des Thermostaten dauerte es — wie bereits eingangs erwähnt — mehrere Wochen bis die um $^1/_{10}{}^0$ C höhere Temperatur der thermisch vorbehandelten Eisen- oder Stahlprobe wieder vollständig rückgebildet war. Die Größenordnung der Wärmemenge, welche der festgestellten Temperaturerhöhung entsprach, wurde durch ein eingebautes kleines Vergleichsglühlämpchen zu 0,0006 Watt ermittelt; diese Energie entspricht der nach der Abschreckung des Stahlzylinders (vom Gewicht 300 g) und nach seinem Einbau in das thermoelektrische Differentialkalorimeter anfänglich abgegebenen Energie.

Eisen gibt einen etwas kleineren Effekt als Stahl und bei Blei und Kupfer ist die Realität des Effektes wegen der Oxydation überhaupt in Frage gestellt. Bei Flüssigkeiten wird ein solcher Effekt gar nicht vermutet. — —

Metalle haben nun die Eigenschaft Gase zu absorbieren; und zwar ist die Absorptionsfähigkeit bei höheren Temperaturen kleiner als bei niedrigen. Wird daher ein Metall auf höhere Temperaturen geglüht, so gibt es von seinen absorbierten Gasen einen großen Teil ab, es wird teilweise entgast und beginnt dann, auf niedrigere Temperaturen wieder abgekühlt, begierig wieder Gase zu schlucken. Da es sich bei der Sorption von Gasen durch Metalle sicherlich nicht bloß um reine Lösungsvorgänge (und Absorptionswärmen) handelt, sondern auch um eine Verdichtung der Gase an ihrer äußeren bzw. (wenn aktiviert) inneren Oberfläche, so ist mit dieser Gasaufnahme auch eine beträchtliche Temperaturerhöhung verbunden[1]).

Um einen ähnlichen Vorgang dürfte es sich auch bei dem von Majorana gefundenen thermischen Rückstandsphänomen handeln. Der ausgeglühte Stahl entgast sich, um dann auf niedrigere Temperaturen gebracht, langsam wieder Gas aufzunehmen. Daß solche Gasaufnahmen entgasten Eisens bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck recht langsam vor sich gehen, soll ein Diagramm zeigen, bei dem als Indikator für die Gasaufnahme die Erhöhung des elektrischen Widerstandes fungiert. In folgender Fig. 2 bedeuten die Abszissen die Zeit in Stunden, die Ordinaten die Widerstands- bzw. Gasgehaltsänderungen in trockener Luft bei Eisen[1]) im Verlaufe von 50 Stunden. Die Abhängigkeit ist in diesem Zeitraum noch nahezu linear, um dann, wie viele andere Versuche ergeben haben, eine Sättigung zu erreichen. Dabei entsprechen 0,01 Ohm Widerstandserhöhung einer Gasaufnahme von $5{,}10^{-2}$ Volumteilen Gases am Volumen des Absorbens gemessen. Also im ge-

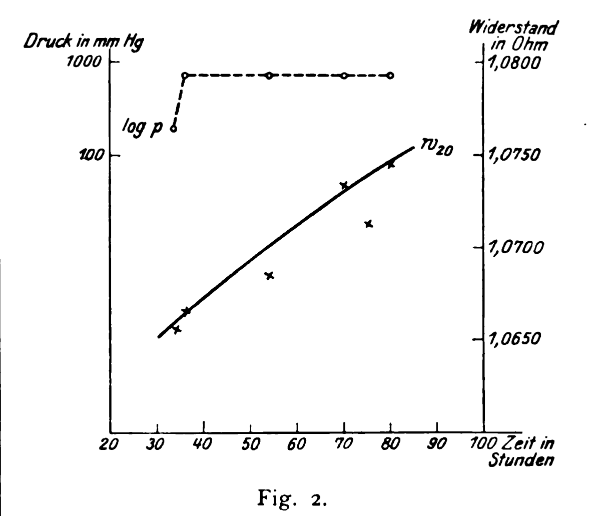


Fig. 2.

Widerstandsänderungen eines entgasten *Fe*-Drahtes bei Atmosphärendruck mit der Zeit.

gebenen Falle entsprechen $1{,}10^{-2}$ Ohm in 50 Stunden $5{,}10^{-2}$ Volumteile, das sind ca. 1,5 mm³ absorbiertem Gas.

Die bei solch langsamer Gasaufnahme entstehenden Absorptionswärmen halten dann entsprechend der langsamen Absorption durch längere Zeit eine Temperaturdifferenz des thermisch vorbehandelten gegenüber dem thermisch unbehandelten Stahlzylinder aufrecht. Solch geringe Temperaturdifferenzen sind nun in dem vorbesprochenen thermoelektrischen Differentialkalorimeter mit Sicherheit leicht festzustellen.

Interessant wäre es zur Überprüfung dieser Erklärung für das thermische Rückstandsphänomen von Majorana die beiden Dewarbecher, welche die beiden thermisch verschieden vorbehandelten Stahlzylinder enthalten, durch Löcher in den unteren Stopfen evakuierbar umzubauen, um durch Evakuieren auf verschieden niedrige Drucke auch die Entgasungszustände beider Versuchszylinder vergleichen zu können.

Sollte sich die im vorstehenden diskutierte Erklärungsweise für das thermische Rückstands-

1) Vgl. die Zündung von Leuchtgas-Luft-Gemenge durch frisch ausgeglühtes Platin im Leuchtgasstrom.

1) K. Kleine, Zeitschr. f. Phys. **33**, 397, 1925.

phänomen als richtig erweisen, so wäre in einem solchen evakuierbaren thermoelektrischen Differentialkalorimeter auch ein neues einfaches Instrument zur Messung verschiedener Sorptionen und Entgasungen von Körpern gefunden.

Wien, III. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 12. Juli 1928.)

Untersuchungen über die Konstanz der Wirkung radioaktiver Präparate.

Von Hans J. Vogler.

1. Zweck der Untersuchungen.

Die Anregung zu den im folgenden besprochenen Versuche war gegeben durch die Ergebnisse von R. Stoppel[1]), die gezeigt hatten, daß eine Tagesperiodizität der Leitfähigkeit der Atmosphäre auch in geschlossenen Räumen besteht. Es war deshalb die Möglichkeit denkbar, daß der verschiedene Grad der Leitfähigkeit der Atmosphäre sich auch bemerkbar machen könnte in einer verschieden starken Wirkung der α-, β- und γ-Strahlen. Daher mußten fortlaufende Untersuchungen über die Konstanz der Wirkung verschiedenartiger radioaktiver Präparate ausgeführt werden.

2. Versuchsanordnung.

Die Versuche wurden in Island in der Zeit zwischen April und November 1927 gemacht. Die erforderlichen Apparate hatte größtenteils die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft in entgegenkommender Weise zur Verfügung gestellt, außerdem erhielten wir leihweise ein Benndorf-Elektrometer vom Observatorium in Potsdam durch Herrn Dr. Kähler[2]). Wir möchten an dieser Stelle für die Überlassung all dieser Instrumente unseren besten Dank aussprechen.

Die Apparate waren in einem ständig dunkel gehaltenen, verschlossenen Raum im zweiten Stock eines Hauses in Akureyri in Nordisland aufgestellt. Das Haus war mit Wellblech gedeckt und seine Holzwände waren zum Schutz gegen die Witterungseinflüsse völlig mit Wellblech umkleidet. — In diesem Raum wurde die ionisierende Wirkung der radioaktiven Präparate in der Weise festgestellt, daß mit Hilfe eines selbstregistrierenden Benndorf-Elektrometers die Geschwindigkeit bestimmt wurde, mit der das Potential eines jede volle Stunde neu aufgeladenen Kondensators unter der Einwirkung der Präparate entladen wurde. In dem gleichen Raum wurde mit selbstregistrierenden Instrumenten der Luftdruck, die Temperatur und die relative Feuchtigkeit und mit einem zweiten Benndorf-Elektrometer die Leitfähigkeit der Atmosphäre gemessen. — Es wurden dort außerdem andere Beobachtungen gemacht, die ein häufiges Betreten des Zimmers erforderten. Diese Ablesungszeiten wurden stets notiert. Es war keine merkbare Beeinflussung der Kurven durch diese anderweitige Inanspruchnahme des Zimmers zu beobachten, da jede Störung sorgsam vermieden wurde.

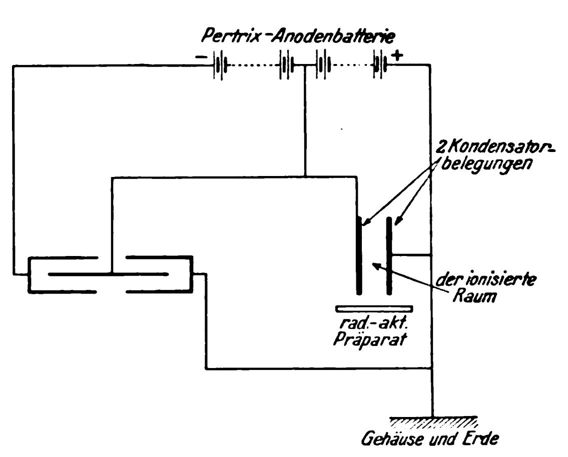


Fig. 1. Versuchsanordnung zur Registrierung der ionisierenden Wirkung radioaktiver Präparate mit dem selbstregistrierenden Benndorf-Elektrometer.

Die Kondensatoren, die für die Konstanzprüfung der ionisierenden Wirkung radioaktiver Präparate gebraucht wurden, waren verschiedenartig sowohl in Gestalt und Größe, auch war die Art ihrer Aufstellung nicht immer die gleiche. Es wurden verwandt:

1. Ein Plattenkondensator von 15 mm Abstand und 100×120 mm² Fläche, der offen aufgestellt war, an den also die Zimmerluft frei herantreten konnte.

2. Eine zylinderförmige Metallkanne von 10 l Inhalt, wie sie zum Messen der Radioaktivität von Quellwassern nach Engler und Sieveking im Fontaktoskop benutzt wird. Die andere „Be-

1) Stoppel, R., Leitfähigkeit und Ionengehalt der Atmosphäre im geschlossenen Raum bei konstanten Licht- und Temperaturverhältnissen. Nachricht. d. k. Gesell. d. Wiss., Göttingen 1919. — Beitrag zum Problem der Leitfähigkeit der Atmosphäre. Physik. Zeitschr. **27**, 755—761, 1926. — Die Beziehungen tagesperiodischer Erscheinungen beim Tier und bei der Pflanze zu den tagesperiodischen Intensitätsschwankungen der elektrischen Leitfähigkeit der Atmosphäre. Planta **2**, 356—366, 1926.

2) Die Anodenbatterien stellte uns die Firma Pertrix, Chemische Fabrik A.-G., Hamburg, zur Verfügung. Sie bewährten sich ausgezeichnet.

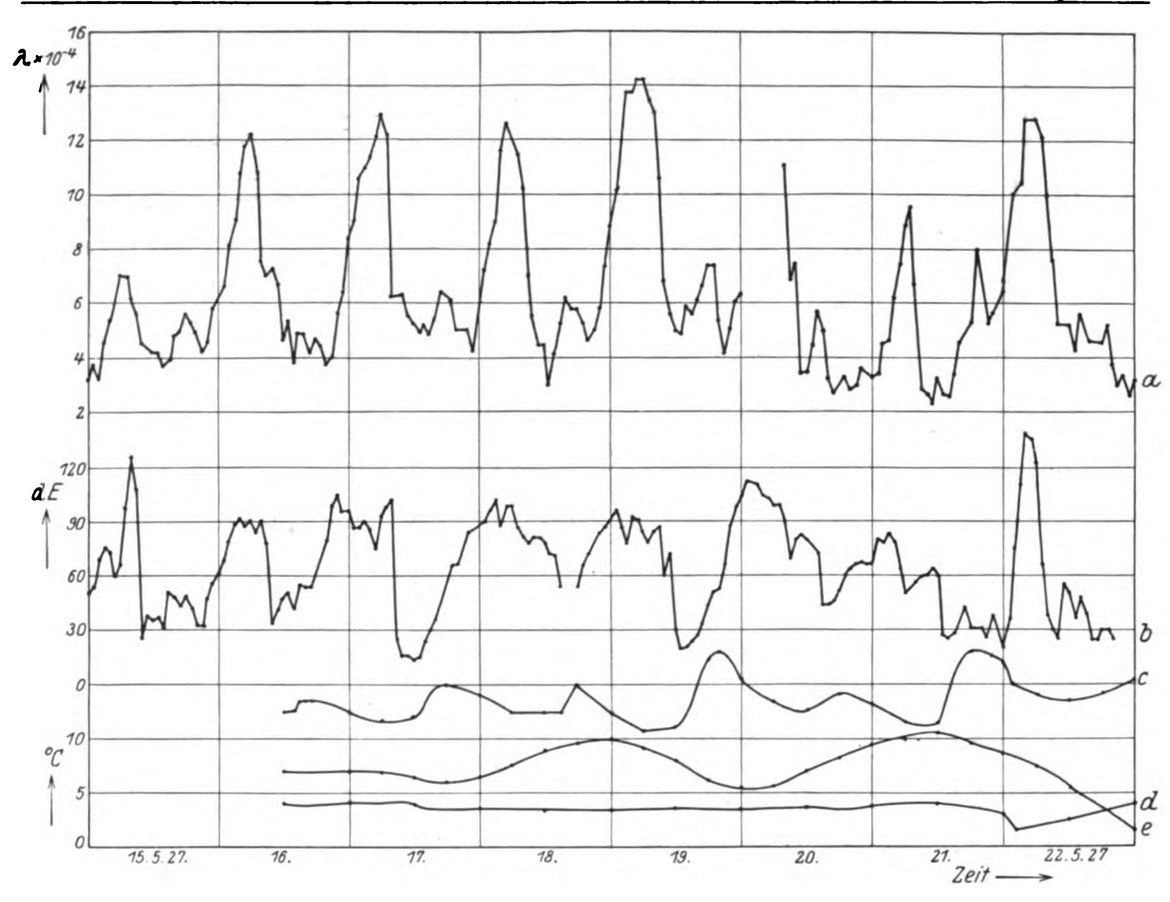


Fig. 2. Akureyri in Island 15.—22. März 1927. Kurve a: Leitfähigkeit der Atmosphäre. Kurve b: Die ionisierende Wirkung eines α-Strahlers im offenen Raum (vgl. S. 678 unter 1). Kurve c: Die Temperaturschwankungen in Celsiusgraden. Kurve d: Die Feuchtigkeitsschwankungen (maximal 1 Proz. vom Durchschnittswert). Kurve e: Luftdruckschwankungen (zwischen 759 und 750 mm *Hg*). Die verstärkte Vertikallinie bezeichnet Mitternacht.

legung" dieses Kondensators bildete ein 2 mm dicker Kupferdraht, der, durch Bernstein isoliert, 120 mm in die Kanne hineinragte.

3. Ein Plattenkondensator wie bei 1, der aber in einem Pappkasten von $170 \times 175 \times 340$ mm³ und etwa 1,5 mm Wandstärke eingebaut war. Die dem Elektrometer zunächst stehende Platte des Kondensators war durch einen Draht mit dem Elektrometergehäuse und der Erde in leitender Verbindung. Die zweite Belegung war durch eine Bernsteindurchführung vom Pappkasten isoliert und mit der Nadel verbunden. — Die undichten Stellen des Pappkastens wurden durch Bienenwachs abgedichtet.

Zur Erzeugung von reiner α-Strahlung diente ein Ioniumkollektor nach Bergwitz, d. h. eine dünne Schicht fein pulverisierten Ioniums. — Ein 15 Jahre altes Thorianitpräparat aus Ceylon (Oxyde von Thorium, Uran, seltenen Erden, Blei u. a. mit 9 : 10% U, 73 : 75% ThO_2) lieferte die komplexe Strahlung (α-, β- und γ-Strahlen), während die gleiche Substanz unter Verwendung eines 0,003 cm dicken Aluminiumfilters nur mit seinen β- und γ-Strahlen ionisierend wirkte.

Bei der unter 1 und 3 beschriebenen Versuchsstellung befand sich das radioaktive Präparat, teils in einer Kristallisierschale, teils auf einem Blech, 10 mm senkrecht unter dem Kondensator, das mit der geerdeten Kondensatorplatte leitend verbunden war, während das Präparat bei dem Kondensator 2 direkt auf dem metallischen Boden der Kanne lag.

Die nicht geerdete Kondensatorfläche war jedesmal mit der Nadel des Quadrant-Elektrometers verbunden, die jede volle Stunde durch ein Uhrwerk auf ein bestimmtes Potential aufgeladen wurde. — Die beiden Quadrantenpaare des Elektrometers waren mit dem Plus- bzw. Minuspol von hintereinander geschalteten Trockenbatterien verbunden (vgl. Schaltskizze Fig. 1). Es herrschte eine Potentialdifferenz von 215 Volt zwischen den Quadrantenpaaren, während die Nadel mit 152 Volt geladen wurde.

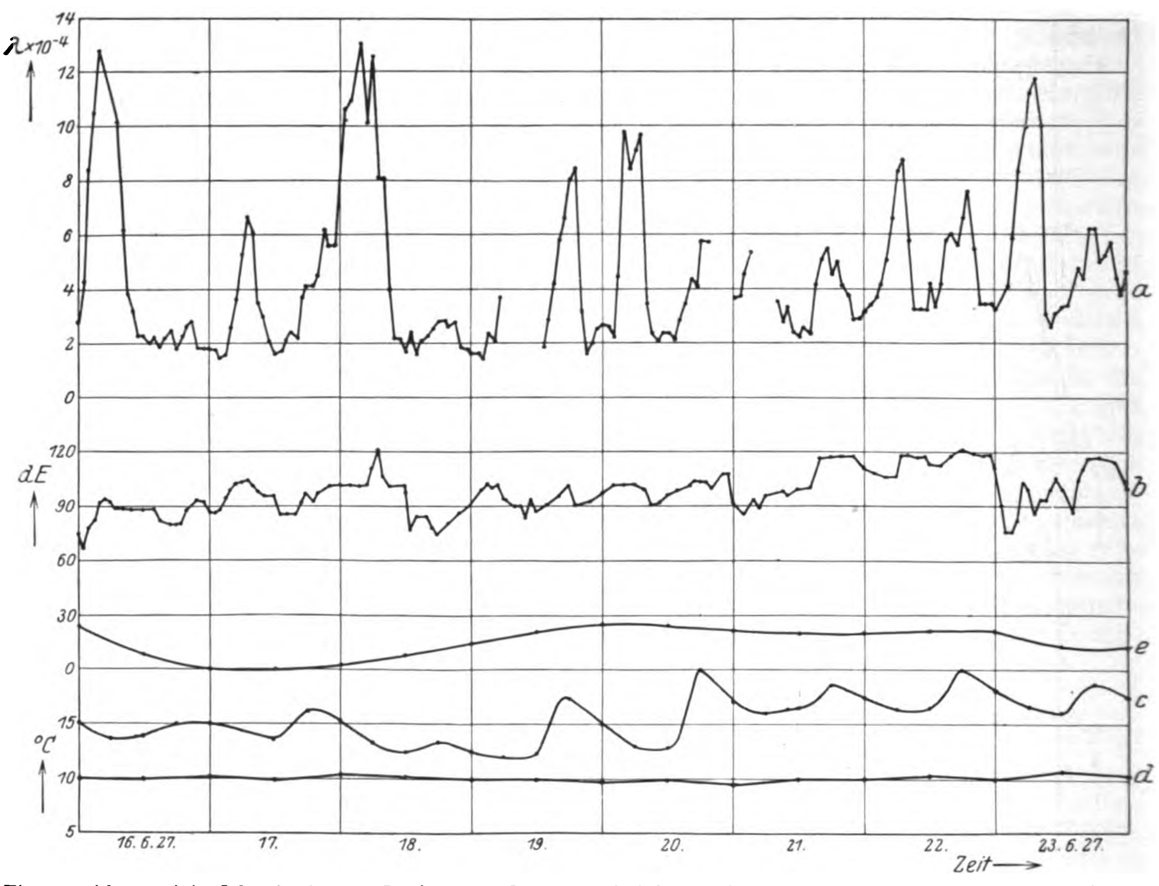


Fig. 3. Akureyri in Island 16.—23. Juni 1927. Kurve a: Leitfähigkeit der Atmosphäre. Kurve b: Die ionisierende Wirkung eines $(\beta + \gamma)$-Strahlers im offenen Raum (vgl. S. 678 unter 1). Kurven c bis e: wie in Fig. 2.

3. Ergebnisse.

Die Versuche führten zu folgenden Ergebnissen, die jedoch noch einer Erweiterung bedürfen.

Die Ionisation der Luft als Wirkung radioaktiver Präparate ist keine konstante Größe, sondern es können erhebliche Schwankungen im Laufe eines Tages auftreten. Die Ergebnisse waren verschieden je nachdem, welcher Ionisator verwendet wurde und je nach der Art der Versuchsanstellung:

1. Tritt an den Kondensator die Außenluft frei heran, so ist die ionisierende Wirkung eines α-Strahlers deutlichen tagesrhythmischen Intensitätsschwankungen unterlegen. Sie betrugen im Maximum 300—700 Proz. des Minimumwertes. Die Änderungen in der Intensität treten oft innerhalb einer Stunde auf. Das Maximum lag fast ausnahmslos nachts, und zwar zwischen 23 und 5 Uhr Ortszeit (siehe Fig. 2). Die wiedergegebene Kurve diene als ein Beispiel für die Versuche, die im ganzen 26 Tage durchgeführt wurden.

Bei dieser Versuchsanordnung ist die Entladungsgeschwindigkeit stark zu beeinflussen durch mechanischen Wind, z. B. durch einen in etwa 1 m Entfernung langsam laufenden Tischventilator. Dieses gilt auch für die andern Strahlenkombinationen.

Die Tageskurve für die komplexen Strahlen ist derjenigen der α-Strahlen sehr ähnlich. Diese Versuche wurden in 2 Abschnitten im ganzen 23 Tage durchgeführt. Dagegen sind die Schwankungen in der ionisierenden Wirkung der β- und γ-Strahlen im offenen Kondensator erheblich geringer als bei den Präparaten, die nur α-Strahlen aussenden. Das Maximum liegt hier um etwa 14—50 Proz. über dem Minimum. Die Tagesperiodizität tritt nicht so deutlich hervor. Bisweilen sind 2 Maxima im Lauf eines Tages um etwa 6 und 20 Uhr Ortszeit, wobei das Abendmaximum vielfach größer ist (siehe Kurve 3). Diese Versuche wurden im ganzen 26 Tage durchgeführt.

2. Sehr anders gestalteten sich die Ergebnisse, wenn der Versuch so angestellt wurde, daß die den Kondensator umgebende Luft nicht frei mit der Zimmerluft kommunizieren konnte. Sowohl bei Anwendung der metallischen Kon-

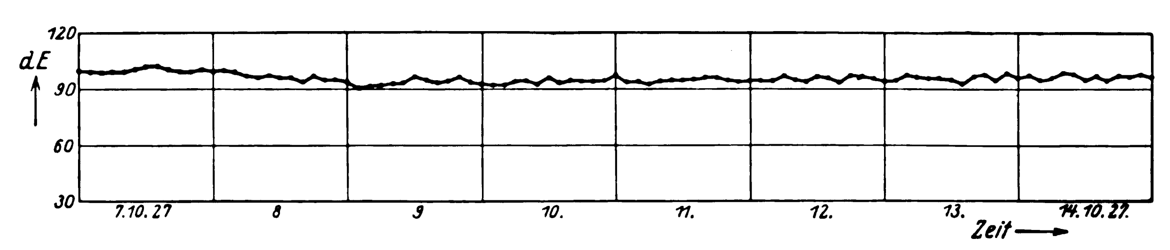


Fig. 4. Akureyri in Island 7.—14. Oktober 1927. Die ionisierende Wirkung eines α-Strahlers (Ionium) im geschlossenen Raum (vgl. S. 678 unter 2).

taktoskopkanne wie auch des Pappkastens waren keine nennenswerten Schwankungen zu beobachten. Das um 2—3 Proz. den Minimumwert übersteigende Maximum trat auch beim Leerlauf der Apparatur auf und war daher auf die Zerstreuung von den geladenen Apparatenteilen zurückzuführen (siehe Fig. 4). Diese Versuche liefen im ganzen 49 Tage.

Aus einem Vergleich der Kurven, die durch die oben beschriebenen Versuche erhalten wurden und den gleichzeitigen der Temperatur, der Feuchtigkeit und des Luftdruckes geht hervor, daß diese Faktoren nicht oder nur in geringem Maße die tagesperiodischen Schwankungen der ionisierenden Wirkung radioaktiver Präparate herbeiführen. Es zeigt sich indes, daß ein Zusammenhang bestehen muß, zwischen diesen Schwankungen und denen der Leitfähigkeit der Atmosphäre, was aus einem Vergleich der „radioaktiven" Kurven mit den gleichzeitigen der Leitfähigkeit der Atmosphäre hervorgeht. Der Einwand, daß die Schwankungen der Leitfähigkeit verursacht wurden durch die in dem gleichen Raum befindlichen radioaktiven Präparate fällt weg, da Stoppel schon früher entsprechende Leitfähigkeitskurven erhielt, ohne daß derartige Präparate hätten einwirken können. Außerdem wurden in Island gleichzeitig in einem anderen Hause Leitfähigkeitsmessungen ausgeführt, bei denen ähnliche Kurven zustande kamen, wie in dem Raum mit den Präparaten.

Von einer theoretischen Besprechung der Ergebnisse wird zunächst Abstand genommen werden, da die Beobachtungen noch fortgesetzt werden sollen.

(Eingegangen 7. Mai 1928.)

Über eine Neukonstruktion der linearen Thermosäule.

Von H. Keefer.

Im Jahre 1898 hat Rubens[1]) durch eine Neukonstruktion die Thermosäule auf eine hohe Leistungsfähigkeit gebracht. Die Rubenssche Thermosäule, wie sie jetzt noch von der Berliner Firma Kaiser & Schmidt in den Handel gebracht wird, besteht aus außerordentlich dünnen Eisen- und Konstantan-Drähten. Die 20 unpaarzahligen Lötstellen der in Zickzackform auf einem Elfenbeinrähmchen befestigten Drähte, liegen dabei inmitten des Rahmens längs einer Vertikalen von 18 mm Länge, während die paarzahligen Lötstellen sich rechts und links im Abstande von 5 mm befinden und vor der Bestrahlung durch eine geeignete Abdeckung geschützt sind. Inzwischen sind nun weitere Verbesserungen der Thermosäule durch Lebedew, Pfund, Paschen, Hutchin und dann in neuerer Zeit durch Voege[1]) und Moll[2]) geleistet worden. Diese bestehen teils in einer Steigerung der thermoelektrischen Kraft durch Verwendung geeigneter Metallegierungen für die Haardrähte, teils in einer zweckmäßigeren Anordnung der Lötstellen, wie es u. a. auch die Thermosäulen nach Moll zeigen; teils bestehen sie auch in der Verwendung eines Reflektors oder eines Hohlspiegels zur möglichst guten Ausnützung der zu messenden Wärmestrahlungsenergie. Welcher Säulenkonstruktion man auch den Vorzug geben mag, immer stößt man bei dem Versuch, sie beim Arbeiten im Laboratorium selbst auszuführen auf große Schwierigkeiten. Nach vielen, zeitraubenden Versuchen ist es nun dem Verfasser doch gelungen, eine neue Anordnung der feinen Haarfäden einer Thermosäule zu finden, die viel günstigere thermoelektrische Wirkungen erzielen läßt und bei einiger Geschicklichkeit auch erheblich leichter technisch auszuführen ist als die oben erwähnten.

Die Fig. 1 läßt das Prinzip der neuen Konstruktion erkennen. Die dünnen Haarfäden aus Kupfer und Konstantan oder aus Eisen und Konstantan werden in entgegengesetztem Sinne auf das isolierende Vierkantstäbchen (*A*) aus Vulkanfiber aufgewickelt. Auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen liegen dann die

1) Rubens, Zeitschr. f. Instr. **18**, 67, Fig. 2, 1898 und Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. **11**, 126, 1898.

1) Voege, Physik. Zeitschr. **21**, 288, 296, 1920 und **22**, 119, 120, 1921.

2) Moll, W. I. H., Proc. of the Phys. Soc. of London, Vol. 35, Part. 5, August 15th, 1923.



Fäden übereinander, diese werden dort aufeinander gelötet, und sämtliche Lötstellen werden auf beiden Flächen in der Mitte haarscharf in einer Linie durchschnitten. Zu diesem Zweck wird ein kräftiges Metallineal genau auf die verlöteten Kreuzungspunkte gedrückt, sodann werden die einzelnen Lötstellen mit einem scharfen Rasiermesser, das man dem Lineal entlang führt, sägend durchschnitten, was ohne Schwierigkeit gelingt, wenn die aufgewickelten Metallbändchen recht stramm aufgezogen sind. In diesem Falle springen dann die beiden beim Durchschneiden entstehenden Lötstellen sogar

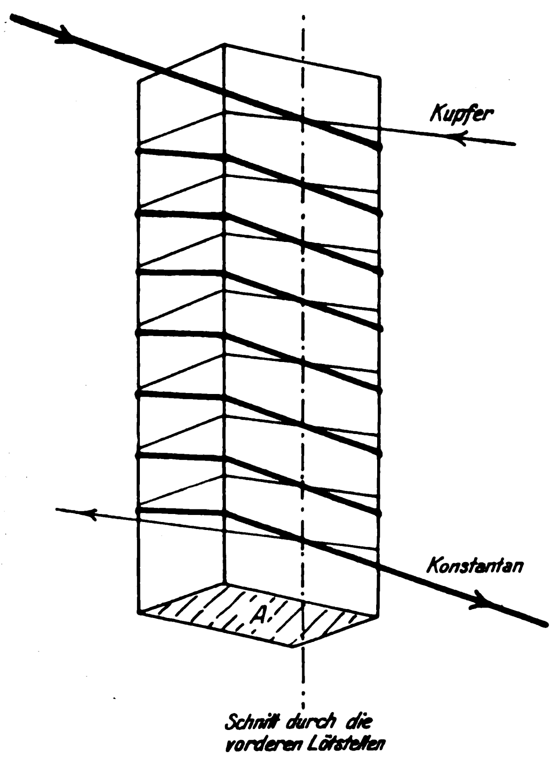


Fig. 1.

ein klein wenig auseinander; unter Umständen müssen sie noch etwas gegeneinander verschoben werden. Auf diese Weise entstehen zwei vollständig getrennte Thermosäulen, die mittels einer dicken Schellacklösung auf den beiden Seitenflächen des Vulkanfiberstäbchens, die keine Lötstellen tragen, befestigt werden müssen[1]). Nach vielen Bemühungen um eine recht praktische Durchführung der neuen Anordnung ergab sich schließlich als geeignetste Form der Säule die durch die Fig. 2 gekennzeichnete.

1) Ein erster, kurzer Bericht über dieses neue System der Anordnung der Lötstellen einer Thermosäule ist veröffentlicht in der Zeitschr. f. den phys. u. chem. Unterricht **34**, 5. Heft, 1921, S. 205, 208.

Auf einem doppel-T-förmigen Stückchen Vulkanfiber (V. F.) von nur 1 mm Dicke, dessen Querstäbchen etwa 2 mm breit ist, wird ein Weicheisenbändchen von 0,1 mm Breite und 0,015 mm Dicke schraubenförmig mit geringer Ganghöhe

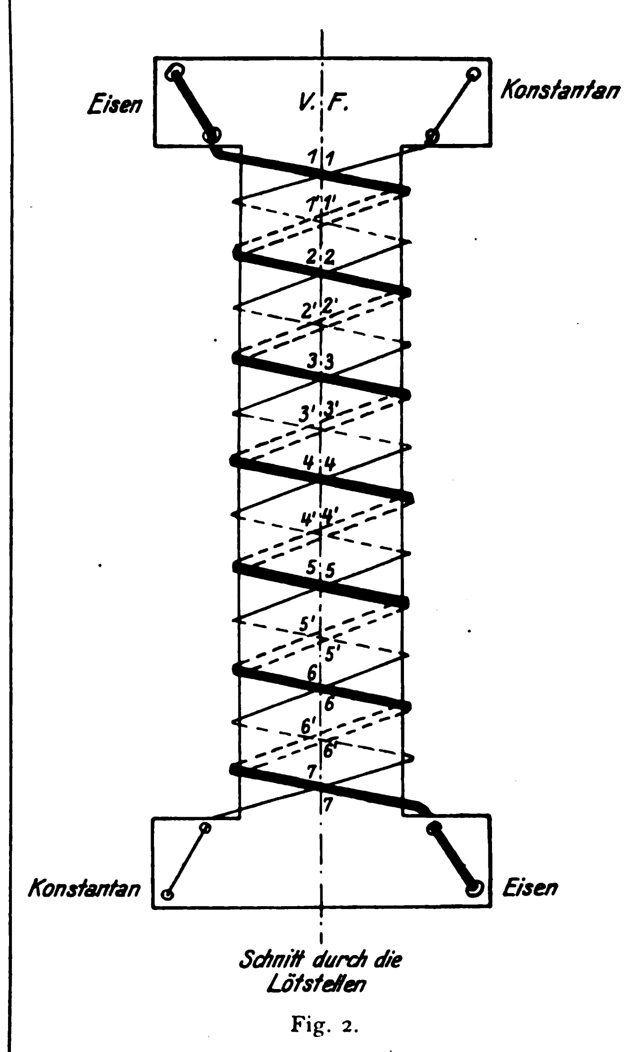


Fig. 2.

aufgewickelt und darüber in entgegengesetztem Wicklungssinn ein Konstantanbändchen von denselben Dimensionen. Die Metallbändchen werden dann, wie schon erwähnt an ihren Kreuzungspunkten säurefrei mit gewöhnlichem Weichlot verlötet. Nach dem Durchschneiden sind dann 1, 2, 3, 4 ... die vorderen und 1', 2', 3', 4' ... die hinteren Lötstellenpaare. Die beiden getrennten Thermosäulen kann man nun entweder hintereinanderschalten, wenn der Widerstand des Galvanometers größer ist als der einer einzigen Säule, oder aber kann man sie parallel miteinander verbinden, wenn der Säulenwiderstand zu groß ist. Der große Vorzug dieser neuen Konstruktion besteht zunächst in der

bequemen Möglichkeit durch Vermehrung der Lötstellen und durch Schaltung der beiden Säulen den Strahlungsmesser jedem zur Verfügung stehenden Galvanometer anzupassen. Durch das Zerschneiden der verlöteten Kreuzungspunkte wird auch eine Verminderung der Wärmekapazität der einzelnen, wirksamen Lötstellen erzielt und zugleich noch eine Verdoppelung der Zahl dieser Lötstellen erreicht. Überhaupt kann diese Zahl bei der einfachen Anordnung der Metallbänder bequem vermehrt und dadurch die thermoelektrische Kraft gesteigert werden. Die Schwärzung der der Strahlung ausgesetzten Lötstellen erfolgt in der sonst üblichen Weise.

Reutlingen, Technikum für Textilindustrie.

(Eingegangen 2. Juli 1928.)

Die Anwendung der Debyeschen Dipoltheorie auf binäre Flüssigkeitsgemische. II.

Von John Warren Williams*)

In einer früheren gleichbetitelten Arbeit untersuchte ich[1]) die Anwendung des von Debye modifizierten Clausius-Mosottischen Gesetzes auf die Berechnung der elektrischen Momente gelöster Moleküle aus der Dielektrizitätskonstanten (DK) und der Dichte von geeigneten binären Flüssigkeitsgemischen. Gleichzeitig wurden die Resultate einer Reihe experimenteller Untersuchungen gegeben, die im Laboratorium für physikalische Chemie an der Universität Wisconsin ausgeführt worden waren. Diese umfaßten die Angaben des elektrischen Momentes für 29 Moleküle und wurden bei Benutzung von 4 Lösungsmitteln (C_6H_6, CCl_4, CS_2, C_6H_{14}) und bei einer Temperatur von 25° erhalten. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist es, in einer Tabelle die Resultate der Fortsetzung dieser Arbeit, ausgeführt im Physikalischen Institut der Universität Leipzig, zusammenzustellen und zu diskutieren**).

Die elektrischen Momente von 33 weiteren Molekülen (alle mit Ausnahme zweier, organischer Natur), berechnet aus der DK. ihrer verdünnten Lösungen in Benzol bei 25°, sind in Tab. I zusammengestellt. Zur Diskussion können diese Moleküle zweckmäßig in 4 Gruppen eingeteilt werden.

Gruppe I. Benzolderivate.
- a) Mono- und disubstitutuierte Benzole.
- b) Disubstituierte Benzole vom Typus 1-4-$C_6H_4\alpha_2$.
- c) Trisubstituierte Benzole vom Typus 1-3-5-$C_6H_3\alpha_3$.

Gruppe II. Verbindungen vom Typus $C\alpha_4$.

Gruppe III. Diphenyl und seine Derivate.

Gruppe IV. Anorganische Moleküle (H_2O und SbJ_3).

Gruppe I. Benzolderivate.

Die meisten Moleküle der Tab. I können als Benzolderivate betrachtet werden. In dieser Gruppe jedoch wollen wir nur die Mono-, Di- und Trisubstitutionsprodukte des einfachen Benzolkerns behandeln, während wir die Derivate des Diphenyls davon trennen wollen. Der einfachste Fall ist natürlich der, wo nur eines der H-Atome des Benzolmoleküls ersetzt ist. Da das Benzol selbst nicht-polarer Natur ist, so wird jede solche Substitution durch ein Atom oder eine Gruppe die Bildung eines elektrischen Momentes bewirken. Man findet, daß jedes Atom und jede Atomgruppe durch ein mehr oder weniger genau bestimmtes Moment charakterisiert wird. Dieses kann als Vektor betrachtet werden und besitzt eine bestimmte Richtung.

Wenn zwei Atome oder Gruppen in den Benzolkern substituiert werden, und zwar die zweite Gruppe in verschiedenen Lagen relativ zur ersten, so ist es möglich, jeder dieser Gruppen einen elektrischen Charakter zuzuordnen (entsprechend der Richtung des Vektors), vorausgesetzt, daß eine solche Gruppe als Bezugsgruppe zugrunde gelegt werden kann. In dem früheren Artikel[1, 2]) hatte sich aus den Versuchen mit Nitrotoluol ergeben, daß die CH_3-Gruppe und die NO_2-Gruppe entgegengesetzte elektrische Effekte ausüben müssen. Aus den Daten für p-Nitrobenzaldehyd und p-Nitrobenzoesäure ist ersichtlich, daß die CHO- und die COOH-Gruppe einen ähnlichen elektrischen Effekt bewirken wie die NO_2-Gruppe usw.

Auf diese Weise ist es unter der Annahme eines positiven Charakters der CH_3-Gruppe möglich gewesen, die elektrische Natur und den ungefähren Wert des elektrischen Momentes für 9 Atome oder Gruppen durch Substitution im

*) National Research Council Fellow.

1) Williams, Physik. Zeitschr. **29**, 174, 1928.

) Einige der hier gegebenen Resultate sind bereits in einigen früheren Arbeiten eingehender behandelt worden: Williams, Physik. Zeitschr. **29, 204, 271, 1928; Williams und Weißberger, Journ. Amer. Chem. Soc. **50**, 1928; Williams, ibid. **50**, 1928 (erscheint demnächst).

2) Im Zusammenhange damit vgl. auch a) Höjendahl, Nature **117**, 892, 1926, und b) Smyth und Morgan, Journ. Amer. Chem. Soc. **49**, 1030, 1927.



Tabelle I.

Molekül	P_2	P_2''	$P_2' = P_2 - P_2''$	μ
Wasser	64	4	60	1,7 $\cdot 10^{-18}$ e. s. u.
Antimon-triiodid	80	76	4	0,4 "
Tetranitromethan	32,5	31	1,5	< 0,2 "
Pentaerythrit-tetrabromid*)	56	56	0	0 "
Pentaerythrit-tetraacetat†)	140	70	70	1,9 "
Brombenzol	82	33	49	1,5 "
Benzaldehyd	190	35	155	2,75 "
p-Nitrobenzaldehyd	158	38	120	2,4 "
p-Nitrobenzoesäure	300	40	260	3,5 "
p-Chlorbrombenzol	40	39	1	< 0,2 "
o-Kresylmethyläther	57	37	20	1,0 "
m-Kresylmethyläther	65	37	28	1,17 "
p-Kresylmethyläther	68	37	31	1,20 "
o-Kresol	74	32	42	1,44 "
m-Kresol	84	32	52	1,60 "
p-Kresol	87	32	55	1,64 "
o-Chlorphenol	68	34	34	1,3 "
p-Chlorphenol	148	34	114	2,4 "
p-Phenylendiamine*)	37,5	35	2,5	< 0,3 "
Hydrochinondiäthyläther*)	116	50	65	1,7 "
Hydrochinondiacetat*)	150	50	100	2,2 "
Terephtalsäuredimethylester*)	152	50	102	2,2 "
Mesitylen	42	41	1	< 0,2 "
sym-Triäthylbenzol	56	55	1	< 0,2 "
sym-Trinitrobenzol	55	40	15	0,8 "
Phloroglucintrimethyläther*)	130	55	75	1,8 "
Phloroglucintriacetat*)	185	65	120	2,4 "
Diphenyl	50	50	0	0
4,4' Dichlordiphenyl*)	63	63	0	0
4,4' Dinitrodiphenyl*)	65	65	0	0
4,4' Diaminodiphenyl*)	100	60	40	1,3 "
4,4' Diäthoxydiphenyl*)	150	75	75	1,9 "
4,4' Diacetyldiphenyl*)	155	80	75	1,9 "

*) Diese Substanzen wurden in freundlicher Weise von Herrn Privat-Dozent Dr. Weißberger hergestellt, wofür wir ihm auch an dieser Stelle herzlichst danken möchten.
†) Diese Substanz wurde uns von Herrn Prof. A. Reis freundlichst zur Verfügung gestellt.

Benzolkern*) zu ermitteln. Diese Resultate sind in Tab. II zusammengestellt.

Tabelle II.

Gruppe	Moment
NO_2	— 3,8
CHO	— 2,8
OH	— 1,7
Cl	— 1,5
Br	— 1,5
OCH_3	— 1,2
COOH	— 0,9
CH_3	+ 0,4
NH_2	+ 1,5

Wenn zwei gleiche oder ungleiche Gruppen in den Benzolkern substituiert werden, so findet man, daß im allgemeinen der Effekt ihrer Wechselwirkung aufeinander nicht vernachlässigt werden kann. Zwar konnten Errera[3]), Höjendahl[2]) und Smyth und Morgan[2]) die meisten ihrer experimentellen Resultate ohne ernstliche Schwierigkeit mittels der Formel von Thomson[4]) darstellen, und diese Formel vernachlässigt die Einwirkung der Gruppenpaare aufeinander. Die hier gefundenen Resultate zeigen jedoch, daß bei hinreichender Länge oder Kompliziertheit der substitutierten Gruppen die Wechselwirkung zwischen ihnen eine gewöhnliche Erscheinung ist. In der Tat ist dieser Effekt auch in den Ergebnissen sowohl von Höjendahl als auch von Smyth und Morgan zu finden. So bereitet es den letztgenannten Autoren gewisse Schwierigkeiten, die Werte der für die drei Kresole berechneten elektrischen Momente mit den experimentellen Ergebnissen in Übereinstimmung zu bringen. Unter Verwendung sehr sorgfältig gereinig-

*) Es zeigt sich, daß der Wert für das elektr. Moment einer einfach substituierten Gruppe im Benzolkern im allgemeinen nicht übereinstimmt mit dem Werte, den man im Falle einer Substitution im Methan erhält. Weiteres über diese Tatsache wird in einer späteren Publikation gesagt werden.

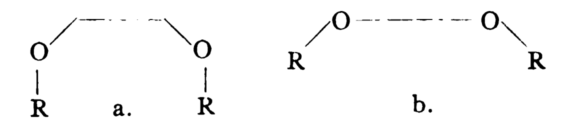
3) Errera, Physik. Zeitschr. **27**, 764, 1926.
4) Thomson, Phil. Mag. (6), **46**, 497, 1923.

ter Substanzen[5]) habe ich die Werte dieser elektrischen Momente noch einmal bestimmt. Die Resultate sind in Tab. I zusammengestellt. Sie sind überall 10 Proz. kleiner als die von Smyth und Morgan angegebenen Werte. So geringfügig diese Differenz auch erscheint, so macht sie doch jede Deutung unmöglich, wie sie von letzt genannten Autoren gegeben wurde, wenn man die verbesserten Werte für die CH_3- und die OH-Gruppe verwendet. Nach unserer Ansicht können die Werte, die wir für die drei Kresole gefunden haben, auch auf Grund einer ätherähnlichen Struktur erklärt werden. Diese Ansicht wird noch bestärkt durch die Werte, die für die Kresylmethyläther gefunden wurden. (Diese Zahlen wurden berechnet aus der DK. und der Dichte, gefunden von Philip und Haynes, Journ. Chem. Soc. **78**, 998, 1905. Beim Vergleich der Berechnungen von Smyth und Morgan mit unseren Resultaten für die Kresole erscheinen jene Werte um 5—10 Proz. zu hoch.) In allen Fällen haben die Meta- und Paraverbindungen elektrische Momente, welche praktisch gleich sind, während das Moment der Orthoverbindung etwas niedriger ist. Die verschiedenen Strukturen können (bei vergleichsweiser Benutzung einiger anderer) wie folgt schematisch dargestellt werden:

O, CH_3, CH_3 — Dimethyläther; O, CH_3 — Anisol; O, CH_3, CH_3 — p-Kresylmethyläther; O, H, CH_3 — p-Kresol.

Es möge daran erinnert werden, daß die Annahme keiner Wechselwirkung zwischen den Gruppen eine Formel bedingt, in welcher die Gruppen in der Ebene des Benzolringes liegen.

Vielleicht ist ein weiterer Beweis für die Existenz ätherähnlicher Strukturen von Benzolderivaten, in denen ein O-Atom am Ring aufgelagert ist, im Falle des Hydrochinondiäthyläther- und des Hydrochinondiacetat-Moleküls zu finden. Betrachtet man sie als Derivate des Benzols und nimmt keine Wechselwirkung zwischen den Gruppen an, so sollte sich ein Moment 0 ergeben. Das ziemlich große Moment jedoch, das wir gefunden haben, kann durch die Annahme einer ätherähnlichen Struktur erklärt werden, wie weiter unten gezeigt wird. Es scheinen allerdings zwei Möglichkeiten der Anordnung vorhanden zu sein, zwischen denen jedoch die vorliegenden Resultate nicht entscheiden können.



Im Falle des Terephthalsäuredimethyläthers muß die Erklärung für das große Dipolmoment in einer Wechselwirkung zwischen den Gruppen gesucht werden, die hier als Substituenten im Benzolring angesehen werden.

Der allgemeine Schluß, der aus diesen Tatsachen gezogen werden muß, ist der, daß man im allgemeinen nicht annehmen kann, daß die die Gruppen charakterisierenden Vektoren in der Ebene des Benzolringes liegen, so daß man bei jeder vektoriellen Darstellung immer ein dreidimensional angeordnetes Molekül vor einem zweidimensionalen vorziehen muß.

Die Daten für die symmetrischen Trisubstitutionsprodukte sind im Zusammenhang mit der Frage nach der Struktur des Benzolkerns von Interesse. Offenbar können die oben gegebenen Resultate nur erklärt werden durch eine Anordnung, bei der alle C-Atome in einer Ebene liegen. Wenn die Formel von Körner[6]) der korrekte Ausdruck wäre, so müßte ein bestimmtes endliches elektrisches Moment sich für jede symmetrische trisubstitutierte Verbindung ergeben. Es ist jedoch einwandfrei festgestellt worden, daß es im Falle von Mesitylen, sym-Triäthylbenzol und sym-Tribrombenzol kein solches Moment gibt. Die Formeln von Baeyer[7]) und Ladenburg[8]) müssen aus diesem Grunde auch aufgegeben werden. Zwar gibt es von diesem Typus Moleküle mit einem Moment von endlicher Größe. Das symmetrische Trinitrobenzol, über das früher berichtet worden ist, haben wir nochmals genau untersucht, und es ergab sich dabei wieder dieselbe Größe für das Moment. Es steht einwandfrei fest, daß die Messungen an dieser Substanz, immer bei gleicher Temperatur ausgeführt, ein endliches Moment ergeben, doch wäre es wünschenswert, diese Messungen noch durch solche bei verschiedenen Temperaturen zu ergänzen. Die Erklärung der Tatsache, daß die beiden Derivate des sym-Trihydroxybenzol endliche Momente ergeben, muß in der Wechselwirkung zwischen den Gruppen gesucht werden. Im Fall der Derivate vom Typus 1-4-$C_6H_4\alpha_2$ ist dieses schon erörtert worden.

Bei den Molekülen von den Typen 1-4-$C_6H_4\alpha_2$ und 1-3-5-$C_6H_3\alpha_3$, die ein endliches Moment

5) Wir nehmen gern die Gelegenheit wahr, Herrn Prof. V. Henri vom Chem. Laboratorium der Universität Zürich für Proben der drei Kreosole auch an dieser Stelle zu danken. Prof. Henri stellte fest, daß alle erdenkliche Sorgfalt bei der Reinigung verwandt worden ist.

6) Körner, Gazz. chim. ital. **4**, 444, 1874.
7) Baeyer, Ann. **245**, 103, 1888.
8) Ladenburg, Ber. **2**, 140, 1869.

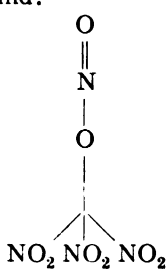
besitzen, wäre es wünschenswert, die entsprechenden Röntgendiagramme zu kennen. Man könnte dann beispielsweise im Falle der Verbindungen vom letzteren Typus vielleicht erwarten, daß die Enden der substituierten Gruppen in einer Ebene über der des Benzolkernes liegen. Allgemein könnte man vielleicht glauben, daß Röntgendiagramme, d. h. Strukturbestimmung des Moleküls im kristallinen Zustande, uns für die Struktur des gelösten Moleküls Fingerzeige geben könnten, diese Beziehungen sind aber nicht so eindeutig, wie es zu diesem Zwecke wünschenswert wäre. Dies soll weiter unten näher erläutert werden.

Gruppe II.

Verbindungen vom Typus $C\alpha_4$.

Die Moleküle vom Typus $C\alpha_4$ haben wir hauptsächlich studiert, um die Resultate mit denen zu vergleichen, die sich aus den Untersuchungen mit Röntgenstrahlen ergeben. Letztere haben kürzlich besondere Bedeutung durch die Diskussion über die Struktur des Pentaerythrit $C(CH_2OH_2)_4$ erlangt. Die früheren Untersuchungen von Mark und Weißenberg[9]) und von Huggins und Hendricks[10]) schienen endgültig bewiesen zu haben, daß die vier C-Atome, die am mittleren angelagert sind, alle in einer Ebene liegen. Wenn dieses der Fall wäre, so könnte man erwarten, daß Pentaerythrit und vielleicht auch seine einfacheren Derivate $C(CH_2Cl)_4$ und $C(CH_2Br)_4$ endliche elektrische Momente besitzen. Pentaerythrit selbst ist zu unlöslich in Benzol oder ähnlichen nicht-polaren Lösungsmitteln, so daß hier eine Bestimmung des elektrischen Momentes nicht möglich ist. Jedoch ergeben das Cl-[11]) und das Br-Derivat elektrische Momente, die von o nicht unterschieden werden können (siehe Tabelle). Ganz kürzlich sind die Ergebnisse der ursprünglichen Röntgenstrahlenuntersuchungen über Pentaerythrit erneut nachgeprüft worden[12]), denen zufolge es jetzt möglich erscheint, daß eine sphenoidale (tetraedrische) Anordnung der CH_2OH-Gruppen um das zentrale C-Atom vorliegt. In diesem Falle scheint es uns noch zu unsicher, etwas bestimmtes über die Beziehung zwischen Kristallstruktur und Moment des gelösten Moleküls auszusagen.

Eindeutiger scheint der Fall des Tetranitromethanmoleküls zu sein. Sein Röntgendiagramm, das kürzlich von Mark und Noething[13]) erhalten worden ist, zeigt, daß die vier NO_2-Gruppen nicht gleichwertig, sondern wie folgt gruppiert sind:



Dies ließe, wenn es erlaubt wäre, diese Struktur auf das gelöste Molekül zu übertragen, ein endliches Moment erwarten. Wir fanden jedoch, daß das Moment, wenn es überhaupt vorhanden ist, dann jedenfalls sehr klein sein muß. Berechnet man einmal die Molekularpolarisation des Moleküls auf elektrischem Wege, das andere Mal die Polarisation infolge Deformation nach der Lorentz-Lorenzschen Formel, so ergibt sich eine Differenz von derselben Größenordnung, wie sie bei Benzol, Hexan oder Kohlenstofftetrachlorid gefunden worden ist.

Ebert[11]) fand, daß die Moleküle $C(OCH_3)_4$, $C(OC_2H_5)_4$ und $C(CH_2OOCCH_3)_4$ alle endliche elektrische Momente besitzen. Bei letztgenannter Verbindung fanden wir auch ein endliches Moment, jedoch war dieses beträchtlich kleiner als das von Ebert gefundene (1,9 gegen 2,6). Daß hier ein endliches Moment sich ergibt, steht offenbar in Übereinstimmung mit den Röntgenuntersuchungen von Gerstäcker, Möller und Reis[14]). Diese zeigen nämlich, daß die vier C-Atome, die an das zentrale C-Atom gebunden sind, alle in einer Ebene liegen. Jedoch sind die Ergebnisse dieser Forscher kürzlich von Miß Knaggs[15]) in Frage gestellt worden, und sie zieht auf Grund ihrer eigenen Untersuchungen eine sphenoidale Anordnung der C-Atome der vier Gruppen um das zentrale C-Atom vor.

Auch hier ist unmöglich eine eindeutige Beziehung festzulegen. Zur Erklärung der gefundenen endlichen Momente im gelösten Zustande kann sowohl eine pyramidale Struktur dienen, als auch eine tetraedrische, bei der die Einwirkung der Gruppen aufeinander sehr groß ist, wie sie bei diesen gleichen komplizierten Gruppen im Falle der Benzolderivate auch festgestellt worden ist. Immerhin halten wir die letzte Möglichkeit für unwahrscheinlich.

Daneben wurden Fälle gefunden, allerdings bisher noch nicht in der Gruppe der $C\alpha_4$, in denen

9) Mark und Weißenberg, Zeitschr. f. Phys **17**, 301, 1923.
10) Huggins und Hendricks, Journ. Amer. Chem. Soc. **48**, 164, 1926.
11) Ebert, Die Naturwissenschaften **15**, 668, 1927.
12) Nitta, Bull. Chem. Soc. Japan **1**, 62, 1927. Hendricks, Zeitschr. f. Kristallographie **66**, 131, 1927 et al.
13) Mark und Nöthling, Zeitschr. f. Kristallographie **65**, 435, 1927.
14) Gerstäcker, Möller und Reis, Zeitschr. f. Kristallogr. **66**, 355, 1928.
15) Knaggs, Nature **121**, 616, 1928.

die Struktur im gelösten und im kristallinen Zustande dieselbe bleibt. Wir erinnern nur in diesem Zusammenhange an die letzten Untersuchungen an SnJ_4 und CO_2.

Gruppe III.

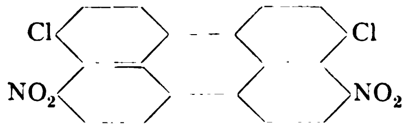
Diphenyl und seine Derivate.

Die Strukturen von Diphenyl und seinen Derivaten sind Gegenstand vieler Theorien gewesen. Das Problem besteht darin, eine Struktur für die verschiedenen Verbindungen anzugeben, die ihre chemische Wirksamkeit erklärt. Die Zahlenangaben dieses Artikels sollen vom Standpunkt einiger kürzlich erschienenen Arbeiten von Adkins, Steinbring und Pickering[16]), und von Kuhn und Albrecht[17]) aus diskutiert werden.

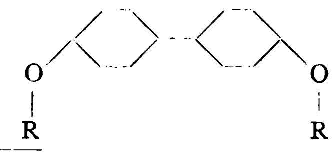
Die Tatsache, daß Diphenyl selbst das Moment o hat, kann nicht von großer Bedeutung für die Struktur der Derivate sein. Aller Wahrscheinlichkeit nach werden die zwei Benzolringe, aus denen es zusammengesetzt ist, folgendem Schema gemäß angeordnet sein:



Bei den Verbindungen 4-4'-Dinitrodiphenyl und 4-4'-Dichlorodiphenyl zeigt das verschwindend kleine Moment an, daß die beiden Ringe nach folgendem Schema angeordnet sind:



Zur Deutung der übrigen Resultate muß man nicht nur die Zahlen für die einzelnen Derivate des Diphenyls, sondern auch die für die entsprechenden Derivate des Benzols untersuchen. Die elektrischen Momente der Verbindungen Hydrochinondiäthyläther und 4-4'-Diäthoxydiphenyl einerseits (1,7 und 1,9 $\times 10^{-18}$ E. S. E.), und der Verbindungen Hydrochinondiacetat und 4-4'-Diacetyldiphenyl (2,2 und 1,9 $\times 10^{-18}$ E. S. E.) müssen als von derselben Größenordnung betrachtet werden. Ist dieses wirklich der Fall, so ist es höchst wahrscheinlich, daß die Struktur der Diphenylderivate derjenigen der Benzolderivate ähnelt. Der Schluß, der aus diesen Betrachtungen gezogen werden muß, ist der, daß die Benzolringe gestreckt liegen, so daß folgendes Strukturschema sich ergibt:



Da das elektrische Moment des 4-4'-Diaminodiphenyl 1,3 $\times 10^{-18}$ E. S. E. beträgt, während das des entsprechenden Benzolderivates von o nicht unterscheidbar ist, so ist eine gewinkelte oder gefaltete*) Struktur für das erstere anzunehmen. Im Benzolderivat haben die NH_2-Gruppen nicht das Bestreben, aus der Ebene des Benzolringes herauszutreten. Wären nun die Benzolringe des Diphenyl genau so gestreckt wie bei den Dichloro- und Dinitroderivaten, so hätte sich ohne Frage für die Verbindung 4-4'-Diaminodiphenyl ebenfalls ein von o nicht unterscheidbares Moment ergeben müssen.

Adkins, Steinbring und Pickering[16]) ziehen aus ihren Untersuchungen den Schluß, „daß die Nichtbildung der Anhydride darauf zurückzuführen ist, daß bei den Dinitro- und Dihydroxysäuren die Ringe wie in der üblichen Strukturformel gestreckt sind, während bei den Amino- oder Benzidinsäuren die Ringe übereinandergelegt sind". Bei den Dinitro- und Dihydroxyderivaten stimmen die Angaben dieser Abhandlung vollkommen damit überein. Bei den Diaminoderivaten, die hier untersucht worden sind, ergab sich als einziger Schluß der, daß die Ringe entweder gefaltet oder gewickelt angeordnet sind.

Bis jetzt sind die Ergebnisse auch in Übereinstimmung mit den Resultaten von Kuhn und Albrecht[17]). Es ist jedoch klar, daß die bis jetzt vorliegenden Daten noch nicht ausreichen, um die aufgestellten Behauptungen vollständig zu beweisen. Deshalb soll die Untersuchung noch fortgesetzt werden.

Gruppe IV. Anorganische Moleküle.

Die Größe des elektrischen Moments für Wasser ist sowohl von experimentellen als auch von theoretischen Gesichtspunkten aus von Interesse. Da es ja gewöhnlich als Lösungsmittel benutzt wird, wäre es wünschenswert, sein elektrisches Moment mit dem größtmöglichen Genauigkeitsgrad zu kennen. Auch hat sich kürzlich eine theoretische Untersuchung[18]) mit den möglichen Konfigurationen des Moleküls befaßt, mit dem Ergebnis, daß auf Grund der Polarisationsfähigkeit des O-Atoms auf eine dreieckige Anordnung der Atome geschlossen werden mußte. Eine solche Konfiguration muß mit den Ergebnissen geeigneter Versuche, aus denen das elektrische Moment berechnet werden kann, in Einklang stehen.

Der von uns erhaltene Wert $\mu = 1,7 \times 10^{-18}$ E. S. E. ist etwas kleiner als der von Jona[19]) angegebene $\mu = 1,87 \times 10^{-18}$ E. S. E., der aus dem

16) Adkins, Steinbring und Pickering, Journ. Amer. Chem. Soc. **46**, 1917, 1924.

17) Kuhn und Albrecht, Ann. **455**, 272, 1927.

*) D. h. die Benzolkerne liegen in 2 Ebenen übereinander, wie es Kaufler angenommen hat.

18) Hund, Zeitschr. f. Phys. **31**, 81, 1924.

19) Jona, Physik. Zeitschr. **20**, 14, 1919.

Temperaturkoeffizienten der DK. des Wasserdampfes erhalten worden ist. Soweit wir unterrichtet sind, ist dieses die einzige weitere experimentelle Bestimmung, die bis jetzt in der Literatur zu finden ist. Da Jona angibt, daß die Genauigkeit seiner Absolutwerte zu wünschen übrig läßt, dürfte der obige Wert als der beste anzusehen sein. Smyth[20]) hat gewisse Rechnungen ausgeführt auf Grund von Formeln, die von Gans entwickelt wurden, über deren Anwendbarkeit man aber Zweifel haben darf. Er findet

$$\mu = 1{,}04 \times 10^{-18} \text{ bei } 30^0$$
$$\mu = 1{,}98 \times 10^{-18} \text{ über } 100^0.$$

Das elektrische Moment des SbJ_3-Moleküls ist vielleicht kleiner, als man erwarten sollte. Hier wurde die Polarisation durch Deformation nach dem Vorschlag von Errera[21]) berechnet. Wenn die Moleküle im festen Zustand starr gebunden sind, so können sie sich nicht im äußeren Felde orientieren, folglich ist die aus DK. und Dichte berechnete Polarisation für den festen Körper einfach, die durch Deformation hervorgerufene. Die benötigten Angaben wurden den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen. Man muß jedoch sagen, daß die Genauigkeit des so bestimmten elektrischen Moments nicht so groß wie bei den andern hier angegebenen Methoden sein kann. Das SbJ_3-Molekül hat zweifellos eine ähnliche Struktur wie das Ammoniakmolekül. Eine Erklärung für den kleinen Wert bei SbJ_3 ergibt sich vielleicht aus den Werten der kürzlich von Watson[22]) angegebenen Momente von NH_3, PH_3 und AsH_3 ($\mu = 1{,}5$, $0{,}55$ und $0{,}15 \times 10^{-18}$ E. S. E.). Diese nehmen nämlich in dem Maße ab, wie das Zentralatom wächst.

Diese Arbeit soll noch fortgesetzt und erweitert werden.

Zum Schlusse möchte ich noch Herrn Prof. Debye und Herrn Dr. Sack für freundliche Mithilfe bestens danken.

Zusammenfassung.

1. Die elektrischen Momente von 33 Molekülen, berechnet aus DK. und Dichte ihrer Lösungen in Benzol bei 25^0, sind in einer Tabelle zusammengestellt worden.

2. Die Bedeutung dieser Werte ist in bezug auf die Struktur der verschiedenen Moleküle untersucht worden.

3. Es ist gezeigt worden:

a) Jedes Atom oder jede Gruppe, in den Benzolkern substituiert, ist durch ein mehr oder weniger bestimmtes Moment charakterisiert, das als Vektor betrachtet werden kann und eine bestimmte Richtung hat.

b) Wenn zwei oder mehr Atome oder Gruppen in den Benzolkern substituiert werden, so kann der Effekt ihrer Wechselwirkung im allgemeinen nicht vernachlässigt werden.

c) Aller Wahrscheinlichkeit nach ist für Benzol eine Strukturformel, in der alle C-Atome in einer Ebene liegen, die einzig mögliche.

d) Es ist nicht möglich, die Struktur des Diphenyl und seiner Derivate durch eine einfache räumliche Anordnung darzustellen.

e) Die elektrischen Momente einiger typischen anorganischen Moleküle können mittels der hier benutzten Methode bestimmt werden.

4. Es wird gezeigt, daß zwischen der Struktur des gelösten Moleküls und der des Kristalles scheinbar keine eindeutige Beziehung besteht; was an Beispielen der Gruppe $C\alpha_4$ klar gelegt wird.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität, 12. Juni 1928.

(Eingegangen 19. Juni 1928.)

20) Smyth, Journ. Amer. Chem. Soc. **44**, 2151, 1924.
21) Errera, Physik. Zeitschr. **27**, 764, 1926.
22) Watson, Proc. Roy. Soc. A **117**, 43, 1927.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor an der Universität Würzburg Dr. F. Harms zum Vorstand des Physikalischen Instituts daselbst, der Privatdozent für Physik an der Universität Zürich Dr. R. Bär zum Titulaturprofessor daselbst.

Berufen: Der a. o. Professor der Physik an der Universität Jena Dr. G. Joos in gleicher Eigenschaft an die Universität Würzburg, der ord. Professor der Chemie an der Universität Königsberg Dr. H. Meerwein in gleicher Eigenschaft an die Universität Marburg.

Gestorben: Der Berliner Physiker Dr. Kurt Urban, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität München Geheimer Rat Dr. W. Wien.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 19. Ausgegeben am 1. Oktober 1928. 29. Jahrgang.

Nr. 767. Printed in Germany.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Besprechungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 19 — 1. Oktober 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 21 am 25. Oktober 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Beziehung zwischen Dipolmoment und Konstitution.

Von J. Errera.

Als Bestätigung der Debyeschen Theorie der permanenten Dipole[1]) haben wir in vorangehenden Arbeiten zeigen können, wie im Falle einiger Dihalogenderivate des Äthylens[2]) und des Benzols[3]), bei Kenntnis des Vorzeichens der Ladungen der das Material bildenden Atome, die Lage der Atome im Molekül bestimmt werden konnte und somit die chemischen Argumente unmittelbar bestätigen können, die die angenommene Konstitutionsformeln stützen.

Im Falle der Chlor-Jod-Äthylene ($ClHC = CHJ$) die untersucht wurden, betrachten wir das umgekehrte Problem; nachdem von Van de Walle und Henne[4]) die Lage der Atome in

1) P. Debye, Physik. Zeitschr. **13**. 97, 1912. Handbuch der Radiologie **6**, 597.
2) J. Errera, Bull. Acad. Roy. Belg. 1925 p. 153; J. Errera u. M. Lépingle, idem p. 150; J. Errera, Journ. Phys. **6**, 390, 1925.
3) J. Errera, C. R. Acad. Paris **182**. 1623, 1926, Physik. Zeitschr. **27**, 764, 1926.
4) H. Van de Walle u. A. Henne, Bull. Soc Chim. Belg. **34**, 399, 1925.

den beiden stereoisomeren Verbindungen durch chemische Argumente festgestellt wurde, wollten wir das Vorzeichen der Ladung einer der konstituierenden Atome bestimmen. In der Tat, eine Reihe von Chemikern[1]) hat die Existenz von Derivaten des Chlorjodäthylens festgestellt, in welchen das Jod dreiwertig ist. Als Beispiel soll die Behandlung des Chlorjodäthylens mit Chlor bei gleichzeitiger Kühlung erwähnt werden, wobei das Chlor nur an das Jod angelagert wird unter Bildung eines kristallisierten Körpers von der Formel: $ClHC = CHJ\langle^{Cl}_{Cl}$.

Wenn man annimmt, daß das Jodatom relativ zum Chlor positiv geladen ist[2]), so folgt daraus, daß das Cis-Derivat, in welchem die beiden Halogenatome am nächsten sind, ein kleineres Dipolmoment besitzen wird, als das Trans-Derivat. Das wäre also gerade umgekehrt, wie

1) H. Van de Walle u. A. Henne, Bull. Soc. Chim. Belg. **35**, 29, 1926; Thiele u. Haack, Lieb. Ann. **369**, 135, 1920; Howell u. Noyes, Journ. Am. Chem. Soc. **1**, 991, 1920 and **1**, 182, 1923.
2) Für das positiv geladene Jod siehe z. B.: Anorg. Chemie von F. Ephraim, S. 294, Dresden, Steinkopff, 1922.

im Falle der Halogenderivate, wo die beiden Substituenten gleich sind.

Die beiden (cis- und trans-) Chlorjodäthylene sind nach dem Verfahren von H. van de Walle hergestellt worden, welches auf die Existenz von azeotropen Mischungen mit Prophylalkohol gegründet ist[1]).

In der folgenden Tafel sind die Versuchsergebnisse zusammengefaßt, die die Hypothese, daß in diesen Verbindungen das Jod relativ zum Chlor positiv geladen ist, bestätigen, da das Dipolmoment des trans-Derivates mehr als doppelt so groß ist, als das des cis-Derivates. Für die Einzelheiten der Messung verweisen wir auf vorangehende Arbeiten[2]). Erwähnt werden soll bloß, daß das Dipolmoment durch Messung der Molekularpolarisation in verdünnter Benzollösung bestimmt wurde, was eine Berechnung des P_∞-Wertes erlaubt; in erster Annäherung wurde statt $(P_E + P_A)$ der Wert von P_E für die D-Linie genommen[3]).

$CHCl = CHJ$

	Cis	Trans
P_∞	35,20	62,8
$P_{E\cdot D} \sim P_E + P_A$	28,49	29,41
$\mu \cdot 10^{18}$	0,57	1,27

1) H. Van de Walle, Mém. Acad. Soc. Belg., in 8°, S. 13, 16 u. 20. 1923. Für die Einzelheiten der Chlorjodäthylen-Darstellung, s. Fußnote 4) u. 5).

2) S. z. B. J. Errera, Physik. Zeitschr. **27**, 764, 1926.

3) Wir hoffen den Wert von $P_E + P_A$ bald durch Messungen im langwelligen Infraroten bestimmen zu können.

Brüssel, Technische Fakultät der Universität.

(Eingegangen 20. Juli 1928.)

Zwei neue Ähnlichkeitsgesetze für das Temperaturfeld turbulent strömender Flüssigkeiten und ihre Bedeutung für den Wärmeübergang.

Von L. Schiller.

Vorbehaltlich späterer näherer Ausführungen möchte ich im folgenden zwei neue, näherungsweise gültige Ähnlichkeitsgesetze für das Temperaturfeld turbulent strömender Flüssigkeiten mitteilen, die sich unschwer aus den Differentialgleichungen ableiten lassen und insbesondere für das Wärmeübergangsproblem für beliebige Flüssigkeiten (und Gase) von Bedeutung erscheinen. Sie gelten unter der in weitem Bereich empirisch begründeten Voraussetzung, daß im stationären Fall in dem vorwiegend von konvektiven Wirkungen beherrschten turbulenten Gebiet (d. h. abgesehen von der laminaren Randzone) die Geschwindigkeitsfelder — unabhängig von der Reynoldsschen Zahl — ähnlich sind (z. B. 7tel-Potenz-Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung).

1. Die genannte Voraussetzung besagt, daß in zwei Fällen (1 und 2) die Geschwindigkeitskomponenten an entsprechenden Stellen der turbulenten Zone sich verhalten wie die mittleren Geschwindigkeiten: $u_1 : u_2 = \bar{u}_1 : \bar{u}_2$. Dies berechtigt uns, in den konvektiven Gliedern der Differentialgleichung des Wärmeaustauschs (die wesentlich für die turbulente Zone in Betracht kommen) die Geschwindigkeitskomponenten proportional den mittleren Geschwindigkeiten zu setzen. Wir erhalten dann aus dieser Differentialgleichung für ähnlich berandete Fälle die Regel: Zwei Temperaturfelder beliebiger Flüssigkeiten sind ähnlich, wenn die Dimensionslose

$$\frac{c \cdot \varrho \cdot \bar{u} \cdot l}{\lambda} = \text{Const}^{1)}$$

ist (c = spez. Wärme bei konst. Druck, ϱ = Dichte, $\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit, l = Länge, λ = Wärmeleitfähigkeit). Daraus ergibt sich leicht, daß die (dimensionslose) Wärmeübergangszahl $\frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$ eine reine Funktion von $\left(\frac{c \cdot \varrho \cdot \bar{u} \cdot l}{\lambda}\right)$ sein muß.

2. Aus der hydrodynamischen und der thermischen Differentialgleichung zusammen folgt unter der gleichen Voraussetzung für ähnlich berandete Fälle: Das Temperaturfeld einer beliebigen Flüssigkeit ist einem Geschwindigkeitsfeld dann ähnlich, wenn

$$\frac{c \cdot \varrho_2 \cdot \bar{u}_2 \cdot l_2}{\lambda} = \frac{\varrho_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot l_1}{\mu}^{2)}$$

ist (μ = Zähigkeit). Sämtliche Größen der linken Seite (Index 2) beziehen sich auf das System, für das das Temperaturfeld entnommen wird, sämtliche der rechten (Index 1) auf dasjenige, für welches das Geschwindigkeitsfeld entnommen wird.

Ein Spezialfall dieses 2. Gesetzes ist die von Prandtl[3]) vor längerer Zeit für den Fall $\varrho_1 = \varrho_2$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$, $l_1 = l_2$ angegebene (von unseren

1) In der Bezeichnungsweise von Gröber: Peclet = Const.

2) In der Bezeichnungsweise von Gröber: Peclet = Reynolds.

3) L. Prandtl, Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten, Physik. Zeitschr. **11**, 1072, 1910.

Voraussetzungen freie) Ähnlichkeitsregel $\frac{\lambda}{c \cdot \mu} = 1$. Sie gibt darüber Aufschluß, wann in einem System Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld ähnlich sind.

Die wesentliche Bedeutung unseres 2. Gesetzes für die Fragen des Wärmeübergangs liegt darin, daß man daß Temperaturfeld und damit auch den Wärmeübergang erhält, wenn man das der Reynoldsschen Zahl der rechten Seite zugehörige Geschwindigkeitsfeld, insbesondere an der Wand, (z. B. für Rohrströmung aus dem Blasiusschen Gesetz), kennt. Ferner erkennt man für den Fall der stationären Rohrströmung (bei großer Anlauflänge), daß Gedankengang und Endformel für die Ermittelung des Wärmeübergangs, wie sie in unserer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) angegeben sind, vollkommen im Einklang mit dem hier angegebenen allgemeinen Ähnlichkeitsgesetz stehen[2]). Der Ähnlichkeitsansatz aus den beiden Differentialgleichungen liefert für diesen Fall sofort auch die Gleichung für den Wärmeübergang:

$$\frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = \frac{\psi(\mathrm{Pe})}{4} \cdot \mathrm{Pe},$$

worin α die Wärmeübergangszahl, d den Rohrdurchmesser und $\psi(\mathrm{Pe})$ den Widerstandskoeffizienten aus der Gleichung des hydraulischen Widerstandes (z. B. Blasiussches Gesetz) bedeutet, genommen für Rey = Pe.

Das Ähnlichkeitsgesetz 2 eröffnet auch günstige Perspektiven für andere Probleme des Wärmeübergangs. So läßt sich z. B. die Kármán-Latzkosche Formel für den Wärmeübergang an der ebenen Platte, die für $\frac{\lambda}{c \cdot \mu} = 1$ abgeleitet wurde, sofort für beliebige Flüssigkeiten dadurch verallgemeinern, daß man in ihr statt μ den Wert $\frac{\lambda}{c}$ einsetzt.

1) L. Schiller und Th. Burbach, Wärmeübergang strömender Flüssigkeit in Rohren, Physik. Zeitschr. **29**, 340, 1928.

2) Allerdings zeigt das neue Ähnlichkeitsgesetz, da nach ihm allgemein nur die Bedingung Rey = Pe zu erfüllen ist, noch mehrere andere Wege (z. B. entsprechende Veränderung von u). Alle diese Wege aber führen zu unserer Endformel.

Leipzig, Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik des Physikalischen Instituts, 26. Juli 1928.

(Eingegangen 27. August 1928.)

Über Charakteristiken von Alkalizellen und ihre Bedeutung für die lichtelektrische Meßmethode.

Von R. Fleischer und H. Goldschmidt.

I. Teil.

In den letzten Jahren haben für Strahlungsmessungen in steigendem Maße lichtelektrische Photometer Verwendung gefunden, die im wesentlichen die Verbindung einer lichtelektrischen Zelle mit einem Einfadenelektrometer darstellen, und bei denen die Intensität des in die Zelle fallenden Lichtes fast ausschließlich nach der Entladungsmethode bestimmt wird. Zu diesem Zwecke wird bei abgeblendeter Zelle das System Zelle-Elektrometerfaden auf ein bestimmtes Potential geladen. Es bildet also die Elektrometerspannung zugleich das beschleunigende Potential der Zelle. Wird hierauf die Zelle belichtet, so entlädt der vom metallischen Belag der Zelle ausgehende Elektronenstrom das Elektrometer.

Bezeichnet man mit t die mit der Stoppuhr gemessene Zeit, während der der Faden ein bestimmtes Potential, das den Spannungen V_1 und V_2 entspricht, durchläuft, so wird die Intensität J des in die Zelle fallenden Lichtes zumeist aus nachstehender Formel, in der c_0 eine im allgemeinen nicht bekannte Konstante bedeutet, berechnet:

$$J = \frac{c_0}{t} \ln \frac{V_1}{V_2}. \qquad (1)$$

Bei ungenügender Isolation, wenn also auch bei unbelichteter Zelle der Faden zwar langsam, aber doch merklich zurückwandert und in der Zeit t' das den Spannungen V_1' und V_2' entsprechende Intervall durchläuft, wird vorstehender Ausdruck ersetzt durch

$$J = c_0 \left(\frac{1}{t} \ln \frac{V_1}{V_2} - \frac{1}{t'} \ln \frac{V_1'}{V_2'} \right). \qquad (1')$$

Es ist nun oft darüber geklagt worden, daß auch bei völliger Konstanz der Zellen, die im folgenden stets vorausgesetzt werden soll, die mit verschiedenen Photometern auf diese Weise gewonnenen Resultate schwer miteinander vergleichbar seien. Bei unseren eigenen Messungen haben sich diese Bedenken nicht nur bestätigt, sondern es hat sich auch gezeigt, daß, wenn nicht besondere Vorsichtsmaßregeln beachtet werden, nicht einmal die mit einer Zelle nach der Entladungsmethode gewonnenen Resultate in sich gut übereinstimmen.

Da die von uns benutzten Zellen völlig konstant und frei von störenden Effekten, wie etwa während der Messung sich ausbildende Wandladungen, waren, konnten diese Unstimmigkeiten nur in der üblichen Form der Entladungsmethode oder in bisher noch nicht berücksichtigten Eigenschaften der Zellen begründet liegen.

Es erschien uns daher notwendig, die in lichtelektrischen Photometern angewandte Meßmethode und die zur Verwendung gelangenden Zellen näher zu untersuchen.

Aus den von der Elektrostatik gelehrten Beziehungen zwischen der Kapazität C, der Spannung V und der Elektrizitätsmenge Q folgt, da der lichtelektrische Effekt der Intensität J des in die Zelle fallenden Lichtes proportional ist und der das Elektrometer entladende Strom $\frac{dQ}{dt}$ von

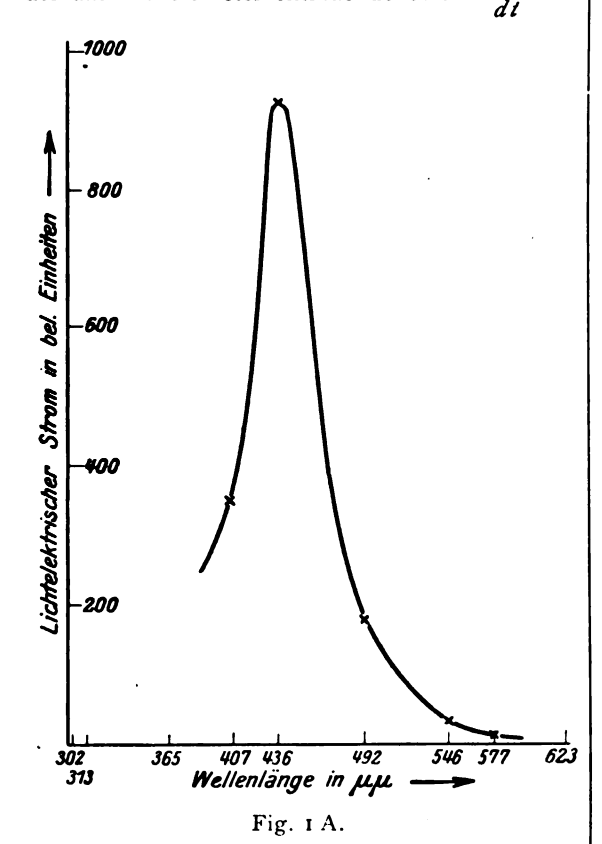


Fig. 1 A.

der Charakteristik $f(V)$ der Zelle abhängt, die Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} = kJf(V). \tag{2}$$

Die in diesem Ausdruck enthaltene Konstante k ist von der Zellempfindlichkeit, vorgeschalteten Blenden, Lichtfiltern usw. abhängig. Aus Gleichung (2) berechnet sich die Intensität J des in die Zelle fallenden Lichtes zu

$$J = \frac{1}{t} \cdot \frac{C}{k} \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{f(V)}\,[1]. \tag{3}$$

Die Kapazität C des Systems ist dabei als konstant vorausgesetzt, eine Annahme, die jedoch nur für ein kleines Meßintervall zulässig ist. Wie H. Witte[1]) gezeigt hat, ist diese Kapazitätsänderung nicht unerheblich. Sie beträgt für ein von ihm untersuchtes Wulfsches Fadenelektrometer ohne Hilfsschneiden schon 2,4%, für ein Blättchenelektroskop 6% und kann nach unseren Erfahrungen, wenn zur Erzielung hoher Empfindlichkeit mit sehr engem Schneidenabstand gearbeitet wird, noch einige Prozent mehr betragen.

Um Gleichung (3) integrieren zu können, bedarf es der Kenntnis der Zellcharakteristik $f(V)$. Ihre Ermittelung ist einwandfrei nur auf experimentellem Wege durch Ausmessen der Stromspannungskurven in monochromatischem Lichte

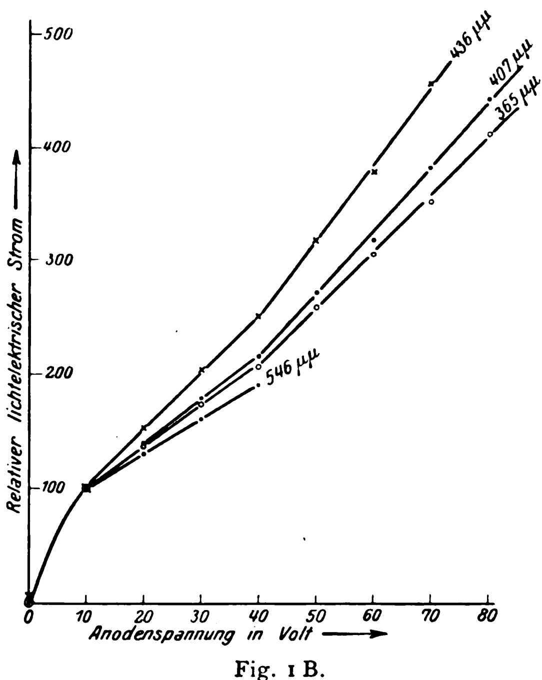


Fig. 1 B.

möglich und wird im II. Teile noch näher zu erörtern sein. Wenn mit einem kleinen Meßintervall gearbeitet wird, kann in demselben in erster Annäherung und mit genügender Genauigkeit die Charakteristik der Zelle stets durch eine Gerade ersetzt werden.

Hierbei sind nachstehende Fälle zu unterscheiden:

A. Gute Isolation.

Fall a). Innerhalb des Meßgebietes kann die Zellcharakteristik durch eine Nullpunktsgerade mit der Gleichung

$$f(V) = aV$$

ersetzt werden. Damit geht Gleichung (3) über

1) P. Götz, Das Strahlungsklima von Arosa, S. 42. J. Springer, Berlin 1926.

1) H. Witte, Physik. Zeitschr. 28, 429, 1927.



in die mit Formel (1) identische Beziehung

$$J = \frac{1}{t} \cdot \frac{C}{ak} \ln \frac{V_1}{V_2}. \quad \text{(Ia)}$$

Da die Stromspannungskurven fast nie durch den Nullpunkt gehen (s. Fig. III B, IV B, V B), ist dieser Fall höchst selten und kann in der Regel nur in einem kleinen Gebiet der Stoßionisation verwirklicht sein.

Fall b). Innerhalb des Meßgebietes kann die Zellcharakteristik durch eine Gerade, die die Abszisse im Punkte $V = V_0$ schneidet, ersetzt

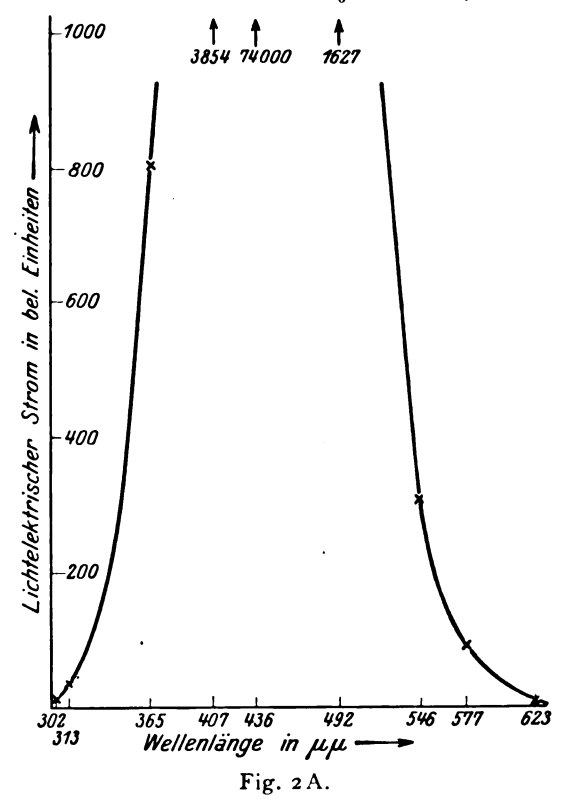


Fig. 2A.

werden. Dieser Fall kommt am häufigsten vor und ist daher praktisch besonders wichtig. Da in der Mehrzahl der uns bekannten Fälle V_0 negativ ist, kann die Gleichung der Geraden in nachstehender Form geschrieben werden

$$f(V) = b(V + V_0).$$

Daraus folgt

$$J = \frac{1}{t} \frac{C}{bk} \ln \frac{V_1 + V_0}{V_2 + V_0}. \quad \text{(IIa)}$$

Fall c). Innerhalb des Meßgebietes ist die Charakteristik darstellbar durch eine Parallele zur Abszisse mit der Gleichung

$$f(V) = c.$$

Es ergibt sich

$$J = \frac{1}{t} \cdot \frac{C}{ck} (V_1 - V_2). \quad \text{(IIIa)}$$

Man erkennt, daß ohne Kenntnis der Charakteristik der Zelle ein einwandfreies Arbeiten nach der Entladungsmethode nicht möglich ist. Dabei ist besonders unangenehm, daß die experimentelle Bestimmung der Charakteristik umständlich und zeitraubend ist und daß es außerdem kaum 2 lichtelektrische Zellen geben dürfte, die in ihren Eigenschaften einander völlig gleichen.

B. Mangelhafte Isolation.

Weitere Schwierigkeiten treten bei Berücksichtigung der Isolationsfehler ein. Zumeist sind diese allerdings so gering, daß sie gegenüber der durch den lichtelektrischen Strom hervorgerufenen, verhältnismäßig raschen Entladung nicht ins Gewicht fallen. Wird nach der Entladungsmethode aber auch noch lichtelektrisch wenig wirksames Licht gemessen, zum Beispiel schwaches diffuses oder spektral zerlegtes langwelliges Licht, so können lichtelektrischer Strom und Isolationsverlust leicht von gleicher Größenordnung sein — zumal wenn mit Glaszellen, die nun einmal keine guten Isolatoren sind, gearbeitet wird.

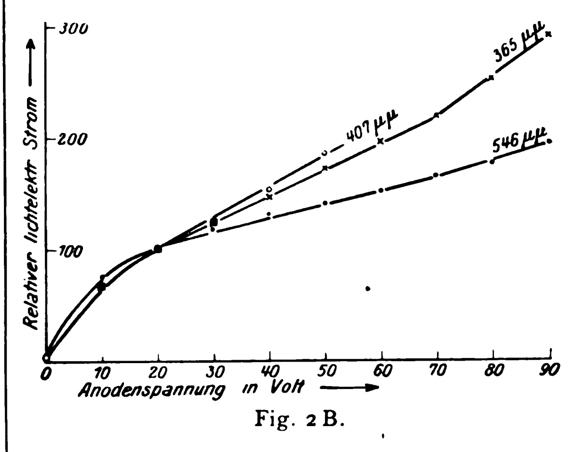


Fig. 2B.

Dann ist eine Vernachlässigung der Isolationsfehler nicht mehr angängig.

Anmerkung. Bei der langsamen Selbstentladung des Elektrometers wirken außer den Isolationsverlusten auch noch andere Effekte, wie Höhenstrahlung, Eigenstrahlung der Gefäßwände usw. mit. Dieselben sind jedoch von anderer Größenordnung wie die mit den lichtelektrischen Strömen vergleichbaren Isolationsfehler — nur solche sind von praktischer Bedeutung — und können daher unberücksichtigt bleiben.

Sind Isolationsfehler vorhanden, so tritt zu dem von der lichtelektrischen Zelle ausgelösten, das Elektrometer entladenden Strom noch ein



zweiter, der über die Isolationskörper fließt und von der Leitfähigkeit l der Isolatoren und der Spannung V abhängt. Dann tritt an Stelle der Gleichung (2) der Ausdruck

$$C\frac{dV}{dt} = kJf(V) + lV. \qquad (4)$$

l ist bei abgeblendeter Zelle leicht zu bestimmen und ergibt den Wert

$$l = \frac{C}{t'}\ln\frac{V_1'}{V_2'}. \qquad (5)$$

Bei der Integration der Gleichung (4) sind wieder 3 Fälle zu unterscheiden.

Fall a). Innerhalb des Meßbereiches kann die Zellcharakteristik durch eine Nullpunktgerade ersetzt werden. Aus

$$f(V) = aV$$

folgt

$$J = \frac{C}{ak}\left\{\frac{1}{t}\ln\frac{V_1}{V_2} - \frac{1}{t'}\ln\frac{V_1'}{V_2'}\right\}. \qquad \text{(Ib)}$$

Da die Kapazität C von der Fadenstellung abhängig ist, wird es sich hier, sowie in den übrigen noch zu entwickelnden Fällen empfehlen, die lichtelektrischen Messungen und die Bestimmung des Isolationsfehlers in dem gleichen Meßgebiet auszuführen. An Stelle der Gleichung (Ib) würde dann nachstehende einfachere Beziehung gelten

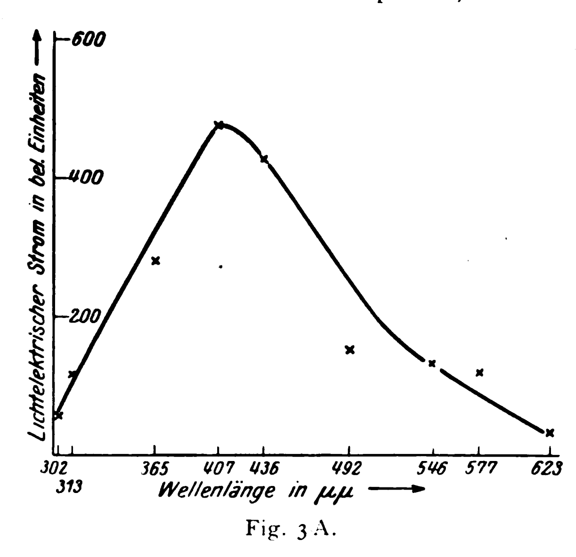


Fig. 3 A.

$$J = \frac{C}{ak}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right)\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Fall b). Innerhalb des Meßgebietes wird die Zellcharakteristik durch eine Gerade ersetzt, die die Abszisse im Punkte $V = V_0$ schneidet, also

$$f(V) = b(V + V_0).$$

Dann führt die Integration der Gleichung (4) zu dem Ausdruck

$$t = \frac{C}{bkJ + l}\ln\frac{(bkJ + l)V_1 + bkJV_0}{(bkJ + l)V_1 + bkJV_0}, \qquad (6)$$

der zur Bestimmung der Intensität J in eine Reihe entwickelt werden soll. Diese Reihenentwicklung kann in verschiedener Weise ausgeführt werden.

1. Form. Die Reihenentwicklung entspreche dem Ausdruck

$$\ln(x + y) = \ln x + \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 \pm \cdots \quad \frac{y}{x} < 1 \qquad (7)$$

Setzt man

$$x_1 = bkJ(V_1 + V_0) \qquad x_2 = lV_1$$
$$y_1 = bkJ(V_2 + V_0) \qquad y_2 = lV_2$$

und beschränkt sich nur auf das erste Glied der Reihenentwicklung, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (5) das Resultat

$$J = \frac{C}{bk}\left\{\frac{1}{t}\ln\frac{V_1 + V_0}{V_2 + V_0} - \frac{1}{t'}\ln\frac{V_1'}{V_2'}\right\}. \qquad \text{(IIb)}$$

Gleichung IIb erinnert in ihrem Bau an die Ausdrücke Ib und IIa. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß jemand ohne theoretische Ableitungen, lediglich auf Grund einer den Gleichungen Ib und IIa entsprechenden Analogiebildung gleichfalls zu dem Resultat IIb gelangt. Leider besitzt diese einfache und übersichtlich gebaute Formel nur geringe praktische Bedeutung. Für größere Werte von V_0 ist sie unbrauchbar, denn mit wachsendem V_0 wird der Gesamtausdruck immer kleiner und schließlich sogar negativ. Gleichung IIb ist also nur bei kleinem V_0 brauchbar. Aber auch dann ist ihr praktischer Wert

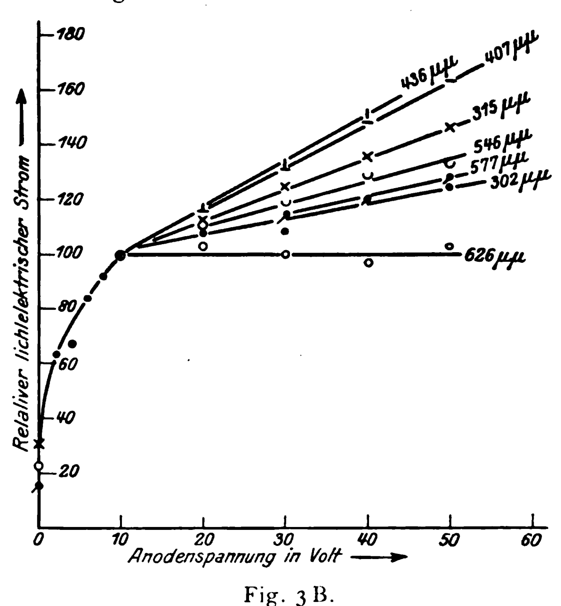


Fig. 3 B.

gering. Denn liegt V_0 nahe bei Null, so dürfte es meist ohne großen Fehler möglich sein (zumal wenn man den frühzeitigen Abbruch vorstehender Reihenentwicklung bedenkt) V_0 vollständig zu vernachlässigen, also die Intensität J des Lichtes nach einem der Formel Ib entsprechenden Ausdruck zu berechnen.

Wird in der Reihenentwicklung (7) auch das 2. Glied berücksichtigt, so ergibt sich zur Bestimmung von J eine quadratische Gleichung, deren zahlenmäßige Auswertung für den praktischen Gebrauch zu umständlich erscheint.

2. Form. Man benutze die Reihenentwicklung

$$\ln x = 2\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \cdots\right\} \quad (8)$$

und setze

$$x = \frac{(bkJ+l)V_1 + bkJV_0}{(bkJ+l)V_2 + bkJV_0}.$$

Sind V_1 und V_2 voneinander nicht sehr verschieden (kleines Meßbereich), so konvergiert diese Reihe ziemlich rasch, vor allem, wenn V_0 positiv ist, und man kann die Reihenentwicklung auf das erste Glied beschränken. Man erhält als Endergebnis

$$J = K_1\left\{\frac{V_1 - V_2}{t} - \frac{V_1 + V_2}{2t'}\ln\frac{V_1'}{V_2'}\right\}. \quad (\mathrm{II\,c})$$

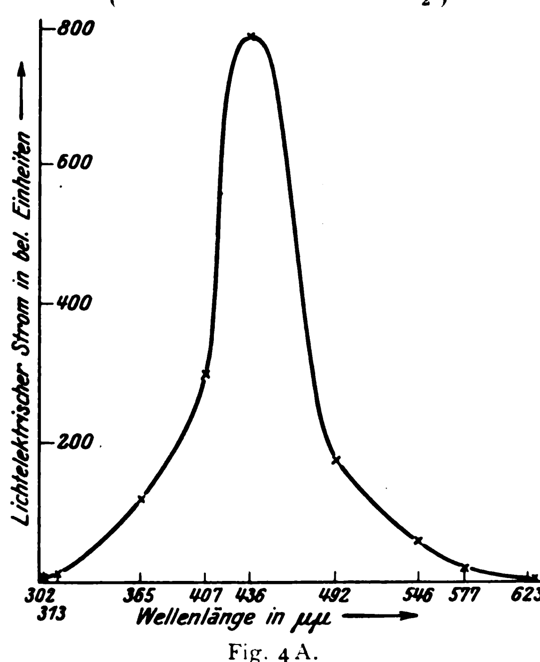


Fig. 4A.

Darin ist zu setzen

$$K_1 = \frac{C}{bk(V_1 + V_2 + 2V_0)}.$$

Die Anwendungsmöglichkeit der Gleichung IIc ist ebenfalls begrenzt, da sie ein kleines Meßbereich voraussetzt. Bei langsamer Entladung des Elektrometers infolge lichtelektrisch sehr wenig wirksamen Lichtes, bei der Isolationsfehler in erster Linie zu berücksichtigen sind, ist diese Voraussetzung jedoch immer erfüllt. Daher ist im allgemeinen Gleichung IIc dem Ausdruck IIb vorzuziehen.

3. Form. Zu einem weiteren Ausdruck für die Intensität J gelangt man, wenn man Gleichung (6) in eine Reihe von der Form

$$\ln(x+y) < \ln x + 2\left\{\frac{y}{2y+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \cdots\right\}$$

entwickelt. (9)

Man setze

$$x_1 = (bkJ+l)V_1 \qquad y_1 = bkJV_0$$
$$x_2 = (bkJ+l)V_2 \qquad y_2 = bkJV_0$$

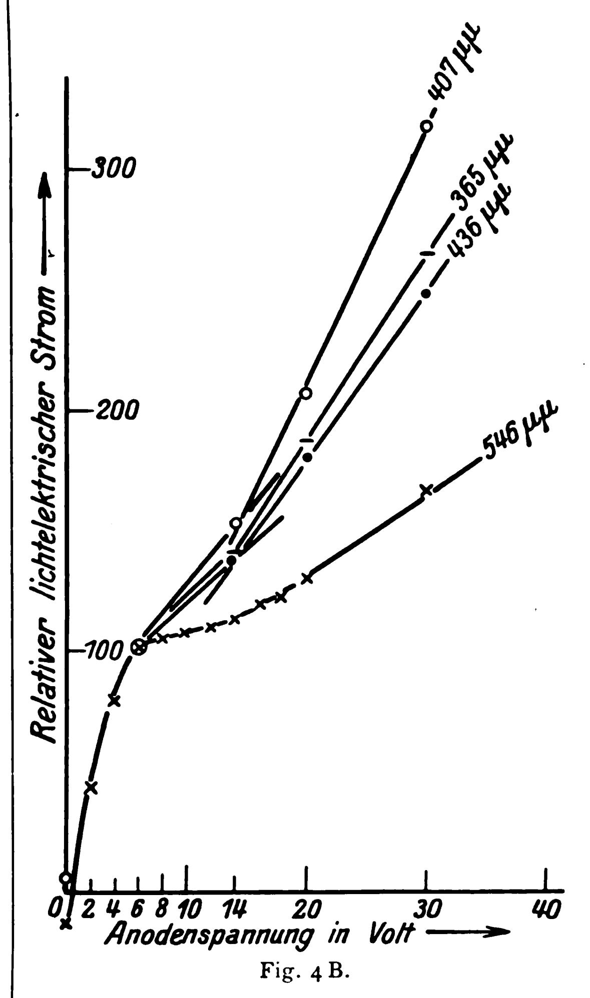


Fig. 4B.

und erhält damit, wenn man nur die ersten 2 Glieder der Reihenentwicklung benutzt,

$$t = \frac{C}{bkJ+l}\left\{\ln\frac{V_1}{V_2} + A\left(\frac{1}{2V_1+A} - \frac{1}{2V_2+A}\right)\right\};$$

$$A = \frac{bkJV_0}{bkJ+l}.$$

Führt man in dem Bruch $\frac{bkJV_0}{bkJ+l}$ die Division aus und beschränkt sich dabei nur auf das erste Glied, so ergibt sich zur Bestimmung der Intensität J die Gleichung

$$J = \frac{C}{bk}\left\{\frac{1}{t}\left(\ln\frac{V_1}{V_2} - K_2\right) - \frac{1}{t'}\ln\frac{V_1'}{V_2'}\right\} \quad \text{(IId)}$$

$$K_2 = \frac{4V_0(V_1 - V_2)}{(2V_1 + V_0)(2V_2 + V_0)}.$$

Vom Ausdruck Ib unterscheidet sich Gleichung IId durch die Konstante K_2. Ihre Anwendung

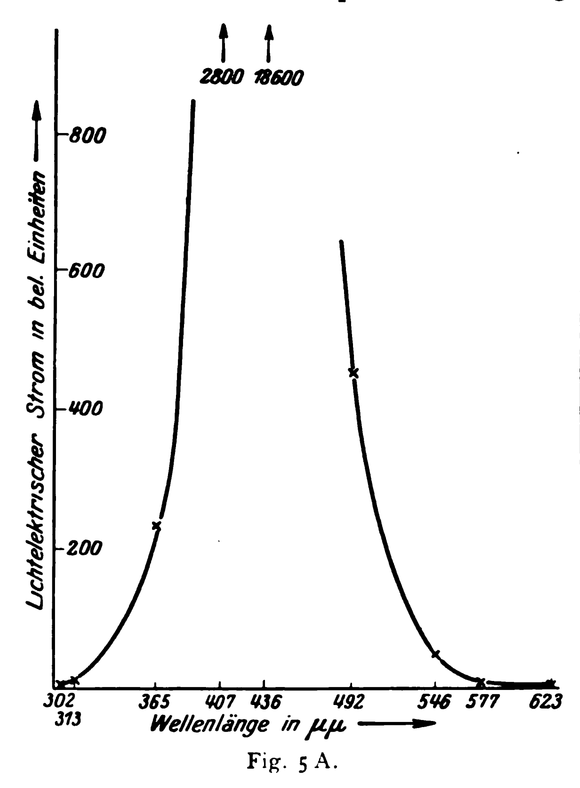


Fig. 5 A.

wird sich dort empfehlen, wo es sich nur um geringfügige Isolationsstörungen handelt und wo V_0 wesentlich von Null verschieden ist.

Fall c). Innerhalb des Meßgebietes ist die Zellcharakteristik darstellbar durch eine Parallele mit der Gleichung

$$f(V) = c.$$

Die Integration der Gleichung (4) ergibt den Ausdruck

$$t = \frac{C}{l}\ln\frac{ckJ + lV_1}{ckJ + lV_2}.$$

Aus ihr folgt durch Logarithmieren ein Ausdruck für J, der zwar mathematisch relativ einfach ist, aber für die zahlenmäßige Auswertung in der Praxis, da die Messungen und Berechnungen auch von weniger geschulten Beobachtern ausgeführt werden müssen, sich nicht eignet.

Es wird sich daher auch in diesem Falle eine Reihenentwicklung notwendig erweisen. Da die Reihe (7) zu keinem brauchbaren Ausdruck führt, werde die Entwicklung gemäß der Reihe (8) durchgeführt.

Aus

$$x = \frac{ckJ + lV_1}{ckJ + lV_2}$$

folgt, wenn nur das erste Glied der Reihe berücksichtigt wird, als Resultat

$$J = \frac{C}{ck}\left\{\frac{V_1 - V_2}{t} - \frac{V_1 + V_2}{2t'}\ln\frac{V_1'}{V_2'}\right\}. \quad \text{(IIIb)}$$

Die Anwendung der Reihe (9) führt zu dem gleichen Ergebnis. Bis auf eine Konstante ist Ausdruck IIIb identisch mit Gleichung IIc.

II. Teil.

Die vorangehenden Ausführungen haben gezeigt, wie wichtig die Kenntnis der Form der Charakteristik der benutzten lichtelektrischen Zelle ist. Sie gelten, wenn die lichtelektrische Zelle in einer Schaltung benutzt wird, bei der die Aufladespannung des Einfadenelektrometers

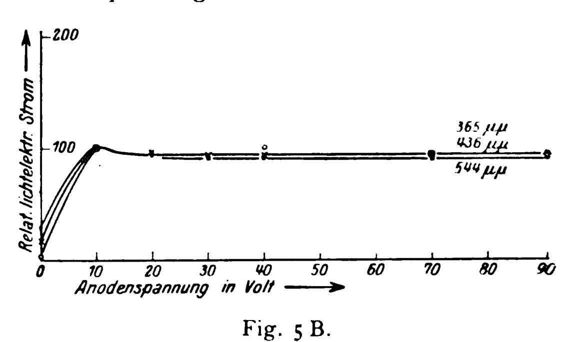


Fig. 5 B.

gleichzeitig das beschleunigende Potential der ausgelösten Elektronen ist. Das bedeutet aber, sobald das Einfadenelektrometer durch den lichtelektrischen Strom entladen wird, ändert sich im gleichen Maße die beschleunigende Spannung der Zelle. Das Potential, das an dem Auffangenetz oder an der Metallkathode der Zelle liegt, ist während der Messung nicht konstant. Die lichtelektrische Zelle läuft gewissermaßen einen Teil ihrer Charakteristik ab. Dieser Teil der Charakteristik muß bei Anwendung dieser Methode bekannt sein.

Wenn unzerlegtes Licht einer bestimmten spektralen Verteilung oder Licht nur einer Wellenlänge lichtelektrisch photometriert werden soll, so ist die obige Methode auf jeden Fall einwandfrei, da die Kenntnis nur einer Stromspannungskurve

vorauszusetzen ist, nämlich derjenigen, die bei Bestrahlung der Kathode mit unzerlegtem Lichte oder mit jener bestimmten Wellenlänge erhalten wird.

Werden aber mit demselben lichtelektrischen System verschiedene spektrale Bereiche photometriert, und soll bei Kenntnis nur einer Charakteristik die obige Methode einwandfrei angewandt werden, so müssen die bei Bestrahlung der Kathode mit Licht verschiedener Wellenlängen erhaltenen Stromspannungskurven untereinander gleich sein. Die Charakteristiken für verschiedene Wellenlängen müssen sich einigermaßen decken, nachdem eine Reduktion vorgenommen worden ist, die gestattet, die lichtelektrischen Ströme verschiedener Wellenlängen untereinander zu vergleichen[1]). Ist diese Forderung nicht erfüllt, so müssen die Stromspannungskurven für alle Spektralgebiete, mit denen die Kathode bestrahlt wird, bekannt sein.

Um zu prüfen, ob diese Bedingung erfüllt ist, wurden an einigen Alkalizellen Stromspannungscharakteristiken bei Bestrahlung mit Licht verschiedener Wellenlängen gemessen. Diese seien hier für fünf Alkalizellen wiedergegeben.

Außerdem ist die spektrale Empfindlichkeitsverteilung der einzelnen Zellen aufgenommen worden. Die lichtelektrischen Ströme sind bezogen auf Einheiten des auffallenden Lichtes.

Die Zellen seien im folgenden kurz beschrieben:

Zelle I:

Durch Zerstäuben von Platin ist die Zellwand mit einer Platinschicht überzogen worden. Auf diese wurde durch Zerstäuben ein Kaliumniederschlag gebracht. Die Zelle hat die Form eines schwarzen Körpers. Die Anode besteht aus einem ringförmig gebogenen Platindraht. Die Zelle ist mit Wasserstoff gefüllt. Der Druck in der Zelle entspricht etwa dem Drucke einer Quecksilbersäule von 0,1 mm Länge. Die Zelle wurde selbst hergestellt.

Zelle II:

Nach der Destillation des Kaliums in die Zelle wurde diese mit Wasserstoff beschickt. Der Druck in der Zelle beträgt etwa 0,01 mm Hg. Sie hat ebenfalls die Form eines schwarzen Körpers. Die Anode ist ein ringförmig gebogener Platindraht. Die Zelle ist selbst hergestellt worden.

1) Um die lichtelektrischen Ströme der verschiedenen Wellenlängen untereinander vergleichen zu können, wurde der bei Beginn der Sättigung erhaltene Strom als Einheit gewählt.

Zelle III:

Eine Zelle englischer Herkunft, die dankenswerterweise von der Firma Osram-G. E. C., Ltd., London, zur Verfügung gestellt wurde. Die Anode besteht aus einem Drahtgitter. Die Art des Alkalimetalles der Kathode ist unbekannt. Zur Zellfüllung dient Wasserstoff. Die Zelle zeichnet sich durch Rotempfindlichkeit aus.

Zelle IV:

Eine Rubidiumzelle mit Argonfüllung von der Firma Günther & Tegetmeyer. Als Anode dient eine Drahtgabel.

Zelle V:

Die Kathode wurde durch Destillation des Kaliums in die Zelle hergestellt, diese mit Wasserstoff beschickt und danach bis auf bestes Vakuum ausgepumpt. Sie ist wie die Zellen I und II als schwarzer Körper ausgebildet. Als Anode wird ein ringförmig gebogener Platindraht benutzt. Die Zelle wurde selbst hergestellt.

Eine Stromspannungskurve läßt sich in drei Teile zerlegen. Der erste Teil reicht bis zum Einsatz der Sättigung, der zweite Teil vom Einsatz der Sättigung bis zum Beginn der Stoßionisation und der dritte Teil beginnt mit dem Einsetzen der letzteren. Man sieht an Hand der Kurven, daß der Anfang der Sättigung (Fig. 1 B, 2 B, 3 B, 4 B, 5 B) und die Einsatzspannung der Stoßionisation (Fig. 1 B und 4 B) unabhängig von der Wellenlänge des aufgestrahlten Lichtes sind, soweit die verhältnismäßig groben Spannungsmessungen einen solchen Schluß zulassen. Im übrigen aber zeigen die Kurvenscharen für die einzelnen Zellen, daß keineswegs die oben geforderte Bedingung erfüllt ist. Es war ja für einwandfreie Benutzung der Anfangs geschriebenen Methode gefordert worden, daß die Stromspannungskurven, die bei Bestrahlung der Kathode mit Licht verschiedener Wellenlängen erhalten werden, sich einigermaßen decken, nachdem eine Reduktion vorgenommen worden ist, die gestattet, die lichtelektrischen Ströme verschiedener Wellenlängen untereinander zu vergleichen.

Betrachten wir insbesondere den Teil der Stromspannungskurven, der zwischen Beginn der Sättigung und Beginn der Stoßionisation liegt, so sehen wir, daß die Neigung dieses Teiles der Charakteristik zur Abszisse eine Funktion der Wellenlänge ist. Gehen wir vom roten Teile des sichtbaren Spektralgebietes aus, so nimmt die Neigung mit zunehmender Frequenz des aufgestrahlten Lichtes zu, erreicht ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Die Lage des Maximums ist für die verschiedenen Zellen nicht die gleiche.

Ein abweichendes Verhalten zeigt die Zelle V, deren Charakteristiken zwischen Beginn der Sättigung und Einsatz der Stoßionisation unabhängig von der Wellenlänge des aufgestrahlten Lichtes angenähert parallel zur Abszisse verlaufen. Da diese Zelle bestens evakuiert ist, während die anderen vier Zellen bis zu einem gewissen Drucke mit Gas gefüllt sind, ist möglicherweise die Erscheinung der mehr oder weniger starken Neigung des lichtelektrischen Sättigungsstromes zur Abszisse auf die Gasfüllung der Zellen zurückzuführen. Einen endgültigen Schluß können erst weitere Untersuchungen bringen.

Aus den Stromspannungskurven der verschiedenen Zellen ist ersichtlich, daß eine einwandfreie Anwendung der oben beschriebenen Meßmethode nur möglich ist, wenn für die zu untersuchenden Spektralbereiche die entsprechenden Stromspannungskurven bekannt sind, oder wenn Zellen vom Typus V benutzt werden.

Während der Ausführung der Versuche erschien in den „Naturwissenschaften" eine Zuschrift von R. Suhrmann[1][2]), in der die Veröffentlichung von Stromspannungscharakteristiken bestens evakuierter Zellen in Aussicht gestellt wird. Suhrmann findet für gut evakuierte Zellen ein Abweichen des Sättigungsstromes von der Parallelen zur Abszisse in der Nähe der lichtelektrischen roten Grenze. Gasgefüllte Zellen wurden nicht untersucht.

Weiterhin liegen Untersuchungen von E. Ives[3][4][5]) an evakuierten und gasgefüllten Zellen vor. Die evakuierten Zellen zeigen die Parallelität des Sättigungsstromes zur Abszisse. Die gasgefüllten Zellen und dünne Alkalischichten sind schwer zur ausgesprochenen Sättigung zu bringen. Eine Abhängigkeit der Neigung der Stromspannungscharakteristiken zur Abszisse von der Frequenz des aufgestrahlten Lichtes ist nicht zu ersehen. Allerdings sind teils Filter benutzt worden, teils hat Ives keinerlei Angaben über die Wellenlängen des aufgestrahlten Lichtes gemacht. Die Vermutung liegt nahe, daß mit Frequenzen belichtet wurde, deren zugehörige Stromspannungskurven mit der Abszisse gleiche Winkel bilden.

Zusammenfassung.

Im ersten Teile wird die Theorie der Entladungsmethode diskutiert.

Im zweiten Teile wird gezeigt, daß die Neigungen der Stromspannungscharakteristiken der Alkalizellen zur Abszisse zumeist von der Frequenz des aufgestrahlten Lichtes abhängen. Ohne Kenntnis der Zellcharakteristik in dem zu messenden Spektralgebiete können mit der Entladungsmethode keine einwandfreien und vergleichbaren Resultate erhalten werden, vor allem dann nicht, wenn mit verschiedenfarbigem Licht gearbeitet wird, und außerdem Isolationsfehler zu berücksichtigen sind. Am einfachsten gestalten sich die Messungen nach der Entladungsmethode, wenn Zellen verwandt werden, deren Stromspannungskurven im Sättigungsgebiet parallel zur Abszisse verlaufen, wie dies bei Zelle V der Fall ist, d. h. bei gut evakuierten Zellen.

Dresden, im Juli 1928.

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Sächsische Landeswetterwarte.

(Eingegangen 18. August 1928.)

1) R. Suhrmann, Naturwiss. XVI, 336, 1928.
2) B. Gudden, Naturwiss. XVI, 547, 1928.
3) E. Ives und C. Frey, Astrophys. Journ. **56**, 1, 1922.
4) E. Ives, Astrophys. Journ. **60**, 209, 1924.
5) E. Ives, The Bell System Technical Journ. Vol. V, 320, 1926.

Die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit unter Verwendung des elektrooptischen Kerr-Effektes.

Von A. Karolus und O. Mittelstaedt.

(Vorläufige Mitteilung.)

Einleitung.

Die Anordnung im klassischen Versuche Fizeaus zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ist bekanntlich folgende: Ein Lichtstrahl fällt durch eine Lücke eines Zahnrades auf einen entfernt stehenden Spiegel und wird von diesem bei ruhendem Rade wieder durch dieselbe Lücke zurückgeworfen. Der zurückfallende Strahl wird mit dem Auge beobachtet. Versetzt man nun das Zahnrad in Rotation, so wird das Licht $n\ m$ mal pro Sekunde unterbrochen, wenn n die Anzahl der Zähne und m die Umdrehungszahl des Rades pro Sekunde ist. Nennen wir $n \cdot m$ die Unterbrechungsfrequenz des Lichtes, so gibt es bei einer vorgegebenen Entfernung $\frac{s}{2}$ (s = Lichtweg) des Spiegels vom Zahnrad eine Unterbrechungsfrequenz, bei der der Lichtimpuls, der durch die Lücke austrat, beim Zurückkommen infolge der endlichen Lichtgeschwindigkeit gerade den auf die Lücke folgenden Zahn vorfindet. In diesem Falle ist die Licht-

geschwindigkeit durch den Ausdruck

$$c = 2\,n\,m\,s \tag{1}$$

gegeben und der beobachtete Lichtstrahl hat hierbei eine minimale Intensität, wenn wir diese als Funktion der Unterbrechungsfrequenz betrachten. Weitere Minima treten bei steigender Unterbrechungsfrequenz auf, wenn der Lichtimpuls nicht den neben seiner Austrittslücke befindlichen Zahn, sondern einen entfernteren antrifft, d. h. der Lichtimpuls braucht in den Minimumsfällen zum Zurücklegen des Weges die Zeit

$$\tau = \frac{1}{2nm},\quad \frac{3}{2nm},\quad \frac{5}{2nm} \cdots \text{sec}$$

oder allgemein

$$\tau = \frac{2k-1}{2nm}\ \text{sec.} \tag{2}$$

Man bezeichnet k als Ordnungszahl und spricht von einem Minimum k-ter Ordnung. Cornu hat gezeigt, daß die prozentuale Einstellgenauigkeit des Minimums bei Änderung der Unterbrechungsfrequenz direkt proportional die Größe k ist. Eine Erhöhung der Ordnung läßt sich außer durch Steigern der Unterbrechungsfrequenz auch durch Vergrößerung des Lichtweges erreichen. Infolgedessen sind alle Versuche mit der Zahnradmethode darauf angewiesen, zur Steigerung der Genauigkeit eine möglichst hohe Unterbrechungsfrequenz und einen möglichst langen Lichtweg zu wählen. Die experimentellen Schwierigkeiten liegen deshalb in der genauen Messung von Lichtwegen bis zu 40 km, und in der exakten Bestimmung der Drehzahl des Zahnrades, die zur Beobachtung des Minimums dazu noch veränderlich sein muß.

Neue Anordnung zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit.

Im Jahre 1925[1]) machte Karolus den Versuch, die durch das rotierende Zahnrad erzeugte mechanische Lichtunterbrechung durch eine rein elektrische, trägheitslose Lichtsteuerung zu ersetzen. Durch Verwendung des elektrooptischen Kerreffektes als Lichtrelais war es möglich, die Unterbrechungsfrequenz bis zu 10^7 pro sek. zu steigern, wodurch der für das Minimum erster Ordnung nötige Lichtweg auf 15 m herabgesetzt wurde. Die Versuche wurden vorerst mit geringer Entfernung gemacht, um hieran die prinzipielle Brauchbarkeit der Methode zu untersuchen.

1) Sächsische Akademie, Sitzung vom 7. Dezember 1925.

Im Grunde geht diese Methode auf einen Vorschlag von Des Coudres[1]) aus dem Jahre 1893 zurück, mit Hilfe des Kerreffektes und der bekannten Lichtgeschwindigkeit die Frequenz Hertzscher Wellen zu messen. Nachdem es heute aber durchaus möglich ist, die Frequenz derartig rascher Schwingungen absolut zu bestimmen, stand nichts im Wege, diese Anordnung umgekehrt zur Messung der Lichtgeschwindigkeit zu verwenden[2]). Die Anordnung ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

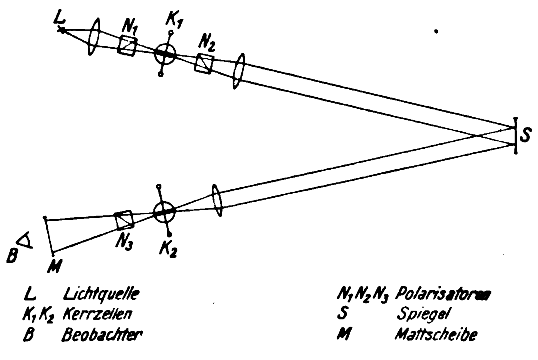


Fig. 1.

Der Vorgang ist folgender: Das Licht wird durch einen Nicol N_1 linear polarisiert in einer Polarisations-Ebene, die unter 45° gegen die elektrischen Kraftlinien der Kerrzelle K_1 geneigt ist. Das Licht wird sodann in K_1 entsprechend der anliegenden Spannung elliptisch polarisiert. Die Doppelbrechung ist nach Kerr

$$\varphi = \frac{f' V^2}{a^2}. \tag{3}$$

f' ist gegeben durch

$$f' = \frac{2\pi B l}{300^2}.$$

Hier bedeuten φ die Doppelbrechung im Winkelmaß, B die Kerrkonstante, V die Spannung in Volt, l die Plattenlänge und a der Plattenabstand in Zentimeter.

Bei Wechselspannung der Frequenz ν gilt:

$$\varphi = \frac{f'}{a^2} e_0^2 \sin^2(2\pi\nu t). \tag{4}$$

Durch N_2, dessen Polarisationsebene um 90° gegen N_1 geneigt ist, tritt dann periodisch unterbrochenes Licht der Frequenz 2ν aus, da infolge des quadratischen Zusammenhanges zwischen

1) Des Coudres: Einige Bemerkungen über elektrische Doppelbrechung. Verh. d. Deutsch. Naturforscher und Ärzte 1893.

2) Inzwischen haben Pringsheim und Gaviola auch auf diese Möglichkeit hingewiesen, aber keine Messung der Lichtgeschwindigkeit vorgenommen. Zeitschr. f. Phys. Bd. **35**, S. 748; Zeitschr. f. Phys. Bd. **52**, S. 853; Ann. d. Phys. Bd. **81**, S. 681.

Spannung und Doppelbrechung pro Periode zwei Lichtimpulse auftreten. Die Intensität des austretenden Lichtstrahls ist gegeben durch

$$J = \frac{J_H}{2}\left(1 - \cos f' \frac{V^2}{a^2}\right). \qquad (5)$$

Der Lichtstrahl, der durch die Sendeoptik N_1, K_1, N_2 periodisch unterbrochen ist, tritt nun über den Spiegel S nach Zurücklegen des Weges s in die Kerranordnung $K_2 N_3$ ein, die erneut ein Lichtrelais darstellt, dessen Polarisator wegfallen kann, da das Licht bereits N_2 linear polarisiert verläßt. Beide Kerrzellen K_1 und K_2 liegen parallel zu der Schwingkreiskapazität des Röhrensenders. Die Zuleitungen zu den Zellen sind möglichst symmetrisch, so daß die elektrischen Felder in K_1 und K_2 in Phase sind. Die Polarisationsebene N_3 ist gegen die von N_2 wieder um 90° geneigt. Bei konstant gehaltenem Lichtwege treten nun analog dem Fizeauschen Versuch bei Variation der Frequenz Lichtminima in B auf. Vorversuche ergaben mit dieser Anordnung bei erster Ordnung einen mittleren Fehler der einzelnen Messung von ± 1 Proz. Voraussetzung dieser Methode ist, daß die Amplitude der Wechselspannung sich bei Variation der Frequenz nicht ändert und daß die Intensität der Lichtquelle während der Dauer einer Messung konstant bleibt.

Eine Steigerung der Genauigkeit bei gleichzeitiger weitgehender Unabhängigkeit von den eben erwähnten Voraussetzungen ergab sich durch folgende Änderung der optischen Anordnung. Dreht man die Kerrzelle K_2 um 90° gegen K_1, so daß die Felder in K_1 und K_2 aufeinander senkrecht stehen, so wird in K_2 einem Lichtstrahl stets Doppelbrechung des entgegengesetzten Vorzeichens erteilt wie in K_1. Trifft nun das Licht beim Durchgange durch K_2 dieselben Momentanwerte der elektrischen Wechselspannung an wie in K_1 (z. B. bei $s = 0$), so wird das Licht beim Austritt aus K_2, falls beide Zellen gleiche geometrische Ausmaße haben und an gleicher Spannung liegen, wieder linear polarisiert sein; d. h. die Doppelbrechungen kompensieren sich. Es wird also ein um 90° gegen N_1 orientierter Analysator N_3 (N_2 fällt weg) kein Licht hindurchgehen lassen. Dies ist nicht nur der Fall, wenn $s = 0$ ist, sondern auch dann, wenn das Licht zum Durchlaufen des Weges eine Zeit τ braucht, die gleich ist einem ganzzahligen Vielfachen der Dauer einer Halbperiode der anliegenden Wechselspannung. Es wird

$$\tau = \frac{s}{c} = \frac{1}{2\nu} \text{ oder allgemein } = \frac{k}{2\nu} \text{ sec.} \qquad (6)$$

In den durch (6) gekennzeichneten Fällen ist das in den Analysator N_3 eintretende Licht vollständig linear polarisiert und wird bei der angegebenen Orientierung gerade ausgelöscht. Bei allen anderen Frequenzen wird Licht durch den Analysator austreten. Das Licht fällt auf eine Mattscheibe und wird subjektiv beobachtet.

Legt man, was aus Gründen der Betriebssicherheit notwendig ist[1]), keine reine Wechselspannung, sondern eine Gleichspannung E_0, der eine Wechselspannung überlagert ist, an die Kerrzellen, so gilt die Beziehung (6) für ganzzahlige Vielfache der Vollperiode, somit

$$\tau = \frac{s}{c} = \frac{k}{\nu} \text{ sec.} \qquad (7)$$

Der aus dem Analysator austretende Lichtstrom in Abhängigkeit von ν und s ist gegeben durch die Beziehung:

$$J \sim \int_{\omega t = 0}^{\omega t = 2\pi} \left(1 - \cos \frac{f'}{a^2}\left[(E_0 + e_0 \sin \omega t)^2 - \left(E_0 + e_0 \sin \omega\left(t - \frac{ks}{c}\right)\right)^2\right]\right) dt. \qquad (8)$$

Fig. 2 zeigt den planimetrisch errechneten Verlauf dieser Funktion, wobei J in Abhängigkeit von ν bei konstantem Lichtweg aufgetragen ist. Die Kompensationsmethode ist als Nullmethode unabhängig von Schwankungen der Spannung und der Lichtquelle.

Die Messung der Lichtgeschwindigkeit besteht in der Bestimmung der Frequenz, bei der die Intensität des Lichtstrahls ein Minimum wird, wobei der Lichtweg konstant ist. Die Änderung der Frequenz erfolgt durch Änderung der Kapazität des Röhrensenders. Der Röhrensender (fremdgesteuert) hatte einen Wellenbereich von 30—100 m bei 3000 Volt Anodenspannung und $1^1/_2$ KW Leistung. Die Spannung an den Kerrzellen betrug 6000 Volt Gleichspannung und 2000 Volt effektive Wechselspannung.

Der Plattenabstand der Kerrzellen betrug 2,5 mm, die Plattenlänge 20 mm. Die Füllung bestand aus Nitrobenzol.

Frequenzmessung.

Wellenmesser scheiden für die Frequenzmessung aus, da bei ihnen im Bereich kurzer Wellen höchstens eine Genauigkeit von 0,1 ‰ erreichbar ist, und zudem die Wellenmesser selbst erst absolut in Frequenzen geeicht werden müssen. Die Frequenzmessung wurde deshalb so durchgeführt, daß die zu messende Frequenz des

1) Ilberg, Physik. Zeitschr. **29**, 670, 1928.

Röhrensenders mit einer bekannten elektrisch ausgesiebten Oberschwingung einer Stimmgabel dadurch verglichen wurde, daß die entstehende Schwebungsfrequenz, die im Bereich von 3000 bis 10000 per/sec lag, akustisch oder mit Resonanzkreisen bestimmt wurde. Die Resonanzkreise wurden vorher in Frequenzen geeicht. Die Ausgangsfrequenz der Stimmgabel betrug 2506,5 per/sec oder 2511,5 per/sec und wurde auf $1:10^5$ genau an die Zeiteinheit (Sekunden-Präz.-Pendel) angeschlossen. Die Konstanz der Stimmgabel und damit auch der Oberschwingung konnte auf $1:10^6$ gehalten werden[1]).

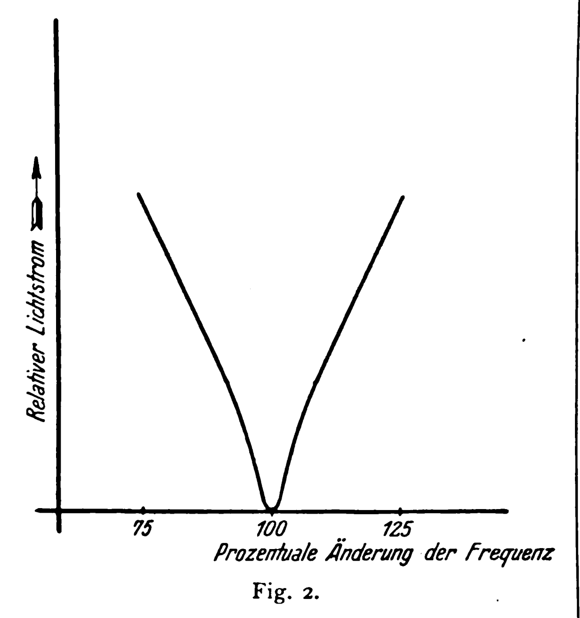


Fig. 2.

An Stelle der Oberschwingung der Stimmgabel wurden auch piezoelektrische Oszillatoren verwendet, deren Grund- oder Oberschwingung in gleicher Weise mit der Frequenz des Röhrensenders zur Interferenz gebracht wurde. Mit diesen Anordnungen war es möglich, die Frequenz des Röhrensenders auf 0,02 ‰ zu bestimmen. Erforderlichenfalls läßt sich diese Genauigkeit noch um eine Größenordnung steigern.

Bestimmung des Lichtweges.

Für die Länge des Lichtweges war maßgebend, daß der Aufbau auf einem Institutskorridor von 40 m Länge vorgenommen wurde. Dadurch war bei Verwendung eines Spiegels ein Lichtweg von 80 m erreichbar. Es gelang jedoch durch Aufstellung mehrerer Spiegel am Anfang und am Ende des Korridors und durch mehrfache Reflexion des Lichtstrahles eine maximale Entfernung von 332 m zu erreichen. Um den gesamten Lichtweg zu messen, wurde zunächst die Entfernung zwischen Kerrzellen und einem Spiegel (ca. 40 m) festgelegt und die Lage der anderen Spiegel entweder auf die Kerrzellen oder auf den eben genannten Spiegel bezogen. Da der Fußboden des 40 m langen Korridors aus Holz bestand und deshalb wenig definiert war, wurde der Lichtweg nicht auf dem Fußboden, sondern in der Höhe der Kerrzellen und der Spiegel gemessen. Dazu wurde ein Stahldraht unter definiertem Zug von 20 kg den Korridor entlang gespannt und bei elektrisch gemessener Temperatur mit Hilfe von Marken, die auf dem Draht angebracht waren, später an eine Steinbasis möglichst gleicher Länge angeschlossen. Diese Steinbasis wurde nach 4 Methoden ausgemessen, die in Tab. I zusammengestellt sind.

Es wurde deshalb ein Mittel von 41,386 ± 0,5 mm für die Steinbasis angenommen. Der Fehler der Basismessung ist also gleich ± 0,01 ‰. Die Länge des eigentlichen Lichtweges ließ sich jedoch nur mit einer Genauigkeit von 0,04 ‰ angeben, da durch den Zwischenmaßstab (Stahldraht) und die mehrfache Reflexion an den Spiegeln zusätzliche Fehler eintraten.

Tabelle. I.

Basismessung.

Eigene Messung mit 2 m Strichmaßstäben, angeschlossen an Messingnormalmeter P. T. R. 75, 1928	41,386 m	± 0,5 mm
Vermessungsamt der Stadt Leipzig mit Endmaßstäben aus Eisen	41,38705 m	± 0,083 mm
Vermessungsamt der Stadt Leipzig mit Endmaßstäben aus Holz	41,38610 m	± 0,060 mm
Vermessungsamt der Stadt Leipzig, Mittel	41,3866 m	± 0,7 mm
Stahlbandmaß P. T. R. 76, 1928	41,385 m	± 0,8 mm

Ergebnisse.

Da der Lichtweg auf 0,04 ‰, die Frequenz des Röhrensenders auf 0,02 ‰ bestimmt werden konnte, beträgt der mittlere Fehler des Resultats 0,06 ‰, d. h. ± 20 km pro/sec. In Tab. 2 sind die Zahlenwerte der einzelnen Meßreihen zusam-

1) Ausführliche Angaben über Konstanz und Frequenzmessung von Stimmgabeln: Hensel, Diss. Leipzig 1927.



Tabelle II.

Lichtweg	Ordnung	Frequenzmittel	Anzahl der Messungen	c_{Vak}
I 250,053 m ± 10 mm	3	3596570 per/sec	108	299778 km/sec
II 250,044 m ± 10 mm	4	4795700 per/sec	295	299784 km/sec
III 332,813 m ± 12 mm	4	3603130 per/sec	130	299791 km/sec
IV 332,813 m ± 12 mm	5	4503436 per/sec	117	299761 km/sec
V 332,813 m ± 12 mm	8	7205614 per/sec	125	299760 km/sec

Gesamtergebnis: 299778 km/sec ± 20 km/sec.

mengestellt. Wir geben als Mittel der 755 Messungen den Wert

$$C_0 = \underline{299\,778 \text{ km/sec} \pm 20 \text{ km/sec}}$$

an.

Als Maß für die Genauigkeit der Beobachtungen sei folgendes angegeben. Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung betrug bei erster Ordnung ± 2,5‰, entsprechend bei achter Ordnung ± 0,3‰.

Die bisher genaueste Messung der Lichtgeschwindigkeit Michelsons[1]) ergibt für c den Wert 299 796 ± 4 km/sec. Dies ist der Mittelwert aus über 3000 Einzelbeobachtungen. Unsere vorläufige Angabe der Lichtgeschwindigkeit widerspricht dem Wert Michelsons nicht, steht aber ebenso wie letztere in Widerspruch zu dem bisher (erste Veröffentlichung Michelsons) gewöhnlich angegebenen Werte von 299 865 ± 30 km/sec[1]).

1) Michelson, Astrophys. Journ. Bd. **65** S. 1, Bd. **60** S. 265.

Betreffend ausführliche Angaben über die Durchführung der Messung und ihre Fehlerquellen sei auf die demnächst erscheinende Dissertation von Mittelstaedt verwiesen. Eine Fortführung der Versuche zwecks Steigerung der Genauigkeit ist beabsichtigt. Durch Vergrößerung der Entfernung auf 3 km hoffen wir die Lichtgeschwindigkeit auf 0,01‰ genau angeben zu können. Bei dieser Fortführung soll auch die subjektive Beobachtung des Lichtminimums durch eine objektive Methode, sei es photometrisch oder photographisch, ersetzt werden.

1) Bezüglich dieser Angabe sei verwiesen auf Bauschinger, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Teil Astronomie, Bd. **2**, S. 847, oder Handbuch der Phys. von Geiger u. Scheel, Bd. **2**. In letzterem wird der Wert 299 850 km/sec angegeben.

Leipzig, Physik. Inst., Abt. für angew. Elektrizitätslehre.

(Eingegangen 30. Juli 1928.)

Über die Verwendung von Selenzellen zur Registrierung des Potentialabfalles von Quadrantelektrometern.

Von J. Scholz.

Wenn es sich darum handelt, den Spannungsabfall an Elektrometern durch Dauerregistrierung festzustellen, so gibt es bekanntlich eine ganze Reihe von Methoden, deren Anwendung in den meisten Fällen den gewünschten Erfolg sichert. So z. B. die mechanische und photographische Registrierung. Es ist auch schon öfter der Gedanke aufgetaucht, inwieweit die Möglichkeit besteht, die Eigenschaften des Selens zu benutzen, um eine Registrierung möglichst praktischer Art zu erhalten. Verfasser dieser Arbeit hat nun untersucht, ob und unter welchen Schaltungsbedingungen diese Gedanken, die auch mehrfach in Potsdam erwogen wurden, zu verwirklichen sind. Es wurde dabei eine Arbeit fortgeführt, die Voigt im Meteorologisch-magnetischen Observatorium bereits begonnen hatte. Die Versuche letztgenanntens erstrecken sich auf die Arbeit mit einer Selenzelle; aus Gründen, die weiter unten mitgeteilt werden, ging Verfasser von diesem Gedanken ab und führte die Versuche mit zwei in Differentialschaltung liegenden Selenzellen durch.

Die Schaltung.

Bekanntlich besitzt das Selen die Eigenschaft, bei Beleuchtung seinen elektrischen Widerstand zu verringern. Diese Eigenschaft wurde bei Zugrundelegung folgender Schaltung für die Registrierung nutzbar gemacht: die beiden Zellen[1]) Z_1 und Z_2 (vgl. Fig. 1) sind mit ihren Polen a_1 und b_1 mit zwei Batterien verbunden, und zwar derart, daß an ihnen das gleiche Vorzeichen der Spannung, also beispielsweise das positive, liegt. Die beiden anderen Pole der Zellen sind miteinander und mit dem einen Pol eines polarisierten Relais verbunden. Der andere Pol des Relais ist an die beiden anderen Pole der Batterien angeschlossen. Durch Zwischenschaltung geeigneter Widerstände in den Stromkreis trägt man durch Variation derselben

1) Die beiden benutzten Zellen stammen von der Firma Leppin & Masche.

Sorge, daß an einem (für diesen Zweck) an Stelle des Relais eingeschalteten Galvanometer bei Dunkelstrom kein Ausschlag erfolgt. Setzt man dann an Stelle des Galvanometers wieder

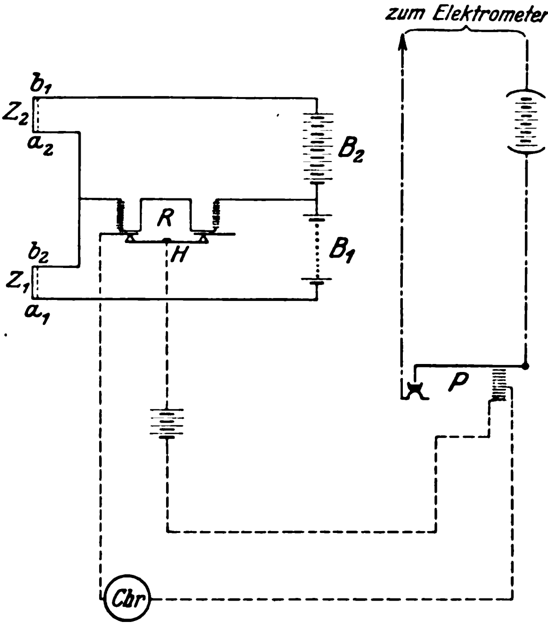


Fig. 1.

das Relais ein, so spricht dasselbe bei Dunkelstrom nicht an. Öffnet man nun die eine der beiden Zellen, und läßt auf sie einen Lichtstrahl fallen, so wird der Widerstand der Zelle kleiner, die Stromstärke größer, man erhält in der Brücke einen Strom und das Relais spricht an. Dasselbe gilt von der anderen Zelle, nur daß dann der Hammer des Relais nach der anderen Seite ausschlägt. Verbindet man dann den Pol A_1 des Relais und den Hammer hintereinander mit einer Batterie, einer Aufladevorrichtung (oder Erdung) I des Elektrometers (je nachdem ob man zunehmendes oder abnehmendes Potential am Elektrometer untersuchen will) und einem Fueßschen Chronographen, so erhält man, falls diejenige Zelle, durch deren Betätigung dieser Stromkreis geschlossen wird, anspricht, eine Neuaufladung oder Erdung des Elektrometers und gleichzeitig einen Kontakt am Chronographen.

Der Lichtzeiger wandert dann von dieser Zelle wieder fort und stellt sich so ein, daß seine Lage, der Nadelstellung folgend, gerade dem entweder ungeladenen oder mit der Spannung V_0 geladenen Elektrometer entspricht. Bringt man dann die zweite Zelle so an, daß sie bei dieser „Nullstellung" des Zeigers beleuchtet wird, so spricht, da sie dem Registrierstromkreis eine andere Richtung gibt, das Relais in einem dem vorherigen entgegengesetzten Sinne an und die Erdung bzw. Aufladung wird unterbrochen, und der Vorgang des Aufladens oder Potentialabfalles im Elektrometer setzt von neuem ein. Dieses Spiel wiederholt sich nun beständig; jedesmal, wenn die Zelle Z_1 vom Lichtzeiger getroffen wird, erfolgt Erdung oder Aufladung des Elektrometers, verbunden mit einem Kontakt am Chronographen, die beide aufgehoben werden, wenn der Widerstand der Zelle Z_2 durch Beleuchten kleiner geworden ist, und diese Zelle das Relais in entgegengesetzter Richtung zum Ansprechen bringt.

Die Eigenschaften der benutzten Selenzellen.

Einige bei Ausführung der unternommenen Versuche auftretende Schwierigkeiten mögen hier noch kurz erwähnt werden. Die Tatsache, daß die Änderung des Widerstandes von Selenzellen auch von der Temperatur abhängt, ist insofern für unsere Anordnung unwichtig, da eine gegenseitige Kompensation dieses störenden Einflusses durch die gewählte Schaltung stattfindet. Man ersieht aber auch daraus, wie wichtig

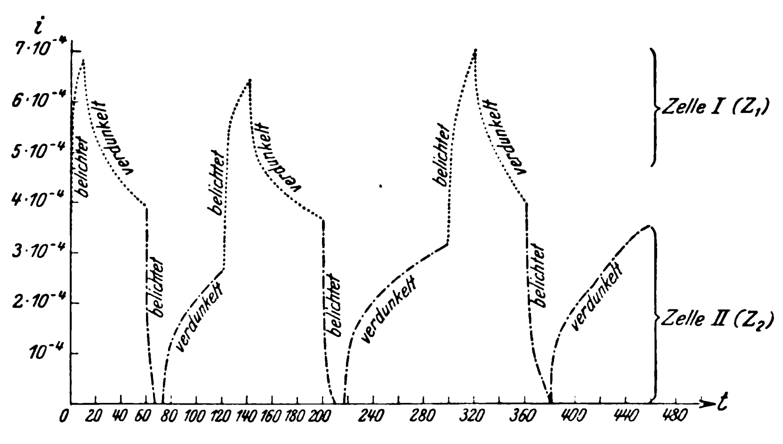


Fig. 2.

die Verwendung von zwei Zellen ist; denn mit Benutzung einer einzigen hat man die Veränderungen aus thermischen Einflüssen ebenfalls in Rechnung zu setzen.

Tatsache ist ferner, daß eine Selenzelle ihren ursprünglichen Widerstand erst nach einer bestimmten Zeit wieder erreicht. Diese Zeit hängt nun vor allem einerseits von der Beleuchtungsdauer, andererseits von der Beleuchtungsstärke ab. Außerdem tritt auch, wie bekannt, wenn eine Zelle einer zu langen Beleuchtungsdauer unterworfen wird, eine Ermüdung derselben ein; d. h. der ursprüngliche Widerstand, der Dunkelwiderstand wird nicht wieder erreicht. Und das Hauptproblem bei einer Selenzellenregistrierung, die wie im vorliegenden Falle auf Dauerbetrieb gestellt sein muß, ist die Beantwortung der Frage, wie sich die möglichen Einflüsse dieser Eigenschaften beseitigen lassen.

Nachdem die verwendeten Zellen einer Eichung auf Hell- und Dunkelstrom unterworfen waren, wurde die eine der beiden Zellen, nämlich diejenige, welche das Auslösen des Chronographenstromkreises bewirken sollte, durch Verstellung des Relais dazu gebracht, daß sie bei auffallendem Lichtstrahl sofort das Relais zum Ansprechen brachte.

Die andere Zelle wurde nun nicht genau in die Nullage des Lichtzeigers gebracht, sondern etwas weiter nach außen verschoben. Der Grund hierfür ist der, daß in der genauen Nullstellung der Lichtzeiger, wenn auch die Zelle bereits angesprochen hat, naturgemäß längere Zeit auf ihr ruhen bleibt. Dadurch würde dann aber die oben geschilderte Erscheinung eintreten; die Zelle würde viel längere Zeit benötigen, um ihren alten Widerstand zurückzuerhalten und die Möglichkeit eines Nichtansprechens der anderen Zelle ist dann stets gegeben. Dadurch, daß man nun diese Zelle etwas weiter vom Nullpunkt entfernt aufstellt, erreicht man bei der gegebenen nicht zu großen Dämpfung der Elektrometernadel, daß die Zelle auf Grund des öfteren Hinüberstreichens des Lichtzeigers anspricht; dann aber, wenn der Lichtzeiger zur Ruhe gekommen ist, unbelichtet bleibt.

Es wurde auch der Versuch unternommen, durch Anbringen von geschlitztem schwarzem Papier an den Zellen eine Feineinstellung zu ermöglichen; da hierbei aber nur ein geringer Teil derselben bestrahlt wird, so konnten keine guten Resultate erzielt werden, denn maßgebend für die Widerstandsverminderung der Zellen ist nicht nur Beleuchtungsstärke und -dauer, sondern auch die überstrahlte Fläche der Selenzelle.

Was nun die zur Verwendung kommende Beleuchtung anbetrifft, so wurde aus den angeführten Gründen eine möglichst geringe Kerzenstärke gewählt, die eben noch hinreichend ist, um einen so großen „Hellstrom" hervorzurufen, wie zum Ansprechen des Relais erforderlich ist. Es wurde eine 4-Volt-Einfadenlampe zur Verwendung gebracht und mit derselben durch Zwischenschaltung einer Linse in das Strahlenbündel gute und brauchbare Resultate erzielt. Es trat keine zeitweilige Ermüdung der Zellen ein, was man sonst wohl beobachten konnte.

Es möge hier ein Diagramm folgen, das die Stromstärke i in Abhängigkeit von der Zeit t bei wechselseitiger Beleuchtung beider Zellen

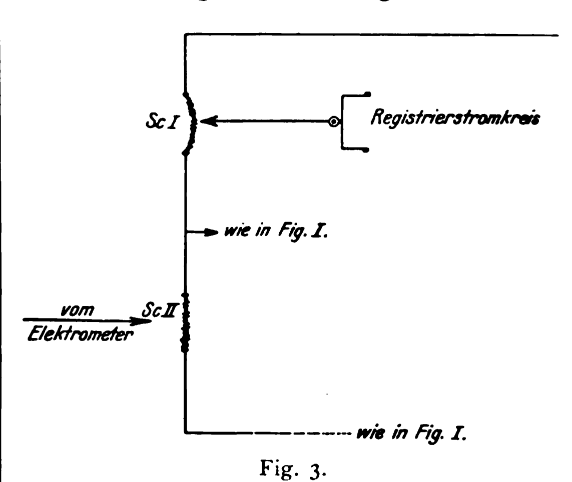


Fig. 3.

angibt. Zuerst wurde Zelle I beleuchtet, was ein sofortiges Ansteigen der Stromstärke bis ca. $6{,}8 \cdot 10^{-4}$ Amp. hervorrief. (An I lag dabei 30, an II 18 Volt.) Bei Verdunkelung ging i bis auf ungefähr $3{,}9 \cdot 10^{-4}$ Amp. zurück um bei Beleuchtung von Zelle II noch kleiner zu werden und schließlich den Wert $i = 0$ zu erreichen. Bei Verdunkelung ging i auf $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ Amp. zurück. Dieser Versuch wurde fünfmal wiederholt, um ein Charakteristikum derjenigen Stromstärke zu erhalten, bei welcher jeweils die Beleuchtung einsetzte. Die Tatsache, daß als Anfangspunkt für i nicht 0, sondern $2{,}6 \cdot 10^{-4}$ gewählt wurde, hat ihren Grund darin, daß kein für diesen Zweck brauchbares Meßgerät zur Verfügung stand. Das Resultat dieser Versuche ist folgendes:

Bel. von Zelle I. i_0 (10^{-4} Amp.)	Bel. von Zelle II. i_0 (10^{-4} Amp.)
2,64	3,92
2,72	3,68
3,24	4,0
3,12	3,6
3,2	3,92
Also im Mittel	
2,98	3,82

Das bedeutet also, daß für eine zeitliche Differenz von 1 Min. die Anfangswerte von i_0, wenn die Beleuchtung einsetzte, im Mittel um $\Delta i = 8,4 \cdot 10^{-5}$ Amp. auseinanderlagen (wobei sich alle diese Werte auf eine 4 kerzige Einfadenlampe, die mit entsprechender Kondensatorlinse in 2 m Entfernung aufgestellt war, beziehen). Je länger nun diese Beleuchtung dauert, um so größer wird naturgemäß auch die Differenz Δi. Man hat also darauf zu achten, daß die Beleuchtungsdauer gerade so groß gewählt wird, daß sie hinreicht, um das Relais zum Ansprechen zu bringen. Naturgemäß erfordert das Arbeiten mit Selenzellen aus allen diesen Erwägungen heraus einen bedeutend größeren einmaligen Aufwand an Vorbereitungen durch Abstimmen der Zellen usw. als eine photographische Registrierung; hat aber dann den großen Vorteil, daß, wenn sie einmal erst in Betrieb ist, sie auch in ununterbrochener Folge die Registrierung an einer Uhr, ähnlich denen bei Windregistrierungen verwendeten, an Stelle des Chronographen gestattet.

Erwähnt werden möge übrigens auch eine andere Schaltung, welche ebenfalls zur Ausführung gelangte und sich sehr gut bewährt hat:

In den Registrierstromkreis wurde noch ein Widerstand und eine zweite 4-Volt-Einfadenlampe eingeschaltet. Durch den Widerstand wurde die Stromzuführung reguliert, um ein frühzeitiges Durchbrennen der Lampe zu verhindern. Die Lampe selbst wurde nun so aufgestellt, daß ihr Lichtschein auf die, den Registrierstromkreis öffnende, Selenzelle direkt traf. Letztere wurde zu diesem Zwecke in eine dem Elektrometer abgewandte Stellung gebracht.

Der große Vorteil den diese Schaltungsanordnung mit sich brachte, war der, daß jetzt das Relais auf eine bedeutend größere Empfindlichkeit eingestellt werden konnte. Außerdem läßt sich die Zeitdauer der Kontakte selber, da ja immerhin eine gewisse Zeit zum Aufladen erforderlich ist, durch Entfernung oder Annäherung der Lampe an die Zelle bequem einregulieren. Da aber die Zellen in Differentialschaltung liegen bleiben, so wird auch bei dieser Schaltung ein etwaiger Temperatureinfluß kompensiert. Es möge hier noch eine kurze Skizze der Schaltung folgen.

Für große zeitliche Schwankungen, die im Verhältnis 1 : 100 stehen, ist letztgenannte Schaltung unbedingt vorzuziehen und hat sich bei den Versuchen im Meteorologisch-magnetischen Observatorium Potsdam sehr gut bewährt.

(Eingegangen 12. Juli 1928.)

Feststellungen zur Geschichte der Entdeckung und Erforschung der kosmischen Höhenstrahlung (Ultragammastrahlung).

Von K. Bergwitz, V. F. Hess, W. Kolhörster und E. Schweidler.

Zur Abwehr sehen wir uns veranlaßt folgendes aus dem vorläufigen Bericht von R. A. Millikan und G. H. Cameron (Nature **121**, S. 19—26, Supplement, 7. Januar 1928) richtig zu stellen. Die beanstandeten Punkte dürften sich im wesentlichen auf die „additions" beziehen, welche die beiden Autoren in die von R. A. Millikan in Leeds am 2. September 1927 gehaltene „Public Lecture" eingefügt haben.

I. Zur Entdeckungsgeschichte der Höhenstrahlung (Ultragammastrahlung).

Millikan und Cameron legen zuerst dar, daß die Entdeckung der Höhenstrahlung durch Arbeiten verschiedener Autoren vorbereitet, schließlich so zustande gekommen sei, daß man gar nicht angeben könne, zu welchem Zeitpunkte man zur Erkenntnis der Existenz dieser Strahlung gekommen sei.

Demgegenüber wird festgestellt, daß bis zum Jahre 1912 niemand auf Grund von Experimenten die Existenz einer außerterrestrischen Strahlung von hohem Durchdringungsvermögen vermuten oder feststellen konnte. Erst V. F. Hess (Physik. Zeitschr. **13**, 1090, 1912 und Wien. Ber. IIa, **121**, 2001, 1912) fand bei einer Ballonfahrt am 7. August 1912 in drei Apparaten gleichzeitig eine starke Zunahme der Ionisation von 3000 m an. In der erreichten Maximalhöhe von 5400 m war die gesamte Ionisation schon etwa dreimal so groß, wie am Erdboden. Da Hess schon bei seinen früheren acht Ballonfahrten schwache Zunahme der Ionisation mit der Höhe beobachtet hatte, schloß er, „daß eine Strahlung von sehr hoher Durchdringungsfähigkeit von oben in unsere Atmosphäre eindringt und noch in deren untersten Schichten einen Teil der in geschlossenen Gefäßen beobachteten Ionisation erzeugt . . .", ferner: „Da im Ballon weder bei Nacht noch bei einer Sonnenfinsternis eine Verringerung der Strahlung gefunden wurde, so kann man wohl nicht die Sonne als direkte Quelle dieser Strahlung ansehen."

W. Kolhörster (Abh. der Naturf. Ges. Halle Neue Folge, Nr. 4, 1914. Physik. Zeitschr. **14**, 1066, 1153, 1913, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 719, 1914) bestätigte auf seinen mit abermals verbesserter Apparatur unternommenen fünf Hochfahrten das Ergebnis von Hess und führte im Jahre 1914 die Messungen bis 9300 m durch.

Aus rund 1000 Einzelmessungen bestimmte er den Absorptionskoeffizienten der Strahlung und ihren Bodenwert. Er deutete dessen zeitliche und örtliche Gleichheit sowie die große Härte der Strahlung als Argumente für ihren kosmischen Ursprung.

Wenn dagegen Millikan und Cameron schreiben: „The next important step was taken by the Swiss physicist Gockel (Physik. Zeitschr. **11**, 280, 1910) who in 1910 first took an enclosed electroscope in a balloon flight to a hight of 4500 metres and found contrary to expectation that the radiation was higher at this altitude than at the surface", so entspricht dies keineswegs den Tatsachen.

Zum Beweis genügt es, Gockels Ergebnisse nochmals anzuführen: Gockel hat bei seiner ersten Ballonfahrt (l. c.) ein Wulfsches Elektrometer mit aufgesetzter, angeblich luftdichter Ionisationskammer benutzt. Er erhielt[1]) folgende Werte der Ionisation: vor dem Aufstiege 23,8 J, in 2500 m Höhe 16,2 J (zeitweilig nur 9 J), in 4000 bis 4500 m Höhe 15,8 J, also einen erheblich niedrigeren Wert als am Erdboden. Er schließt daraus, daß zwar eine Verminderung der durchdringenden Strahlung mit der Höhe eintritt, aber „lange nicht in dem Maße, als man erwarten könnte, wenn die Strahlung der Hauptsache nach vom Erdboden ausgeht". Gockel erwähnt auch, daß bei dichtem Nebel, gleich nach dem Aufstiege die Ionisation zeitweilig auf 72 J anstieg, was zweifellos auf Undichte seines Apparates mit zeitweiligem Versagen der Isolation deutet und neben den oben angeführten Schwankungen der Ionisation seine Ergebnisse unsicher erscheinen läßt.

Auch auf seinen zwei weiteren, von Millikan nicht zitierten Ballonfahrten (Physik. Zeitschr. **12**, 595, 1911) hat Gockel keine wirkliche Erhöhung der Ionisation mit zunehmender Erhebung über dem Erdboden (verglichen mit den Werten am Boden) feststellen können; bei der zweiten Fahrt (15. Okt. 1910) fand er vor dem Aufstiege bei Zürich 11,4 J, in 800 bis 1100 m über Zürich 8,9 J, in 1700 m 7,1 J, in 1900 m 7,3 bis 8,3 J, in 2800 m 8,6 J, nach der Landung auf einer Wiese 8,4 J, während die Bodenwerte in Freiburg (Garten) an den Tagen vor und nach der Fahrt 8,9 J betragen hatten.

Bei der dritten Fahrt (2. April 1911) fand Gockel mit demselben Apparat, der jedoch inzwischen nach einer Umänderung vermehrte Restionisation aufwies, folgende Werte: vor dem Aufstieg in Bern 14,7 J, während langsamen Aufsteigens bis 1600 m 12,8 J, in 1900 m 14,0 J und in 2500 m 11,3 J. An den Tagen vor und nach der Fahrt hatte derselbe Apparat in einem Garten in Freiburg die Werte 12,8 J und 11,6 J geliefert.

Bei den zuletzt erwähnten zwei Fahrten benützte Gockel einen dünnwandigen Wulfschen Strahlungsapparat, der durch ein Kapillarrohr mit der Außenluft kommunizierte. Die Angaben eines Wulfschen Elektrometers mit aufgesetzter Ionisierungskammer teilt er nicht mit, da er bemerkte, daß diese während der Fahrt undicht geworden war.

Zusammenfassend sagt Gockel selbst von seinen zwei letzten Fahrten (1911), daß „die Abnahme der Strahlung mit der Höhe noch unbedeutender ist, als früher gefunden".

Erst wenn man die Ergebnisse von Gockels 2. und 3. Fahrt (bis 2800 bzw. 2500 m) auf den Luftdruck am Aufstiegsorte umrechnet (entsprechend dem Verhältnisse der Drucke am Boden zu denen in der Maximalhöhe von 720 : 500), würde sich für die Höhe 2800 m bzw. 2500 m eine Gesamtionisation von 13,0 J gegen 11,4 J am Boden vor dem Aufstiege bei der 2. Fahrt, und von 16,2 J gegen 14,7 J bei der 3. Fahrt, also eine geringe Erhöhung ergeben (die Werte am Boden nach der Landung sind wegen des Eindringens von Außenluft in den undichten Apparat während des Abstieges weniger zum Vergleiche geeignet).

Weil aber diese Reduktion der Werte auf Normaldruck seinerzeit zu unsicher erschien, hat Gockel selbst sie auch gar nicht angeführt. Er sagt nur: es würde also aus diesen Resultaten folgen, daß sogar eine schwache Zunahme der Strahlung mit der Höhe stattfindet.

II. Zu den Pilotaufstiegen von Millikan und Bowen.

Millikan und Cameron schreiben von ihren Pilotaufstiegen: „These flights checked the results of the European observers ..." „these very high flights were, and are now especially significant. They place very certain and very definite upper limits upon the absorption coefficient."

Demgegenüber braucht nur auf die früheren Einwendungen von V. F. Hess (Physik. Zeitschr. **27**, 159, 1926) und W. Kolhörster (Zeitschr. f. Phys. **28**, 404, 1926) verwiesen zu werden. Beide haben unwidersprochen dargetan, daß der einzige von Millikan ausgewertete Aufstieg in bezug auf numerische Angaben völlig unzuverlässig ist.

1) Die erwähnten Zahlenwerte sind aus Gockels zitierten Arbeiten, in denen die Angaben noch in Volt pro Stunde gegeben sind, mit Benutzung des Wertes des Elementarquantums und der Kapazität auf Ionisationseinheiten umgerechnet. J bedeutet Ionenpaare pro ccm und sec.

III. Zu den Absorptionskoeffizienten.

Millikan und Cameron behaupten, Kolhörster habe geschrieben „that the absorption coefficient is invariant", Kolhörster sagt aber ausdrücklich (Zeitschr. f. Phys. **36**, 147, 1926) „zumal die Inhomogenität der Strahlung von vornherein anzunehmen ist, sind doch bisher keine Substanzen bekannt, die homogene γ-Strahlen aussenden".

Im übrigen sei auf die unwidersprochenen Ausführungen von Kolhörster in den Ann. d. Phys. **80**, 621, 1926 u. Zeitschr. f. Phys. **36**, 147, 1926 verwiesen.

Da Millikan und Cameron zudem erklären, „as to the mean absorption coefficients, Kolhörster and ourselves are now in reasonable agreement", so dürften die zitierten Ausführungen Kolhörsters hiermit anerkannt sein.

IV. Zur Diskussion über die Existenz der Höhenstrahlung.

Wenn weiter Millikan erwähnt, daß bis 1925 in gewissen Kreisen die Existenz der Höhenstrahlung bezweifelt worden ist, — er nennt sich selbst nicht — wohl aber G. Hoffmann und W. F. G. Swann — so ist dem zu entgegnen, daß Hoffmann glaubte, daß die Intensität der Höhenstrahlung im Meeresniveau erheblich kleiner sei, als andere Beobachter gefunden hatten. Inzwischen hat sich aber Hoffmann den Anschauungen von Hess und Kolhörster angeschlossen, während Swanns kurze Mitteilungen über seine Beobachtungen an Hochdruckionisationsgefäßen auf dem Gipfel des Pikes Peak (Phys. Rev. [II] **29**, 372, 1927, Journ. Franklin Inst. **205**, 767, 1928) eine kritische Beurteilung noch nicht zu lassen.

Millikan und Cameron sagen ferner: „... up to this time (1925) the increasing rate of discharge was the sole phenomenon, upon which the hypothesis of rays of cosmic origin rested."

W. Kolhörster hatte aber bereits 1914 (Abh. d. Natur. Ges. Halle N. F. Nr. 4, Halle a. S. 1914) a) die außerordentliche Härte der Strahlung; b) die an ganz verschiedenen Orten zu verschiedener Zeit nahezu gleich gefundenen Differenzen der Ionisierungsstärke über und unter Wasser und c) von 1923 an (Berl. Ber. **34**, 366, 1923) die Messungen der täglichen Periode der Strahlung als weitere Phänomene im Sinne einer kosmischen Strahlung gedeutet, entsprechend der Hypothese von Hess und vor allem von Nernst.

V. Reststrahlung der Gefäße und Bodenwert der Höhenstrahlung.

Bezüglich der Reststrahlung behaupten Millikan und Cameron: „This was the first time the zero of an electroscope had been definitely determined ..." und weiter „... no observers exept ourselves have thus been able to determinate the zeros of their instruments."

Demgegenüber steht fest, daß K. Bergwitz (Elster und Geitel Festschrift, Braunschweig 1915) bereits 10 Jahre vorher die Reststrahlung in 400 m dickem inaktiven Steinsalz gemessen hat. Auch die Senkversuche unter Wasser von Kolhörster (Berl. Ber. **34**, 366, 1923) und anderen Beobachtern zeigen an den Ergebnissen, daß auf diese Weise ebenfalls die Reststrahlung genügend genau zu bestimmen ist.

Zu der Behauptung „all values of ionisations except ours must be regarded as estimates rather than measurements" wird es genügen, darauf hinzuweisen, daß bereits 1914 W. Kolhörster (Abh. d. Naturf. Ges. Halle, Neue Folge, Nr. 4, Halle 1914) aus seinen Ballonversuchen den Bodenwert richtig zu 1,5 J bestimmte, während Millikan und Cameron erst jetzt, also 13 Jahre später, 1,4—1,6 J finden. Kolhörster leitete seinen Wert aus Ionisierungsstärken bis 80 J ab, während Millikan und Cameron im Höchstfalle (am Gem-lake) nur 34 J zur Verfügung hatten.

VI. Theoretische Überlegungen von Millikan und Cameron.

Zu den theoretischen Überlegungen der beiden Autoren über die Herkunft dieser Strahlen aus dem interstellaren Weltraum sei noch bemerkt, daß schon E. Schweidler (Elster und Geitel Festschrift, Braunschweig 1915) im Jahre 1915 fand, daß die Annahme einer im Kosmos gleichmäßig verteilten strahlenden Materie den Beobachtungen noch am ehesten anpaßbar sei, und daß die grundlegenden Annahmen und Betrachtungen von Nernst (Das Weltgebäude im Lichte der neueren Forschung, Springer Berlin 1921) bereits aus dem Jahre 1921 stammen. Die Ergebnisse dieser beiden Autoren werden von Millikan und Cameron durchwegs benutzt, aber nirgends zitiert.

Dagegen wird die Hypothese von O. W. Richardson über den solaren Ursprung der durchdringenden Strahlung (Nature **73**, 583; **74**, 55, 1906) zitiert, obwohl sie bereits von K. Kurz (Physik. Zeitschr. **10**, 836, 1909) als rechnerisch unhaltbar erwiesen und für das Problem der Höhenstrahlung längst als bedeutungslos erkannt worden ist.

(Eingegangen 9. August 1928).

Über die Lebensdauer angeregter *Hg*-Atome.

Von T. Asada.

(Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.)

In einer Untersuchung, über die vor kurzem hier berichtet wurde[1]), wurde gezeigt, daß man die von Füchtbauer entdeckte „stufenweise“ Fluoreszenz des *Hg*-Dampfes auch in einem weit von der erregenden *Hg*-Lampe entfernten, stickstoffhaltigen Resonanzgefäß intensiv erhalten und näher untersuchen kann. Mittels einer geeignet aufgestellten rotierenden Scheibe (vgl. Fig. 1 u. 2, die mit Fig. 2 u. 3 der zitierten Arbeit übereinstimmen), ließ sich die große Lebensdauer der metastabilen *Hg*-Atome im $^3P_0$-Zustand, die aus den zunächst angeregten $^3P_1$-Atomen durch Zusammenstöße mit Stickstoffmolekülen entstehen, leicht nachweisen. Im folgenden soll über einige Ergänzungen und Fortführungen dieser Versuche kurz berichtet werden, da die Arbeit aus äußeren Gründen vorläufig unterbrochen werden muß.

Bei den beschriebenen Versuchen machte sich die große Lebensdauer der metastabilen *Hg*-Atome schon dadurch bemerkbar, daß die Helligheit der sichtbaren Fluoreszenz nicht momentan bei der Beleuchtung mit dem Licht der *Hg*-Lampe einsetzt, sondern allmählich anklingt. Man erkennt dies, indem man durch die rotierende Scheibe hindurch beleuchtet (vgl. Fig. 1 u. 2), dabei jedoch nur Fenster *A* offen, *B* dagegen geschlossen läßt und nicht durch die rotierende Scheibe (Öffnung *C*), sondern seitlich davon durch ein Grünfilter hindurch beobachtet, das nur die Linie 5461 durchläßt[1]). Dann zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit der Helligkeit der Fluoreszenz von der Drehgeschwindigkeit der Scheibe: je langsamer sie rotiert, desto heller

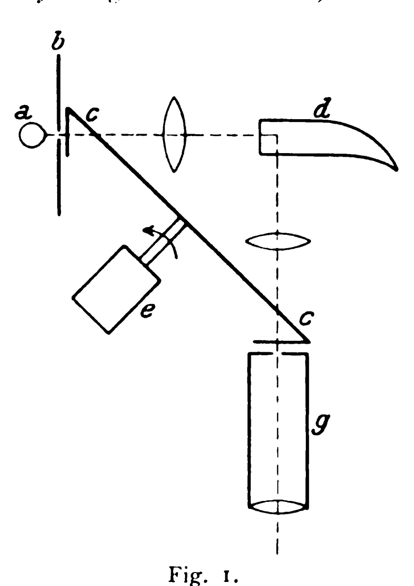


Fig. 1.

Versuchsanordnung.

a *Hg*-Lampe *d* Fluoreszenzgefäß
b Blende *e* Motor
c—c rotierende Scheibe *g* Spektrograph.

ist die Fluoreszenz. Da nämlich vor Einsetzen der Beleuchtung keine angeregten Atome vorhanden sind und durch die Beleuchtung zunächst nur $^3P_1$-Atome entstehen, bilden sich die metastabilen $^3P_0$-Atome, die in erster Linie die sichtbare Fluoreszenz liefern[2]), erst allmählich durch die Zusammenstöße mit Stickstoffmolekülen. Durch photographisch-photometrische Messungen der Fluoreszenzhelligkeit als Funktion der Tourenzahl kann man das Anklingen quantitativ verfolgen und findet so bei einigen mm Stickstoffdruck etwa 1/1000 sec. als „mittlere Lebensdauer der $^3P_0$-Atome“ (vgl. Definition Anm. 1 der nebenstehenden Spalte).

Allerdings hängt die Größe der Lebensdauer unter anderem von der Reinheit des Stickstoffes ab,

1) T. Asada, R. Ladenburg u. W. Tietze, Physik. Zeitschr. **29**, 549, 1928; diese Arbeit wurde versehentlich ohne unsere Korrektur abgedruckt. Die dort in Anm. 1 genannte Arbeit von Zemansky gehört in Anm. 3; S. 550, Zeile 9 oberhalb Fig. 2 fehlt das Wort „eines“ (vor den Worten: weit von der erregenden *Hg*-Lampe); ferner sollte es auf S. 330 Zeile 9 unterhalb Fig. 2 von oben heißen: nach einer Dunkelzeit von etwa 10^{-3} sec. (statt „10^{-4} sec.“). Schließlich ist zur Vermeidung von Mißverständnissen zu betonen, daß nach der dort beschriebenen Methode nicht die „mittlere Lebensdauer“ des einzelnen Atoms gemessen wird, wie sie in der Radioaktivität definiert wird, sondern die Zeit, in der die Konzentration der angeregten Atome auf einen bestimmten Bruchteil, z. B. auf den e. Teil gesunken ist. Diese beiden Zeiten können voneinander verschieden sein, wenn — wie im vorliegenden Fall (vgl. den letzten Teil dieser Mitteilung) — die angeregten Atome zum Teil z. B. durch Stöße in einen Nachbarzustand und aus diesem wieder in den untersuchten Zustand zurückgebracht werden. In diesem Sinne ist in der früheren und in der vorliegenden Mitteilung das Wort „Lebensdauer“ gemeint, und es soll einer späteren ausführlicheren Arbeit vorbehalten bleiben, die einzelnen Bildungs- und Zerstörungsprozesse der angeregten *Hg*-Atome theoretisch zu diskutieren und den Zusammenhang der gemessenen Werte mit der eigentlichen Lebensdauer des einzelnen Atoms zu untersuchen (Anmerkung von R. Ladenburg).

1) Das Spektrum der ungefilterten Fluoreszenz zeigt nur die Bogenlinien, besonders stark 5461, 4358, 4047, 3663/55/50 usw. und 2537. Bandenfluoreszenz ist unter den benutzten Bedingungen (*Hg*-Dampf von Zimmertemperatur mit reinem Stickstoff von einigen Millimetern Druck) nicht oder nur spurenweise vorhanden.

2) Auch der instabile Zustand $^3P_1$ wird durch sichtbares Licht (4358) zur Fluoreszenz angeregt, deren Intensität ist jedoch sehr schwach.

da bekanntlich Verunreinigungen durch Wasserstoff usw. die angeregten Atome äußerst stark vernichten[1]). Obiger Wert wurde mit frischem aus Natriumazid hergestellten Stickstoff erhalten. Wenn dieser ganz reine Stickstoff einige Tage in der Fluoreszenzkammer unter *Hg*-Verschluß aufbewahrt wird, so beobachtet man häufig im ersten Augenblick bei Bestrahlung mit der *Hg*-Lampe gar keine oder sehr schwache Fluoreszenz; aber nach einigen Sekunden oder Minuten tritt die Fluoreszenz allmählich „von selbst" in voller Stärke auf[2]). Offenbar sind im Laufe der Zeit Verunreinigungen freigeworden, die bei

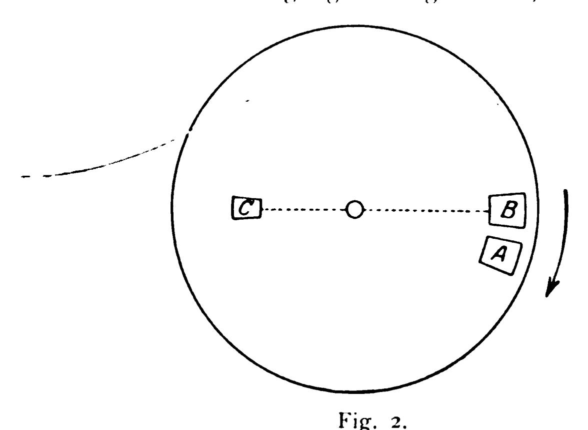


Fig. 2.
Rotierende Scheibe.
A Offen
B Mit Violettfilter oder geschlossen
C Mit Grünfilter oder offen.

Belichtung durch Zusammenstöße mit angeregten *Hg*-Atomen wieder vernichtet werden. Bei älterem Stickstoff findet man bisweilen, selbst nach längerer Reinigung durch Vorbestrahlung, eine kürzere Lebensdauer als bei frischem Stickstoff.

Ferner muß betont werden, daß die durch das oben beschriebene Anklingen gemessene Lebensdauer außer durch Zusammenstöße (und evtl. spontane Emissionen der „verbotenen Linie" 2656) auch durch die Einstrahlung selbst begrenzt wird; denn das die Fluoreszenz erregende violette Licht vernichtet ja den $^3P_0$-Zustand. Wir wollen im folgenden diese Lebensdauer „in Hellzeit" von der „in Dunkelzeit" unterscheiden. Die in der ersten oben zitierten Mitteilung durch das Fenster *C* der rotierenden Scheibe hindurch gemessene Lebensdauer ist offenbar ein Mittelwert dieser beiden Arten und hängt deshalb auch von der Intensität des erregenden Lichtes ab.

Eine von dieser Komplikation unabhängige Messung der Lebensdauer in „Dunkelzeit" ist auf folgende Weise möglich: Wenn man in der früher beschriebenen Anordnung (vgl. Fig. 1 u. 2) Fenster *B* verschließt und durch das unverschlossene Fenster *C* hindurch bei rotierender Scheibe mit Quarzoptik photographiert, so beobachtet man ein gut meßbares Nachleuchten der Linie 2537, und zwar war die Linie bei unsrer Anordnung und bei ca. 14 mm Stickstoff noch nach $^1/_{100}$ sec. Dunkelzeit in 4 Min. photographierbar[1]). Dieses Nachleuchten entsteht offenbar dadurch, daß (entsprechend den Versuchen von Cario und Franck[2]) und den Überlegungen von Foote[3])) beim Zusammenstoß energiereicher Stickstoffmoleküle mit $^3P_0$-Atomen wieder der $^3P_1$-Zustand entsteht, der entweder durch spontane Emission der Linie 2537 zerfällt, oder durch Zusammenstöße mit Stickstoff wieder in den $^3P_0$-Zustand übergeht: so wird der instabile Zustand $^3P_1$ vom metastabilen Zustand $^3P_0$ aus immer wieder nachgefüllt und erscheint ähnlich langlebig wie dieser. Und zwar ist bei Zimmertemperatur, wie Foote berechnet hat[4]), etwa jeder 6000. Zusammenstoß mit Stickstoff genügend energiereich.

Daß für diesen gegenseitigen Ausgleich der beiden Zustände häufige Zusammenstöße mit Stickstoffmolekülen erforderlich sind, ersieht man daraus, daß bei 0,4 mm Stickstoffdruck — wo die sichtbare Fluoreszenz noch schwach wahrnehmbar ist, — bereits nach einer Dunkelzeit von $5 \cdot 10^{-5}$ sec. kein Nachleuchten mehr nachweisbar war (bei gleicher Expositionszeit wie oben). Bei diesem geringen Druck ist zwar die Lebensdauer der $^3P_0$-Atome relativ groß, ihre Zahl

1) Vgl. die diesbezüglichen Arbeiten von Franck, Stuart, Wood, Foote usw.

2) Wenn die Fluoreszenzkammer aus Glas mit aufgekitteten Quarzfenstern besteht, so ist der oben beschriebene Effekt sehr deutlich; er tritt aber auch häufig ein, wenn die Kammer ganz aus Quarz mit aufgeschmolzenen Platten besteht und mit der übrigen Apparatur mittelst einer Quarz-Glas-Verbindung verschmolzen und vor dem Versuch gut ausgeheizt ist.

1) Bei diesen Messungen wurde eine einfache Kamera mit Quarzlinse verwendet — doch überzeugte man sich mit einem lichtstarken Spektrographen, daß nur die Linie 2537 nachleuchtet. Dieses Nachleuchten und ähnliche Nachleuchtdauern der Linie 2537 hat indessen auch G. Ramsauer mit einer etwas anderen Anordnung beobachtet (Naturw. **16**, 576, 1928). Das von Zemansky in reinem *Hg*-Dampf höherer Temperatur beobachtete Nachleuchten (s. Phys. Rev. **29**, 513, 1927) wird von ihm selbst auf die wiederholte Reabsorption der Linie 2537 in dem relativ dichten Dampf zurückgeführt („imprisoned radiation"). Zur quantitativen Erklärung reicht diese Ursache jedoch nicht aus. Da Zusammenstöße mit unerregten *Hg*-Atomen ebenso wie mit Stickstoffmolekülen die wechselseitige Umwandlung hervorrufen, muß man vermutlich auch diesen Prozeß (ebenso wie bei den hier beschriebenen Versuchen) bei der Deutung von Zemanskys Beobachtungen in Rechnung setzen.

2) G. Cario u. J. Franck, Zeitschr. f. Phys. **37**, 619, 1926.

3) P. Foote, Phys. Rev. **30**, 288, 1927.

4) P. Foote, Phys. Rev. **30**, 288, 1927.



jedoch unter unsern Versuchsbedingungen noch klein; infolgedessen ist die dem Druck und der Zahl der $^3P_0$-Atome proportionale Nachfüllung des $^3P_1$-Zustandes sehr gering und entsprechend auch die Intensität des Nachleuchtens.

Über quantitative Messungen der Lebensdauer unter verschiedenen äußeren Bedingungen hofft Verf. später berichten zu können.

Zum Schluß sei Herrn Prof. Dr. R. Ladenburg für seine Anregung und Ratschläge, sowie dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik für die Überlassung eines lichtstarken Spektrographen herzlichst gedankt.

(Eingegangen 13. August 1928.)

BESPRECHUNGEN.

P. W. Bridgman, The Logic of modern Physics." XIV. u. 228 pp. New York, The Macmillan Company. 1927.

Verf. ist ein Mathematiker und theoretischer Physiker, der den Weg zur Realität sucht, und ihn in der Tat ernsthaft betreten hat. Der wichtigste Gesichtspunkt seiner Arbeit liegt in dem, was er den „operational point of view" (31) nennt. Alle unsere Wissenschaft muß unausweichlich relativ zu den gewählten Operationen sein (25). Nur die Operationen definieren die Begriffe in der Physik. „Diese Auffassung bedeutet eine weitreichende Veränderung in unseren Denkgewohnheiten, dahin, daß wir uns nicht länger erlauben als Werkzeuge unseres Denkens Begriffe zu gebrauchen, von denen wir keine entsprechende Rechenschaft geben können in terms of operations". (31). Mit diesem Gesichtspunkt, der das ganze Buch durchzieht, gewinnt Verf. die Mittel zu einer vielfach tiefgehenden und sehr beachtenswerten Kritik der Grundbegriffe der heutigen Physik. Das schöne Programm dieses Gedankens wird jedoch beengt durch einen sogleich anfangs verkündeten dogmatischen Panempirismus, der sich einer vertiefteren Einsicht in die Natur der physikalischen Operationen selbst in den Weg stellt. Verf. bringt in den ersten zwei Kapiteln allgemeine Betrachtungen, geht dann im Hauptteil des Buches (Kap. 3) zu einer Untersuchung verschiedener Grundbegriffe der Physik über und gibt im (4.) Schlußkapitel wieder allgemeinere Überlegungen. Die scharfsinnigen Analysen der physikalischen Begriffe führen vielfach zu sehr interessanten Resultaten, die auch auf die praktische Forschung sehr anregend wirken können.

Die fundamentalen Operationen sind nach Verf. durch die Natur bestimmt (29). Erfahrung ist nur durch Erfahrung bestimmt (3) — schon rein psychologisch eine Unmöglichkeit. Weitere wichtige Grundsätze der Betrachtungsweise des Verf. sind folgende: alle Erfahrung ist umgeben von einer „penumbra of uncertainty" (33). Diese Auffassungen führen in Verbindung mit dem obengenannten Empirismus zu einem tiefen Skeptizismus bezüglich der Möglichkeit einheitlicher Naturerklärung, wofür sich Verf. selbst wieder auf die Erfahrung beruft (43), was ja wohl einen Zirkel involviert. Verf. spezialisiert nun seinen Grundgedanken dahin, daß, wenn die zu Begriffen gehörenden Operationen verschieden sind, dann sind auch die Begriffe verschieden. Dies führt zu interessanten kritischen Konsequenzen, z. B. bezüglich der Zeit (6), der Länge (16), der Masse des Elektrons (108) u. a. m. Natürlich hat diese Auffassung eine völlige Zersplitterung der Physik in unzusammenhängende Teile zur Folge. Da der operational point of view offenbar ein unvermeidlicher ist, so kann hier nur eine vertieftere Einsicht in den inneren Zusammenhang der physikalischen Operationen selbst helfen, wie ich ihn („Grundl. d. Phys." 2. Aufl., S. 278) als Wohlordnung oder Hierarchie der experimentellen Begriffe bezeichnet, und in „Das Experiment" 1928 im einzelnen ausgeführt habe. Ein weiteres wichtiges Prinzip des Verf. ist die häufige Aufzeigung von Fällen, wo ein „vicious circle" auftritt (z. B. 78, 104 u. a.). Eine vollständige Trennung des Operativen vom Logischen ist allerdings Verf. nicht gelungen. Er bezeichnet gelegentlich als experimentelle Beobachtung, was offenbar reine Theorie ist (so z. B. S. 122 eine Aussage über einen unendlich großen Körper, auch nimmt er stellenweise manche Formulierungen der Relativitätstheorie ohne weiteres als direkte Realität an, z. B. S. 139). Andererseits gelingt ihm manche sehr beachtenswerte kritische Einsicht. So verneint er (132) dem elektrischen Feld die physische Realität, zeigt tiefliegende Schwierigkeiten, z. B. in der Relativitätstheorie (S. 72, 73, 167, 171, 176, 177, 191), besonders in dem Begriff der Uhr. „In the absence of any method of specifying the details of construction of at least one clock, relativity becomes a purely academic affair, unless there exist in nature concrete things which may serve as clocks." „If the atom is not a clock, where in nature can one be found? But in the last few years we have come to appreciate the exceedingly complicated quantum structure of an atom, and Einsteins Thesis loses much of its instinctive appeal." (177).

Allgemein kann gesagt werden, daß es ein sehr glücklicher Griff des Verf. ist, die Begriffe der Physik hinsichtlich ihrer operativen Äquivalente zu untersuchen. Er führt so wieder auf das Reale zurück, wie dies ja schon Mach versuchte, dem es aber nicht im eigentlichen Sinne gelang, da er sich das Reale sensualistisch konstituiert dachte, wodurch er sich den Weg zum Operativen verbaute und dafür bedeutende (und unnötige) erkenntnistheoretische Schwierigkeiten hereinbrachte. So haben wir das Buch des Verf. als eine sehr bedeutsame Erscheinung zu begrüßen. Offenbar war ihm nicht bekannt, daß Ref. seit fast zwei Jahrzehnten diesen operativen Gesichtspunkt dauernd verfolgte. Die Untersuchungen des Verf. finden ihre Grenze darin, daß sie zwar die Operationen zur Definition der physikalischen Begriffe verwenden, und die Begriffe in dieser Hinsicht untersuchen, aber die Operationen selbst nicht mehr weiter erforschen. Dies hat Ref. in seinem Buche „Das Experiment" zusammenfassend durchzuführen versucht, wobei sich manche Schwierigkeiten beheben, denen Verf. noch ratlos gegenübersteht.

H. Dingler.



W. H. Bragg und W. L. Bragg, Die Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen. Grundlegende Untersuchungen in den Jahren 1913 u. 1914. Mit einem Geleitwort von E. Schiebold, a. o. Prof. an der Universität Leipzig. 8°. XXVI u. 148 S. Mit 67 Abbildungen im Text u. auf 2 Tafeln. Leipzig, L. Voß. 1928. Kart. RM. 9.—.

Das vorliegende Bändchen stellt einen Sonderabdruck aus der Zeitschrift für anorganische u. allgemeine Chemie, herausgegeben von G. Tammann u. R. Lorenz, **90**, 1915, dar. Es enthält die neun ersten, grundlegenden, röntgenspektroskopischen Arbeiten von W. H. Bragg u. W. L. Bragg, aus den Jahren 1913 u. 1914, in der Übersetzung von J. Koppel (Berlin). Ihr Erscheinen im Sonderdruck ist besonders zu begrüßen, weil der Verlag Leopold Voß, Leipzig, dadurch die Möglichkeit schuf, daß Privat-Laboratoriums- u. Institutsbibliotheken, denen einschlägige Fachliteratur jener Zeit nicht zur Verfügung steht, sich leicht in den Besitz dieser, für die Entwickelung der Röntgenspektroskopie so wichtigen Arbeiten setzen können. In einem Geleitwort weist E. Schiebold auf die Ergebnisse jeder einzelnen dieser englischen Arbeiten hin und bringt sie in Zusammenhang mit späteren Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet.

Paul Ott.

R. Berger, Die Schalltechnik. (Sammlung Vieweg Heft 83.) 8°. 115 S. Mit 97 Abb. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. A.-G. 1926. M. 8.—.

Das Buch verfolgt das Ziel, die Gesamtheit aller elastischen Schwingungserscheinungen in festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen zu behandeln und besonders die praktischen Anwendungen in den Vordergrund zu rücken. Es enthält: Physiologische Betrachtungen der wichtigsten Gesetze über die Ausbreitung, Reflexion und Absorption der verschiedenen Wellenarten und Wellenformen; Dämpfung von Erschütterungen und Geräuschen; Raumakustik; schalltechnische Prüfungen verschiedener Stoffe; Schallsignaltechnik; Schallvermessung und Klanganalyse. Am Ende des Werkes befindet sich ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Bei guter Allgemeinverständlichkeit ist der Inhalt rein wissenschaftlich behandelt. Durch Hinweis auf neue Probleme wird der Leser zum selbständigen Weiterarbeiten angeregt. Die klarere Entwicklung und bessere Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen sollte bei einer Neuauflage ins Auge gefaßt werden.

Der Erwerb dieses Buches sei jedem empfohlen, der einen Überblick über die auf dem Gebiete der Schalltechnik vorkommenden Probleme gewinnen will.

H. Reiher.

N. R. Campbell, La structure de l'atome. Übersetzt von A. Corvisy. 166 S. Paris, J. Hermann. 1925. 15 Fr.

Das Buch stellt eine weitere Ergänzung zur Elektrizitätslehre des Verf. dar. Der I. Teil behandelt die Kernstruktur. Da sich auf diesem Gebiet die Forschung nicht so stürmisch entwickelt, entspricht der Inhalt ungefähr dem neuesten Stand. Dasselbe kann man nicht vom 2. Teil, der die Elektronenhülle gewidmet ist, behaupten. Hier sind z. B. noch die Bohrschen Besetzungszahlen wiedergegeben, statt der nun durch das Pauli-Gesetz begründeten Stonerschen. Der 3. Abschnitt enthält viel Lesenswertes über die chemische Bindung.

Joos.

G. Mahler, Physikalische Aufgabensammlung. 3., völlig umgearb. Aufl. v. K. Mahler. (Sammlung Göschen Nr. 248.) 11 × 16 cm². 136 S. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1927. Geb. M. 1.50.

Auch über dieses für Lehrer an höheren Schulen und Studierende recht brauchbare Büchlein ist ähnliches wie über das soeben besprochene zu sagen, was seine Umarbeitung für die Erfordernisse der Gegenwart anbelangt. Aufgaben wie Nr. 18 sollten aber künftig wegbleiben. — Die Resultate sind in gedrängter Form am Schluß zuasmmengestellt.

E. Nies.

I. M. Kolthoff, Der Gebrauch von Farbindikatoren. 3. Aufl. Gr. 8°. XI u. 288 S. Mit 25 Textabbildungen u. einer Tafel. Berlin, J. Springer. 1926. M. 12.—, geb. M. 13.20.

Die Tatsache, daß in nicht ganz 6 Jahren die Herausgabe von 3 Auflagen nötig wurde, beweist schon allein die große Beliebtheit und Brauchbarkeit des vorzüglichen Werkchens. Die klare, leichtverständliche Behandlung des Stoffes und der recht umfangreiche Literaturnachweis (der jetzt die Veröffentlichungen bis 1926 umfaßt), sind schon von den ersten beiden Auflagen her bekannt. Neu ist in der 3. Auflage eine allerdings sehr kurze Zusammenfassung moderner Anschauungen über die Dissoziation starker Elektrolyte, ferner ein Kapitel über Ampholyte. Beträchtliche Erweiterungen erfuhr das Kapitel über „Die kolorimetrische Bestimmung der Wasserstoffionenkonzentration", z. B. auch durch Beschreibung der spektrophotometrischen Methode zur p_H-Bestimmung, durch ausführliche Besprechung der Säurefehler, Alkoholfehler und vor allem der Salzfehler usw. Begrüßenswert ist auch die Vervollständigung des Buches durch ein Register.

K. Schütz.

O. Knoblauch u. K. Hencky, Anleitung zu genauen technischen Temperaturmessungen. 2. Aufl. 8°. XI und 174 S. Mit 74 Abb. München und Berlin, R. Oldenbourg. 1926. M. 9.—, geb. M. 12.—.

Die vorliegende zweite, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage dieses meßtechnischen Ratgebers zeigt gegenüber der ersten Auflage von 1919 eine große Bereicherung. Bei dem größten Teile der theoretischen Berechnungen sind die inzwischen gewonnenen experimentellen Belege aufgenommen. Durch viele, in der Hauptsache im Laboratorium für technische Physik, München, durchgeführte Versuche ist das Ergebnis der theoretischen Betrachtungen bestätigt und dadurch besonders für den Praktiker überzeugend geworden.

Zu begrüßen ist die Neuaufnahme eines Abschnittes über die physikalischen Gesetze und Konstruktionsprinzipien der Strahlungspyrometer, die in der Technik eine immer größere Bedeutung gewinnen.

Für den, der wärmetechnische Messungen im Laboratorium und in der Praxis vorzunehmen hat, wird die neue Auflage des Buches zu einem zuverlässigen Wegweiser. Ferner wird jeder den Inhalt mit Befriedigung und Gewinn durcharbeiten, der sich allgemein meßtechnisch vervollkommnen will, oder der Freude an einem pädagogisch vorbildlichen und mustergültig ausgestatteten Werke hat.

Reiher.

Berichtigung

zu den Arbeiten „Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante starker Elektrolyte" von P. Debye und H. Falkenhagen. Diese Zeitschr. **29**, 121—132, 401—426.

S. 130. In der letzten Formel in Spalte II muß es statt 135: 130 heißen.

S. 406. In Formel (14) muß $n_i n_j$ fortbleiben

S. 415. In Formel (77) setze statt 15,34: 15,35.

S. 415. In Tabelle II setze für La: $L_i = 150$.

S. 416. Zu Tabelle III. Für $LaCl_3$ ist: $q = 0{,}352$; $\Theta\gamma = 0{,}208 \times 10^{-10}$. Dadurch ändern sich die Ergebnisse für $LaCl_3$ ein wenig wie hier angegeben.

S. 420. In der 5. Zeile von unten setze statt 30,5 m: 35,5 m. Entsprechend muß es in der letzten Zeile lauten statt 3,05 m: 3,55 m.

S. 421. In Tabelle V lautet die Rubrik für $LaCl_3$ wie folgt:

l in m	$LaCl_3$	l in m	$LaCl_3$
1	0,08	50	0,58
2	0,12	100	0,72
5	0,19	200	0,85
10	0,28	500	0,96
20	0,39	1000	0,98

S. 421. Zu Tabelle VI. Für $LaCl_3$ ist: $\Lambda_\infty = 345$; $\Lambda_{I\,\prime\prime} = 524\sqrt{\gamma}$.

S. 421. In Tabelle VII muß für $LaCl_3$ stehen: $\Lambda_\infty = 345$; $\Lambda_{I\,\prime\prime} = 5{,}24$.

S. 422. Zu Tabelle VIII. Für $LaCl_3$ ist:

$$\frac{\Lambda_{I\,\prime\prime\prime}}{\Lambda_{I\,\prime\prime}} = 0{,}39 \qquad \Lambda_{I\,\prime\prime\prime} = 2{,}04\,.$$

S. 422. Tabelle IX. Zu $LaCl_3$ 0,92 Proz.

S. 422. Tabelle X. Zu $LaCl_3$ 2,91 Proz.

S. 424. Formel (82) muß lauten:

$$l = \frac{18{,}85}{\omega\Theta}\,\Theta \times 10^8 \quad (l \text{ ergibt sich hieraus in m}).$$

In Figur 7 liegt die Kurve III für $LaCl_3$ ein wenig nach längeren Wellenlängen verschoben, vgl. Tabelle V.

Berichtigung

zu dem Bericht von H. Falkenhagen. Diese Zeitschr. **29**, 553—566, 1928.

S. 555. Spalte II. In 3. Zeile von unten lies: „Reziprozitätssatz".

S. 561. Spalte I. 11. Zeile von unten lies: und ein magnetisches Moment $\frac{eh}{4\pi mc}$, (h = Plancksche Konstante, c = Lichtgeschwindigkeit), wenn man c in elektrostatischen Einheiten mißt.

S. 562. Spalte I. In Gl. 2 setze statt h: h' wobei $h' = \frac{h}{2\pi}$ ist.

S. 562. 5. Zeile nach Gl. (2) lies: Folglich sind die α_r und β Operatoren auf x_1, x_2, x_3 und t nicht anzuwenden.

Spalte II. Mitte lies: dessen Eigenwerte $+\frac{h}{4\pi}$ und $-\frac{h}{4\pi}$ sind.

S. 565. 7. Zeile von unten lies: 273° abs.

S. 566. Gl. (10) muß heißen:

$$L_m = L_{m_0}(1 + \zeta).$$

Berichtigung

zu der Arbeit von H. Schmick. Diese Zeitschr. **29**, 633—640, 1928.

In Formel (18) auf Seite 639 fehlt das Wurzelzeichen; es muß heißen:

$$C_{12} = 0{,}733 \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_2}\,.$$

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Wien Dr. J. Mattauch für Physik.

Ernannt: Der Vorstand für wissenschaftliche und angewandte Photographie der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Fritz Limmer zum ord. Honorarprofessor für Lichtbildwesen daselbst, der o. ö. Professor der theoretischen Physik an der Universität Szegedin Dr. R. Ortvay in gleicher Eigenschaft an der Universität Budapest.

In den Ruhestand: Der ord. Honorarprofessor für organische Chemie an der Universität Leipzig Dr. Hans Stobbe.

Gestorben: Der ord. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt Geheimer Hofrat Dr. Karl Wirtz, der nichtbeamtete a. o. Professor für Physik an der Universität Bonn Dr. P. Eversheim, der ord. Professor der Astronomie an der Universität Wien und Direktor der Universitäts Sternwarte daselbst Dr. Josef Kapperger.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 20 — 15. Oktober 1928 — 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 22 am 10. November 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den Assoziationsgrad in flüssigen Dielektrika[1]).

Von M. Wolfke.

In bezug auf die Debyesche Dipoltheorie der Dielektrika zeigen bekanntlich die Gemische flüssiger Dielektrika zwei Arten von Abweichungen: bei einer Gruppe von Dipolsubstanzen, z. B. Nitrobenzol, nimmt die Molekularpolarisation der Dipolkomponente mit steigender Konzentration ständig ab, bei der anderen Gruppe, z. B. Alkohole, wächst sie anfangs, um erst nach einem oder mehreren Maxima abzunehmen. Diese Abweichungen von der Theorie, wonach in Gemischen die Molekularpolarisation der einzelnen Komponenten von der Konzentration unabhängig sein müßte, werden bekanntlich durch Assoziation der Dipolmoleküle gedeutet[2]).

Im ersten Falle wird angenommen, daß die Dipolmoleküle zu Paaren derart assoziieren können, daß sich dabei ihre Dipolmomente gegenseitig aufheben und das gebildete System elektrisch neutral wird; im zweiten Falle wird angenommen, daß bei Assoziation zu zweien das resultierende Dipolmoment größer wird und erst ein drittes hinzukommendes Dipolmolekül das ganze System in elektrischer Hinsicht neutralisiert. Wir wollen die erste Art der Assoziation „einfache Assoziation" und die zweite Art „mehrfache Assoziation" nennen.

Da die Assoziationserscheinungen nicht nur für die Theorie der Dielektrika allein, sondern auch in Hinsicht auf unsere Kenntnisse der Struktur der Flüssigkeiten im allgemeinen, großes Interesse beanspruchen, so habe ich im Physikalischen Institut I der Technischen Hochschule Warschau systematische experimentelle Untersuchungen über diese Fragen veranlaßt[1]). Gleichzeitig habe ich einen Versuch zu ihrer quantitativen theoretischen Deutung unternommen, da sie bis jetzt theoretisch nur qualitativ behandelt worden sind.

In dieser Abhandlung werde ich mich nur

1) Vorgetragen am 31. VIII. 1928 in der Jahressitzung d. Schweiz. Physikalischen Ges. in Lausanne.

2) P. Debye, Marx, Hdb. d. Rad. **6**, 633, 1925; L. Lange, Zeitschr. f. Phys. **33**, 169, 1925.

1) Vgl. J. Rolinski, Dokt.-Diss. Techn. Hochschule, Warschau 1928. C. R. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, 14. VI. 1928; diese Zeitschr. **29**, 658, 1928.



auf die Behandlung der einfachen Assoziation beschränken.

Nach den Vorstellungen über diese Art von Assoziation werden zwei gleiche Dipolmoleküle durch die elektrischen Kräfte ihrer Dipolmomente derart aneinander gebunden, daß sich ihre Dipolmomente gegenseitig aufheben. Bezeichnen wir die Assoziationsenergie, d. h. die Arbeit, welche zur Trennung eines assoziierten Molekülpaares notwendig ist, mit E. Eine einfache Überlegung über die potentielle Energie zweier elektrischer Dipole von gleichem Moment μ, die sich in gegenseitiger Entfernung r voneinander befinden, zeigt, daß dieselbe in erster Näherung gleich $\frac{\mu^2}{r^3}$ wird, so daß wir näherungsweise schreiben können:

$$E \simeq \frac{\mu^2}{r^3}. \tag{1}$$

Betrachten wir eine Mischung einer Dipolsubstanz mit einer dipollosen Substanz und setzen wir die Gesamtzahl der Moleküle der Mischung gleich N, d. h. der Avogadroschen Zahl der Moleküle in einem Mol. Sei n die Zahl der Moleküle der Dipolsubstanz in der betrachteten Mischung, von denen n_a zu Paaren assoziiert sind und der Rest n_0 unassoziiert bleibt, so daß

$$n = n_a + n_0 \tag{2}$$

ist. Bezeichnen wir den Assoziationsgrad, d. h. das Verhältnis der Zahl der assoziierten zu der Gesamtzahl der Dipolmoleküle, mit η, so ist:

$$\eta = \frac{n_a}{n}. \tag{3}$$

Wir wollen jetzt auf Grund von statistischen Überlegungen den Assoziationsgrad als Funktion der Konzentration und der Temperatur der Mischung bestimmen. Zu diesem Zweck werden wir ein von Einstein benutztes Verfahren anwenden, das in der statistischen Mechanik unter dem Namen „Einsteinscher Satz" bekannt ist[1]). Im Sinne dieser Betrachtungsweise werden wir als den „Normalzustand" diejenige räumliche Verteilung der Dipolmoleküle in der Mischung betrachten, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht einstellen würde, wenn keine assoziativen Kräfte zwischen den Dipolmolekülen vorhanden wären. Wir stellen fest, daß eine Assoziation zwischen zwei Dipolmolekülen nur dann möglich ist, wenn dieselben in geeigneter Nähe zueinander gelangen, d. h. sich in gemeinsamer Wirkungssphäre befinden und gleichzeitig entsprechende Lage zueinander einnehmen. Dementsprechend bezeichnen wir mit n_a^0 die mittlere Zahl derjenigen Dipolmoleküle, welche sich paarweise räumlich so nahe stehen, daß zwischen ihnen unmittelbar Assoziation eintreten könnte und nennen sie „räumlich gekoppelt". Die Zahl solcher Dipolmoleküle, welche diese Bedingung nicht erfüllen, also räumlich außerhalb einer Assoziationsmöglichkeit liegen, bezeichnen wir mit n_0^0 und nennen sie „räumlich frei". Die Gesamtzahl der Dipolmoleküle in der Mischung bleibt dieselbe, so daß wird:

$$n = n_a^0 + n_0^0, \tag{4}$$

wo sich der Index o oberhalb der Buchstaben auf unseren Normalzustand bezieht.

Wir wollen jetzt die Zahl der räumlich gekoppelten Dipolmoleküle berechnen; fügen wir nun zu diesem Zweck der Mischung ein neues Dipolmolekül hinzu, indem wir ein beliebiges Molekül der dipollosen Substanz durch dasselbe ersetzen. Nach den oben gemachten Annahmen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das neu hinzugefügte Dipolmolekül mit einem der räumlich freien Dipolmoleküle räumlich koppelt, offenbar proportional dem Verhältnis der Zahl n_0^0 der räumlich freien Dipolmoleküle zu der Gesamtzahl N aller Moleküle der Mischung. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit w_a^0 und schreiben also:

$$w_a^0 = \nu \cdot \frac{n_0^0}{N}, \tag{5}$$

wobei die Konstante ν auch wegen des verschiedenen Wahrscheinlichkeitsgewichts für Dipolmoleküle und die Dipollosen eingeführt worden ist.

Nach diesem Wahrscheinlichkeitsansatz werden also beim Zusatz von dn Dipolmolekülen zu der Mischung in derselben $w_a^0 \cdot dn$ neue Paare von miteinander räumlich gekoppelten Dipolmolekülen entstehen, so daß die Zahl n_a^0 der räumlich gekoppelten Dipolmoleküle um

$$dn_a^0 = \frac{2\nu}{N}\left(n - n_a^0\right) \cdot dn \tag{6}$$

zunehmen wird, wobei n_0^0 durch $n - n_a^0$ nach Gleichung (4) ersetzt worden ist. Die einfache Integration der obigen Differentialgleichung (6) ergibt alsdann für die gesuchte Zahl n_a^0 folgenden Ausdruck:

$$n_a^0 = n - \frac{N}{2\nu}\left(1 - e^{-\frac{2\nu \cdot n}{N}}\right), \tag{7}$$

wo die Integrationskonstante dadurch bestimmt worden ist, daß für $n = 0$ auch $n_a^0 = 0$ sein muß.

Wir ändern nun den bis da betrachteten Normalzustand durch Hinzufügen der assoziativen Kräfte. Dadurch wird ein Teil der räumlich ge-

1) Vgl. Cl. Schaefer, Einführung in d. Theoret. Physik. Bd. II, 467. 1921.

koppelten Dipolmoleküle tatsächlich assoziieren, der Rest aber wird wegen der Wärmebewegung in nicht assoziiertem Zustand verbleiben. Von diesem Rest der nichtassoziierten Molekülpaare wird nach unserer Annahme über die Assoziationsenergie jedes solche Paar eine potentielle Energie E (1) besitzen. Nach dem Einsteinschen Satze wird also die Zahl dieser nichtassoziierten Dipolmoleküle gleich:

$$n_a^0 \cdot e^{-\frac{E}{kT}}$$

sein, so daß von den n_a^0 räumlich gekoppelten Dipolmolekülen also nur

$$n_a^0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{kT}}\right)$$

assoziiert werden. Durch Einsetzen des Ausdruckes (7) in die obige Gleichung erhalten wir die Zahl der assoziierten Dipolmoleküle:

$$n_a = \left[n - \frac{N}{2\nu}\left(1 - e^{-\frac{2\nu \cdot n}{N}}\right)\right] \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{kT}}\right), \quad (8)$$

was nach Definition (3) den gesuchten Assoziationsgrad ergibt:

$$\eta = \left[1 - \frac{N}{2\nu \cdot n}\left(1 - e^{-\frac{2\nu \cdot n}{N}}\right)\right] \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{kT}}\right). \quad (8a)$$

Diese Funktion enthält zwei unbestimmte Konstanten, die aber nach unseren Überlegungen eine wohldefinierte physikalische Bedeutung besitzen.

Der hier gefundene Ausdruck (8a) für den Assoziationsgrad wurde für Äthyläther, Chlorbenzol und Chinolin mit den Messungen von J. Rolinski[1]) und für Nitrobenzol mit denjenigen von L. Lange[2]) verglichen. Die Zusammenstellung der gemessenen und nach dieser Theorie berechneten Werte des Assoziationsgrades für verschiedene Konzentrationen bei konstanter Temperatur befindet sich in der nachstehenden Tabelle I.

Die obigen Werte des Assoziationsgrades sind in der Figur graphisch dargestellt, wobei die ausgezogenen Kurven der Theorie entsprechen und die experimentellen Werte als Punkte eingetragen sind.

Sowohl aus der Tabelle I, als auch aus der Figur ersehen wir, daß für alle zum Vergleich herangezogenen Substanzen eine gute Übereinstimmung der Theorie mit den Messungen besteht, bei einigen sogar ist die Übereinstimmung vollständig.

Die für die Konstanten ν und E erhaltenen Werte, als auch die nach Gleichung (1) abgeschätzten Werte für r sind zusammen mit den

1) J. Rolinski, loc. cit. Tab. VII, VIII und IX.
2) L. Lange, loc. cit. Tab. I, S. 173.

Tabelle I.

Grammkonzentration	Assoziationsgrad Gemessen	Assoziationsgrad Berechnet
Äthyläther—Benzol.		
0,	0	0
0,090	0,005	0,007
0,269	0,018	0,018
0,298	0,021	0,020
0,395	0,027	0,024
0,501	0,033	0,029
0,603	0,036	0,033
0,697	0,036	0,036
0,813	0,039	0,039
0,905	0,039	0,041
1	0,039	0,044
Chlorbenzol—Benzol.		
0	0	0
0,101	0,054	0,052
0,187	0,095	0,095
0,289	0,141	0,143
0,386	0,185	0,187
0,508	0,237	0,239
0,583	0,268	0,270
0,697	0,313	0,313
0,795	0,350	0,348
0,891	0,383	0,380
1	0,410	0,413
Chinolin—Benzol.		
0	0	0
0,104	0,142	0,096
0,206	0,227	0,181
0,307	0,285	0,258
0,406	0,339	0,325
0,508	0,391	0,388
0,612	0,440	0,445
0,718	0,492	0,495
0,807	0,523	0,533
0,901	0,559	0,567
1	0,592	0,599
Nitrobenzol—Benzol.		
0	0	0
0,0312	0,082	0,079
0,0645	0,150	0,156
0,1165	0,252	0,256
0,2972	0,478	0,499
1	0,807	0,765

Tabelle II.

	μ	ν	E	r
Äthyläther	$0{,}99 \cdot 10^{-18}$ es	1	$0{,}32 \cdot 10^{-14}$ erg	$6{,}7 \cdot 10^{-8}$ cm
Chlorbenzol	$1{,}55 \cdot 10^{-18}$,,	1,1	$4{,}7 \cdot 10^{-14}$,,	$3{,}7 \cdot 10^{-8}$,,
Chinolin	$2{,}25 \cdot 10^{-18}$,,	2	$6{,}3 \cdot 10^{-14}$,,	$4{,}3 \cdot 10^{-8}$,,
Nitrobenzol	$3{,}84 \cdot 10^{-18}$,,	5	$7{,}5 \cdot 10^{-14}$,,	$5{,}8 \cdot 10^{-8}$,,

bekannten molekularen Dipolmomenten μ in der Tabelle II zusammengefaßt.

Aus dieser Zusammenfassung (Tab. II) sehen wir, daß mit wachsendem Dipolmoment des Moleküls sowohl die Konstante ν als auch die Assoziationsenergie E größer wird, dabei sind alle Werte für r durchweg von der Größenordnung des Moleküldurchmessers.

Was nun die Abhängigkeit des Assoziationsgrades von der Temperatur der Mischung betrifft, so wird ein Vergleich der Theorie mit den in der Literatur bekannten Meßergebnissen demnächst erfolgen.

Zusammenfassung.

Es wurde eine statistische Theorie der einfachen Assoziation in flüssigen Dielektrika entwickelt und der Assoziationsgrad als Funktion der Konzentration und Temperatur der Mischung abgeleitet. Die theoretischen Ergebnisse wurden mit den bekannten Meßresultaten verglichen und bestätigt

Warschau, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 28. August 1928.)

Über die Struktur der Atome.

Von Felix Joachim v. Wisniewski.

I. Es wird hier ein Versuch gemacht, sich ein Bild von der Struktur der Atome zu machen auf Grund der Annahme, daß jedes einzelne Atom eines Stoffes ein Niveau K, eins von den Energieniveaus L, eins von den 5 Energieniveaus M usw. enthält, und es wird versucht, diese Energieniveaus durch Energieniveaus zu ersetzen, welche einzelnen Elektronen der Elektronenringe entsprechen.

Das letztere ist mit einiger Annäherung für die Energieniveaus K; $L_{\rm I}$, $L_{\rm II}$, $L_{\rm III}$; $M_{\rm II}$, $M_{\rm III}$, $M_{\rm IV}$, $M_{\rm V}$ gelungen.

Bevor jedoch die numerischen Berechnungen vorgenommen werden, wird auf Grund der oben geäußerten Annahme ein Bild der möglichen Arten der Kombinationen zwischen den Energieniveaus durch Energieniveaus zu ersetzen, gemacht, welches mit dem Schema der Röntgenspektren im Einklang sein muß.

Jeder einzelnen Kombination entspricht eine besondere Art von Atomen desselben Stoffes.

Es gibt also mehrere Arten von Atomen eines und desselben Stoffes.

Im folgenden werden nur solche Stoffe berücksichtigt, für welche die Niveaus K, $L_{\rm I}$, $L_{\rm II}$, $L_{\rm III}$, $M_{\rm II}$, $M_{\rm III}$, $M_{\rm IV}$, $M_{\rm V}$ vollständig ausgebaut sind.

Die verschiedenen Bauarten von Atomen werden aus den Röntgenserien K, L, M, N abgeleitet auf Grund der Hypothese, daß es nur ein Niveau K, ein Niveau L, ein Niveau M usw. in jedem besonderen Atome geben kann, und der selbstverständlichen Annahme, daß nur zwischen solchen Energieniveaus Elektronenaustausch mit Energieemission stattfinden kann, welche in einem bestimmten Atome koexistieren.

Die Serie K hat folgende vier Linien

$$K_{\alpha_1};\ K_{\alpha_2};\ K_{\beta_1};\ K_{\beta_2},$$

deren Frequenzen den Differenzen der Niveaufrequenzen $\nu_{L_{\rm II}}$; $\nu_{L_{\rm III}}$; $\nu_{M_{\rm II}}$; $\nu_{M_{\rm III}}$ und der Niveaufrequenz ν_K gleich sind.

Diese Tatsache ist in der untenstehenden Tabelle zusammengefaßt, wo neben der Linienbezeichnung die Grenzniveaus gegeben sind:

$$K_{\alpha_1}(L_{\rm III}-K);\ K_{\alpha_2}(L_{\rm II}-K);$$
$$K_{\beta_1}(M_{\rm III}-K);\ K_{\beta_2}(M_{\rm II}-K).$$

Die Niveaus K, $L_{\rm III}$; $KL_{\rm II}$; $KM_{\rm III}$; $KM_{\rm II}$ sollen in verschiedenen Atomarten koexistieren.

Aus den Linien: $L_{\beta_4}(M_{\rm II}-L_{\rm I})$;
$L_{\beta_3}(M_{\rm III}-L_{\rm I})$

der L-Serie folgt, daß die Niveaupaare $M_{\rm II}L_{\rm I}$; $M_{\rm III}L_{\rm I}$ auch in besonderen Atomarten koexistieren müssen.

Dieses ist nur möglich, wenn folgende Sukzessionsarten der verschiedenen Niveaus K, L, M angenommen werden.

a) $KL_{\rm II}$; $KL_{\rm III}$; $KL_{\rm I}M_{\rm II}$: $KL_{\rm II}M_{\rm III}$.

Aus den Linien $L_{\eta}(M_{\rm I}-L_{\rm II})$;
$L_{l}(M_{\rm I}-L_{\rm III})$; $L_{\beta_1}(M_{\rm IV}-L_{\rm II})$
$L_{\alpha_2}(M_{\rm IV}-L_{\rm III})$; $L_{\alpha_1}(M_{\rm V}-L_{\rm III})$

und den Kombinationen a) folgen die folgenden Kombinationen, welche noch die Niveaus $M_{\rm I}$, $M_{\rm IV}$ und $M_{\rm V}$ enthalten:

b) $KL_{II}\,M_I$; $KL_{II}\,M_{IV}$;
$KL_{III}\,M_I$; $KL_{III}\,M_{IV}$; $KL_{III}\,M_V$.

Wenn man noch die Linien:

$$L_{\gamma_1}(N_{II} - L_I);\; L_{\gamma_1}(N_{III} - L_I);$$
$$L_{\beta_4}(N_I - L_{III});\; L_{\gamma_5}(N_I - L_{II})$$

berücksichtigt, so ergeben sich folgende Arten von Kombinationen, welche für genügend große Z in verschiedenen Arten von Atomen vollständig ausgebaut sein müssen:

$KL_{II}\,M_{IV}$; $KL_{III}\,M_{IV}$; $KL_{III}\,M_V$;
c) $KL_I\; M_{II}N_{II}$; $KL_I\; M_{III}N_{III}$;
$KL_{II}\,M_I\; N_I$; $KL_{III}\,M_I\; N_I$.

Dazu kommen noch solche Niveaus hinzu, welche mit steigender Atomnummer ausgebaut werden.

Im folgenden wird gezeigt, daß es möglich ist, die Kombinationen (c) in konsequenter Weise auszubauen.

Der Ausbau der Kombinationen (c) wird auf Grund der Annahme gemacht, daß jedes Energieniveau der Röntgenstrahlen ersetzt werden kann durch ein Energieniveau, welches einem Elektron eines Elektronenringes entspricht.

Da das Energieniveau jedes Elektrons eines Elektronenringes gleich ist der Energie, welche man jedem Elektron eines Ringes zuführen muß, um den ganzen Elektronenring ins Unendliche zu bringen, so folgt, daß wenn W die Energie ist, welche dem Ringe zugeführt werden muß, um alle Elektronen zu entfernen, auf ein Elektron des Ringes von i Elektronen die Energie $\frac{W}{i}$ entfällt.

Nach der oben gemachten Annahme ist das ein Energieniveau von Röntgenstrahlen.

Diesem Niveau entspricht die Frequenz

$$(\alpha) \qquad \nu = \frac{W}{h \cdot i}.$$

Da bekanntlich für einen Ring von i Elektronen

$$W = \frac{i R \cdot h \cdot Z^2_{\text{eff}}}{s^2}\left\{1 + \frac{\alpha^2 Z^2_{\text{eff}}}{s^2}\left[\frac{s}{n} - \frac{3}{4}\right] + \frac{\alpha^4 Z^4_{\text{eff}}}{s^4}\left[\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\frac{s^2}{n^2} + \frac{1}{4}\frac{s^3}{n^3} - \frac{3}{2}\frac{s}{n}\right]\right\}$$

ist, so folgt für ν aus (α) folgender Ausdruck

$$\nu = \frac{R \cdot Z^2_{\text{eff}}}{s^2}\left\{1 + \frac{\alpha^2 Z^2_{\text{eff}}}{s^2}\left[\frac{s}{n} - \frac{3}{4}\right] + \frac{\alpha^4 Z^4_{\text{eff}}}{s^4}\left[\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\frac{s^2}{n^2} + \frac{1}{4}\frac{s^3}{n^3} - \frac{3}{2}\frac{s}{n}\right]\right\}$$

und für $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = \frac{(Z-k-\sigma)^4}{s}\left\{1 + \frac{\alpha^2 (Z-k-\sigma)^2}{2 s^2}\left[\frac{s}{n} - \frac{3}{4}\right] + \frac{\alpha^4 (Z-k-\sigma)^4}{s^4}\left[\frac{31}{128} + \frac{1}{4}\frac{s^2}{n^2} + \frac{1}{8}\frac{s^3}{n^3} - \frac{9}{16}\frac{s}{n}\right]\right\}, \qquad \text{(I)}$$

wo

$$Z_{\text{eff}} = Z - k - \sigma$$

gesetzt ist.

In den benützten Formeln haben die benützten Bezeichnungen folgende Bedeutung:

R bezeichnet die Rydbergsche Konstante,
k „ die Zahl der Elektronen auf den inneren Ringen,
σ „ die Abschirmungszahl des Ringes
s „ die azimutale Quantenzahl,
n „ die äquatoriale Quantenzahl.

Das Energieniveau K.

Man kann das Energieniveau K durch das Energieniveau eines Elektrons eines Ringes von fünf Elektronen ersetzen, wenn man folgende Zahlen für s_k; n_k; k_k und σ_k setzt

$$s_k = 1{,}084;\quad \frac{s_k}{n_k} = 1{,}25;\quad \sigma_k = \sigma_5 = 1{,}38;\quad k_k = 0.$$

Dann folgt aus (I) für $\sqrt{\frac{\nu_K}{R}}$

$$\sqrt{\frac{\nu_K}{R}} = \frac{(Z - 1{,}38)}{1{,}084}\cdot[1 + 0{,}112 \cdot 10^{-4}(Z - 1{,}38)^2 + 0{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot (Z - 1{,}38)^4]. \qquad (I_k)$$

In der Tabelle (K) sind die nach (I_K) berechneten mit den von Bohr und Coster[1]) bestimmten Werten von $\sqrt{\frac{\nu_K}{R}}$ zusammengestellt.

K

Z	$\sqrt{\frac{\nu_K}{R}}$ nach (I_k)	$\sqrt{\frac{\nu_K}{R}}$ nach B. u. C.
12	9,79	9,79
13	10,72	10,72
17	14,41	14,42
19	16,25	16,29
25	21,91	21,96
29	25,65	25,71
42	38,15	38,38
52	48,03	48,93
62	58,49	58,80
74	71,54	71,51
82	80,84	80,39

1) Bohr u. Coster, Zeitschr. f. Phys. 1923, 932, 12.

Die Energieniveaus L.

Die Energieniveaus L_{III}, L_{II} und L_I sind durch die Energieniveaus einzelner Elektronen entsprechender Elektronenringe zu ersetzen, wenn man für alle drei L-Ringe

$$k_L = i_K = 5$$

und für die azimutale Quantenzahl s_L einen für alle drei Niveaus gemeinsamen Zahlenwert

$$s_L = 2{,}353$$

setzt.

a) Das Energieniveau L_{III}.

Im Falle des Energieniveaus L_{III} erhält man Übereinstimmung zwischen den aus (I) berechneten Zahlenwerten von $\sqrt{\frac{\nu_{L_{III}}}{R}}$ und den auf empirischem Wege bestimmten Werten derselben Größe, wenn man setzt:

$$i_{L_{III}} = 12; \quad \frac{s_{L_{III}}}{n_{L_{III}}} = 1{,}25; \quad \sigma_{L_{III}} = \sigma_{12} = 4{,}98.$$

Aus (I) folgt dann:

$$\sqrt{\frac{\nu_{L_{III}}}{R}} = \frac{(Z-9{,}98)}{2{,}353}\{1 + 0{,}024 \cdot 10^{-4}(Z-9{,}98)^2 + 0{,}00217 \cdot 10^{-8}(Z-9{,}98)^4\}. \quad (I_{L_{III}}).$$

Die Tabelle L_{III} enthält die so bestimmten Zahlenwerte von $\sqrt{\frac{\nu_{L_{III}}}{R}}$

L_{III}

Z	$\sqrt{\frac{\nu_{L_{III}}}{R}}$ (nach $I_{L_{III}}$)	$\sqrt{\frac{\nu_{L_{III}}}{R}}$ nach B. u. C.
40	12,78	12,79
41	13,17	13,21
42	13,60	13,64
47	15,72	15,73
51	17,42	17,44
60	21,49	21,40
74	27,45	27,41
80	30,04	30,10
82	31,00	30,99
90	34,45	37,65
92	35,46	35,56

Es muß noch bemerkt werden, daß zwischen den Bahnen der Elektronen des K und L_{III} Ringes eine Analogie statthat; denn

$$\frac{s_{L_{III}}}{n_{L_{III}}} = \frac{s_k}{n_k} = 1{,}25.$$

Da in erster Näherung die Exzentrizitäten ε der Bahnen gleich

$$\varepsilon = \sqrt{1 - n^2/s^2}$$

sind, so folgt, daß in erster Annäherung die Exzentrizitäten der Elektronenbahnen der K und der L_{III} Ringe gleich sind

$$E_{L_{III}} = E_k.$$

b) Die Energieniveaus L_{II} und L_I.

Im Falle dieser Niveaus erhält man die verlangte Übereinstimmung der aus (I) berechneten Zahlen mit dem auf empirischem Wege bestimmten, wenn man für beide Niveaus dieselbe äquitoriale Quantenzahl n_L annimmt.

Es folgt also, daß:

$$n_{L_{II}} = n_{L_I}, \text{ mithin } \frac{s_L}{n_{L_{II}}} = \frac{s_L}{n_{L_I}} = 3{,}5$$

ist.

Wenn man nach

$$i_{L_I} = 9; \quad \sigma_{L_I} = \sigma_9 = 3{,}33$$

und

$$i_{L_{II}} = 12; \quad \sigma_{L_{II}} = \sigma_{12} = 4{,}98$$

setzt, so folgen aus (I) die untenstehenden Ausdrücke für $\sqrt{\frac{\nu_{L_I}}{R}}$ und $\sqrt{\frac{\nu_{L_{II}}}{R}}$

$$\sqrt{\frac{\nu_{L_I}}{R}} = \frac{(Z-8{,}33)}{2{,}353}\{1 + 0{,}132 \cdot 10^{-4}(Z-8{,}33)^2 + 0{,}06 \cdot 10^{-8}(Z-8{,}33)^4\} \quad (I_{L_I})$$

$$\sqrt{\frac{\nu_{L_{II}}}{R}} = \frac{(Z-9{,}98)}{2{,}353}\{1 + 0{,}132 \cdot 10^{-4}(Z-9{,}98)^2 + 0{,}06 \cdot 10^{-8}(Z-9{,}98)^4\}. \quad (I_{L_{II}})$$

Die Tabellen L_I und L_{II} enthalten die aus (I_{L_I}) und ($I_{L_{II}}$) berechneten Zahlenwerte für $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$ mit den von Bohr und Coster bestimmtem:

L_I

Z	$\sqrt{\frac{\nu_{L_I}}{R}}$ (nach I_{L_I})	$\sqrt{\frac{\nu_{L_I}}{R}}$ nach B. u. C.
42	14,52	14,54
47	16,75	16,72
56	20,85	21,03
74	29,80	29,84
82	34,14	34,19
90	38,56	38,85
92	39,82	40,04

L_{II}

Z	$\sqrt{\frac{\nu_{L_{II}}}{R}}$ (nach $I_{L_{II}}$)	$\sqrt{\frac{\nu_{L_{II}}}{R}}$ nach B. u. C.
40	12,90	13,02
45	15,13	15,20
47	16,02	16,12
55	19,68	19,87
60	22,07	22,27
80	32,26	32,38
82	33,38	33,50
90	38,11	38,10
92	39,36	39,28

Die nach (I_{L_I}) und nach ($I_{L_{II}}$) berechneten Zahlen stimmen mit den von Bohr und Coster gegebenen überein.

Es folgt daraus, daß es erlaubt ist, die Energieniveaus K, L_I, L_{II}, L_{III} durch Energieniveaus einzelner Elektronen entsprechender Elektronenringe zu ersetzen.

Wenn man nur die Niveaus K und L berücksichtigt, so sind drei Arten von Atomen zu unterscheiden, je nachdem der zweite Ring vom Kerne ein L_I, ein L_{II} oder ein L_{III} Ring ist.

Die Zahl der Elektronen auf den Ringen ist unten zusammengefaßt.

Art von Atomen	Zahl der Elektronen auf dem K-Ring	Zahl der Elektronen auf dem L-Ring
KL_I	5	9
KL_{II}	5	12
KL_{III}	5	12

Unter den L Ringen hat der L_I Ring die kleinste Zahl von Atomen.

Die Zahl von 9 Elektronen kann als die kleinstmögliche Zahl von Elektronen auf den L Ringen angesehen werden, so daß kein Elektron des Ringes L_I spontan verloren sein kann.

Dieselbe Eigenschaft muß den fünf Elektronen des K Ringes zugeschrieben sein.

Wenn also unter einem äußerem Einfluß der K Ring ein Elektron verliert, so kann aus dem Ringe L_{II} oder aus dem Ringe L_{III} je nach der Art von Atomen ein Elektron auf den freien Platz des K Ringes spontan springen.

Da jedem Elektron des Ringes L_{II} die Energie $h\nu_{L_{II}}$ und jedem Elektron des Ringes L_{III} die Energie $h\nu_{L_{III}}$ zugeschrieben werden muß, und jedes Elektron des Ringes K die Energie h_{ν_k} hat, so verliert ein Elektron durch das Wechseln des Ringes die Energie $h(\nu_{L_{II}} - \nu_k)$ oder die Energie $h(\nu_{L_{III}} - \nu_k)$, welche den Linien K_{α_2} und K_{α_1} entsprechen.

Die fehlenden Elektronen der Ringe L sind von den Elektronen der äußersten Ringe zu ersetzen.

Da aus dem L_I-Ringe kein Elektron auf den K-Ring spontan fallen kann, so ist selbstverständlich, warum es keine Linie von der Frequenz $(\nu_{L_I} - \nu_k)$ gibt.

Wenn in der Volumeneinheit N-Atome vorhanden sind, so sind davon N_{L_I}-Atome, deren zweiter Ring ein L_I-Ring ist; $N_{L_{II}}$ Atome, deren zweiter Ring ein L_{II}-Ring ist und $N_{L_{III}}$ Atome, deren zweiter Ring ein L_{III}-Ring ist, so daß:

$$N_{L_I} + N_{L_{II}} + N_{L_{III}} = N.$$

Da jedes Atom den Ring K hat, so ist die Intensität der Linien $K_{\alpha_1}(L_{III}-K)$; $K_{\alpha_2}(L_{II}-K)$ proportional den Zahlen $N_{L_{III}}$ und $N_{L_{II}}$ von Atomen.

Wenn die Intensitäten der Linien K_{α_1} und K_{α_2} durch $I_{k\alpha_1}$ und $I_{k\alpha_2}$ bezeichnet werden, so folgt, daß:

$$\frac{I_{k\alpha_1}}{I_{k\alpha_2}} = \frac{N_{L_{III}}}{N_{L_{II}}} \cdot \frac{\nu_{k\alpha_1}}{\nu_{k\alpha_2}}$$

Da weiter jedes Atom, welches die Linien $K_{\beta_1}(M_{III}-K)$; $K_{\beta_3}(M_{II}-K)$; $L_{\beta_3}(M_{III}-L_I)$ $L_{\beta_4}(M_{II}-L_I)$ emittiert, die Struktur $KL_I M_{II}$ oder die Struktur $KL_I M_{III}$ der ersten drei Ringe haben soll, so folgt, daß die Intensitäten

$$I_{k\beta_1};\ I_{k\beta_3};\ I_{L\beta_4};\ I_{L\beta_3}$$

proportional den Atomzahlen sein sollen, deren zweiter Ring ein L_1-Ring ist und dessen dritter Ring ein M_{II}- oder ein M_{III}-Ring ist.

Wenn diese Atomzahlen entsprechend durch

$$N_{L_I, M_{II}} \text{ und } N_{L_I, M_{III}}$$

bezeichnet werden, so folgt, daß:

$$\frac{I_{k\beta_1}}{I_{k\beta_3}} = \frac{N_{L_I, M_{III}}}{N_{L_I, M_{II}}} \frac{\nu_{k\beta_1}}{\nu_{k\beta_3}}; \qquad \frac{I_{L\beta_3}}{I_{L\beta_4}} = \frac{N_{L_I, M_{III}}}{N_{L_I, M_{II}}} \frac{\nu_{k\beta_3}}{\nu_{k\beta_4}}$$

sein muß.

Sind diese Intensitätsbetrachtungen richtig, so soll folgende Intensitätsrelation erfüllt sein

$$\frac{I_{k\beta_1}}{I_{k\beta_3}} \cdot \frac{\nu_{k\beta_3}}{\nu_{k\beta_1}} = \frac{I_{L\beta_3}}{I_{L\beta_4}} \cdot \frac{\nu_{L\beta_4}}{\nu_{L\beta_3}}. \tag{0}$$

Im Falle von Wolfram ($Z = 74$) ist nach Allison and Armstrong[1]) für das Verhältnis $I_{L\beta_3}/I_{L\beta_4}$ folgender Zahlenwert zu setzen:

$$\frac{I_{L\beta_3}}{I_{L\beta_4}} = \frac{15{,}0}{7{,}7} = 1{,}94\,,$$

1) Allison a. A. Armstrong, Physik.. Rev. **26**, 714, 1925.

während für das Verhältnis $I_{K\beta_1}/I_{K\beta_2}$ nach Duane und Stenström:

$$\frac{I_{k\beta_1}}{I_{k\beta_2}} = \frac{35}{15} = 2{,}3$$

zu setzen ist.

Die Relation (o) ist also annähernd erfüllt, was für die Richtigkeit dieser Intensität und Strukturbetrachtung zu sprechen scheint[1]).

Gibt es kein Atom von der Struktur $KL_{\mathrm{I}}M_{\mathrm{I}}$ für die ersten drei Ringe, so folgt, daß:

$$N_{L_{\mathrm{I}}} = N_{L_{\mathrm{I}},\,M_{\mathrm{II}}} + N_{L_{\mathrm{I}},\,M_{\mathrm{III}}}$$

ist und daß $N_{L_{\mathrm{I}}}$; $N_{L_{\mathrm{II}}}$; $N_{L_{\mathrm{III}}}$ in folgenden Verhältnissen zueinander stehen:

$$N_{L_{\mathrm{III}}} : N_{L_{\mathrm{II}}} : N_{L_{\mathrm{I}}} = \frac{I_{k\alpha_1}}{\nu_{k\alpha_1}} : \frac{I_{k\alpha_2}}{\nu_{k\alpha_2}} : \frac{I_{k\beta_1}}{\nu_{k\beta_1}} + \frac{I_{k\beta_2}}{\nu_{k\beta_2}}.$$

Für Wolfram ($Z = 74$) haben Duane und Stenström[2]) folgende Relation gegeben:

$$I_{k\alpha_2} : I_{k\alpha_1} : I_{k\beta_1} : I_{k\beta_2} = 50 : 100 : 35 : 15\,,$$

woraus folgt, daß für $Z = 74$ die Zahlen $N_{L_{\mathrm{III}}}$; $N_{L_{\mathrm{II}}}$; $N_{L_{\mathrm{I}}}$ in folgender Relation zueinander stehen

$$N_{L_{\mathrm{III}}} : N_{L_{\mathrm{II}}} : N_{L_{\mathrm{I}}} = \frac{2}{\nu_{k\alpha_1}} : \frac{1}{\nu_{k\alpha_2}} : \frac{0{,}7}{\nu_{k\beta_1}} + \frac{0{,}3}{\nu_{k\beta_2}}.$$

Da

$$N = N_{L_{\mathrm{III}}} + N_{L_{\mathrm{II}}} + N_{L_{\mathrm{I}}}\,,$$

so folgt, daß für Wolfram:

$$N_{L_{\mathrm{III}}} = \frac{1}{2} N;\; N_{L_{\mathrm{II}}} = \frac{1}{4} N;\; N_{L_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{4} N.$$

Im Falle von Kupfer ($Z = 29$) haben Siegbahn und Začek[3]) folgende Verhältnisse der Intensitäten der Linien K_{α_1}; K_{α_2}; K_{β_1}; K_{β_2} gegeben:

$$I_{k\alpha_1} : I_{k\alpha_2} : I_{k\beta_1} : I_{k\beta_2} = 100 : 51{,}2 : 25 : 0{,}61\,,$$

woraus folgt, daß für Kupfer ($Z = 29$)

$$N_{L_{\mathrm{III}}} : N_{L_{\mathrm{II}}} : N_{L_{\mathrm{I}}} = \frac{100}{\nu_{k\alpha_1}} : \frac{51{,}2}{\nu_{k\alpha_2}} : \frac{25}{\nu_{k\beta_1}} + \frac{0{,}61}{\nu_{k\beta_2}}.$$

und daß:

$$N_{L_{\mathrm{III}}} = 0{,}56 \cdot N;\; N_{L_{\mathrm{II}}} = 0{,}29 \cdot N;$$

$$N_{L_{\mathrm{I}}} = 0{,}144 \cdot N.$$

Aus den Beispielen für Kupfer und Wolfram folgt, daß die Zahl der Atome $N_{L_{\mathrm{I}}}$ mit abnehmender Atomnummer Z abnimmt, während die Zahl der Atome $N_{L_{\mathrm{III}}}$ eher konstant bleibt.

1) Angenähert ist: $\nu_{k\beta_1} : \nu_{k\beta_2} = \nu_{L\beta_2} : \nu_{L\beta_1}$.

2) Zitiert nach A. E. Lindh, Physik. Zeitschr. **28**, 93, 1927.

3) Siegbahn und Začek, Ann. d. Phys. **71**, 187, 1923.

Die Energieniveaus M.

Ähnlich wie im Falle der Niveaus K und L ist es auch möglich, die Niveaus M durch Energieniveaus einzelner Elektronen von Elektronenringen zu ersetzen, wenn man die Ringkombinationen (c) berücksichtigt und die Zahl der Elektronen auf den verschiedenen Ringen M der folgenden Tabelle entnimmt.

Ringkombination	Zahl der Elektronen auf den Ringen								
	K	L_{I}	L_{II}	L_{III}	M_{I}	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_{V}
$KL_{\mathrm{II}}\ M_{\mathrm{IV}}$	5		12					18	
$KL_{\mathrm{III}}\ M_{\mathrm{IV}}$	5			12				18	
$KL_{\mathrm{III}}\ M_{\mathrm{V}}$	5			12					21
$KL_{\mathrm{I}}\ M_{\mathrm{II}}$	5	9				13			
$KL_{\mathrm{I}}\ M_{\mathrm{III}}$	5	9					15		
$KL_{\mathrm{II}}\ M_{\mathrm{I}}$	5		12						
$KL_{\mathrm{III}}\ M_{\mathrm{I}}$	5			12					

Es ist außerdem für die azimutale Quantenzahl s_M

$$s_M = 4$$

zu setzen.

Dann folgen aus (1) folgende Ausdrücke für die Frequenzen der verschiedenen Niveaus M, wenn man berücksichtigt, daß

$$\sigma_{M_{\mathrm{II}}} = \sigma_{13} = 5{,}57;\; \sigma_{M_{\mathrm{III}}} = \sigma_{15} = 6{,}76;$$

$$\sigma_{M_{\mathrm{IV}}} = \sigma_{18} = 8{,}60;\; \sigma_{M_{\mathrm{V}}} = \sigma_{21} = 10{,}56;$$

$$k_{M_{\mathrm{IV}}} = k_{M_{\mathrm{V}}} = 17;\quad k_{M_{\mathrm{II}}} = k_{M_{\mathrm{III}}} = 14$$

M_{II}

L	$\sqrt{\frac{\nu_{M_{\mathrm{II}}}}{R}}$ nach ($I_{M_{\mathrm{II}}}$)	$\sqrt{\frac{\nu_{M_{\mathrm{II}}}}{R}}$ nach B. u. C.
42	5,60	5.52
45	6,36	6,30
47	6,86	6,60
53	8,36	8,31
55	8,86	8,91
56	9,11	9,21
74	13,61	13.74

M_{III}

L	$\sqrt{\frac{\nu_{M_{\mathrm{III}}}}{R}}$ nach ($I_{M_{\mathrm{III}}}$)	$\sqrt{\frac{\nu_{M_{\mathrm{III}}}}{R}}$ nach B. u. C.
42	5.31	5.40
45	6,06	6,16
47	6,56	6,42
51	7,56	7.51
52	7,81	7,78
53	8,06	8,05
56	8,81	8,90
74	13.31	12,93
90	17,31	17,26
92	17,81	17,81

M_{IV}

L	$\sqrt{\frac{\nu_{M_{IV}}}{R}}$ nach $(I_{M_{IV}})$	$\sqrt{\frac{\nu_{M_{IV}}}{R}}$ nach B. u. C.
41	3,85	3,87
42	4,10	4,17
47	5,35	5,28
52	6,60	6,57
62	9,10	9,05
63	9,35	9,26
74	12,10	11,74
78	13,10	12,74
79	13,35	13,01
82	14,10	13,80
90	16,10	16,02
92	16,60	16,55

M_V

L	$\sqrt{\frac{\nu_{M_V}}{R}}$ nach (I_{M_V})	$\sqrt{\frac{\nu_{M_V}}{R}}$ nach B. u. C.
70	10,61	10,64
71	10,86	10,86
73	11,36	11,30
74	11,61	11,54
79	12,86	12,77
81	13,36	13,30
82	13,61	13,53
83	13,86	13,83
90	15,61	15,65
92	16,11	16,16

a) für das Energieniveau M_{II}

$$\sqrt{\frac{\nu_{M_{II}}}{R}} = \frac{(Z - 19{,}57)}{R} \qquad (I_{M_{II}})$$

b) für das Energieniveau M_{III}

$$\sqrt{\frac{\nu_{M_{III}}}{R}} = \frac{(Z - 20{,}76)}{4} \qquad (I_{M_{III}})$$

c) für das Energieniveau M_{IV}

$$\sqrt{\frac{\nu_{M_{IV}}}{R}} = \frac{(Z - 25{,}60)}{4} \qquad (I_{M_{IV}})$$

d) für das Energieniveau M_V

$$\sqrt{\frac{\nu_{M_V}}{R}} = \frac{(Z - 27{,}56)}{4}. \qquad (I_{M_V})$$

In den vorstehenden Tabellen sind die nach $(I_{M_{II}})$ $(I_{M_{III}})$ $(I_{M_{IV}})$ (I_{M_V}) berechneten Zahlenwerte von $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$ mit den von Bohr und Coster gegebenen zusammengestellt.

Man sieht also, daß auch die Niveaus M konsequent nach dem Schema (c) ausgebaut werden können.

(Eingegangen 20. Juli 1928.)

Die „Temperaturverspätung" der Sternschnuppen als Fehlerquelle bei der Berechnung des Druckes in den höchsten Atmosphärenschichten.

Von Wilhelm Anderson.

Wenn ein Meteorit in die irdische Atmosphäre eindringt, wird anfänglich seine Stirnwand von den Luftmolekülen unmittelbar getroffen; in tieferen Atmosphärenschichten dagegen bildet sich um die Vorderseite des Meteorits ein „Luftmantel", welcher die Stirnwand vor den unmittelbaren Zusammenstößen mit ruhenden Luftmolekülen schützt. Nach F. A. Lindemann und G. M. B. Dobson findet während der ersten Periode keine merkliche Erwärmung des Meteorits statt; erst bei der Bildung des „Luftmantels" erfolgt die Erwärmung des Meteorits dank der adiabatischen Kompression der Luft im „Luftmantel". Eine andere Theorie hat C. M. Sparrow aufgestellt, wonach sich der Meteorit schon während der ersten Periode erwärmt. Eine kritische Zusammenfassung dieser beiden Theorien wird von M. Radaković gegeben[1]).

Nach beiden Theorien wird ein Meteorit erst dann sichtbar, wenn er reichlich zu verdampfen beginnt, was natürlich von den Substanzen abhängt, aus denen der Meteorit besteht. Nach Lindemann und Dobson liegt die Temperatur der beginnenden reichlichen Verdampfung zwischen 2000° und 2300° abs., nach C. M. Sparrow zwischen 2000° und 2500° abs.

Möge v die Geschwindigkeit des Meteorits bedeuten, σ die Stefansche Konstante, T die Temperatur des Meteorits und ϱ die Dichte der Atmosphäre. Nach Sparrow besteht zwischen diesen Größen folgende Gleichung:

$$T^4 = k \cdot \frac{v^3 \varrho}{8\sigma}. \qquad (1)$$

Hier bedeutet k eine Konstante, welche für Wasserstoff gleich 0,25 ist und für Stickstoff gleich 0,37 [2]).

Sparrow hat die Gleichung (1) unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die dem Meteorit zugeführte Energiemenge der von ihm ausge-

---

1) M. Radaković, Meteor. Zeitschr. **44**, 326 bis 331, 1927.

2) C. M. Sparrow, Astrophys. Journ. **63**, 102, 1926.

strahlten genau gleich ist. Sparrow ignoriert also jene Energiemenge, die ein Meteorit zur Erhöhung seiner Temperatur verbraucht. Wir wollen jetzt an einem konkreten Falle untersuchen, ob ein solches Ignorieren zulässig ist.

Mag der Meteorit die Form einer Kugel vom Radius r besitzen und mit einer Geschwindigkeit von v cm $\cdot$ sec^{-1} in die irdische Atmosphäre eindringen; die Bahn des Meteorits soll streng vertikal sein. In einem gewissen Moment befindet sich der Meteorit an einer Stelle der Atmosphäre, wo ein Druck von p_1 mm Hg herrscht; nach τ Sekunden befindet sich der Meteorit tiefer, wo der Druck p_2 mm Hg beträgt. In τ Sekunden hat also der Meteorit eine Atmosphärenschicht durchmessen, die einer Quecksilberschicht von (p_2-p_1) mm äquivalent ist. In absoluten Einheiten ist diese Schicht gleich $1{,}3\cdot(p_2-p_1)$ g $\cdot$ cm^{-2}.

Der Meteorit hat in τ Sekunden einen zylindrischen Raum durchstrichen, der eine Atmosphärenmasse von $1{,}3\cdot(p_2-p_1)\cdot\pi r^2$ g enthält. Diese Atmosphärenmasse hat dem Meteorit eine Energiemenge von $1{,}3\cdot(p_2-p_1)\cdot\pi r^2\cdot\frac{v^2}{2}\cdot k$ Erg zugeführt. Im Falle einer Wasserstoffatmosphäre ist nach C. M. Sparrow $k=0{,}25$ zu setzen (s. oben); dann hat also unser Meteorit in τ Sekunden $0{,}1625\cdot(p_2-p_1)\cdot\pi r^2\cdot v^2$ Erg erhalten.

Möge die Temperatur des Meteorits während der oben erwähnten τ Sekunden von T_1^0 bis T_2^0 abs. steigen. Wir wollen annehmen, daß der Meteorit aus reinem Eisen besteht. Bei 0^0 C ist die Dichte von Eisen gleich $7{,}86$ g $\cdot$ cm^{-3}; bei höheren Temperaturen ist sie geringer. Wir wollen sie bei unserem Meteorit gleich 7 g $\cdot$ cm^{-3} ansetzen; seine Masse ist dann gleich $\frac{4}{3}\pi r^3\cdot 7$ g.

Die spezifische Wärme von Eisen bei 0^0 C beträgt 0,1045; wir haben es aber mit viel höheren Temperaturen zu tun, und dann ist die spezifische Wärme größer. So ist z. B. zwischen 0^0 C und 725^0 C die durchschnittliche spezifische Wärme von Elektrolyteisen gleich 0,1467; zwischen 0^0 C und 785^0 C gleich 0,1571 [1]). Wenn wir also die durchschnittliche spezifische Wärme unseres Meteorits gleich 0,15 setzen, so wird dies eher zu wenig als zu viel sein.

Um den Meteorit von T_1^0 bis T_2^0 abs. zu erwärmen, muß man ihm $\frac{4}{3}\pi r^3\cdot 7\cdot 0{,}15(T_2-T_1)\cdot 4{,}186\cdot 10^7 = 5{,}8604\cdot 10^7\cdot(T_2-T_1)\cdot\pi r^3$ Erg zuführen. Außerdem muß dem Meteorit die während der τ Sekunden ausgestrahlte Energiemenge ersetzt werden. Sparrow betrachtet den Meteorit als absolut schwarzen Körper. Ich glaube aber, daß man der Wirklichkeit näher kommen wird, wenn man das Emissionsvermögen des Meteorits gleich etwa 0,8 des schwarzen Körpers annimmt. Der Energieverlust durch Ausstrahlung ist dann gleich:

$$0{,}8\cdot 4\pi r^2\cdot\sigma\int_0^\tau T^4\,dt = 1{,}8432\cdot 10^{-4}\pi r^2\int_0^\tau T^4\,dt \text{ Erg,}$$

wenn man $\sigma = 5{,}76\cdot 10^{-5}$ setzt[1]). Außerdem verliert der Meteorit Energie durch Verdampfung seiner Substanz, aber diesen Energieverlust wollen wir ignorieren.

Wir nehmen an, daß die dem Meteorit zugeführte Energiemenge ausschließlich zu seiner Erwärmung und zur Deckung des Energieverlustes durch Ausstrahlung verbraucht wird. Dann haben wir:

$$0{,}1625(p_2-p_1)\pi r^2 v^2 = 5{,}8604\cdot 10^7(T_2-T_1)\pi r^3 + 1{,}8432\cdot 10^{-4}\pi r^2\int_0^\tau T^4\,dt,$$

oder:

$$0{,}1625\,(p_2-p_1)\,v^2 = 5{,}8604\cdot 10^7\,(T_2-T_1)\,r + 1{,}8432\cdot 10^{-4}\int_0^\tau T^4\,dt. \quad (2)$$

Bekanntlich ist die Masse der meisten Sternschnuppen von der Größenordnung eines Milligramms; wir können darum setzen $\frac{4}{3}\pi r^3\cdot 7 = 0{,}001$ g; dann ist $r = 0{,}032429 32$ cm. Weiter wollen wir $v = 7\cdot 10^6$ cm $\cdot$ sec^{-1} annehmen, was etwa der Geschwindigkeit der Leoniden entspricht. Nach Einführung dieser beiden Werte in (2) erhalten wir:

$$p_2-p_1 = 2{,}386798\cdot 10^{-6}\,T_2-T_1) + 2{,}314851\cdot 10^{-17}\int_0^\tau T^4\,dt. \quad (3)$$

Vor seinem Eintritt in den Erdschatten wird der Meteorit von der Sonne beschienen und erwärmt. Setzt man die Solarkonstante gleich 1,925 cal $\cdot$ cm$^{-2}\cdot$ min^{-1} [2]), so erhält man rund 276^0 abs. für die Temperatur des („schwarzen" oder auch „grauen") Meteorits, wie es nicht schwer zu berechnen ist. Es ist klar, daß vor dem Eindringen in die irdische Atmosphäre die Temperatur des Meteorits nicht höher als 276^0 abs. sein kann.

Aus (3) folgt, daß

$$p_2-p_1 > 2{,}386798\cdot 10^{-6}\,(T_2-T_1) \quad (4)$$

1) Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, 5. Auflage. Berlin 1923, S. 1243.

1) Landolt-Börnstein, 1. Ergänzungsband. Berlin 1927, S. 320.

2) The Observer's Handbook for 1928, published by the Roy. Astron. Soc. of Canada. Toronto 1928, S. 71.

ist. Setzen wir hier $T_1 \leqq 276^0$, $T_2 = 1000^0$, $p_1 = 0$, so erhalten wir:

$$p_2 > 1{,}72804 \cdot 10^{-4} \text{ mm } Hg.$$

Also damit sich unser Meteorit (dessen anfängliche Temperatur $\leqq 276^0$ abs. beträgt) bis 1000^0 abs. erwärmen kann, muß er bis zu einer Atmosphärenschicht vordringen, wo der Druck größer ist als $1{,}72804 \cdot 10^{-4}$ mm Hg. Wir wollen aber vorläufig annehmen, daß der Druck dort genau gleich $1{,}72804 \cdot 10^{-4}$ mm Hg ist.

Wenn wir die Temperaturen des Meteorits als Ordinaten eintragen und die entsprechenden Zeitpunkte als Abszissen, so erhalten wir eine bestimmte Temperaturkurve. Teilen wir aber diese Kurve in genügend kleine Abschnitte, so kann jeder Abschnitt annähernd als eine Gerade angesehen werden. Für unsere Genauigkeitsansprüche erweist es sich als völlig genügend, die Kurve so zu teilen, daß jeder Abschnitt einer Ordinatendifferenz von $T_2^0 - T_1^0 = 100^0$ entspricht. Wir nehmen also an, daß die Temperatur des Meteorits in τ Sekunden von T_1^0 bis $T_1^0 + 100^0 = T_2^0$ linear ansteigt. Zu einem bestimmten Moment t während dieses Anstiegs ist also die Temperatur gleich $T = T_1 + \frac{100t}{\tau}$. Für $t = 0$ ergibt diese Gleichung $T = T_1$, für $t = \tau$ dagegen $T = T_1 + 100 = T_2$, wie es auch sein muß.

Jetzt können wir für jeden Abschnitt der Temperaturkurve die Integration in (3) leicht ausführen. Es ist nämlich:

$$\int_0^\tau T^4\,dt = \int_0^\tau \left(T_1 + \frac{100t}{\tau}\right)^4 dt$$
$$= \int_0^\tau \left(T_1^4 + 400\,T_1^3\,\frac{t}{\tau} + 6\cdot 10^4\,T_1^2\,\frac{t^2}{\tau^2} + 4\cdot 10^6\,T_1\,\frac{t^3}{\tau^3} + 10^8\,\frac{t^4}{\tau^4}\right) dt$$
$$= \tau\,(T_1^4 + 200\,T_1^3 + 2\cdot 10^4\,T_1^2 + 10^6\,T_1 + 2\cdot 10^7).$$

Wir nehmen an, daß die höchsten Atmosphärenschichten aus reinem Wasserstoff bestehen, und daß dort eine konstante Temperatur von 0^0 C $= 273^0$ abs. herrscht. Für unsere isotherme Wasserstoffatmosphäre gilt die Gleichung:

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-\frac{g(h_1 - h_2)}{R\cdot 273}}.$$

Hier bedeutet g die Anziehungsbeschleunigung, R die Gaskonstante, h_1 die Höhe, wo der Druck p_1 herrscht, und h_2 diejenige, wo p_2 herrscht.

Unser Meteorit fällt in vertikaler Richtung mit der Geschwindigkeit von $7 \cdot 10^6$ cm · sec^{-1}; die Entfernung $h_1 - h_2$ cm durchmißt er in τ Sekunden; wir können also schreiben: $h_1 - h_2 = 7 \cdot 10^6 \tau$. Weiter wollen wir die Gaskonstante R für H_2 gleich $4{,}15 \cdot 10^7$ setzen und die Anziehungsbeschleunigung $g = 980$. Jetzt haben wir $\frac{p_1}{p_2} = e^{-0{,}6055\,\tau}$.

Nun ist aber $g = 980$ die Anziehungsbeschleunigung an der Erdoberfläche. In den höchsten Atmosphärenschichten ist sie merklich kleiner. Ich glaube daher besser zu tun, wenn ich einfach $\frac{p_1}{p_2} = e^{-0{,}5\,\tau}$ annehme, oder $p_2 = p_1 e^{+0{,}5\,\tau}$.

Jetzt können wir statt (3) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} p_1\,(e^{0{,}5\,\tau} - 1) = {} & 2{,}386798 \cdot 10^{-4} \\ & + 2{,}314851 \cdot 10^{-17}\,\tau\,(T_1^4 + 200\,T^3 \\ & + 2\cdot 10^4\,T_1^2 + 10^6\,T_1 + 2\cdot 10^7). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese transzendente Gleichung gestattet τ zu berechnen, wenn p_1 und T_1 gegeben sind.

Wir haben oben angenommen, daß die Temperatur des Meteorits bis 1000^0 abs. steigt, wenn er bis zu einer Atmosphärenschicht vordringt, wo ein Druck von $1{,}72804 \cdot 10^{-4}$ mm Hg herrscht.

Zuerst setzen wir also $T_1 = 1000$ und $p_1 = 1{,}72804 \cdot 10^{-4}$ und erhalten aus (5) durch ein Näherungsverfahren $\tau = 0{,}35945$ sec; dies ergibt weiter $p_2 = p_1 e^{0{,}5\,\tau} = 2{,}0683 \cdot 10^{-4}$ mm Hg. Wir sehen also, daß nach 0,35945 Sekunden die Temperatur des Meteorits von 1000^0 bis 1100^0 abs. gestiegen ist, wobei er bis zu einer Atmosphärenschicht vorgedrungen ist, wo der Druck $2{,}0683 \cdot 10^{-4}$ mm Hg beträgt.

Temperatur des Meteorits	Druck in der Atmosphärenschicht, wo der Meteorit die bezeichnete Temperatur erhält	
	Masse des Meteorits 0,001 g	Masse des Meteorits unendlich klein
1000^0 abs.	$1{,}728 \cdot 10^{-4}$ mm Hg	$3{,}635 \cdot 10^{-5}$ mm Hg
1100^0 ,,	$2{,}068 \cdot 10^{-4}$,,	$5{,}323 \cdot 10^{-5}$,,
1200^0 ,,	$2{,}442 \cdot 10^{-4}$,,	$7{,}539 \cdot 10^{-5}$,,
1300^0 ,,	$2{,}860 \cdot 10^{-4}$,,	$1{,}038 \cdot 10^{-4}$,,
1400^0 ,,	$3{,}336 \cdot 10^{-4}$,,	$1{,}397 \cdot 10^{-4}$,,
1500^0 ,,	$3{,}890 \cdot 10^{-4}$,,	$1{,}840 \cdot 10^{-4}$,,
1600^0 ,,	$4{,}546 \cdot 10^{-4}$,,	$2{,}383 \cdot 10^{-4}$,,
1700^0 ,,	$5{,}334 \cdot 10^{-4}$,,	$3{,}036 \cdot 10^{-4}$,,
1800^0 ,,	$6{,}289 \cdot 10^{-4}$,,	$3{,}816 \cdot 10^{-4}$,,
1900^0 ,,	$7{,}441 \cdot 10^{-4}$,,	$4{,}738 \cdot 10^{-4}$,,
2000^0 ,,	$8{,}817 \cdot 10^{-4}$,,	$5{,}817 \cdot 10^{-4}$,,
2100^0 ,,	$1{,}043 \cdot 10^{-3}$,,	$7{,}070 \cdot 10^{-4}$,,
2200^0 ,,	$1{,}231 \cdot 10^{-3}$,,	$8{,}516 \cdot 10^{-4}$,,
2300^0 ,,	$1{,}446 \cdot 10^{-3}$,,	$1{,}017 \cdot 10^{-3}$,,
2400^0 ,,	$1{,}692 \cdot 10^{-3}$,,	$1{,}206 \cdot 10^{-3}$,,
2500^0 ,,	$1{,}969 \cdot 10^{-3}$,,	$1{,}420 \cdot 10^{-3}$,,

Jetzt machen wir eine ähnliche Berechnung für den nächsten Temperaturabschnitt (von 1100^0 bis 1200^0 abs.). Wir setzen $T_1 = 1100$ und $p_1 = 2{,}0683 \cdot 10^{-4}$ und erhalten $\tau = 0{,}33216$ sec

und $p_2 = 2,4420 \cdot 10^{-4}$ mm Hg. Diese Berechnungen habe ich bis 2500° abs. fortgeführt (s. die Tabelle; die Zahlen sind dort etwas abgerundet).

Sparrows Gleichung (1) bezieht sich auf einen absolut schwarzen Meteorit. Wir haben aber die Emissionsfähigkeit des Meteorits gleich 0,8 angenommen; in diesem Falle würde Sparrows Gleichung lauten:

$$T^4 = \frac{kv^3\varrho}{8\sigma \cdot 0,8} = \frac{kv^3\varrho}{6,4\sigma}. \qquad (6)$$

Ich habe nach dieser Formel die Dichten, und nach den Dichten die Drucke berechnet (s. die letzte Kolumne der Tabelle).

Bei der Ableitung von Sparrows Gleichung wird jene Energiemenge ignoriert, die der Meteorit zu seiner Erwärmung verbraucht. Eine solche Annahme wäre streng richtig, wenn die spezifische Wärme oder die Masse des Meteorits unendlich klein wäre. Doch schon bei einer Masse von 0,001 g führt die erwähnte Annahme (im Falle eines Eisenmeteorits) zu recht beträchtlichen Fehlern, wie dies aus unserer Tabelle hervorgeht. So z. B. müßte ein unendlich kleiner Meteorit, damit er die Temperatur 2100° abs. erreichen könnte, bis zu einer Atmosphärenschicht vordringen, wo der Druck $7,070 \cdot 10^{-4}$ mm Hg beträgt. Dagegen würde ein Meteorit von 0,001 g in dieser Schicht eine Temperatur von weniger als 1900° abs. erhalten. Erst in einer merklich tieferen Schicht, wo der Druck $1,043 \cdot 10^{-3}$ mm Hg beträgt, wird der Meteorit 2100° abs. erreichen.

Wir haben es also mit einer „Temperaturverspätung" des schwereren Meteorits gegenüber dem leichteren zu tun. In Wirklichkeit wird diese „Temperaturverspätung" noch etwas größer sein als nach unserer Tabelle. Wir haben nämlich die durchschnittliche spezifische Wärme des Eisens gleich 0,15 gesetzt, was etwas zu wenig ist. Dann haben wir angenommen, daß der Meteorit die Temperatur 1000° abs. erhält, wenn er bis zu einer Atmosphärenschicht vordringt, wo ein Druck von $1,72804 \cdot 10^{-4}$ mm Hg herrscht. Letztere Zahl ist aber ebenfalls etwas zu klein.

Es ist klar: je größer die Masse des Meteorits ist, desto größer ist auch die „Temperaturverspätung". Wenn aber der Meteorit nicht vertikal fallen sollte, sondern in schräger Richtung, so wird die „Temperaturverspätung" geringer sein.

Sollten die höheren Atmosphärenschichten nicht aus Wasserstoff bestehen, sondern aus Stickstoff, so würde die „Temperaturverspätung" sehr viel größer sein[1]).

1) Für Stickstoff ist nach C. M. Sparrow $k = 0,37$ zu setzen (s. oben). Damit unser vertikal fallender Meteorit (Masse = 0,001 g) eine Temperatur von 1000° abs. erreichen kann, muß er bis zu einer Atmosphärenschicht vordringen, wo ein Druck von über $1,167596 \cdot 10^{-4}$ mm Hg herrscht. Unter diesem Druck und bei 0° C ist die Dichte des Stickstoffs gleich $\varrho = 1,9211 \cdot 10^{-10}$ g cm^{-3}. Aus Gleichung (6) erhalten wir jetzt $T = 2868°$ abs. Also wird ein unendlich kleiner Meteorit die Temperatur 2868° abs. in derselben Atmosphärenschicht erhalten, wo die Temperatur unseres größeren Meteorits nicht einmal 1000° abs. betragen kann.

Man darf jedoch nicht vergessen, daß wir den Energieverlust durch Verdampfung bis jetzt vollständig ignoriert haben. Dieser Energieverlust mag aber in Wirklichkeit eine recht bedeutende Rolle spielen (wenigstens bei höheren Temperaturen).

Schlußfolgerung.

Will man aus dem Aufleuchten der Sternschnuppen die Drucke berechnen, welche in den entsprechenden Atmosphärenschichten herrschen, so darf man (besonders bei vertikal fallenden Meteoriten) die „Temperaturverspätung" nicht ignorieren; sonst erhält man Drucke, die beträchtlich niedriger sind als in Wirklichkeit. Sollten die höchsten Atmosphärenschichten nicht aus Wasserstoff, sondern aus Stickstoff bestehen, so dürfte man die „Temperaturverspätung" erst recht nicht ignorieren.

Dorpat (Estland), 2. August 1928.

(Eingegangen 7. August 1928.)

Der Wehnelt-Unterbrecher als Generator elektromagnetischer Schwingungen.

Von W. M. Schulgin.

Wenn wir den Wehnelt-Unterbrecher in ein Gleichstromlichtnetz einschalten oder an den Gleichrichter des Wechselstromes mit 100 Volt Spannung und in den Weg des Stromes einen Rheostaten und eine Selbstinduktion, so fängt der Unterbrecher an zu arbeiten, d. h. in dem Stromkreise entsteht ein zerhackter Strom. Die Zahl der Unterbrechungen kann bei geeigneter Wahl der Selbstinduktion und der Teile des Unterbrechers bis auf 2000 in der Sekunde steigen. Zur vollkommenen Arbeit des Unterbrechers soll er so eingeschaltet werden, daß das Platinende als Anode dient. Im entgegengesetzten Fall entsteht keine Unterbrechung des Stromes. Der auf dem Platin sich entwickelnde Wasserstoff wird von ihm absorbiert, erhitzt es über die Norm, und dadurch wird der Unterbrecher rasch untauglich.

W. Mitkewitsch nimmt an, daß „in dem Wehnelt-Unterbrecher Erscheinungen vorgehen, die denen im Lichtbogen analog sind und daß die Einseitigkeit des Arbeitens des Unterbrechers, d. h. die Notwendigkeit das Platin mit dem positiven Pole der Stromquelle zu verbinden, eigentlich dadurch bedingt ist,



daß im entgegengesetzten Falle das Platin bei Erhitzung imstande ist einen Elektronenstrom auszuscheiden"[1]).

S. Thomson, Goldhammer u. a. wiesen darauf hin, daß der Prozeß Schwingungscharakter trägt, weil der Unterbrecher nur bei Einschalten einer Selbstinduktion, gewöhnlich die Primärspule des Rumkorff-Induktors, vollkommen arbeitet[2]).

Dieser Umstand bewog mich einige Versuche zu unternehmen, die das Ziel verfolgten die optimalen Bedingungen zur Entstehung der Schwingungen zu klären.

Bei der Untersuchung verschiedener Anordnungen kam ich zu folgendem Schema, das auf der Fig. 1 zu sehen ist.

Das Platin schalte ich an den negativen Pol, was nicht mit dem klassischen Schema der Einschaltung des Wehnelt-Unterbrechers übereinstimmt. Wird das Platin als Kathode statt

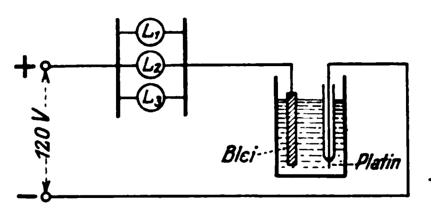


Fig. 1.

als Anode gebraucht, wie das gewöhnlich der Fall ist, so haben wir dem Apparat seine Eigenschaft als Unterbrecher genommen, doch dafür haben wir eine Quelle elektrischer Schwingungen mit einem erheblichen Nutzkoeffizient.

Äußerlich ändert sich der Charakter der Erscheinung: anstatt der schwachen, flackernden Erhitzung der Platinelektrode und des häufigen Auftretens der Gasbläschen, haben wir ein helles gleichmäßiges Leuchten des Platindrahtes und ein seltenes (1—2 mal in der Sekunde) Ausscheiden der Bläschen des Wasserstoffes, die langsam von dem erhitztem Platin herabgleiten.

Diese Erscheinung ist der Erscheinung des Lichtbogens analog. Deshalb kann sie auch nicht dauernd sein: die Platinelektrode wird rasch durch starke Erhitzung vernichtet. Doch kann die Stromstärke verkleinert werden, folglich auch die Stromdichte, und zwar zu einem sehr geringen Maße.

Dieses mache ich folgendermaßen: als Rheostat in dem Kreis des Unterbrechers (Fig. 1) nehme ich 3 Glühlampen, die parallel geschaltet sind: zwei von ihnen haben Kohlenfaden zu 10 NK und eine ist eine Metallfadenlampe zu 100 Watt. Ich schalte die Anordnung an das Gleichstromlichtnetz mit 120 Volt Spannung. Der Platindraht in der Elektrode wird mit 0,25 mm Durchmesser genommen mit einem 2—3 mm hervorstehenden Ende. Wir schließen den Kreis durch Eindrehen der zwei Kohlenfadenlampen. Dann bemerken wir auf dem Platindraht ein regelmäßiges Ausscheiden von Wasserstoffbläschen. Die Lampen brennen fast mit voller Stärke, weil der Widerstand des Gefäßes gering ist. Doch im Gefäß gehen außer der gewöhnlichen Elektrolyse noch keine Erscheinungen vor sich. Jetzt wird die Lampe mit 100 Watt eingeschraubt: es entsteht ein starkes Leuchten der Kathode;

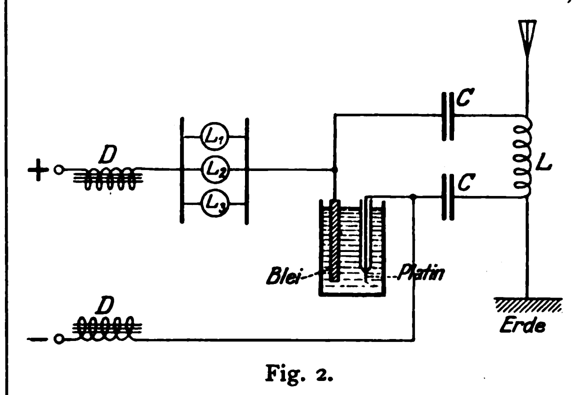


Fig. 2.

sie erhitzt sich sehr und kann untauglich werden. Rasch wird nun die große Lampe ausgeschraubt; dadurch wird der Strom verringert; das Leuchten ist weiter zu bemerken, wenngleich die Erscheinung keinen gefährlichen Charakter mehr trägt, da die Stromstärke gering ist (an 0,1 Ampere): die zwei Kohlefadenlampen sind kaum erhitzt.

Auf solche Weise ist das „Zünden" dieses „Lichtbogens" dem des wirklichen Lichtbogens ähnlich. Wenn er aus jeweiligen Gründen auslöscht (dann tritt nur die Elektrolyse ein), so muß zur Wiederzündung auf einen Augenblick die große Lampe eingedreht werden, um sie nachher sogleich auszudrehen. Diese Manipulation ist ganz ähnlich der bei der Zusammenführung und Auseinanderführung der Kohlen in dem gewöhnlichen Lichtbogen. Bei zwei Lampen mit Kohlenfäden im Rheostat geht durch das Gefäß, wie schon gesagt, ein sehr schwacher Strom, das Platin erwärmt sich schwach, und die Elektrode der angeführten Größe leistet auf eine oder zwei Stunden beständige Arbeit.

Ich stellte nun nach dem Schema der Fig. 2 einen Schwingungskreis zusammen, bei dem die Spule *L* und die Kondensatoren *CC* von verschiedener Größe sind. (Von ihrer Größe hängt die Wellenlänge ab). Die Drosselspulen *DD* sind nicht unbedingt nötig. Ich gebrauche eine 5 m lange Zimmerantenne, die Erdung ist wie

1) O. D. Chwolson, Handbuch d. Physik, **5**, 227.

2) S. Thomson u. Marchant. Electrician **42**, 731, 841, 1899. Goldhammer, Wied. Ann. (4) **9**, 1070, 1902.

gewöhnlich. Die Platinelektrode des Wehnelt-Gefäßes schließe ich unbedingt dem negativen Pole der Gleichstromquelle an. Der auf solche Art geschaltete Wehnelt-Unterbrecher ist ein ausgezeichneter Generator für elektromagnetische Wellen. Um mich davon zu überzeugen, stellte ich im anliegenden Zimmer eine gleiche Antenne auf und schaltete den gewöhnlichen Detektor-Empfänger ein. Dabei bemerkte ich ohne Mühe die Ausstrahlung, d. h. die Ausstrahlung ist sehr stark.

Auch in einem anderen Gebäude, in einem Abstande von 10—40 m von dem Sender, ist die Ausstrahlung, die sich dem Detektor-Empfänger und der Zimmerantenne überträgt, noch sehr merklich.

Hier führe ich einige Zahlen an, die die Abgabe der elektromagnetischen Wellen des beschriebenen Generators charakterisieren.

Diesen Generator nenne ich „elektrolytischer Generator". Zimmerantenne — Höhe 2 m, Länge des horizontalen Teiles — 5 m. Die Länge der ausgestrahlten Wellen $\lambda =$ an 200 m.

A. Abstand zwischen den Antennen 10 m (zwischen massiven Wänden):

1. Sender: Spannung der Elektroden Platin—Blei 50 Volt. Stromstärke im Kreise des „Unterbrechers" 0,15 Amp.

2. Empfänger: Stromstärke in dem Detektorkreise mit einem gewöhnlichen Galendetektor 0,7 M.A., gemessen mit einem Milliamperemeter von 10 Ω.

B. Der Abstand zwischen den Antennen beträgt 40 m (dazwischen eine Reihe von massiven Wänden):

1. Sender: Dieselbe wie im vorigen Versuche.

2. Empfänger: Die Stromstärke in dem Detektorkreise mit einem gewöhnlichen Galendetektor $32 \cdot 10^{-7}$ Amp. gemessen mit einem Galvanometer von ca. 600 Ω. Bei der gewöhnlichen Polung des Wehnelt-Unterbrechers, *Pb* an —, *Pt* an +, bemerkte ich nur eine schwache Ausstrahlung; solche schwache Strahlung erhält man auch mit dem analog arbeitenden Gleichrichter von Mitkewitsch[1]).

Ich kam zu folgenden Schlußfolgerungen:

1. Der Schwingungscharakter des Wehnelt-Unterbrechers beruht hauptsächlich auf der Erhitzung der Platinelektrode.

2. Wird sie als Kathode gebraucht, so bekommen wir eine höhere Temperatur, und seine Arbeitsweise wird genau dieselbe wie die des abgekühlten Lichtbogens, d. h. wir bekommen elektromagnetische Schwingungen.

1) O. D. Chwolson, Handbuch der Physik, **4**, 528.

3. Wird das Platin als Kathode gebraucht und mit einem stärkeren Strome „gezündet", so kann man den Strom allmählich verringern und auf solche Weise Lichtbogenschwingungen bis zu sehr kleinen Leistungen bekommen. (Bei 50 Volt können weniger als 0,1 Amp. bekommen werden, doch wird die Entladung Bogencharakter zeigen.)

4. In dem Wehnelt-Unterbrecher, der in umgekehrter Polung eingeschaltet wird (Platin- zum Minuspol) haben wir den einfachsten und billigsten Generator zur Erzeugung elektromagnetischer Schwingungen.

5. Es hat Sinn ihn für große Leistungen auszubauen und den Charakter der von ihm ausgestrahlten Schwingungen zu untersuchen.

Die ausgeführten Versuche unternahm ich in dem von mir verwalteten Physikalischen Laboratorium der Arbeiterfakultät der landwirtschaftlichen Akademie Timirjasew in Moskau.

(Eingegangen 2. April 1928.)

Zur Frage der Erzeugung kurzer elektromagnetischer Wellen.

Von M. Grechowa.

In der vorhergehenden Arbeit des Verfassers[1]) ist von ihm in Übereinstimmung mit Gill und Morell[2]) gezeigt worden, daß in den untersuchten Schaltungsschemas, die Barkhausenschen Schwingungen, gleich wie im Falle sonst üblicher Generatoren, als Schwingungen eines an die Röhre angeschlossenen Kreises betrachtet werden können. In derselben Arbeit wurde erklärt, daß Messungen mit besonders hergestellten Elektronenröhren im Gange sind (Fig. 1), die

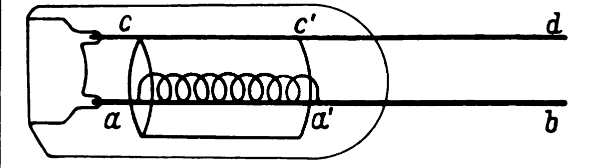


Fig. 1.

es erlauben werden, der Generatorenberechnung eine präzisere Genauigkeit zugrunde zu legen. In vorliegender Arbeit sind die Ergebnisse der Messungen angeführt, die mit solchen Röhren vorgenommen wurden.

Die Stifte aa' und cc', auf denen das Gitter und die Anode befestigt waren, bildeten eine

1) Zeitschr. f. Phys. **38**, 621, 1926.
2) Phil. Mag. **44**, 161, 1922.

Tabelle I.

Länge des Kreises $l = 12,5$ cm		$l = 22,5$		$l = 27,5$		$l = 36,5$		$l = 47,5$		$l = 57,5$	
λ_{ber}	λ_{mess}	λ_{ber}	λ_{mess}	λ_{ber}	λ_{mess}	λ_{ber}	λ_{mess}	λ_{ber}	λ_{mess}	λ_{ber}	λ_{mess}
221		296		758		918		1063		1165	
128	117	174	170	333		392	380*)	467,6	450*)	334	
		129	128	199	Geringe Energie	241		286		237	
88,6		94	94	139	136	169	174	205		183	186
	74	75		107	104,5[3]	130	143	158	181,5	149	
67		63,4		86	82,5	105		128		125	126[1]
54		54,6	56	72		88	80	107,6		107	
45	48[4]			54		76		90,6	94	94,7	96
				48	49,8	66,6	62	81		84,5	
						59,3		72,5	73,5[2]	76	75[1]
						53,5		65		69	
						48,7	48	59,5	60	63	
								54,6	57	58,8	57
										54,6	
										51	52

direkte Fortsetzung der äußeren Leitungsdrähte[1]) und gehörten mit denselben zum Generatorkreis (Fig. 1). Messungen waren in Generatoren folgender drei Grundarten durchgeführt worden: Zweiröhrengenerator[2]) [3]), Barkhausens[1]) [4]) Gill und Morells[4]) [5]).

Ein Zweiröhrengenerator mit Elektronenröhren solcher Art kann als ein Schwingungskreis, der aus zwei parallelen Leitern mit Kapazitäten an den Enden besteht, betrachtet werden. Die Schwingungsdauer eines solchen Systems ergibt sich aus der Gleichung (1), analog der Gleichung Abrahams, d. h.:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\xi l (a_0 - a_l)}{\xi^2 a_l a_0 - l^2}, \qquad (1)$$

wo

$$a_0 = \frac{c_0}{c_1}$$

$$a_l = \frac{c_l}{c_1}$$

$$\xi = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

und c_1 die Kapazität der Längeneinheit,
c_0 die konzentrierte Kapazität bei $x = 0$
c_l die konzentrierte Kapazität bei $x = l$
bedeuten.

Jene Werte von λ, die den Wurzeln dieser transzendentalen Gleichung entsprechen, bestimmen die Obertöne des Systems.

1) Elektronenröhren derselben Art waren bei Scheibe gebaut. — Jahrb. d. drahtl. Tel. **27**, 1, 1926.
2) Großes positives Potential am Gitter und kleine positive Null oder negatives Potential an der Anode.
3) Zeitschr. f. Phys. **38**, 621, 1926.
4) Physik. Zeitschr. **21**, 1, 1920.
5) Phil. Mag. **44**, 161, 1922.

Der erste Einzelfall: die Röhre ist an einem Ende angebracht, das zweite Ende bleibt offen (Generator von Barkhausen und von Scheibe).

$$a_l = c_l = 0; \quad \operatorname{tg} \xi = -\frac{\xi c_0}{c_1 l}.$$

Der zweite Einzelfall: an einem Ende ist die Röhre angebracht, am anderen Ende ein Kondensator von großer Kapazität[1]) (Generator von Gill und Morell). Der Fall ist von Abraham untersucht worden.

$$\text{Hier sind } a_l = c_l = \infty \cdot \xi \operatorname{tg} \xi = \frac{c_1 l}{c_0}.$$

In der nachstehenden Tabelle I sind Zahlenwerte für einen Zweiröhrengenerator gegeben. In der Rubrik λ_{mess} sehen wir die Messungswerte für die Wellenlänge, in der Rubrik λ_{ber} die nach Gleichung (1) berechneten Wellenlängen. Analoge Tabellen können auch für einen Einröhrengenerator angeführt werden.

$Da = 12$ mm, $Dg = 4{,}88$ mm, $Df = 0{,}1$ mm.
Anodenlänge = 30 mm, Gitterlänge = 32 mm,
Windungszahl des Gitters = 24.

In der ersten Spalte dieser Tabelle ist eine Reihe berechneter Obertöne angegeben, in der zweiten sehen wir die experimentell laut der Wellenlänge erhaltenen Obertöne. Die Zahl der experimentell erhaltenen Obertöne ist bedeutend geringer, als die Zahl der berechneten. Jedoch muß in Betracht gezogen werden, daß diese Berechnung durchaus einseitig ist, da sie auf die energetischen Bedingungen für die Möglichkeit der Entstehung eines jeden einzelnen Obertons nicht eingeht.

1) Abraham. Theorie der Elektrizität. Bd. I, 6. Aufl.

In der Tabelle I sind alle Wellenlängen, mit Ausnahme der mit * und Nummern bezeichneten, für $E_a = 0$ erhalten und liegen auf der Kurve der maximalen Energie $\lambda \sqrt{Eg} =$ Const; sie bilden zugleich die Schnittpunkte dieser Kurve mit den Geraden, die die Abhängigkeit der λ von Eg darstellen (Fig. 4)[1]. In der Tabelle sind mit Nummern bezeichnet solche Obertöne, die bei $E_a \neq 0$ erhalten wurden:

1. $E_a = -8\ V$
2. $E_a = -8{,}5\ V$
3. $E_a = -10\ V$
4. $E_a = -18\ V$

und mit dem Zeichen * jene, die bei Betriebsbedingungen erzeugt wurden, welche ursprünglich verschieden von den Barkhausenschen sind, und zwar:

bei $E_a = 200$—$220\ V$ und
$E_g = 10$—$20\ V$.

Auf diese Weise, durch Veränderung der Betriebsverhältnisse (d. h. Variation der Röhrenregelung), werden verschiedene Obertöne des Systems erhalten; möglicherweise könnte bei vollständigerer und gründlicherer Forschung die Tabelle I noch ergänzt werden. Der zweite Typ der neugebauten Röhren besteht aus folgendem: das Gitter und der Stift, auf dem das Gitter angebracht ist, bilden eine Schleife (*abcd*, Fig. 2). Ferner bezeichnen wir diese Schleife als inneren Schwingungskreis, zum Unterschied vom äußeren (*aklm*). Diese Röhren wurden nur in Einröhrenschaltungen von Barkhausen und von Gill und Morell geprüft. Als Ergebnis wurde für jede Röhre außer den gewöhnlichen Schwingungen, einem Energiemaximum der Kurve $\lambda \sqrt{Eg} =$ Const entsprechend, eine Welle von bestimmtem Spannungsgebiet gefunden. Diese Welle wurde bei großen Werten von Eg erhalten und liegt nicht auf der Kurve $\lambda \sqrt{Eg} =$ Const. Ihre Wellenlänge steht in keinem Zusammenhang mit der Länge des äußeren Kreises; nur Spannungsänderungen veränderten ihren Wert um 1—2 Proz. Es wurden vier Röhren dieser Art gebaut mit verschiedener Windungszahl der

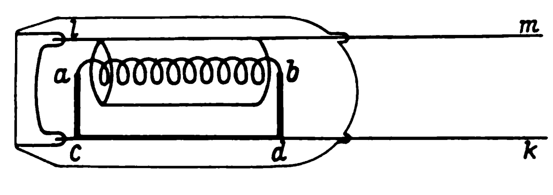


Fig. 2.

1) Zeitschr. f. Phys. **38**, 621, 1926.

Gitterspirale, aber mit gleichem Durchmesser von Gitter, Anode und Glühdraht. Die Messungsergebnisse sind in der Tabelle II zu sehen. In der ersten Spalte sind die vollen Längen der inneren Schwingungskreise mit auseinandergezogener Gitterspirale angebracht; in der zweiten Spalte die Wellenlängen und in der dritten die Spannungen, die der maximalen Intensität dieser Wellenlänge entsprechen. Wie aus der Tabelle II zu ersehen ist, genügen diese Wellen

Tabelle II.

Länge des inneren Kreises	λ	Eg	$\lambda \sqrt{Eg}$
28,5	24	180	321
23,5	20	230	304
21,5	19	270	311,6
16,5	15,5	386	303,8

der Gleichung $\lambda \sqrt{Eg} =$ Const ungefähr, und die Wellenlänge stimmt leidlich mit der Länge des inneren Schwingungskreises überein. Das Auftreten dieser Wellen kann man nach dem Anodenstrom beurteilen, ebenso, wie im Falle des äußeren Kreises. Im äußeren Schwingungskreise finden ebenfalls stehende Wellen statt. Sie sind jedoch nur in der Gitterantenne scharf ausgeprägt.

In allen beschriebenen Versuchen wurden die Wellenlängen in einem Lecherschen System gemessen, das über dem äußeren Schwingungskreise gespannt wurde.

Diese Ergebnisse stimmen vollkommen überein mit denen von Prof. D. A. Roschansky[1]), welcher gezeigt hat, daß jede Röhre eine Reihe von inneren Schwingungskreisen enthält, die durch Zuführungen der Leitungen zum Glühdraht, zur Anode und zum Gitter gebildet werden, und daß es durch die Wahl passender Betriebsverhältnisse möglich ist, beliebige von diesen Schwingungskreisen zu fördern (d. h. beliebige innere Schwingungskreise zu erregen).

In dem Falle, in dem der äußere Schwingungskreis mit dem inneren, wie in der Fig. 2, verbunden ist, kann man die Schwingungen in die Lecherschen Drähte leiten. Die Frage über die Art der Verbindung der Drähte mit dem inneren Kreise ist jedoch nicht näher untersucht worden.

Als Zusammenfassung ist zu wiederholen, daß bei Röhren zweiter Art, je nach den Betriebsbedingungen der Röhre, dieser oder jener der Obertöne des äußeren Schwingungskreises erzielt oder Schwingungen im inneren Kreise erzeugt werden können.

1) C. R. de l'ac. des sciences de U. S. S. R. 1928.

Diese Arbeit ist in der vakuumtechnischen Abteilung des Staatlichen Elektrotechnischen Prüfungsinstituts ausgeführt worden.

Dem Leiter der Abteilung, Herrn Prof. Dr. W. J. Romanoff möchte ich hier meinen Dank für manchen wertvollen Hinweis und guten Rat ausdrücken.

(Eingegangen 4. September 1928.)

Die Ungleichförmigkeit des Magnetfeldes in der Mittenebene eines Solenoids.

(Berichtigung.)

Von H. Hermann.

Die Berechnung der genannten Ungleichförmigkeit durch den Verf.[1]) enthält ein Versehen (Verwechslung der scheinbaren Länge von Stromfäden mit der scheinbaren Länge des Aufpunktlotes), welches die Rechnung unrichtig macht. Die Verbesserung der Rechnung erübrigt sich, weil eine strenge Lösung für jeden Punkt der Mittenebene des zylindrischen Solenoids aus einer Entwicklung von G. M. Minchin[2]) entnommen werden kann.

Das Innenfeld eines Solenoids kann mathematisch dargestellt werden als Überlagerung eines gleichsinnigen, engen (also ungeschwächten) Solenoidfeldes von gleicher Stromwindungszahl je Längeneinheit, auf dessen Achse der Aufpunkt liegt, mit dem Felde der gleichförmig magnetisiert gedachten Endkreise des gegebenen Solenoids, Flächendichtezahl gleich Stromwindungszahl je Längeneinheit[3]). In der Mittenebene ist der Gestaltsfaktor des letzteren, das andre abschwächenden Feldes nach Minchin (Gl. 18) für beide Kreise zusammen

$$2\,\Omega = 4\pi + 4KK'_\Theta - 4KE'_\Theta - 4EK'_\Theta - 4k'K\sin\Theta.$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist (s. Fig. 1, welche einen Achsenschnitt des Solenoids darstellt):

$$k' = \cos\alpha = \frac{\varrho'}{\varrho};$$

mit der Bezeichnung $k = \sin\alpha$ ist weiter

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \qquad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$K'_\Theta = \int_0^{\Theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}; \qquad E'_\Theta = \int_0^{\Theta} \sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

die elliptischen Integrale, vollständig und komplementär unvollständig, der ersten und zweiten Gattung.

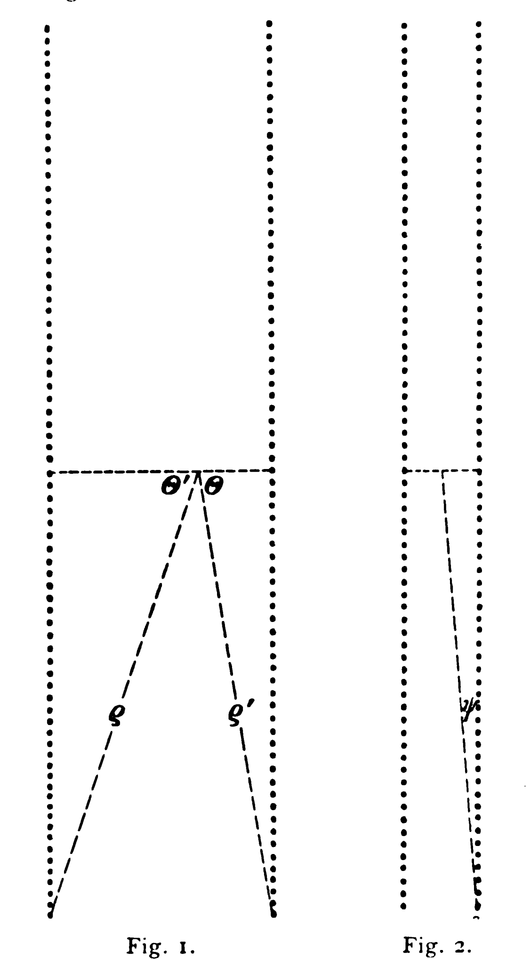


Fig. 1. Fig. 2.

Im Mittelpunkt des ganzen Solenoids (s. Fig. 2) wird $\varrho' = \varrho$; $k = 0$; $k' = 1$; $K = E = \pi/2$; $E'_\Theta = \int_0^\Theta \sqrt{1-\sin^2\varphi}\; d\varphi = \sin\Theta$; $2\,\Omega = 4\pi(1-\sin\Theta)$; mit $\psi = \pi/2 - \Theta$ ergibt sich der bekannte Ausdruck für den Gestaltsfaktor in der Mitte eines endlichen Solenoids $G = 4\pi\cos\psi$.

Beschreibt man den Achsenschnitt des Solenoids mit Hilfe der vom Verf. früher benutzten Größe $2\,\mathrm{tg}\,\psi = v$, so wird für den Mittelpunkt $\mathrm{tg}\,\Theta = v/2$, daher der Gestaltsfaktor der Feldstärke

1) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. **34**, 50—51.

2) Phil. Mag. (5) **37**, 210—211 (1894). In der Def. v. A_Θ, S. 210 Abs. 2, muß es statt KK' heißen KK'_Θ wie der Vergleich mit S. 209 zeigt. Die linke Seite der ersten Gl. (17) heißt $\frac{dk}{dz}$. Dagegen ist die Bezeichnung Θ bei ϱ' und Θ' bei ϱ kein Versehen, sondern beabsichtigt.

3) Siehe z. B. Voigt, Kompendium d. theoret. Physik II, S. 250 (Leipzig 1896).

$$G = 4\pi : \sqrt{1 + \frac{v^2}{4}} = 4\pi\left(1 - \frac{v^2}{8} + \frac{3v^4}{128} \cdots\right).$$

Am Rande der Mittenebene des Solenoids dagegen ist $\Theta = \frac{\pi}{2}$; daher werden alle Integrale vollständig und da nach einem Legendreschen Satz $KE' + K'E - KK' = \pi/2$ ist, wird

$$2\Omega_{\text{Rand}} = 2\pi - 4k'K.$$

k' wird vom Rand $1 : \sqrt{1 + v^2}$; k wird $v : \sqrt{1 + v^2}$. Mit Hilfe der Entwickelung von K nach Potenzen von k

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k}{64} \cdots\right)$$

erhält man

$$G_{\text{Rand}} = 2\pi\left(1 + \frac{1 + \left(\frac{v^2}{4(1+v^2)} + \frac{9v^4}{64(1+v^2)^2} \cdots\right)}{\sqrt{1 + v^2}}\right)$$

$$= \left[1 + \left(1 + \frac{v^2}{4} - \frac{v^4}{4} + \frac{9v^4}{64}\right)\left(1 - \frac{v^2}{2} + \frac{3v^4}{8}\right)\right]$$

$$= 4\pi\left(1 - \frac{v^2}{8} + \frac{17v^4}{128} \cdots\right).$$

Somit ist der Randüberschuß bis auf höhere Glieder

$$G_{\text{Rand}} - G_{\text{Mitte}} = 4\pi \cdot \frac{7}{64} v^4.$$

Soll das Feld in der Mitte sich von demjenigen einer endlosen Spule weniger als $^1/_2$ Proz. unterscheiden, so muß man etwa $v = {}^1/_6$ wählen. In diesem Fall ist $k = \sqrt{^1/_{37}} = \sin 9^0 28'$; mit diesem Argument findet man in den Legendreschen Tafeln[1]) $K = 1{,}5817$; hieraus berechnet man $G : 4\pi = 0{,}9966$ am Rande. In der Mitte ist $G : 4\pi = \cos 85^0 14' = 0{,}9965$. Der Randüberschuß beträgt also nur $^1/_{10000}$. Nach der Reihenentwicklung beträgt er $^7/_{77944}$. Es ist somit nicht notwendig, bei Konstruktionen auf ihn Rücksicht zu nehmen; die von dem wahren Drahtquerschnitt herrührende Ungleichförmigkeit überdeckt die von der endlichen Länge herrührende jedenfalls bei $v = {}^1/_6$ noch völlig.

1) Zu finden unter anderem in Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl. S. 68 (Leipzig 1923).

(Eingegangen 29. August 1928.)

Erwiderung.

Von R. v. Hirsch.

Die Bemerkungen[1]), die Herr Rupp zu unserer in dieser Zeitschrift erschienenen Notiz[2]) veröffentlicht hat, veranlassen mich zu einer Klarstellung, welche ich für notwendig halte. Wenn in einem schwierigen Gebiet der experimentellen Forschung Meinungsverschiedenheiten auftreten, so kann nur eine rücksichtslose Kritik des Experiments diejenige Klarheit schaffen, welche für die Weiterarbeit den Boden sichert; Abmilderungen haben keinen Zweck. Solche Meinungsverschiedenheiten bestehen zwischen uns mehrfach; um ihre Natur klarzustellen, bespreche ich im folgenden den bereits unter Punkt 3 der früheren Mitteilung[1]) erwähnten Fall.

Es handelt sich dort um die Untersuchung des Einflusses eines elektrischen Feldes auf die Polarisation des abklingenden H-Kanalstrahls. Die einschlägige Arbeit des Herrn Rupp[3]) beruht auf der Ausmessung von Streifenverschiebungen eines Babinet-Kompensators, welche dort in Tafel XV abgebildet sind. Wie Herr Rupp jetzt in einer Anmerkung seiner Bemerkungen zugibt, sind diese Bilder „durch Kopieren des Originals auf Filmstreifen, Übereinanderlegen der Filmstreifen und Wiederkopieren durch sie hindurch" hergestellt; außerdem sind die auf den so verstärkten Bildern sichtbaren Streifenverschiebungen wesentlich durch Bewegungen der Nullpunktsmarke des Babinet bedingt, die viel größer sind als der Effekt selbst. Das Tafelbild kann also als Beleg für denselben nicht gelten, ist aber ausdrücklich als solches angeführt. Dies ist um so bedenklicher, als eben dieses Bild der einzige Teil der Veröffentlichung ist, der die direkt gemessene Größe, die Streifenverschiebung, noch enthält. Die im Text angeführten Kurven gebenPolarisationswerte, die aus jenen Streifenverschiebungen durch eine nichts weniger als selbstverständliche Umrechnung erhalten sind. Erst eingehendes Studium und wiederholte Rückfragen haben mir die Erkenntnis vermittelt, daß es sich bei den eigentlichen Messungen um Verschiebungen von Hundertstel eines Streifenabstandes handelt, denen die viel größere „parallaktische" Nullpunktswanderung überlagert ist. Dieser minimale Effekt mußte an den Kopien mittels Komparator ausgemessen werden, da die verwaschenen Streifen, die der Babinet mit dem zu höchstens 20 Proz. polarisierten Licht gab, dafür offenbar direkt nicht zu verwenden waren. Eine solche Messung ist, wenn überhaupt möglich, im höchsten Maße unsicher. Hätte Herr Rupp sich entschlossen, wie wir es ihm nahelegten, die direkten Versuchsergebnisse (Streifenverschiebungen) zu veröffentlichen, so wäre dabei auch klar geworden, daß die periodische Schwankung im ganzen in einem Bereich von $^1/_{10}$ Streifenverschiebung liegt, also nur ein ganz kleines Phasenintervall des heran-

1) E. Rupp, Physik. Zeitschr. **29**, 624, 1928.
2) R. v. Hirsch u. R. Döpel, Physik. Zeitschr. **29**, 394, 1928.

1) E. Rupp, Ann. d. Phys. **85**, 515, 1928.



gezogenen unharmonischen Oszillators umfaßt; was einem großen Teil der theoretischen Folgerungen den Boden entzieht. Vor allem aber: Wenn eine Beobachtung, die bestenfalls an der äußersten Grenze des Meßbaren liegt, ohne Angabe der eigentlich gemessenen Größe nur in umkopierter und umgerechneter Form ohne jede Fehlerkritik mitgeteilt wird, so daß jeder Maßstab für die Genauigkeit und Sicherheit des Resultats fehlt, so widerspricht dies Verfahren den bewährten Grundsätzen der experimentellen Physik.

Es ist nicht meine Absicht, diese Polemik fortzusetzen oder auf die anderen strittigen Punkte auszudehnen, z. B. auf die in den „Bemerkungen" neuerdings publizierten Polarisationswerte des abklingenden Kanalstrahls; ich kann aber nicht verschweigen, daß mir auch diese im Licht seither angestellten Versuche widerspruchsvoller und unverständlicher denn je erscheinen.

Bemerkung zu E. Rupp: Zur Polarisation des Kanalstrahllichtes in schwachen elektrischen Feldern.

Von W. Hanle.

Der Verfasser beschreibt in dieser Arbeit (E. Rupp, Annalen, Bd. **85**, 515, 1928) eine von ihm erhaltene Phasenverschiebung bei der elektrischen Beeinflussung des Kanalstrahlleuchtens. Eine Notiz von R. von Hirsch u. R. Döpel (Physik. Zeitschr. **29**, 394, 1928) und eine Erwiderung von E. Rupp (Physik. Zeitschr. **29**, 625, 1928) veranlassen mich zu folgender Bemerkung.

Herr Rupp bezieht sich in der Deutung seiner Beobachtungen auf die von mir früher angestellten gleichartigen Versuche bei der Resonanzfluoreszenz von Quecksilber (Zeitschr. f. Phys. **35**, 346, 1926). Hierbei wurde festgestellt, daß die durch polarisierte Einstrahlung angeregte Schwingung eines Oszillators durch ein parallel zur Schwingungsrichtung angelegtes elektrisches Feld überhaupt nicht und durch ein Feld senkrecht dazu nur sehr unwesentlich beeinflußt wird. Hingegen beschreibt der Oszillator in einem elektrischen Feld, das schief (speziell in 45^0) zu seiner ursprünglichen Schwingungsrichtung angelegt wird, eine komplizierte Bewegung, die sich in einer Elliptizität verbunden mit einer teilweisen Depolarisation des von ihm ausgesandten Lichtes äußert. Theoretisch ist dies ohne weiteres zu verstehen, wenn man von der Vorstellung eines anharmonischen Oszillators ausgeht. Ein schiefstehendes elektrisches Feld verursacht eine zeitlich sich ändernde Phasenverschiebung der Komponenten des anharmonischen Oszillators parallel und senkrecht zur Feldrichtung, was vollständig den Beobachtungen entspricht (Elliptizitätseffekt. Siehe Hanle a. a. O. S. 350).

Im Kanalstrahlrohr ist das von den Atomen ausgestrahlte Licht parallel zum Kanalstrahl polarisiert, was schon aus Symmetriegründen folgt. Die den leuchtenden Atomen zuzuordnenden Oszillatoren stehen also parallel bzw. senkrecht zum Strahl. Herr Rupp hat ein elektrisches Feld senkrecht zum Kanalstrahl benutzt und dabei eine Phasenverschiebung erhalten, wie sie bei den entsprechenden Fluoreszenzbeobachtungen nur bei schiefstehendem Feld eintritt. Worauf diese Beobachtung von Herrn Rupp zurückzuführen ist, ist nicht klar, jedenfalls ist sie mit dem Verhalten weder eines anharmonischen Oszillators noch irgendeines andern Modells im elektrischen Feld zu vereinen.

Nachschrift.

Von E. Rupp.

Mein Versuchsmaterial zur Polarisation des Kanalstrahllichtes in schwachen elektrischen Feldern ist in der in den „Bemerkungen" angezeigten, in den „Annalen der Physik" erscheinenden Veröffentlichung niedergelegt.

BESPRECHUNGEN.

P. Pringsheim, Fluoreszenz und Phosphoreszenz im Lichte der neueren Atomtheorie. 3. Aufl. 8^0. VI u. 357 S. Mit 87 Abb. Berlin, J. Springer. 1928. Brosch. RM. 24.—, geb. RM. 25.20.

Mit seiner 3. Auflage hat das bekannte Buch ein neues Gewand angelegt, wie es durch die eingehendere Behandlung theoretischer Gesichtspunkte und angesichts der Fülle neuen experimentellen Materials erforderlich wurde. Aufgenommen in die Sammlung „Struktur der Materie", bereichert und ergänzt es diese vortreffliche Bücherreihe außerordentlich. Ich verweise nur auf die Theorie der Resonanzspektra und auf das Kapitel „Störungen der Resonanzstrahlung" durch Zusammenstöße, zwei Gebiete, die innerhalb der Sammlung unter anderen Gesichtspunkten bereits behandelt sind. Die Anzahl neuer Untersuchungen auf dem Gebiet der Phosphoreszenz und Fluoreszenz ist erstaunlich, zählt



doch das sehr ausführliche Literaturverzeichnis am Schluß des Buches in der kurzen Zeit von 1922 bis 1. 8. 1927 fast 300 Abhandlungen auf, darunter grundlegend wichtige für die Erkenntnis des Atombaues. Die kritische Sichtung und zusammenfassende Bearbeitung so vieler einzelnen Untersuchungen hat eine wesentliche Erweiterung des Buches notwendig gemacht. Die Art, wie der Verfasser diese Aufgabe gelöst hat, im Gleichgewicht zwischen experimentellen Einzeltatsachen und theoretischem Überblick, muß als glänzend gelungen hervorgehoben werden.

Als wesentlich Neues seien erwähnt: Im Kapitel Resonanzstrahlung die Fluoreszenz und Absorbierbarkeit der Thalliumlinien; im Kapitel „Fluoreszenz und Resonanzspektra von zweiatomigen Molekülen" die Erweiterung unserer Kenntnisse über Absorption und Emissionsbanden des Jods, ferner über Fluoreszenzerregung unter gleichzeitiger Dissoziation und Ionisation. Ein ganz umgearbeitetes Kapitel behandelt die Leuchtdauer und Polarisation der Fluoreszenzstrahlung von Gasen und den Einfluß elektrischer und magnetischer Felder. Die wichtige Erkenntnis der metastabilen Zustände wird im Kapitel „Störung der Resonanzstrahlung durch Zusammenstöße sehr erweitert behandelt, ebenso die Wirkung benachbarter Moleküle auf den Polarisationszustand der Resonanzstrahlung. Das Kapitel Fluoreszenz und Phosphoreszenz flüssiger und fester Substanzen sucht allgemeine Gesetzmäßigkeiten herauszuschälen, wobei den Erscheinungen des lichtelektrischen Effektes eine wichtige Rolle zugeordnet werden muß. Die Hauptgruppen der fluoreszierenden und phosphoreszierenden Substanzen werden in gesonderten Kapiteln dargestellt. So steht an der Spitze der Fluoreszenz und Phosphoreszenz organischer Verbindungen das Benzol, dem sich die Spektren einfacher Benzolderivate und der Farbstofflösungen anschließen. Relativ die wenigste Änderung hat das Kapitel Lumineszenz komplexer anorganischer Moleküle erfahren, während das letzte Kapitel: Durch Fremdatome aktivierte anorganische Phosphore mit einer ganzen Reihe neuer experimenteller Untersuchungen erweitert wurde, die allerdings mehr Einzelheiten betreffen und deren theoretische Zusammenfassung zum Teil noch aussteht.

Als Lenard vor etwa 30 Jahren die Untersuchung der Phosphore großzügig in Angriff nahm, stand er nahezu vereinzelt da; heute ist die Zahl der Forscher auf dem Gebiet der Fluoreszenz und Phosphoreszenz außerordentlich angewachsen und doch ist die Fülle der Tatsachen noch lange nicht erschöpft. Gerade die letzte Zeit hat uns gezeigt, wo wichtige Schätze zu neuer Erkenntnis verborgen liegen. Ich erwähne nur die von Pohl und seinen Schülern so fruchtbar in Angriff genommenen Untersuchungen über die Alkalihalogenidphosphore und die von Raman entdeckte Erscheinung des Auftretens der ultraroten Schwebungsfrequenzen zur eingestrahlten Linie. So kann ich nur den Wunsch wiederholen, den Gudden bei der letzten Auflage des Buches ausgesprochen hat: „Möge bald eine neue Auflage notwendig werden." E. Rupp.

Handbuch der anorganischen Chemie, herausgegeben von R. Abegg, Fr. Auerbach u. I. Koppel. Vierter Band, dritte Abteilung, erster Teil. Die Edelgase von Dr. E. Rabinowitsch. XII und 522 Seiten. Mit 50 Figuren und 232 Tabellen im Text. Leipzig, Verlag von S. Hirzel. 1928. Brosch. RM. 45.—, geb. RM. 48.—.

Dieser neue Band des großen Werkes ist, wie schon im Vorwort betont wird, durch die Eigenschaften der darin besprochenen Elemente weit mehr auf eine physikalische Behandlung angewiesen als es sonst in Büchern chemischen Inhalts der Fall ist, aus dem einfachen Grunde, weil „chemische" Eigenschaften im gewöhnlichen Sinne den Edelgasen fast ganz fehlen. Der Autor ist dadurch in eine nicht ganz leichte Zwangslage gebracht: er muß ein in der Hauptsache physikalisches Buch schreiben, das in der Hauptsache für Chemiker bestimmt ist, und in dem er infolgedessen vieles nicht als bekannt voraussetzen darf, was einesteils für das Verständnis unentbehrlich ist und andernteils doch eigentlich nicht in dieses Buch hineingehört, sondern eher wohl einen Einleitungsband für das ganze Handbuch bilden sollte. Ein Beispiel möge dies erläutern: die Analyse der Edelgasspektra hat sicher mehr zum Verständnis vom Aufbau ihrer Atome beigetragen als irgendwelche anderen Untersuchungen. Um das zu zeigen, muß die ganze Bohrsche Theorie von der Aufstellung der Frequenzbedingung bis zur Deutung komplizierter Multiplettsysteme wenigstens in den Hauptprinzipien dargestellt werden. Das würde natürlich mit genau demselben Recht in den Bänden des Handbuchs geschehen, deren Inhalt die Alkalimetalle oder die Eisengruppe bilden: auch dort geben die Spektra Aufschluß über die Natur des Atomaufbaus, nur stehen eben dort so viele eigentlich „chemische" Dinge für den Chemiker mehr im Vordergrund, daß daneben diese physikalischen Fragen vernachlässigt werden, während es hier bei den Edelgasen gerade umgekehrt liegt. Der Verfasser hat sich aus dieser schwierigen Lage mit großem Geschick gezogen, seine Darstellung solcher eigentlich die Voraussetzung und nicht den Inhalt des Buches bildenden Gegenstände ist sehr knapp, anschaulich, mit einem absoluten Minimum von Mathematik belastet und dabei im wesentlichen doch korrekt.

Was die Einteilung der Stoffe betrifft, so wurde, um mich der einleitenden Worte des Verfassers zu bedienen, versucht, die physikalischen Eigenschaften nach dem Mechanismus ihrer Entstehung zu gruppieren, statt sie in sonst üblicher Weise in mechanische, optische, elektrische usw. einzuordnen. Im ersten Hauptteil (S. 3—161) werden Vorkommen, Darstellung, Nachweis und Anwendung der Edelgase besprochen. es folgen im zweiten Abschnitt (S. 162—191) die Kerneigenschaften: Isotopie, Kernbau, Kernumwandlung. Als atomare Eigenschaften sind im dritten Teil (S. 192—337) die Erscheinungen zusammengefaßt, die zum Aufbau der „äußeren Elektronenhülle" des Atoms in Beziehung stehen: a) Spektrallinien und Anregungsspannungen; b) Valenzbetätigung, Stellung im periodischen System usw.; c) Verhalten im elektrischen und magnetischen Feld, elektrische Entladungen. Alle Erscheinungen, zu deren Verständnis das „strukturlose" Atommodell der kinetischen Theorie im wesentlichen ausreicht, bilden den Inhalt des vierten Hauptteils: a) Gasdichte und Effusion; b) innere Reibung, Diffusion, Wärmeleitung; c) Zustandseigenschaften, Phasengleichgewichte, Löslichkeit und Adsorption. Ein 1468 Nummern umfassendes Literaturverzeichnis (S. 461—514) sowie ein Sachregister vervollständigen den Band.

Das Verständnis des Textes wird an vielen Stellen durch in einfacher Strichzeichnung ausgeführte Diagramme erleichtert, vor allem aber bilden die

äußerst zahlreichen tabellarischen Zusammenstellungen von Zahlenwerten eine sehr wertvolle Bereicherung des auch sonst in technischer Hinsicht gut ausgestatteten Buches: mit ihrer Hilfe wird wohl jede quantitativ untersuchte Eigenschaft der Edelgase — handle es sich um „klassische" Daten wie die Molekularrefraktion und die innere Reibung, oder um atomtheoretische wie die Besetzungszahlen der Elektronenschalen oder die Absorptionsniveaus im angeregten Atom — dem Nachschlagenden aufs bequemste zugänglich gemacht. P. Pringsheim.

P. Lenard, Ferd. Schmidt u. R. Tomaschek, Phosphoreszenz und Fluoreszenz. I. Teil (Handbuch der Experimentalphysik XXIII, 1.) 8°. 741 S. Mit 162 Abb. Leipzig, Akad. Verlagsges. m. b. H. 1928. M. 69.—, geb. RM. 71.—.

Das Gebiet der Phosphoreszenz ist wie kein zweites mit Lenards Namen verknüpft und so wird man sich besonders freuen, daß er es unternommen hat zusammen mit zwei bewährten Mitarbeitern die vielen Untersuchungen hierüber zusammenzustellen und einheitlich zu ordnen unter den von ihm entwickelten theoretischen Gesichtspunkten. Man wird hierfür um so dankbarer sein, als eine ganze Anzahl der grundlegenden Untersuchungen in den nicht überall zugänglichen Berichten der Heidelberger Akademie niedergelegt sind. Auch enthält das Buch eine ganze Reihe bisher unveröffentlichter Einzelheiten, so das Absorptionsspektrum von *ZnSMn* und die besonders schöne Aufnahme eines phosphoreszierenden Gipskristalls, im eigenen Phosphoreszenzlicht photographiert.

Die an phosphoreszierenden Körpern, den Phosphoren, auftretenden Erscheinungen sind so mannigfaltig, daß die zuerst beobachtete Wirkung des Nachleuchtens nach vorheriger Lichtbestrahlung zu einem engen Teilgebiet des Ganzen geworden ist. Die Primärvorgänge der Lichtabsorption und des lichtelektrischen Effektes (inneren und äußeren) stehen heute im Vordergrund zu weiterem Eindringen; ja es wird gut sein, wenn man Beobachtungen der Lichtemission zurückstellt und den Aufbau der Phosphore von kristallographischen Gesichtspunkten aus neu durchstudiert.

Den vorliegenden ersten Teilband leitet eine lesenswerte historische Übersicht ein. Kapitel II, Allgemeines über Erdalkaliphosphore, enthält im wesentlichen einen Bericht über die grundlegende Untersuchung von Lenard und Klatt, die Methoden zur Bereitung der Phosphore, zur Untersuchung ihrer Emission und ihrer Erregungsverteilung und die damit gewonnenen Ergebnisse: An- und Abklingen der Emission, Temperaturlage der Emissionsbanden, spektrale Erregungsverteilung, Dauer-, Momentan- und Ultravioletterregung. Hier werden auch die Grundlagen der Lenardschen Zentrenvorstellung entwickelt, die in einem besonderen Kapitel des 2. Teilbandes weiter ausgebaut werden sollen. Mit Recht ist diese Übersicht über die Erdalkaliphosphore an die Spitze des ganzen Werkes gestellt, wurden doch an diesen Phosphoren fast alle Gesetzmäßigkeiten zuerst gefunden. Der wichtige Begriff der Lichtsumme und dessen erste fruchtbare Anwendung bei Messung der Abklingung werden im III. Kapitel eingeführt. Die Abklingungsmessungen geben hierbei Aufschluß über die Verteilung der Dauerzentren im Phosphor. Das theoretische Verständnis des Erregungsvorgangs wurde durch Untersuchung der lichtelektrischen Wirkung gewonnen (Kapitel IV). Hier treten zu den spektroskopischen Untersuchungsmethoden elektrische Methoden, die zu dem wichtigen Ergebnis führten, daß das Phosphoreszenzzentrum bei der Erregung ein Elektron nach außen abgibt. An Untersuchungen des lichtelektrischen Oberflächeneffektes schließen sich an: Aktinodielektrische Wirkung, Leitfähigkeitserregung bei Hitzeaustreiben, durch Kathodenstrahlen und durch Röntgenstrahlen und schließlich Einfluß elektrischer und magnetischer Felder auf das Leuchten. Das V. Kapitel faßt die Kenntnisse über die Dauererregungsverteilung der Phosphore zusammen. Im VI. Kapitel finden wir eine äußerst ausführliche Beschreibung der Herstellung und der Leuchteigenschaften aller bekannt gewordener phosphoreszierender Stoffe, gegliedert in Fremdstoffphosphore, Reinstoffphosphore und organische Phosphore. Daran schließen sich allgemeine Ergebnisse an Schmalbanden- und Linienphosphoren (Kapitel VII). Die Zerstörung der Leuchtfähigkeit durch Druck und durch Licht, Erscheinungen, die sich mit photochemischen Problemen berühren, werden im VIII. Kapitel abgehandelt. Die bisherigen Versuche zur absoluten Messung der Energieaufspeicherung für je ein Phosphorzentrum sind in Kapitel IX zusammengestellt. Schließlich enthält Kapitel X die bisherigen indirekten Messungen über Lichtabsorption und die aus Lichtsummen erschlossenen Energieverhältnis- und Ausbeutemessungen an Erdalkaliphosphoren. Damit schließt der I. Teilband.

Die Fülle an Versuchsmethoden und Versuchsergebnissen ist so groß, daß kaum auf Einzelheiten eingegangen werden kann. Der vorliegende Band, ein Handbuch der Phosphoreszenz innerhalb des Handbuchs der Experimentalphysik, ist nicht nach Art mancher Handbuchartikel abgefaßt nur typische Fälle zu bringen, die den Fremdling auf dem Gebiet über das ihn interessierende möglichst schnell orientieren. Vielmehr wird eine erschöpfende Darstellung des gesamten Stoffes geboten.

Der Verlag hat den Band sehr gut ausgestattet.

E. Rupp.

W. Bronkhorst, Kontrast und Schärfe im Röntgenbilde. Aus dem Niederländischen übertragen von H. Lossen. (Fortschr. a. d. Geb. der Röntgenstrahlen, Ergänzungsbd. 39.) Fol. 104 S. Mit 48 Fig. im Text, 4 Bildtafeln und 30 Kurventafeln. Leipzig, Georg Thieme. 1927. RM. 15.—, geb. RM. 16.50.

Die Röntgendiagnostik ist bisher noch im wesentlichen ein Gebiet der reinen Empirie, die Güte einer Aufnahme ist Sache persönlicher Übung und Erfahrung und eine gegenseitige Verständigung bei widerstreitenden Meinungen aus diesen Gründen vielfach nicht leicht. Die vorliegende Schrift behandelt experimentelle Untersuchungen, die der Verf. unter einfach gewählten und leicht zu übersehenden Versuchsbedingungen ausgeführt hat. Gestützt auf diese und unter Heranziehung sonstiger Kenntnisse versucht er, ein möglichst vollständiges Bild zu geben von allen den Umständen, durch welche die Qualität einer Aufnahme bedingt bzw. beeinflußbar ist.

Ein erster Teil behandelt die Frage der Kontraste im Bilde (Schattenunterschiede, physikalisch definiert als Differenzen der Schwärzungen), untersucht durch Aufnahmen einer Aluminiumtreppe in

einem geeigneten Wasserphantom und zwar in Abhängigkeit von der Belichtungsdauer (Grundschwärzung), Strahlenhärte, Streustrahleneinwirkung, bei Gebrauch und Nichtgebrauch von Verstärkungsschirmen. Die Ergebnisse sind in zahlreichen Kurven zusammengefaßt, deren Diskussion lehrt, daß durch geeignete Wahl der Betriebsbedingungen die Kontrastqualität weitgehend beeinflußt und also den jeweiligen Umständen von vornherein bewußt angepaßt werden kann. Der zweite Teil behandelt das Problem der Bildschärfe. Zunächst allgemein die Faktoren, durch die sie bedingt ist; sodann in systematischen Untersuchungen Brennfleckformen zahlreicher Röhrentypen und ihren Einfluß auf die Bildschärfe, schließlich den Einfluß von Härte, Streustrahlung und Verstärkungschirm. Letzterer ist für gute Kontrastwirkung sehr vorteilhaft und bei richtiger Anwendung nicht nachteilig für die Schärfe.

Die Abhandlung ist ganz im Hinblick auf die medizinische Diagnostik geschrieben; vom Standpunkt des Physikers erscheint die Darstellung mitunter ein wenig breit und umständlich. Das mindert jedoch nicht den Wert der hier niedergelegten experimentellen Ergebnisse, die in ihren Einzelheiten auch auf anderen Gebieten der Röntgendurchleuchtung von mancherlei Nutzen sein werden.

H. Kulenkampff.

K. Requa, Beitrag zur Beurteilung vom Temperaturfeld und Wärmespannungen in mechanisch abgebremsten Scheiben. (Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens Heft 301.) Din A4. IV und 13 S. Mit 1 Abb. und 14 Zahlentafeln. Berlin, VDI-Verlag. 1928. RM. 2.50.

Das Heft behandelt die theoretische Lösung des Problems der Temperaturspannungen in mechanisch abgebremsten Scheiben. Dies ist nur möglich durch Verbindung folgender drei Einzelprobleme: 1. dynamische Aufgabe: Festlegung der in der Zeiteinheit durch Bremsen in Reibungsarbeit umgewandelten kinetischen Energie als Funktion der Zeit; 2. wärmetechnisches Problem: Berechnung des dieser Funktion entsprechenden Temperaturfeldes; 3. Festigkeitsfrage: Ermittlung des einer bestimmten Temperaturverteilung entsprechenden Spannungsfeldes.

Für die gesuchten Größen wurden einfache partielle Differentialgleichungen aufgestellt, die alsdann zur Erleichterung der Auswertung in totale Differentialgleichungen umgewandelt wurden. Durch die Anwendung der Differenzenrechnung ergab sich dann ein Weg zum Auffinden von Näherungslösungen.

An einem Rechnungsbeispiel ist die Durchführbarkeit und Zuverlässigkeit der entwickelten Methode für Fälle der Praxis bestätigt. Dabei zeigt sich, daß bei großen, mechanisch abgebremsten Energien erhebliche Wärmespannungen auftreten.

Das Heft ist ein wertvoller Beitrag in der Reihe der Forschungsarbeiten des Vereins Deutscher Ingenieure.

Reiher.

E. Becker u. O. Föppl, Dauerversuche zur Bestimmung der Festigkeitseigenschaften, Beziehungen zwischen Baustoffdämpfung und Verformungsgeschwindigkeit. (Forschungsarbeiten a. d. Gebiete d. Ingenieurwesens Heft 304.), 4⁰. IV und 28 S. Mit 39 Abbildungen und 12 Zahlentafeln. Berlin, VDI-Verlag. 1928. Broch. RM. 4,50 (für VDI-Mitglieder RM. 4.—).

Bereits unterhalb der Elastizitäts- und der Proportionalitätsgrenze treten kleine bleibende Verformungen auf, deren Abhängigkeit von der Spannung durch den statischen Zerreißversuch nicht erfaßt werden kann. Hierfür sind nur Dauerwechselbeanspruchungen geeignet, da bei diesen die Verformungen leichter meßbar sind als bei Dauer-Zug-Druckversuchen. Das gilt auch für statische Versuche zur Bestimmung der kleinen bleibenden Dehnungen. Diese stehen in enger Beziehung zur Schwingungsfestigkeit, der Grenze der Beanspruchung, die bei beliebig häufigem Wechsel ohne Bruch ertragen wird. Ihr entspricht eine Schwingungsverformung; die Beziehung zwischen beiden ergibt sich auf statischem Wege. Jene beiden Grenzwerte sind in früheren Arbeiten bestimmt.

Hier wird zunächst der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit mittels Biegungsschwingungen an Stäben aus Duralumin untersucht. Die Bruchstelle hängt sehr von Zufälligkeiten und der Art der Verletzung ab. Bei absichtlichen Beschädigungen setzt der Bruch an einer kleinen Stelle derselben ein und verläuft senkrecht zur Stabachse. Weiterhin wird das Verhältnis der Biegungs- zur Schubschwingungsfestigkeit im Mittel für Eisen zu 1,6—1,7, für veredeltes Duralumin zu 1,75 festgestellt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die Abhängigkeit der Baustoffdämpfung von der Verformungsgeschwindigkeit für Drehzahlen von 0—260 Min. in der bereits früher von Busemann (Diss. Braunschweig 1924) beschriebenen Drehschwingungsmaschine bzw. durch statische Messungen (Hysteresisschleife) bestimmt. Dabei wurde die Dämpfung bei verschiedenen Beanspruchungen aus der thermoelektrisch gemessenen Temperaturerhöhung des Probestabs bei Dauer- und Anlaufversuchen und aus der eingeleiteten Arbeit berechnet. Die Beziehung zwischen Randverformung, Randschubspannung und Schwingungsausschlag des verdrehten Stabes wurde durch statische Eichung ermittelt. Die Untersuchungen an einem Eisen- und einem Kupferstab ergaben, daß bei gleicher Verformung die Dämpfung völlig unabhängig von der Verformungsgeschwindigkeit ist. Aus den sonst bekannten Versuchen folgt, daß dies auch für wesentlich höhere Drehzahlen gilt.

Daraus folgt, daß man die Versuchsdauer durch Verwendung möglichst hoher Wechselzahlen in der Zeiteinheit wesentlich verkürzen, und daß man die Baustoffdämpfung auch aus statischen Versuchen bestimmen kann.

Berndt.

N. Semenoff u. A. Walther, Die physikalischen Grundlagen der elektrischen Festigkeitslehre. 8⁰. 168 S. Mit 116 Textfig. Berlin, J. Springer 1928. Geb. RM. 16.50.

Während der elektrische Durchbruch durch Gase bereits seit ungefähr 20 Jahren, nämlich seit dem Erscheinen der ersten grundlegenden Arbeiten von Townsend, Gegenstand zahlreicher experimenteller und theoretischer Untersuchungen gewesen ist, hat ein systematisches und intensives Studium der analogen Vorgänge in festen Isolierstoffen erst seit wenigen Jahren, nämlich eigentlich erst seit dem



Erscheinen der hier grundlegenden Arbeit von K. W. Wagner im Jahre 1922, eingesetzt. Obgleich nun die Aufklärung des Durchbruchsmechanismus nicht nur für die Bedürfnisse der Elektrotechnik von größter Bedeutung ist, sondern auch rein physikalisch eine Menge höchst reizvoller und interessanter Probleme bietet, waren es in Deutschland doch mit vereinzelten Ausnahmen Elektrotechniker — an erster Stelle sei hier Rogowski genannt — die sich damit ernstlich beschäftigt und die Pionierarbeit geleistet haben. Russischen Physikern gebührt das Verdienst, eben auch als Physiker an diesen Fragen Interesse gefunden und in zielbewußter Arbeit die experimentellen Methoden, die Beibringung eines umfangreichen Beobachtungsmaterials und den Ausbau der Theorie wesentlich gefördert zu haben. Es ist deshalb zu begrüßen, daß nun zwei dieser verdienten Forscher das bisher in wenig übersichtlicher Weise zerstreute Material zusammenfassend dargestellt haben und daß diese Darstellung in schöner Ausstattung den deutschen Physikern und Technikern zugänglich gemacht worden ist.

Der Titel des Buches ist allerdings etwas zu allgemein gewählt und läßt deshalb vielleicht mehr erwarten, als erfüllt wird. Denn wenn auch eine erneute Darstellung der Durchbruchsvorgänge in Gasen hier nicht notwendig war, so beschäftigen sich die Verfasser abgesehen von dem Inhalt der beiden mehr einleitenden Abschnitte über „Die experimentellen Methoden zur Erforschung von elektrischen Feldern" und über „Das Vakuum als Isolator" in dem dritten Hauptabschnitt doch ausschließlich mit den Durchbruchsvorgängen in festen Isolatoren. Der erste Abschnitt gibt eine Übersicht über die Erforschung der Feldstruktur mit vielen sehr instruktiven Beispielen, der zweite Abschnitt neben einer ganz kurzen Darstellung der Townsendschen Theorie eine hier zum ersten Male versuchte zusammenfassende Behandlung der autoelektrischen Elektronenströme im Hochvakuum. Es fehlt also eine Behandlung der eben so wichtigen und interessanten Durchbruchsvorgänge in flüssigen Isolatoren. Diese Beschränkung ist wohl bedingt dadurch, daß gerade die Untersuchung fester Isolatoren seit langem in dem Physikalisch-Technischen Laboratorium Joffés — aus dem das Buch hervorgegangen ist — betrieben wurde; vielleicht auch haben die Verfasser für eine eingehendere zusammenfassende Darstellung der Entladungen durch Flüssigkeiten die Zeit noch nicht für gekommen gehalten. Immerhin wäre aber auch hier, trotzdem leitende theoretische Gesichtspunkte zur Zeit noch fast fehlen, schon mancherlei zu sagen gewesen; erinnert sei etwa an die vielen Arbeiten des Schumannschen Instituts oder an die theoretischen Ansätze von Gyemant.

Im einzelnen werden in dem bereits genannten und vor allem interessierenden dritten Hauptabschnitt zunächst die Stromleitung in festen Isolatoren, dann im allgemeinen die Vorgänge, die dem eigentlichen Durchschlag zugrunde liegen, die Wärmetheorie des Durchschlags, die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen im elektrischen Gebiet und endlich die Theorien des Durchschlags eingehend behandelt. Die Anordnung des Stoffes ist für einen Leser, der nicht bereits einen gewissen Überblick besitzt, jedoch nicht sehr übersichtlich; so z. B. werden die Theorien an drei verschiedenen Stellen behandelt. Auch in manchen Fragen von grundsätzlicher Bedeutung wäre eine etwas ausführlichere Diskussion erwünscht gewesen. So etwa scheint mir eines der Hauptprobleme, nämlich die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Feldstärke nicht bis zu der auch heute schon erreichbaren Klarheit durchgeführt zu sein oder etwa eine Besprechung der in Aachen erzielten Erfolge in der Untersuchung des zeitlichen Ablaufs eines Durchbruchs mit Hilfe des Kathodenoszillographen zu Unrecht zu fehlen. Trotzdem wird man mit Genuß und Gewinn der in der Hauptsache recht vollständigen und guten Darstellung des großen und hier zum ersten Male zusammenfassend von allgemeinen physikalischen Gesichtspunkten aus betrachteten Materials folgen. Ein Literaturverzeichnis und einige im Text benötigte Tabellen zur allgemeinen Formulierung der Wärmetheorie nach Fock beschließen das Buch.

R. Seeliger.

W. Koch, Über die Wärmeabgabe geheizter Rohre bei verschiedener Neigung der Rohrachse. (Beihefte zum Gesundheits-Ingenieur, Reihe 1, Heft 22.) 4⁰. 29 S. Mit 51 Abb. München und Berlin, R. Oldenbourg. 1927. RM. 4.80.

Das Heft enthält die Ergebnisse von Versuchen, die der Verf. im Laboratorium für technische Physik der technischen Hochschule München durchführte. Unter Anwendung des Ähnlichkeitsprinzipes wurden die Beziehungen für den Vorgang der Wärmeleitung und Konvektion entwickelt. Durch Versuche an erhitzten Rohren (von 0,014 bis 0,100 m Durchm.) in einem mit Luft erfüllten Raume wurden diese Zusammenhänge bestätigt, und zwar bei wagerechter, senkrechter und dazwischenliegender Stellung der Rohrachse.

Theorie und Versuch führten zu Gleichungen über die Abhängigkeit der Wärmeabgabe von folgenden Einflußgrößen: Rohrdurchmesser, Neigung des Rohres, Oberflächentemperatur, Temperatur, Druck, Zähigkeit und Temperaturleitfähigkeit des umgebenden Mediums. In einer großen Reihe von Diagrammen werden die Ergebnisse anschaulich dargestellt und mit den Versuchen älterer Forscher verglichen.

Besondere Beachtung verdient die klare theoretische Entwickelung, die für ähnliche Versuche viele Anregungen und Unterstützung geben kann. Durch die Aufnahme dieses neuen Heftes auf dem Gebiete der Wärmetechnik hat die Reihe der Beihefte zum Gesundheits-Ingenieur eine wertvolle Bereicherung erfahren.

Reiher.

A. Semiller †, Unterstufe der Physik. XVII u. 256 S. Mit 307 Abb. Berlin, Weidmannsche Buchh. 1928. Geb. RM. 4.80.

Das vorliegende, nach den neuen preußischen Richtlinien bearbeitete Buch tritt an Stelle zweier Unterrichtswerke von Börner und bildet den ersten Teil des „Lehrbuchs der Physik" von Börner-Semiller. Das Auffälligste an diesem Band ist seine erstaunliche Reichhaltigkeit. Dies erklärt sich aus der Absicht des Verfassers, eine einheitliche Fassung für alle Schulgattungen zu geben, aus der je nach Bedürfnis ausgewählt werden kann. Außerdem soll das Buch auch dem Privatstudium der Schüler dienen. Besondere Berücksichtigung finden die technischen Anwendungen, von denen elektrische Schwingungen und Wellen — das engere Arbeitsgebiet des früh verstorbenen Verfassers — sowie der sehr ausführliche Abschnitt „Luftfahrzeuge" besonders zu erwähnen sind. An den Schluß jedes größeren Kapitels sind Energiebetrachtungen gestellt.

Das Buch wird seiner interessanten Darstellung wegen sich viele Freunde erwerben können. Doch kann ihm der Vorwurf einer teilweise etwas flüchtigen Abfassung nicht erspart werden: So muß die Definition der „Masse" (S. 11), der Ausdruck „vergrößerte Elastizität" (S. 15), die Geschwindigkeitsmessung (S. 31, Abb. 40; Stoßverluste!), die Fig. 202 (bifilare Aufhängung?!) u. a. m. als fragwürdig gelten. Eine eingehende Behandlung des Mikrophons wäre wichtiger als die des Telephons als Geber. — Auf alle Fälle aber kann das Buch als reiche Fundgrube für lehrreiche Versuche dienen. E. Nies.

Tagesereignisse.

Haus der Technik in Essen. Das Haus der Technik veranstaltet während des Wintersemesters 1928/29 folgende Vorlesungen:

Prof. Dr. Friedrich, Dessauer-Frankfurt (Main): Technik und Erziehung, am 23. Oktober, 7—9 Uhr abends; Prof. Dr. F. Quincke-Hannover: Technologie chemischer Apparate I: Trennungsapparaturen, am 26. u. 27. Okt. 7—9 Uhr abends; Patentanwalt Dipl.-Ing. Otto Ohnesorge-Bochum: Grundsätzliches aus dem Patentwesen, 29. Okt., 5. u. 9. Nov. 1928, 7—9 Uhr abends; Prof. Walter Gropius-Berlin: Der Aufschwung der Baukunst, 6. u. 7. Nov., 7—9 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. Rüdenberg, Berlin: Die Relais-Steuerungen der modernen Elektrotechnik. 12. u. 13. Nov. 1928; 6—8 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. V. Blaeß, Darmstadt: Einführung in die technische Schwingungslehre, unter Vorführung von Modellen. 22. u. 23. Nov., 7—9 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. E. Michel, Hannover: Schallsicherheit der Gebäude, 27. Nov., 7—9 Uhr abends; Dr. E. Schmid, Privatdozent, Berlin-Dahlem: Kristallographie und Werkstoffkunde, 30. Nov., 7—9 Uhr abends; Generaldirektor Dr. Robert Haas-Rheinfelden: Deutsche Elektrizitätswirtschaft. 4. Dez., 7—9 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. e. h. L. Prandtl, Göttingen: Über Strömungsforschung, 6. u. 7. Dez. 7—9 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. Lambris-Aachen: Brennstoffchemische Fragen unter besonderer Berücksichtigung der Fortschritte auf dem Gebiete der Kohlenveredlung, 10. u. 11. Dez. 7—9 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. Heidebroek, Darmstadt: Arbeitsvorbereitung in industriellen Betrieben als systematische Aufgabe, 13., 14. u. 15. Dez., 7—9 Uhr abends; Prof. E. Reuleaux, Darmstadt; Neuerungen auf dem Gebiete des Eisenbahn-Signal- und Sicherungswesens, 17. u. 18. Dez., 7—9 Uhr abends; Dr. Haegermann, Berlin: Kalke und Zemente, 8. Jan., 7—9 Uhr abends; Geheimrat Prof. Dr. Schenk-Münster: Die chemischen Probleme der Eisenforschung, 17., 22. u. 31. Jan. 1929, 6—8 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. F. Rötscher, Aachen: Berechnung und Konstruktion im Maschinenbau, 21., 18. Jan. u. 4. Febr., 7—9 Uhr abends; Geh. Bergrat Prof. Dr. Kühn, Berlin-Dahlem: Die Anwendung geophysikalischer Methoden auf Fragen der Geologie und des Bergbaues, 29. u. 30. Jan. 1929, 7—9 Uhr; Prof. Blümel, Aachen; Neuerungen in Steinkohlenwäschen, 15. u. 21. Febr., 7—9 Uhr abends; Prof. Dr.-Ing. e. h. Matschoß, Berlin: Mensch und Maschine. 18. Febr., 7—9 Uhr abends; Prof. Dr. Franz Weidert, Berlin-Dahlem: Die Anwendung optischer Methoden in der Technik, 22. Febr. 1929, 7—9 Uhr abends; Bergassessor Dr. Ing. W. Luyken, Düsseldorf: Betriebswirtschaftliche Überlegungen für die Erzaufbereitung, 28. Febr. 1929, 7—9 Uhr abends; Markscheider W. Löhr. Bochum: Über künstliche Bodenerschütterungen, 4. u. 5. März 1929. 7—9 Uhr abends; Prof. Dr. W. Hoffmann, Freiberg: Probleme der kaufmännischen Betriebswirtschaftslehre im Bergbau, 11. u. 12. März 1929, 7—9 Uhr abends.

Berichtigung

zu R. Fleischer und H. Goldschmidt. Diese Zeitschr. **29**, 691—698, 1928. Seite 695, Spalte 2. Gleichung 9 setze statt $<$: $=$.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Königsberg Dr. Eduard Steinke für Physik.

Ernannt: Der ord. Professor der mathematischen Physik an der Universität Leipzig Dr. Gregor Wentzel zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Zürich.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der angewandten Chemie an der Universität Leipzig Geheimer Hofrat Dr. Carl Paal, der Direktor des Meteorologisch-magnetischen Observatoriums in Potsdam Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Adolf Schmidt.

Gestorben: Der Abteilungsleiter an der Chemisch-technischen Prüfungs- und Versuchsanstalt der Technischen Hochschule Karlsruhe Professor Dr. Emil Arnold, der ord. Professor der pharmazeutischen und angewandten Chemie an der Universität München Geheimer Regierungsrat Obermedizinalrat Dr. Theodor Paul, der ord. Professor der Astronomie an der Universität Wien und Direktor der Universitäts-Sternwarte daselbst Dr. Josef Hepperger, der ord. Professor für chemische Technologie an der Deutschen technischen Hochschule Brünn Dr. Max Margosches.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 21 | 1. November 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 23 am 15. November 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Geschwindigkeitsverluste der α-Strahlen beim Durchgang durch Metallfolien.

Von S. Rosenblum.

In dieser Zeitschrift **29**, 153, 1928 hat K. W. F. Kohlrausch in seinem Artikel „Studien zur radioaktiven Strahlung" gezeigt, wie man die Bohrschen Vorstellungen über die Wechselwirkung von bewegten geladenen Teilchen und von Atomen als ordnendes Prinzip der an α und β Partikeln gesammelten Erfahrungstatsachen heranziehen könnte.

Anschließend an diesen Artikel möchte ich nun kurz über Resultate von Versuchen berichten, die ich seit einigen Jahren im „Institut du Radium" in Paris unternommen habe, um die Verzögerung, die homogene Strahlenbündel beim Durchgang durch verschiedene Metalle erleiden, quantitativ festzustellen.

Die Geschwindigkeit der α-Strahlen vor und nach dem Durchqueren der Metallfolie wird mittels der bekannten magnetischen Methode im Vakuum durch Photographie festgestellt. Es ist im großen und ganzen dieselbe Methode, die Rutherford[1]) anwandte, als er als erster die Verlangsamung der Strahlen durch dünne Aluminiumblättchen beobachtete.

Einige technische Verbesserungen der Apparatur konnten vorgenommen werden; was die Einzelheiten betrifft, sei auf meine demnächst in den „Annales de Physique" erscheinende Arbeit verwiesen, wo auch die numerischen Tabellen zu finden sind[2]).

In einer früheren Arbeit[3]) konnte ich zeigen, daß meine Versuchsergebnisse durch die folgende Formel wiedergegeben werden können:

$$X = K(u - u^2 + 0{,}355\, u^3).$$

wo X das Gewicht der Folie in mg/cm², $u = \frac{V_0 - V}{V_0}$, V_0 die Anfangsgeschwindigkeit der α-Strahlen von ThC′ und V die Geschwindig-

1) Rutherford, Phil. Mag. Vol. 12, p. 134. Marsden and Taylor, Proc. Roy. Soc. A **88**, 443, 1923.

2) Siehe auch Rosenblum: Thèses, Paris, Masson & Cie, 1928.

3) S. Rosenblum C. R. **185**, 851, 1927.

keit beim Verlassen der Folie ist. K ist eine charakteristische Konstante des Metalls.

Die folgende Tabelle gibt die Werte von K[1]).

Tabelle I.

Material	K
Li	27,7
Al	39,3
Fe	50,5
Ni	52,5
Cu	54,5
Zn	55,2
Mo	67,5
Pd	71,1
Ag	70,3
Cd	71,1
Sn	72,9
Pt	99,0
Au	98,0
Pb	98,5

Die Formel (1) läßt sich im Bereich, wo experimentelle Ergebnisse vorliegen, durch die unendliche Reihe

$$X = K\left(u - u^2 + \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{3}u^4 \ldots\right) \qquad (2)$$

wiedergeben, woraus

$$X = Ku\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u^n}{n}\right] \qquad (3)$$

und endlich

$$X = Ku\,[1 - \log(1+u)]; \qquad (4)$$

indem wir V wieder einführen, wird

$$X = K\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)\left[1 - \log\left(2 - \frac{V}{V_0}\right)\right]. \qquad (5)$$

Dieser Ausdruck für X hat ein Maximum bei $V/V_0 = 0{,}24$, was darauf hinzuweisen scheint, daß für kleinere Geschwindigkeiten das einfache Gesetz (5) seine Gültigkeit verliert.

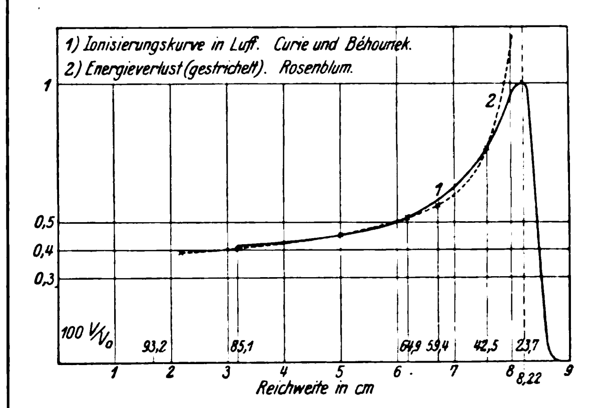
Aus (5) findet man

$$-\frac{dE}{dX} = \frac{mV_0^2}{K}\frac{V}{V^0}\frac{1}{\dfrac{1}{2-\dfrac{V}{V_0}} - \log\left(2 - \dfrac{V}{V_0}\right)} \qquad (6)$$

als Ausdruck für den Energieverlust der Strahlen längs ihrer Bahn.

Wir wollen die aus (6) sich ergebende Kurve des Energieverlustes als Funktion von V/V_0 mit der Braggschen Ionisationskurve vergleichen, die bekanntlich die Ionisierungsintensität der α-Strahlen längs ihrer Bahn in Luft wiedergibt. Die Geschwindigkeiten V/V_0 der α-Strahlen an den verschiedenen Punkten der Ionisierungskurve sind nach den direkten Messungen von Briggs[1]) eingesetzt..

Die Ionisierungskurve ist die von Curie-Béhounek[2]); um den Vergleich anschaulicher zu gestalten, haben wir einen willkürlichen Punkt der beiden Kurven zusammenfallen lassen. Es ist bemerkenswert, daß die Maxima der beiden Kurven zusammenfallen.



Aus Formel (5) erhält man für $\frac{V}{V_0} = w = 1$

$$-\frac{dw}{dX} = \frac{1}{K} \qquad (7)$$

X ist in mg/cm² ausgedrückt, woraus für x in cm

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1000\,D}{K}, \qquad (8)$$

wo D die Dichte ist.

Nach Bohr-Kohlrausch hat man dann für unsere Konstante K

$$K = \frac{3000\,D}{C_1 S_\alpha^0}; \qquad (9)$$

was die Bedeutung und die Zahlenwerte der hier vorkommenden Symbole anbelangt, sei auf den Artikel von Kohlrausch verwiesen.

Die folgende Tabelle ermöglicht den Vergleich zwischen Theorie und Experiment; man sieht, daß die Übereinstimmung besser ist für die kleineren Atomnummern[3]).

Nach Bohr ist die Abnahme der Geschwindigkeit der α- und β-Strahlen beim Durchgang durch materielle Schichten hauptsächlich durch die Ladung dieser Korpuskeln bedingt. Die

1) S. Rosenblum, C. R. **185**, 1275, 1927. — S. Rosenblum, C. R. **185**, 851, 1927.

1) Briggs, Proc. Roy. Soc. **114**, 313, 1927.

2) J. Curie et F. Béhounek, Journ. de Phys. **7**, 125, 1926.

3) Die hier berechneten Werte von K sind verschieden von denen, die Herr Kohlrausch in seiner Arbeit gibt. Ein dort vorkommender systematischer Rechenfehler (es wurde irrtümlich für V_0 die Geschwindigkeit der RaC'-α-Teilchen eingesetzt) ist hier im Einvernehmen mit dem Verfasser richtiggestellt.

Material	Li	Al	Fe	Ni	Cu	Pd	Ag	Cd	Sn	Pt	Au	Pb
Atomnummer N	3	13	26	28	29	46	47	48	50	78	79	82
$\frac{1}{N} \Sigma \log \nu$	37,75	39.53	40.37	40.44	50,52	41,18	41,22	42,25	41,30	41,89	41,94	41,93
S'_0	4,86	3,08	2,23	2,14	2,09	1,43	1,39	1,36	1,31	0,72	0,70	0,68
K berechnet	32	46	64	66	71	109	112	116	122	235	242	252
K beobachtet	27,7	39,3	50.5	52,5	54,5	71,1	70.3	71,1	72,9	99	98	98,5

Bohrschen Gedankengänge sind im großen und ganzen im Einklang mit den experimentellen Tatsachen, zumindest was die Größenordnung anbelangt, und ich möchte nun einige Bemerkungen allgemeinen Charakters für den Fall von ungeladenen schnellbewegten Partikeln machen.

Bekanntlich hat E. Rutherford auf die Möglichkeit der Existenz sogenannter Neutronen hingewiesen, die als einer der Bausteine aller Materie anzusehen wären.

Ein Neutron hätte nach Rutherford ungefähr die Masse eines Wasserstoffatoms und unterscheidet sich von letzterem durch sein stark reduziertes Volumen[1]).

Die Verlangsamung solcher unendlich winziger bewegter neutraler Partikeln beim Durchqueren der Materie muß unverhältnismäßig geringer ausfallen als die von α- oder β-Strahlen und ihr Ionisierungsvermögen muß dementsprechend sehr klein sein. Es ist also die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß eine Neutronenstrahlung wohl existieren und sich doch unserer Beobachtung entziehen könnte.

In unmittelbarer Nähe der Kerne und Elektronen wären die Neutronen den Kräften der Polarisation unterworfen und dürften bei zentralen Stoß gegen einen Kern denselben deformieren.

Man könnte in einer solchen Strahlung kosmischer Natur die mögliche Ursache der Radioaktivität suchen. Man könnte ebenfalls an eine unbekannte Art von Radioaktivität denken, die von der Aussendung schnellbewegter Neutronen begleitet wäre und die eine allgemeine Eigenschaft der Materie wäre.

Da die eventuelle Aussendung von Neutronen die Masse der schwereren Atome wenig ändert und ihre Atomnummer unberührt läßt, so könnte sie wohl der Beobachtung entgehen. Wir bemerken, daß eine Neutronenemission im Laufe der Zeiten das Mengenverhältnis der Isotopen eines gegebenen Metalls zugunsten der niederen Isotopen verschieben dürfte.

Paris, Institut du Radium 1928.

(Eingegangen 26. September 1928.)

1) Kirsch und Pettersson, Atomzertrümmerung. Wien 1925.

Wärmetönung im Gravitationsfelde.

Von A. Maior.

Im folgenden machen wir die Annahme, daß die Masse M eines Körpers, bei einer beliebigen Temperatur T, aus zwei Summanden besteht: die Masse M_0 beim absoluten Nullpunkt gemessen und die Masse M_T, welche durch die, von der Temperatur abhängigen, innere Energie U bedingt ist, so daß wir

$$M = M_0 + M_T = M_0 + \frac{U}{c^2} \qquad (1)$$

haben.

Wir wenden hier das Prinzip von der Äquivalenz von Masse und Energie an, ein Prinzip, welches in den einschlägigen Arbeiten von Bucherer[1]), Temple[2]), und Laschkarew[3]), in ihren Untersuchungen über Gravitationsprobleme mit Erfolg benützt wurde.

Aus (1) folgt

$$\frac{dM}{dT} = \frac{1}{c^2}\frac{dU}{dT} = \frac{C_v}{c^2}; \qquad (2)$$

die Abhängigkeit der Masse von der Temperatur ist also, proportional der Atomwärme C_v.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet die folgende Gleichung der Thermodynamik bzw. Energetik:

$$-\left|\frac{\partial p}{\partial T}\right|_r = \left|\frac{\partial S}{\partial r}\right|_T, \qquad (3)$$

wo p das Gewicht des Körpers, r die Entfernung vom Anziehungszentrum und S die Entropie bedeutet.

Aus (3) kann, wenn das Gewicht des Körpers als Funktion der Temperatur gegeben ist, die Entropieänderung bzw. die Wärmeabsorption oder Emission des Körpers, bei konstanter Temperatur, und bei gegebener Niveauänderung berechnet werden.

1) A. H. Bucherer, Die Planetenbewegung auf Grund der Quantentheorie. Leipzig 1923.

2) G. Temple, Proc. Phys. Soc. London XXXVII, 269, 1925 und ebenda XXXVIII, 337, 1926.

3) W. Laschkarew, Zeitschr. f. Physik **44**, 361, 1927.

Wir nehmen einen Körper von der Masse m, welcher von einem größeren Zentralkörper M in der Entfernung r angezogen wird, so daß wir

$$\left.\begin{aligned} m &= m_0 + \frac{u}{c^2} \\ \text{und} \qquad M &= M_0 + \frac{U}{c^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

haben.

Die Kraft, welche auf den Körper m wirkt, ist:

$$p = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$$

oder:

$$p = -\gamma \frac{M_0 m_0 + \frac{1}{c^2}(m_0 U + M_0 u)}{r^2};$$

hier wird das Glied mit c^4 im Nenner vernachlässigt, und wir haben:

$$\left|\frac{\partial p}{\partial T}\right|_r = -\gamma \frac{m_0 \frac{\partial U}{\partial T} + M_0 \frac{\partial u}{\partial T}}{c^2 r^2} = -\gamma \frac{m_0 C_v + M_0 c_v}{c^2 r^2}.$$

Auf Grund von (3) haben wir dann

$$\left|\frac{\partial S}{\partial r}\right|_T = \gamma \frac{m_0 C_v + M_0 c_v}{c^2 r^2}$$

oder

$$S_1 - S_0 = \frac{V_1 - V_0}{c^2}\left(\frac{C_v}{M_0} + \frac{c_v}{m_0}\right), \qquad (5)$$

wo V das gegenseitige Potential ist.

Formel (5) gibt die betreffende Wärmeabsorption bzw. Emission des Systems an, welche bei konstanter Temperatur und bei gegebener Änderung des gegenseitigen Potentials stattfindet.

Im Falle größerer Himmelskörper dürfte diese Wärmetönung nicht ganz vernachlässigbar sein. Es kann auch gezeigt werden, unter Annahme einer Nullpunktsenergie im Sinne Nernsts[1]), daß jegliche Geschwindigkeitsänderung einer in einem gegebenen statischen Gravitationsfelde befindlichen Masse auch mit einer Wärmetönung verbunden ist.

Nach Nernst erhält man für ein System von N monochromatischen Resonatoren, — wenn es an einem Punkt des Schwerefeldes gelangt, wo es beim freien Fall die lebendige Kraft $\frac{M}{2}v^2$ erreicht haben würde, — für die innere Energie den Ausdruck

1) W. Nernst, Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. S. 83. 1916.

$$2U' = M(c^2 - v^2) + N \frac{h\nu'}{e^{\frac{h\nu'}{kT}} - 1}. \qquad (6)$$

ν' bezieht sich auf den gegebenen Punkt im Schwerefeld, während sich ν auf das in Ruhe und außerhalb des Schwerefeldes befindliche System bezieht. Zwischen den Werten ν und ν' besteht die Nernstsche Beziehung[1]):

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu} = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \qquad (7)$$

Nun wenden wir folgende Gleichung an

$$\left|\frac{\partial \mu}{\partial T}\right|_v = \left|\frac{\partial S}{\partial v}\right|_T, \qquad (8)$$

die besagt, daß wenn die Bewegungsgröße $\mu = mv$ bei konstanter Geschwindigkeit mit der Temperatur variiert, so ist die Entropie, bei konstanter Temperatur, ebenfalls eine Funktion der Geschwindigkeit.

Wenn wir nur die von der Temperatur abhängige Masse in Betracht nehmen, so ist

$$\mu = mv = \frac{Nv}{2c^2}\frac{h\nu'}{e^{\frac{h\nu'}{kT}} - 1}. \qquad (9)$$

Aus (9) haben wir:

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = \frac{Nh^2}{2kc^2T^2}\frac{v\nu'^2 \cdot e^{\frac{h\nu'}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu'}{kT}} - 1\right)^2};$$

mit diesem Wert haben wir dann aus (8)

$$S = \frac{Nh^2}{2kc^2T^2}\int \frac{v \cdot \nu'^2 \cdot e^{\frac{h\nu'}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu'}{kT}} - 1\right)^2} dv. \qquad (10)$$

Wir führen die Hilfsvariable

$$\frac{h\nu'}{kT} = x \qquad (11)$$

ein, und haben mit (7)

$$v \cdot dv = -\frac{c^2}{2\nu} d\nu' = -\frac{kTc^2}{2h\nu} dx \qquad (12)$$

mit (11) und (12) erhält das Integral (10) die Form

$$S = -\frac{NTk^2}{4h\nu}\int \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} dx, \qquad (13)$$

da nun wegen der sehr hohen Frequenz der Nullpunktsstrahlung (1), im Nenner des obigen Integrals die 1 gegen

$$e^x = e^{\frac{h\nu'}{kT}}$$

zu vernachlässigen ist, erhalten wir

1) Siehe Nernst, l. c.

$$S = -\frac{NTk^2}{4h\nu}\int x^2 e^{-x} \cdot dx = \frac{NTk^2}{4h\nu}\,\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} + C.$$

Wir haben aus (7)

$$\nu' = \nu\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

und

$$x = \frac{h\nu}{kT}\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

und da $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ ist, erhalten wir schließlich:

$$S = \frac{NTk^2}{4h\nu} e^{-\frac{\nu h}{kT}\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} \left\{\left[1 + \frac{h\nu}{kT}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]^2 + 1\right\} + C.$$

Wenn wir die Größe $1 - \frac{v^2}{c^2} = \alpha$ bezeichnen und die eingeklammerte Größe mit $P(\alpha)$, so haben wir, als Maß der Wärmetönung, — bei konstanter Temperatur, — während der Körper von der Geschwindigkeit Null die Geschwindigkeit v erreicht — die Größe

$$S - S_0 = \frac{NTk^2}{4h\nu} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \left\{ e^{\frac{h\nu}{kT}(1-\alpha)} P(\alpha) - P(1) \right\}. \qquad (14)$$

Aus (14) ist zu ersehen, daß die Wärmetönung, welche bei Änderung der Geschwindigkeit eintritt, in engem Zusammenhang mit der Lorentz-Kontraktion ist.

Die oben erhaltenen Resultate sprechen dafür, daß im Inneren von Himmelskörpern größerer Masse, zwischen Schichten konstanter Temperatur und der übrigen Umgebung, ein beständiger Wärmeaustausch besteht, welcher — von anderen Umständen abgesehen — auch durch die Exzentrizität der Bahn und durch die Geschwindigkeitsänderung bzw. Beschleunigung derselben gegeben ist.

(Eingegangen 4. August 1928.)

Über die Anwendung des Ebertschen Ionenzählers zur Bestimmung der Zahl und der Beweglichkeit der kleinen Ionen in der Atmosphäre.

Von W. J. Baranow und E. S. Stschepotjewa.

Der meistverbreitete Apparat zur Messung der Ionisation der atmosphärischen Luft, namentlich für Feldarbeit, ist der Ebertsche Ionenzähler[1]). Es war lange Zeit die Meinung herrschend, daß dieser Apparat ausschließlich die leichtbeweglichen Ionen registriert, während die schwerbeweglichen (großen) Ionen seine Angaben nicht merklich beeinflussen[2]). Obgleich eine Reihe von Autoren darauf hingewiesen hatte, daß die Angaben des Ionenzählers von der Anwesenheit von Ionen mittlerer und kleiner Beweglichkeit merklich beeinflußt werden[3]), wurde nur in der allerletzten Zeit allgemein angenommen, daß alle Ionenzahlen, die in gewohnter Weise mit dem Ebertschen Aspirationsapparate gewonnen wurden, wegen der a priori unbekannten Wirkung der schwerbeweglichen Ionen, zweifelhaft seien[1]).

1) H. Ebert, Physik. Zeitschr. **2**, 662, 1901; Verh. d. D. Phys. Ges. **7**, 34, 1905.

2) A. Gockel, Die Luftelektrizität (Leipzig 1908), S. 30; H. Mache und E. v. Schweidler, Die atmosphärische Elektrizität (Braunschweig 1909), S. 98.

3) J. A. Pollock, Le Radium **6**, 129, 1909; A. Daunderer, Physik. Zeitschr. **10**, 113, 1909; A. Gockel, Neue Denkschr. d. Schweiz. Naturf. Ges.

Man findet aber in der vorhandenen Literatur keine ausreichenden Angaben über Methoden, mit denen man bei der Arbeit mit dem gewöhnlichen Ebertschen Apparate im Felde den Einfluß schwerbeweglicher Ionen ausschließen könnte, und die Beobachter ziehen diesen Einfluß nicht immer in gebührender Weise in Betracht.

Deswegen halten wir es nicht für überflüssig, hier die Methode, die wir zur Ausschließung des Einflusses schwerbeweglicher Ionen auf die Messungen mit dem Ebertschen Apparate anwenden, kurz zu beschreiben[2]).

Den Ionenzähler, dessen Konstruktion als bekannt vorausgesetzt wird, kann man näherungsweise als einen zylindrischen Kondensator betrachten, durch welchen mit konstanter Geschwindigkeit Luft aspiriert wird. Falls in der aspirierten Luft Ionen nur einer Geschwindigkeit

1) E. Mathias, Traité d'électricité atmosphèrique et tellurique (Paris 1924), p. 134; B. Chauveau, Électricité atmosphèrique (Paris 1924), 3me fasc., p. 90; V. F. Heß, Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen (Braunschweig 1926), S. 35—36.

2) W. Baranow, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Gesellschaft **57**, 151, 1925.

enthalten sind, so wird im geladenen Kondensator, wie bekannt[1]), ein elektrischer Strom fließen, der „Ohmscher Strom" bleiben wird solange

$$V < \frac{w}{4\pi U C_1}$$

gilt, wo V = Potentialdifferenz der Belegungen des Kondensators in Volt ist, w = Volumgeschwindigkeit der aspirierten Luft in cm³/sec, C_1 = elektrische Kapazität der inneren Elektrode, U = Beweglichkeit der Ionen in cm/sec : Volt/cm. Dieser Strom ist von w unabhängig; er ist proportional V und gleich:

$$J_1 = 4\pi C_1 V n U \varepsilon,$$

wo n = Zahl der Ionen in 1 cm³ der aspirierten Luft ist, ε = Ladung eines Ions.

Wenn die Bedingung gilt:

$$V \geqq \frac{w}{4\pi U C_1}$$

tritt im Kondensator ein „Sättigungsstrom" auf, der unabhängig von v und proportional w ist.

$$J_2 = w n \varepsilon.$$

Falls in der durch den Ebertschen Apparat aspirierten Luft Ionen von verschiedener Beweglichkeit vorhanden sind, kann man die Zahl und die Beweglichkeit der Ionen verschiedener Gruppen oder Beweglichkeitsintervalle durch die Buchstaben n und U mit respektiven Indexen[2]) bezeichnen und den summarischen Strom im Ebertschen Apparate, wie folgend ausdrücken:

$$J = w\varepsilon \sum_{U_i > U_0} n_i + 4\pi C_1 V \varepsilon \sum_{U_j < U_0} n_j U_j \qquad (1)$$

wo $U_0 = \frac{w}{4\pi C_1 V}$ und die Summation sich auf alle Ionen erstreckt; v das mittlere Potential der inneren Elektrode für die Versuchszeit (das äußere Rohr ist zur Erde abgeleitet).

Indem man die Zahl der Ionen aus dem Ausdruck

$$n = \frac{J}{\varepsilon w}$$

berechnet, sagt man oft, daß dies die Zahl der Ionen ist, die durch den Apparat von Ebert vollständig aufgefangen sind. In Wirklichkeit differiert diese Größe von der wirklichen Zahl der Ionen mit Beweglichkeiten $U > U_0$ um die Größe

$$\frac{4\pi C_1 V \sum_{U_j < U_0} n_j U_j}{w}.$$

Dieser Fehler ist sowohl durch die Konstanten des Apparats (c_1, v, w), als auch durch die Verteilung der Ionen nach Beweglichkeiten bedingt. Daraus folgt, daß die Angabe einer Reihe von Autoren, daß bei gleichen Arbeitsbedingungen (c_1, v, w) und nach der gewöhnlichen Formel bearbeitet, die mit dem Ebertschen Apparate erhaltenen Zahlen unter sich vergleichbar sind, als unrichtig zu betrachten ist. Es können in der Tat bei verschiedener Verteilung der Ionen nach den Beweglichkeiten gleiche Resultate völlig verschiedenen Zuständen der Luftionisation entsprechen und umgekehrt.

Mit dem Ebertschen Zähler und einem Elektrometer von Wulf gewöhnlicher Empfindlichkeit läßt sich unter den Bedingungen der Feldarbeit einigermaßen zuverlässig nur die Zahl der leichtbeweglichen Ionen bestimmen[1]). Wir nehmen deshalb an, daß in der Luft nur zwei scharf unterschiedene Gruppen von Ionen enthalten sind: die leichtbeweglichen Ionen mit der Beweglichkeit von der Größenordnung 1 cm/sec : Volt/cm (ihre Zahl bezeichnen wir durch n) und alle anderen Ionen mit der Beweglichkeit kleiner als 0,1 cm/sec, die wir zu den schwerbeweglichen Ionen zählen.

Zu Vereinfachung der Formeln bezeichnen wir den Ausdruck $\sum_{U_j < 0,1} n_j U_j \varepsilon$ durch A („die Leitfähigkeit der großen Ionen"). Die Gleichung (1) erscheint dann als:

$$J = \varepsilon w n + 4\pi c v A \qquad (2)$$

Graphisch wird die Abhängigkeit des J von v durch die Linie OCB (Fig. 1) vorgestellt[2]).

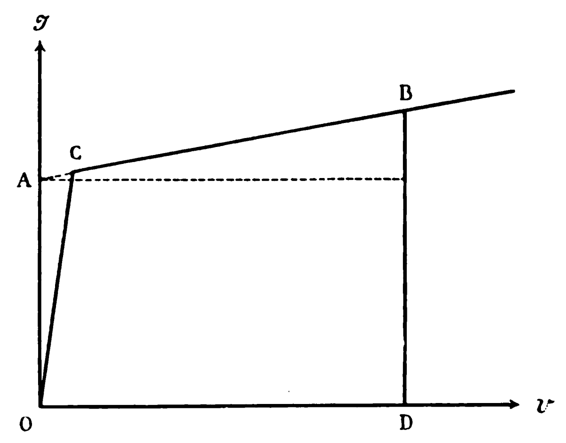


Fig. 1.

Es ist leicht zu sehen, daß

$$n = \frac{OA}{\varepsilon w}$$

1) Siehe z. B. V. Heß, loc. cit. S. 22ff.

2) A. Daunderer, Physik. Zeitschr. **10**, 113, 1909; A. Gockel, loc. cit. S. 13.

1) Über die Bestimmung der anderen Ionengruppen mit dem Ebertschen Ionenzähler siehe: A. Gockel, loc. cit. S. 31; W. Baranow, loc. cit. S. 165.

2) Vgl. A. Gockel, loc. cit.

während man gewöhnlich die Zahl der Ionen fälschlich als $\frac{BD}{\varepsilon w}$ bezeichnet.

Mit einem Ebertschen Zähler gewöhnlicher Konstruktion lassen sich Punkte nur im Bezirke CB erhalten, weil das Grenzpotential für das Auffangen aller schnellen Ionen weniger als 20 Volt beträgt und in diesem Bezirk das Elektrometer nicht empfindlich genug ist. Übrigens hat A. Gockel auch den Anfangsteil der Kurve erhalten, indem er ein Elektrometer mit Hilfskondensator benutzte[1]). Ein Ionenzähler mit einem empfindlichen Elektrometer ausgerüstet[2]) erlaubt die Wirkung von Ionen verschiedener Gruppen noch genauer zu ermitteln.

Wir wollen hier die Verwendung des gewöhnlichen Ebertschen Apparates als des meist gebrauchten besprechen.

Um den Einfluß schwerbeweglicher Ionen auszuschalten, kann man drei Methoden der Anwendung des gewöhnlichen Ebertschen Zählers vorschlagen.

I. Um den Einfluß langsamer Ionen zu konstatieren, genügt es, zwei Stromstärkemessungen mit verschiedenen Ladungen des Elektrometers und mit konstanter Luftgeschwindigkeit nacheinander auszuführen. Nehmen wir an, daß der Ionisationszustand der Luft während der Versuchszeit sich nicht geändert hat, so haben wir

$$J_1 = n\varepsilon w + 4\pi C V_1 \Lambda$$
$$J_2 = n\varepsilon w + 4\pi C V_2 \Lambda,$$

woraus folgt

$$n = \frac{1}{\varepsilon w}\left[J_1 - \frac{V_1 (J_2 - J_1)}{V_2 - V_1}\right];$$

$$\Lambda = \frac{J_2 - J_1}{4\pi C (V_2 - V_1)}.$$

Außer der Veränderung der Ionisation der Luft während der Versuchszeit wird die Zuverlässigkeit der Resultate noch dadurch vermindert, daß wir die Kreuzungsstelle der Ordinatenachse mit einer Geraden suchen, die durch zwei verhältnismäßig nahe Punkte bestimmt wird (wegen der Grenzen der Empfindlichkeit des Elektrometers) (Fig. 1). Ein Fehler bei der Bestimmung eines jeden dieser Punkte wird das Resultat stark beeinflussen.

II. Viel zuverlässiger ist die zweite Methode, die ebenfalls zwei einander folgende Messungen erfordert. Es wird dabei ein Hilfskondensator benutzt, der als Ionengeschwindigkeitsmesser nach der Macheschen Methode dient.

Bei der ersten Messung wird der Kondensator nach Mache nicht geladen. Es sei die Stromstärke J_1. Bei der zweiten Messung wird der Kondensator bis zum Potentiale V_0 geladen, das für das Auffangen aller leichtbeweglichen Ionen genügt. Es sei die Stromstärke J_2.

Es ist leicht einzusehen, daß die korrigierte Zahl der leichtbeweglichen Ionen

$$n = \frac{J_1 - J_2}{\varepsilon w}$$

ist wobei n die Anzahl aller Ionen ist, die eine Beweglichkeit größer als

$$U_0 = \frac{w}{4\pi C' V_0}$$

haben, wo C' die Kapazität des Kondensators nach Mache ist.

Die Leitfähigkeit für die langsamen Ionen

$$\Lambda = \frac{J_2}{4\pi C V}$$

wo C — die Kapazität des Grundkondensators des Ebertschen Apparates, V — das Potential bis zu welchem er bei der Messung geladen wurde.

Bei guter Isolation des Macheschen Kondensators kann man ohne eine Hilfsbatterie auskommen, indem man ihn mit derselben Elektrizitätsquelle (z. B. einer Zambonisäule) ladet, die für den Ionenzähler benutzt wird[1]). Während der Versuchszeit fällt das Potential des Macheschen Kondensators praktisch sehr wenig. Diese Methode hat vor der ersten den Vorzug, daß hier die Korrektion für den Einfluß der großen Ionen unmittelbar bestimmt wird.

Die Möglichkeit eines Fehlers infolge der Veränderung der Ionisation während der Versuchszeit bleibt bestehen, da die zwei Messungen nacheinander ausgeführt werden.

III. Die zuverlässigsten Resultate können erhalten werden, wenn man den Apparat von Ebert mit einem Elektrometer vervollständigt nach dem Schema des Apparates von Ebert-Gerdien für die Bestimmung der Ionenbeweglichkeit[2]). Der Apparat besteht aus zwei nacheinander geschaltenen Kondensatoren mit Elektrometern. Die Messungen werden folgenderweise ausgeführt. Das erste Elektrometer wird auf ein Potential V_1 gebracht, das zum Auffangen aller leichtbeweglichen Ionen genügt. Der zweite Elektrometer wird bis zum Potential V_2 geladen, das höher ist, als V_1. Nehmen wir an, die elektrische Kapazität des ersten Kondensators sei C_1 und die Stromstärke, gemessen

1) A. Gockel, loc. cit.

2) W. F. G. Swann, Terr. Magn. **19**, 171, 1914.

1) Bei Abwesenheit der Ionen mittlerer Beweglichkeit kann man, ohne das Resultat merklich zu alterieren, den Macheschen Kondensator bis zum Potential von einigen Hundert Volt laden.

2) H. Gerdien, Physik. Zeitschr. **4**, 632, 1903; H. Mache und E. v. Schweidler, loc. cit. S. 94.

Einwirkung der großen Ionen auf die Angaben des Ionenzählers.

Nr.	Datum	Beobachtungsort	n_+	$\bar{n}_+$	p_+ Proz.	n_-	$\bar{n}_-$	p_- Proz.	Λ_+	Λ_-	Methode
									In elektrostat. Einh. (sec^{-1})		
1	17. VIII. 25.	Pjatigorsk (Kaukasus) Meteorolog. Station.	925	1490	61	955	1280	34	$2,68 \cdot 10^{-6}$	$1,53 \cdot 10^{-6}$	III.
2	17. VIII. 25.	Pjatigorsk (Kaukasus) Teplossernaja-Straße.	1230	1250	1,5	1080	1250	16	$0,9 \cdot 10^{-7}$	$8,2 \cdot 10^{-7}$	III.
3	18. VIII. 25.	Pjatigorsk (Kaukasus) Neben d. Elisabeth-Galerie.	480	690	44	400	668	67	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	III.
4	30. VII. 24.	Taschkent (Turkestan) Observatorium.	2420	2620	15	1330	1890	42	$1,54 \cdot 10^{-6}$	$4,1 \cdot 10^{-6}$	I.
5	31. I. 24.	Moskau, Physik. Institut d. Universität. Auf d. Balkon.	138	216	56	134	239	78	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	I.
6	Juli, 1927, 6—7h	Kislowodsk (Kaukasus) Kardiologische Klinik.	765	1211	58	718	1203	67	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$	II.
7	Juli, 1927, 12—13h	Kislowodsk (Kaukasus) Kardiologische Klinik.	853	1034	21	803	982	22	$8,6 \cdot 10^{-7}$	$8,5 \cdot 10^{-7}$	II.
8	Juli, 1927, 16—17h	Kislowodsk (Kaukasus) Kardiologische Klinik.	736	967	31	720	863	20	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-7}$	II.

mit dem ersten Elektrometer J_1; die respektiven Werte für den zweiten Kondensator $C_2 J_2$, so erhalten wir

$$J_1 = n \varepsilon w + 4\pi C_1 V_1 \Lambda; \quad J_2 = 4\pi C_2 V_2 \Lambda,$$

woraus folgt

$$n = \frac{1}{\varepsilon w}\left[J_1 - J_2 \frac{C_1 V_1}{C_2 V_2}\right]; \quad \Lambda = \frac{J_2}{4\pi C_2 V_2}.$$

Der Vorteil dieser Methode ist die Gleichzeitigkeit der Messung von n und Λ.

Zum normalen Apparat von Ebert kann man einen Kondensator von Mache hinzufügen, der mit einem Elektrometer von Wulf verbunden ist. Im Apparat mit vertikalem Kondensator ist es dabei bequem den Macheschen in horizontaler Stellung vermittels eines Knierohrs einzuschalten.

Die Ungleichmäßigkeit des Luftstromes spielt dabei keine Rolle, da das erste Elektrometer bei Sättigung mit einigem Überschuß arbeitet, während in dem zweiten sicher ein Ohmscher Strom mitwirkt.

Um den Einfluß der großen Ionen auf die Angaben des Ebertschen Zählers zu vermindern, kann man das Verkürzen der Innerelektrode des Apparates empfehlen[1]). Dadurch wird einerseits der Einfluß großer Ionen vermindert, und andererseits die Empfindlichkeit des Apparates durch die Verminderung der Kapazität vermehrt.

Wie Chauveau[2]) richtig angibt, muß man die Ionenzahlenmessungen, die mit Ebertschem Apparat unter Vernachlässigung des Einflusses großer Ionen gemacht waren, wiederholen, um zuverlässigere Zahlen zu erhalten.

Als ein Beispiel der Einwirkung der großen Ionen auf die Angaben des Ionenzählers sei vorstehende Tabelle vorgeführt.

Hier ist in 4. Kolumne die wahre Zahl der leichtbeweglichen positiven Ionen aufgestellt, in 5. Kolumne — dieselben Zahlen, die durch die Mitzählung der großen Ionen entstellt sind, in 6. Kolumne — Differenz von wahren und entstellten Ionenzahlen in Proz., in 7., 8. und 9. Kolumne — die entsprechenden Größen für die negativen Ionen, in 10. und 11. Kolumne — die Leitfähigkeit der positiven und negativen großen Ionen ($\Lambda = NU\varepsilon$), in 12. Kolumne bedeuten I, II und III, daß die Messung nach der Methode ausgeführt ist, die oben unter I, II oder III beschrieben ist.

Die Beispiele sind aus unseren Messungen an verschiedenen Punkten der U. d. SSR. entnommen. Dabei sind größtenteils die Punkte mit erhöhter Luftionisation ausgewählt, dessenungeachtet ist die entstellende Wirkung der großen Ionen sehr bedeutend (bis zu 75 Proz.).

Zur besseren Beurteilung der nach der alten Methode gewonnenen Ionenzahlen führen wir folgende schematische Berechnung an.

Es kann gegenwärtig als festgestellt gelten, daß das Gleichgewicht zwischen Ionenerzeugung und Ionenvernichtung in der Luft in Gegenwart einer bemerkbaren Zahl von langsamen Ionen folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$q = \beta' n \qquad (3)$$

wo q die Zahl der sich neu bildenden Ionen in $1\ cm^3$ in sec;

1) V. Heß, loc. cit. S. 36; W. Baranow, loc. cit., S. 165.
2) B. Chauveau, loc. cit.

β' die Verschwindungskonstante;
n die Zahl der schwerbeweglichen Ionen in 1 cm^3 Luft[1]).

Man kann nach J. Nolan annehmen, daß β' der Zahl der großen Ionen (wenn diese Zahl nicht sehr klein ist) direkt proportional ist, so daß

$$\beta' = 2\eta_2 N,$$

wo N die Zahl der großen Ionen eines Zeichens in 1 cm^3 Luft, η_2 eine Konstante der Verbindung der leichtbeweglichen Ionen mit den großen, die nach Nolan $9{,}7 \cdot 10^{-6}\ sec^{-1}$ beträgt[2]). Die lineare Beziehung (3) bleibt nach Power[3]) auch in Abwesenheit von Absorptionskernen erhalten, daher kann man der Einfachheit wegen annehmen:

$$\beta' = \beta_0 + 2\eta_2 N$$

und nach Power $\beta_0 = 6{,}1 \cdot 10^{-3}\ sec^{-1}$ annehmen.

Also wird der Zusammenhang zwischen der Zahl der schnellen und der der langsamen Ionen folgenden Ausdruck haben

$$n = \frac{q}{\beta_0 + 2\eta_2 N}.$$

Es ist anderseits die Ionenzahl, die gewöhnlich durch den Ebertschen Apparat gemessen wird, gleich:

$$\bar{n} = n + \frac{4\pi C_1 VNU}{w}$$

$$= \frac{q}{\beta_0 + 2\eta_2 N} + \frac{4\pi C_1 VNU}{w},$$

wenn die Beweglichkeit U für alle langsamen Ionen angenommen wird. Wenn man die oben angeführten Werte der Konstanten β_0 und η_2 einführt und annimmt, daß $U = 3{,}4 \cdot 10^{-4}$ cm/sec, $C_1 = 12$ cm, $V = 200$ Volt, $q = 25$, $w = 1300$ cm^3/sec, so erhalten wir das in Fig. 2 abgebildete Diagramm.

Hier ist als Abszissenachse die Zahl der großen Ionen abgebildet und in der Ordinatenachse die Zahl der leichtbeweglichen Ionen. Die ausgezogene Linie stellt die wahre Zahl dar und die punktierte Linie dieselbe Zahl durch den Einfluß der langsamen Ionen verändert. Wir sehen aus der Abbildung, daß bei kleinen Werten von N die Zahl der Ionen, die mit dem Apparate von Ebert gemessen werden, sich von der wirklichen Zahl der leichtbeweglichen Ionen fast nicht unterscheidet, und die Bemerkung von Eve[4]), daß der Ebertsche Ionenzähler mehr die physikalische Reinheit der Luft mißt, als die Intensität der ionisierenden Agenten, ist in diesem Bezirk vollkommen wahr. Bei mittleren Werten von N ist die zu messende Größe praktisch unabhängig von N, weil die Verkleinerung von n durch Vergrößerung von N kompensiert wird. Bei großen N, endlich, mit der Verminderung der Zahl leichtbeweglicher Ionen beginnen die Angaben des Apparates zu wachsen. Auf diese Weise wird die Zufälligkeit der Angaben des Ionenzählers in bezug auf die Beobachtungsbedingungen ganz klar.

Bei der Bestimmung der Beweglichkeit der Ionen wird gewöhnlich der verzerrende Einfluß der langsamen Ionen nur ungenügend berücksichtigt. Wie bekannt ist, haben die sorgfältigen

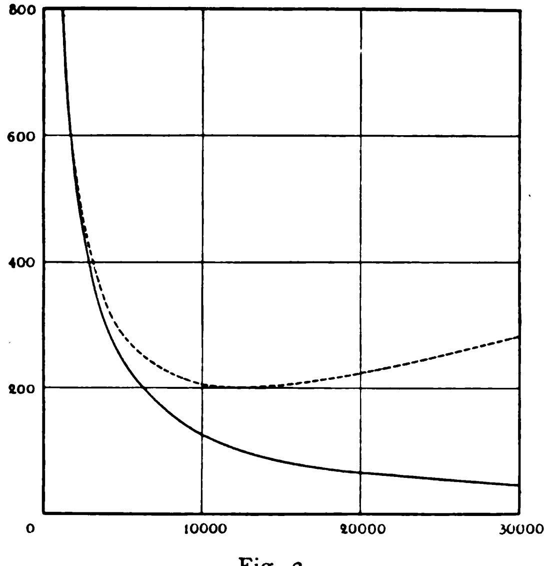


Fig. 2.

Untersuchungen der Beweglichkeit der leichten Ionen, die in der letzten Zeit in Laboratorien vor sich gingen, festgestellt, daß die Beweglichkeit eines leichten Ions von seiner Masse praktisch unabhängig ist[1;2]), daß sie auch davon unabhängig ist, auf welche Weise die Ionisation ausgeführt wurde[3]), daß die Anordnung der Ionen nach den Beweglichkeiten in dem untersuchten Intervalle von 0,4 bis 4 cm/sec : Volt/cm nicht stetig ist, sondern daß es nur einzelne ganz bestimmte Gruppen gebe[4]). Solche Gruppen hat man im ganzen drei gefunden, aber bei gewöhnlichen Messungen in der Atmosphäre kann man von ihnen nur zwei stabile Gruppen beobachten: eine für

1) J. J. Nolan, R. K. Boylan, and C. P. de Sachy, Proc. of R. Irish. Ac., XXXVII A, No. 1, 1925; E. v. Schweidler, Wien. Ber., IIa, **128**, 947, 1919; A. Power, Frankl. Inst. J., **196**, 327, 1923.
2) loc. cit.
3) loc. cit.
4) A. S. Eve, Phil. Mag. **19**, 657, 1910.

1) H. Erikson, Phys. Rev. **24**, 622, 1924; **26**, 465, 1925.
2) A. Tyndall and G. Grindley, Phil. Mag. **48**, 711, 1924.
3) H. Erikson, Phys. Rev. **24**, 502, 1924.
4) A. Tyndall and G. Grindley, Proc. Roy. Soc. (A.) **110**, 341, 358, 1926.

Tabelle I.

Autor	Jahr	Methode	Grenzen der Beweglichkeitsänderungen		Anmerkung
			u_+	u_-	
Elster, Geitel, Harms[1])	1905	Mache	0,58—1,15	0,62—1,17	Vor der Finsternis. Mallorca
Elster, Geitel, Harms	1905	„	0,11—1,04	0,25—1,04	Während der Finsternis
Knoche und Laub[2])	1912	Aus der Zahl und der Leitfähigkeit	0,11—2,00	0,07—1,71	Vor der Finsternis. Brasilien
Knoche und Laub	1912	„	0,24—0,94	0,15—1,19	Während der Finsternis
Swann[3])	1914	„	0,26—1,25	0,34—1,65	Auf „Carnegie“
Behouněk[4])	1927	Mache	0,34—1,26	0,23—1,59	Im äußersten Nor den

negative Ionen mit der Beweglichkeit 1,8 cm/sec : Volt/cm und eine für positive Ionen mit der Beweglichkeit ca. 1,3 cm/sec : Volt/cm[5]).

Die Beweglichkeit dieser beiden Gruppen kann sich in gewissen Grenzen je nach dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft ändern. Die Beweglichkeit des negativen Ions ändert sich nämlich von 2,15 bis 1,60 cm/sec : Volt/cm bei der Veränderung der Feuchtigkeit von $^1/_2$ Proz. zirka bis zur Sättigung. Die Beweglichkeit des positiven Ions verändert sich dagegen bei denselben Bedingungen sehr wenig[6]).

Die Anwesenheit von andern Dämpfen und aktiven Gasen wirkt ebenfalls auf die Beweglichkeit des positiven sowie des negativen Ions, indem sie dieselbe vergrößert oder vermindert[7]); [8]); [9]); [10]), da aber die Menge dieser Dämpfe in der Atmosphäre gewöhnlich klein ist, kann sie keinen merklichen Einfluß ausüben.

Wendet man diese Ergebnisse an die Atmosphäre an, so könnte man, wie es scheint, erwarten, daß es dort keine leichten Ionen mit einer Beweglichkeit unter 1,6 cm/sec : Volt/cm für die negativen und unter 1,2 cm/sec : Volt/cm für die positiven geben sollte oder, abgerundet, mit einer Beweglichkeit unter 1 cm/sec : Volt/cm;

1) Ter. Magn. and Atm. Electr. **11**, 1, 1906.
2) Ter. Magn., **21**, 177, 1916.
3) Ter. Magn., **20**, 13, 1915.
4) Journ. d. Phys. **8**, 161, 1927.
5) Die dritte Gruppe besteht aus positiven Ionen. Die Ionen dieser Gruppe sind unbeständig, — in Hundertsteln von einer Sekunde nach ihrem Entstehen verwandeln sie sich schon in Ionen der beständigen Gruppe. Ihre Beweglichkeit ist dieselbe wie die der negativen Ionen. (H. Erikson, Phys. Rev. **20**, 116, 1922; **24**, 502, 1924; Wahlin, Phys. Rev. **20**, 267, 1922.)
6) A. Tyndall and G. Grindley, loc. cit. 1926.
7) L. Loeb, Proc. Nat. Acad. Sci. **12**, 35, 42, 617, 677, 1926. Journ. Frank. Inst. March 1926, S. 279.
8) A. Tyndall and L. Phillips, Proc. Roy. Soc. (A.) **111**, 577, 1926.
9) H. Mayer, Physik. Zeitschr. **27**, 513, 1926.
10) H. Erikson, Phys. Rev. (3), **30**, 339, 1927.

aber es werden bekanntlich bei den Beweglichkeitsmessungen in der Atmosphäre oft sehr niedrige Werte der Beweglichkeit erhalten. Vorstehende Tabelle, die aus zufällig genommenen Arbeiten zusammengestellt ist, veranschaulicht das sehr deutlich.

Es muß hier bemerkt werden, daß alle diese Zahlen erniedrigte Werte der Beweglichkeit vorstellen und fast niemals erhöhte Werte geben.

Bevor wir auf die Aufklärung dieser Frage eingehen, wollen wir die Methodik der Ionenbeweglichkeitsbestimmung in der Atmosphäre selbst kurz besprechen.

Wie bekannt bedient man sich bei den Beweglichkeitsmessungen in der Atmosphäre gewöhnlich folgender Methoden[1]):

1. Die Methode von Mache[2]), wobei die Beweglichkeit mittels eines Zusatzkondensators bestimmt wird (der auf den Ionenzähler von Ebert aufgesetzt wird) nach der Formel $U = \frac{\omega}{4\pi C V}$ wo ω die Volumengeschwindigkeit der Luft im Apparate ist, C die Kapazität des Kondensators von Mache und V das Grenzpotential.

2. Die Methode von Gerdien[3]), wobei die Beweglichkeit mittels eines speziellen Gerdienschen Apparates ermittelt wird, der aus zwei koaxialen hintereinander liegenden zylindrischen Kondensatoren besteht, von denen jeder ein besonderes Elektrometer besitzt.

3. Die indirekte Methode, wobei die Beweglichkeit nach der Formel $U = \frac{\lambda}{n \cdot e}$ aus der Zahl der Ionen und der Leitfähigkeit abgeleitet wird, wo λ die Leitfähigkeit, n die Zahl der Ionen und e die Ladung des Ions ist.

Bei diesen Messungen sind Fehler aus folgenden Gründen möglich:

1) V. F. Heß, „Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen“. 1926.
2) H. Mache, Physik. Zeitschr. **4**, 717, 1903.
3) H. Gerdien, Physik. Zeitschr. **4**, 632, 1903.

1. Wegen der geringen Empfindlichkeit der benutzten Apparate.
2. Wegen der Ungleichzeitigkeit der Messung (Methode von Mache).
3. Wegen der nicht vollen Gleichmäßigkeit der Luft (die indirekte Methode).
4. Wegen der Einwirkung des Erdfeldes (dieser Fehler ist bei normalen Bedingungen verhältnismäßig nicht groß) [1]; [2]; [3]; [4].
5. Wegen der Einwirkung der schweren Ionen auf die Messungen.

Die ersten drei Fehler müßten beiderseitige Schwankungen der Beweglichkeit von dem wahren Werte ergeben; aber, wie gesagt, ist es in der Wirklichkeit fast niemals so. Deshalb wollen wir nur den letzten Fehler ausführlicher prüfen, weil voraussichtlich er es ist, der die größte Rolle spielt.

Bei allen Beweglichkeitsmessungen im Feld, seien sie direkt oder indirekt, gehen wir eigentlich von der Zahl der Ionen und von der Leitfähigkeit heraus. Die Wirkung der schweren Ionen auf die Leitfähigkeitsmessungen kann selten einige Proz. übersteigen, dagegen kann die Wirkung derselben auf die Messung der Zahl der Ionen sehr bedeutend ausfallen, indem sie einige zehn oder manchmal hundert Proz. beträgt, wie es schon oben gesagt wurde.

Dieser Fehler geht voll in die Beweglichkeit der Ionen über. Da n immer größer als n ist, so muß auch die Beweglichkeit, die auf gewöhnliche Weise berechnet ist, kleiner sein als ihr wahrer Wert, wie es auch wirklich der Fall ist. (Tab. I.)

Es sind also, wie es scheint, die zu niedrigen Werte der Beweglichkeit einfach als Folge der Einwirkung der schweren Ionen nicht ganz richtig.

Um diese Vermutung zu prüfen war es notwendig, die Beweglichkeit der Ionen unter Bedingungen, die denen der freien Atmosphäre nahe sind, nach irgendeiner Methode zu messen, die für die Wirkung der schweren Ionen korrigierbar wäre. Es mußte dazu natürlich ein Apparat gewählt werden, an dem die Wirkung der schweren Ionen möglichst wenig bemerkbar wäre, damit die eingeführten Korrekturen nicht zu groß sein möchten.

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß diesen Forderungen der Apparat von Gerdien viel mehr entspricht, als der Ebertsche Apparat mit Macheschem Kondensator.

1) Hewlett, Ter. Magn. **19**, 219. 1914.
2) F. Swann, Ter. Magn. **18**, 163; **19**, 205, 1913/14; Phys. Rev. (4) **21**, 449, 1923.
3) Norinder, Ark. f. Mat. Astr. och Fysik **15**, N. 2, Stockholm 1920.
4) Mackell, Phys. Rev. (4) **21**, 436, 1923; (3) **17**, 390, 1921.

Betrachten wir zunächst die Methode von Mache. Bekanntlich besteht eine Messung nach dieser Methode gewöhnlich aus zwei Messungen. Es sei J der Strom im Apparate von Ebert bei nichtgeladenem Macheschen Kondensator, und J_1 bei dem bis zum Potential v' geladenen, wobei $v' < \frac{\omega}{4\pi c'^1 u}$. Die Wirkung der schweren Ionen in Betracht ziehend, können wir schreiben:

$$J = new + 4\pi CVe \sum NU$$

$$J_1 = new + 4\pi CVe \sum NU - 4\pi c'v'enu.$$

Es ist noch nicht möglich, die wahre Beweglichkeit aus diesen zwei Messungen zu bekommen, dazu muß man noch den Wert von $4\pi CVe \sum NU$ bestimmen, was durch eine dritte Messung erreicht werden kann, ebenfalls bei geladenem Macheschen Kondensator. Er muß aber bis zum Potential $V'' > \frac{\omega}{4\pi c'^1 u}$ geladen sein; in diesem Falle ist der Strom am Hauptkondensator gemessen

$$J_2 = 4\pi CVe \sum NU.$$

Die graphische Abhängigkeit des Stromes im Hauptkondensator von dem Potential auf dem Macheschen Kondensator kann durch Fig. 3 veranschaulicht werden.

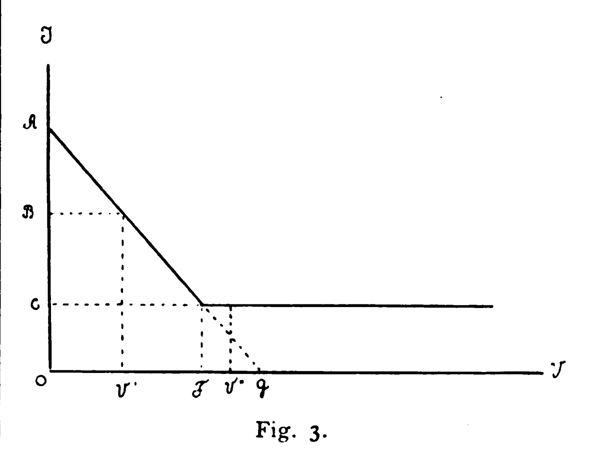


Fig. 3.

Hier ist

$$OA = J;\ OB = J_1$$

und

$$OC = J_2;\ OF = V_0$$

das wahre Grenzpotential, mit welchem die Beweglichkeit ausgerechnet werden muß und $OG = V_0$ das gewöhnlich beobachtete verzerrte Potential.

Bekanntlich wird die Beweglichkeit nach dieser Methode gewöhnlich nach der Formel

$$\bar{u} = \frac{\omega}{4\pi C V_0}$$

berechnet, wobei $\overline{V_0}$ aus dem Verhältnis

$$\frac{\overline{V_0}}{V'} = \frac{J}{J - J_1}$$

bestimmt wird.

Es ist leicht einzusehen, daß die wahre Beweglichkeit u nach der Formel

$$u = \frac{\omega}{4\pi C V_0}$$

berechnet werden muß, wo V_0 aus dem Verhältnis

$$\frac{V_0}{V'} = \frac{J - J_2}{J - J_1}$$

bestimmt wird (Fig. 3).

Es ist also das Verhältnis der Beweglichkeiten

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{\overline{V_0}}{V_0} = \frac{J}{J - J_2} = \frac{ne\omega + 4\pi C V e \sum N U}{ne\omega}$$

$$= 1 + \frac{4\pi C V}{\omega} \cdot \frac{\sum N U}{n}.$$

Wollen wir den angenäherten numerischen Wert berechnen, den dieser Korrektionsfaktor bei Beweglichkeitsmessungen nach der Methode von Mache mit gewöhnlichem Ionenzähler von Ebert haben wird.

Wir können annehmen, daß $C = 13$ cm; $V = 200$ Volt und $\omega = 1300$ cm³/sec. Daraus ergibt sich der Korrektionsfaktor

$$1 + 25 \frac{\sum N U}{n},$$

woraus folgt

$$u = \bar{u}\left(1 + 25 \frac{\sum N U}{n}\right). \qquad \text{(I)}$$

Führen wir in dieselbe Formel die angenäherten numerischen Werte für den Apparat von Gerdien ein: $C = 9$ cm; $V = 200$ Volt und $\omega = 9000$ cm³/sec, so erhalten wir:

$$u = \bar{u}\left(1 + 2{,}5 \frac{\sum N U}{n}\right).$$

Es ist klar, daß bei gleichen Bedingungen die Korrektur für den Apparat von Gerdien erheblich kleiner sein wird, als für den Ebertschen Apparat[1]).

Es wurde für die Ionenbeweglichkeitsmessungen ein Apparat von Gerdien[2]) genommen, in dem zur Erhöhung der Empfindlichkeit die Exnerschen Elektroskope durch Zweifadenelektrometer nach Wulf ersetzt wurden.

1) Es ist von Interesse zu bemerken, daß die Beweglichkeitswerte, die mit Hilfe des Gerdienschen Apparates erhalten werden, immer näher den normalen sind, als alle anderen, die mit andern Apparaten erhalten werden. (H. Mache und E. Schweidler, Die atmosphärische Elektrizität. 1909, S. 96.)

2) loc. cit.

Die Messungsmethodik war die folgende:

Es wurden zwei sukzessive Messungen ausgeführt.

I. Messung.

Das erste Elektrometer diente zur Messung der Ionenleitfähigkeit, das zweite zur Messung aller leichten Ionen, die von dem ersten Elektrometer nicht eingefangen wurden, sowie einer gewissen Quantität der schweren Ionen. Die Potentiale, die dazu nötig sind, werden aus folgenden Formeln berechnet:

$$V_1 < \frac{\omega}{4\pi \overline{C_1} U} \quad \text{und} \quad V_2 > \frac{\omega}{4\pi \overline{C_2} U}$$

wo ω die Volumengeschwindigkeit der Luft im Apparate ist, $\overline{C_1}$ und $\overline{C_2}$ die Kapazitäten der inneren Elektroden und U die Beweglichkeit. Dabei ist es wünschenswert, daß V_2 nur wenig größer sei als der Wert des rechten Teiles der Formel. Diese Messung gibt die unkorrigierten Werte der Leitfähigkeit ($\bar{\lambda}$) und der Ionenzahl ($\bar{n}$):

$$\bar{\lambda} = \frac{J_1}{4\pi \overline{C_1} V_1} = \frac{C_1}{4\pi \overline{C_1} V_1} \cdot \frac{\Delta V_1}{\Delta t};$$

$$\overline{n_1} = \frac{J_1 + J_2}{\omega e} = \frac{C_1 \frac{\Delta V_1}{\Delta t} + C_2 \frac{\Delta V_2}{\Delta t}}{300\, \omega e};$$

wo $J_1 (J_2)$ der Strom ist, der mit dem ersten (zweiten) Elektrometer gemessen ist, $C_1 (C_2)$ die Kapazität der ersten (zweiten) Elektrometers samt seinem Kondensator, und $\frac{\Delta V_1}{\Delta t} \left(\frac{\Delta V_2}{\Delta t}\right)$ die Voltzahl, die von dem ersten (zweiten) Elektrometer während 1 sec zerstreut wurde, auf Isolationsfehler korrigiert.

II. Messung.

Die beiden Elektrometer waren auf ein Potential gebracht, das zum Einfangen aller leichten Ionen genügte.

$$V_1' > \frac{\omega}{4\pi \overline{C_1} U} \quad \text{und} \quad V_2' > \frac{\omega}{4\pi \overline{C_2} U}$$

wobei V_1' den Wert der rechten Seite der Formel nur wenig überschreiten soll; V_2' soll dagegen den größtmöglichen Wert haben. Das erste Elektrometer gibt wieder die unkorrigierte Zahl der leichten Ionen:

$$\overline{n_{11}} = \frac{J_1'}{e\omega} = \frac{C_1 \cdot \frac{\Delta V_1'}{\Delta t}}{300\, \omega e}.$$

Das zweite Elektrometer gibt die Leitfähigkeit für die schweren Ionen, das heißt eben die Korrektur auf die schweren Ionen, die uns interessiert:

$$\Sigma NUe = \Lambda = \frac{J'_2}{4\pi C_2 V'_2} = \frac{C_2 \cdot \frac{\Delta V'_2}{\Delta t}}{4\pi C_2 V'_2}.$$

Aus diesen zwei Messungen erhalten wir die Leitfähigkeit der leichten Ionen, die auf den Einfluß der schweren Ionen korrigiert ist

$$\lambda = \bar{\lambda} - \Lambda = \frac{C_1 \frac{\Delta V_1}{\Delta t}}{4\pi C_1 V_1} - \frac{C_2 \frac{\Delta V'_2}{\Delta t}}{4\pi C_2 V'_2} \qquad \text{(II)}$$

und zwei korrigierte Werte für die Zahl der leichten Ionen:

$$n_I = \frac{J_1}{\omega e} - \frac{J'_2}{\omega e} \cdot \frac{\bar{C}_1}{C_2} \cdot \frac{V_1}{V'_2} + \frac{J_2}{\omega e} - \frac{J'_2}{\omega e} \cdot \frac{V_2}{V'_2}$$

$$= \frac{C_1 \cdot \frac{\Delta V_1}{\Delta t} - \frac{\bar{C}_1}{C_2} \cdot \frac{V_1}{V'_2} \cdot C_2 \cdot \frac{\Delta V_2}{\Delta t}}{300 \cdot \omega \cdot e}$$

$$+ \frac{C_2 \cdot \frac{\Delta V_2}{\Delta t} - \frac{V_2}{V'_2} \cdot C_2 \cdot \frac{\Delta V_2}{\Delta t}}{300 \cdot \omega \cdot e};$$

$$n_{II} = \bar{n}_{II} - \frac{J'_2}{\omega e} \cdot \frac{\bar{C}_1}{C_2} \cdot \frac{V'_1}{V'_2}$$

$$= \frac{C_1 \frac{\Delta V'_1}{\Delta t} - \frac{\bar{C}_1}{C_2} \cdot \frac{V'_1}{V'_2} \cdot C_2 \cdot \frac{\Delta V'_2}{\Delta t}}{300 \cdot \omega \cdot e}.$$

Von diesen Werten wird das Mittel genommen

$$n = \frac{n_I + n_{II}}{2}. \qquad \text{(III)}$$

Die korrigierte Beweglichkeit wird unmittelbar erhalten nach der bekannten Formel:

$$U = \frac{\lambda}{n \cdot e \cdot 300}. \qquad \text{(IV)}$$

Die Messungen wurden in dem Experimentalzimmer des Sanitär-Hygienischen Instituts unter verschiedenen künstlich erzeugten „klimatischen“ Bedingungen ausgeführt.

In der nebenstehenden Tabelle sind einige Ergebnisse dieser Messungen angeführt: λ ist die Leitfähigkeit der leichten Ionen nach der Formel (II) berechnet; n die korrigierte Zahl der leichten Ionen, aus der Formel (III) erhalten; U die korrigierte Beweglichkeit, nach der Formel (IV) berechnet; ΣNU ist die Summe der Produkte der schweren (und auch der mittleren, falls sie anwesend sind) Ionen in ihre Beweglichkeiten — diese Größe charakterisiert gewissermaßen die Zahl der schweren Ionen; sie wird aus der II. Messung nach der Formel

Tabelle II.

	Datum	Beweglichkeit korrigiert U_+	Beweglichkeit korrigiert U_-	Beweglichkeit unkorrigiert $\bar{U}_+$	Beweglichkeit unkorrigiert $\bar{U}_-$	Fehler in Proz. in $\bar{U}_+$	Fehler in Proz. in $\bar{U}_-$	ΣNU_+	ΣNU_-	n_+	n_-	$\lambda_+ \cdot 10^5$	$\lambda_- \cdot 10^5$	Anmerkungen
1	21. XI. 24	1,35	2,14	0,68	0,96	50	55	10,2	10,5	286	214	4,96	6,55	Im Laboratorium (norm. Bedingung)
2	21. XI.	1,12	1,96	0,26	0,21	77	89	11,6	20,8	89	61	1,43	1,71	Ebendaselbst (Rauchgeruch)
3	23. XI.	1,13	1,89	0,22	0,08	80	96	12,1	14,3	72	15	1,17	0,41	Auf der Straße.
4	30. XI.	1,31	1,80	0,55	0,58	58	68	10,2	11,7	183	137	3,43	3,52	Im Experimentalzimmer. Rel. Feucht. 17 Proz.
5	2. I. 25	1,23	2,01	0,99	2,01	20	0	1,5	0	155	125	2,73	3,60	Ebenfalls. (Reine Luft)
6	6. I.	1,00	1,95	0,05	1,12	95	43	75,5	84,0	90	135	1,29	3,77	Im Experimentalzimmer. Rel. Feucht. 40 Proz.
7	12. I.	1,47	2,16	0,86	1,27	42	41	19,8	15,1	690	534	14,5	16,5	Ebenfalls, bei künstlicher Ionisierung
8	14. I.	1,32	1,81	0,19	0,54	86	70	25,2	7,9	108	84	2,04	2,18	Ebenfalls, bei norm. Ionisierung
9	15. I.	1,37	1,87	0,60	0,76	56	59	13,6	6,7	262	115	5,14	3,08	" " " "
10	20. I.	1,42	1,83	0,92	1,55	35	15	2,9	0,8	132	113	2,68	2,96	" " " "
	Mittel	1,27	1,94	0,53	0,81									

$$\sum NU = \frac{C_2 \cdot \frac{\Delta V'_2}{\Delta t}}{300 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \overline{C_2} \cdot V'_2 e}$$

erhalten.

Endlich ist $\overline{U}$ die unkorrigierte Ionenbeweglichkeit, die man bei denselben Bedingungen, aber mit dem gewöhnlichen Apparat von Ebert nach der Methode von Mache erhalten würde[1]). Diese Größe wurde aus der Formel (I) erhalten, wobei u, n und ΣNU aus den Ergebnissen des Gerdienschen Apparates genommen sind.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Tabelle das oben Gesagte bestätigt: wird die Beweglichkeitsmessung, wenn auch nur durch Einführen einer Korrektur auf schwere Ionen rationeller als gewöhnlich gestaltet, so stimmt die Beweglichkeit der leichten Ionen viel besser mit den Werten überein, die gewöhnlich in Laboratoriumsbedingungen beobachtet werden.

Es sind also die bis jetzt bei Messungen in der Atmosphäre erhaltenen zu niedrigen Beweglichkeitswerte, wie es scheint, nicht auf irgendwelche besonderen Ionengruppen zurückzuführen. Diese niedrigen Beweglichkeitswerte entsprechen nicht der Beweglichkeit der leichten Ionen in der Atmosphäre, da die wahre Beweglichkeit derselben in Laboratoriumsbedingungen sowie in der Atmosphäre aller Wahrscheinlichkeit nach nicht unter 1,2 cm/sec : Volt/cm für positive und 1,6 cm/sec : Volt/cm für negative Ionen beträgt. Ebensowenig stellen diese Werte irgendeine mittlere Ionenbeweglichkeit dar, da die mittlere Beweglichkeit aller Ionen

$$U = \frac{\sum NU + nu}{\sum N + n}$$

ist, gewöhnlich wird aber die Größe

$$\overline{U} = \frac{\sum NU + nu}{n + \frac{4\pi C V \sum NU}{\omega}}$$

gemessen[1]).

Es hat außerdem keinen besonderen Sinn, die mittlere Beweglichkeit von Ionen ganz verschiedener Gruppen zu bestimmen, die nach ihrer Natur sowie nach ihren Beweglichkeiten stark divergieren und, wie es scheint, keine Zwischenzustände besitzen, so daß die erhaltene Mittelbeweglichkeit keineswegs der Beweglichkeit irgendeiner Ionengruppe entsprechen wird. Diese Größe $\overline{U}$, die gewöhnlich gemessen wird, ist überhaupt keine Beweglichkeit. Sie kann nur als ein qualitatives Merkmal der Anwesenheit schwerer Ionen in der Luft dienen. Je mehr schwere Ionen die Luft enthält, desto größer wird diese Verzerrung sein. (Vergleiche die Werte von $\sum NU$ und von $\overline{U}$ in der Tabelle II.)

Aus allem oben Gesagten kann man den Schluß ziehen, daß es kaum von Interesse ist, die Ionenbeweglichkeitsmessungen in der Atmosphäre auch künftig so auszuführen, wie sie bisher oft gemacht wurden. Es ist ja selbstverständlich, daß eine sorgfältige Untersuchung der Beweglichkeit aller in der Atmosphäre anwesenden Ionen sehr wichtig ist, aber zu diesem Zwecke ist es dringend notwendig, die Ionen in Gruppen einzuteilen (wenn auch grob: in leichte, mittlere und schwere) und die mittlere Beweglichkeit jeder Gruppe gesondert zu bestimmen, wozu natürlich eine spezielle und genaue Apparatur nötig sein wird, sowie eine unumgängliche Bezugnahme auf alle möglichen Fehler.

Zum Schluß ergreifen wir die Gelegenheit auch an dieser Stelle, dem Geophysikalischen Institut der Ersten Moskauer Staatsuniversität für den überlassenen Apparat von Gerdien unsern Dank zum Ausdruck zu bringen.

Moskau, Physikalisches Institut der I. Staatsuniversität im August 1928.

(Eingegangen 6. September 1928.)

1) Es wurde die Methode von Mache darum zum Vergleichen der korrigierten und der unkorrigierten Beweglichkeit gewählt, weil sie in der Praxis am oftesten benutzt wird. Leider gibt eben diese Methode den größten Fehler, wie schon oben gezeigt wurde. Bei der Berechnung der Beweglichkeiten nach der indirekten Methode aus der Ionenzahl und der Leitfähigkeit wird der Fehler natürlich dieselbe Größe haben, falls die Ionenzahl in der üblichen Weise mit dem Ebertschen Apparate bestimmt werden wird. In dem Apparate von Gerdien sind dagegen die Fehler verhältnismäßig gering.

1) W. Baranow, loc. cit.

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 90. VERSAMMLUNG DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE IN HAMBURG VOM 16.—22. SEPTEMBER 1928.

Referate zur Struktur der elektrolytischen Lösungen.

A) M. Wien (Jena), Über die Abweichungen der Elektrolyte vom Ohmschen Gesetz.

Die Natur der Lösungen und der Vorgang bei der elektrolytischen Leitung schienen nach den klassischen Arbeiten von van't Hoff, Arrhenius und Kohlrausch vollständig geklärt zu sein. Die elektrische Leitfähigkeit bestimmte sich danach aus der Beweglichkeit der Ionen und dem Dissoziationsgrad. Die Übereinstimmung der elektrischen und osmotischen Messungen des Dissoziationsgrades schien die Dissoziationstheorie auf das beste zu bestätigen; so bildete sie das Rückgrat der Lehre von den elektrolytischen Lösungen. Wir alle haben sie Jahrzehnte hindurch in unseren Vorlesungen mit Freude und Stolz vorgetragen.

Jedoch wurden schon sehr früh Bedenken gegen die Dissoziationstheorie geäußert. Es zeigte sich, daß bei starken Elektrolyten die Art der Abnahme der Äquivalentleitfähigkeit mit der Konzentration nicht mit dem Massenwirkungsgesetz vereinbar war. Es wurde eine Reihe von Theorien ausgearbeitet, unter der Annahme, daß bei starken Elektrolyten die Dissoziation vollständig sei, die Verminderung der Äquivalentleitfähigkeit mit der Konzentration jedoch auf elektrostatischen Kräften beruhe, welche die Ionen aufeinander ausüben und die bei stärkerer Konzentration wegen des geringeren Abstandes der Ionen steigen. Nach verschiedenen unvollkommenen Ansätzen haben in den letzten Jahren Debye und seine Mitarbeiter eine Theorie aufgestellt, welche der Beobachtung qualitativ und in weiten Grenzen auch quantitativ gerecht wird. Über diese Theorie wird Herr Joos nachher näher berichten.

Die Debyesche Theorie hat sich insbesondere bei den Chemikern nicht allseitig durchzusetzen vermocht. Die durchsichtige und anpassungsfähige Dissoziationstheorie, insbesondere wenn man noch die ebenfalls anpassungsfähige Hydrolyse, Komplexbildung usw. für besondere Fälle hinzunimmt, genügt völlig den theoretischen Bedürfnissen der meisten Chemiker. Aber mag die Dissoziationstheorie auch noch so bequem sein, wir müssen in Forschung und Lehre von ihr abgehen, wenn und insofern sie sich als grundsätzlich unrichtig erweist.

Auch die führenden physikalischen Chemiker beurteilen die neue Theorie zum mindesten kühl, so z. B. Nernst noch in der letzten Auflage seines klassischen Lehrbuches der theoretischen Chemie. In seinen neuesten Arbeiten[1]) rechnet er allerdings schon mit ihr und sucht nur die Grenze, bei der neben dem Debye-Effekt Assoziation mitzusprechen beginnt, festzustellen. Ebenso steht ein so gründlicher Kenner der elektrolytischen Erscheinungen wie Walden der Debyeschen Theorie grundsätzlich ablehnend gegenüber, wie er es in seinem Nachruf auf Arrhenius zum Ausdruck bringt[2]). Er meint darin, daß die moderne Theorie mit ihren mehr oder weniger komplizierten und rein physikalischen Hilfsvorstellungen, sich immer mehr von dem Ideal Mendelejeffs entferne, nach dem jede allgemeine Lösung letzten Endes die chemischen Verhältnisse mit den physikalischen gleichzeitig berücksichtigen müsse. Und schließlich vergleicht Walden Arrhenius mit Berzelius, zu dessen Vorstellungen über elektropositive und elektronegative Elemente man schließlich doch wieder zurückgekehrt sei, und fragt nachdenklich: Wird auch bei den elektrolytischen Lösungen einmal die Rückkehr zu den Arrheniusschen Vorstellungen erfolgen?

Daß eine offene und klare Entscheidung in der Frage der Dissoziation nicht leicht ist, liegt daran, daß die grundlegende Erscheinung, die Abhängigkeit der Äquivalentleitfähigkeit von der Konzentration nicht sicher genug gemessen werden kann, worauf ich sogleich zurückkommen werde. Um eine Entscheidung zwischen den beiden Auffassungen zu ermöglichen, bedarf es neuer Beobachtungen, neuer Erscheinungen, die einen wirklichen Prüfstein für die Theorie bilden können. Wenn die eine Theorie solche neuen Erscheinungen vollständig zu erklären und sogar zu berechnen vermag, während die andre ihnen hilflos gegenüber steht, so ist die Entscheidung gefällt. Derartige Versuche sind nach verschiedenen Richtungen hin möglich. Es soll hier zunächst über Versuche bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit berichtet werden, dann wird Herr Joos zeigen, inwieweit die Theorie die neuen

1) W. Nernst, Berl. Akademie Ber. 1928, S. 4.
2) P. Walden, Naturw. **16**, 325, 1928.



Erscheinungen klarzustellen vermag und schließlich wird Herr Lange über thermische und optische Versuche sprechen, die einen Rückschluß auf die Dissoziation gestatten.

Änderung der Leitfähigkeit mit der Konzentration.

Die Änderung der Leitfähigkeit mit der Konzentration ist schon von Kohlrausch und vielen anderen genau untersucht worden, jedoch sind die Ergebnisse nur für die allereinfachsten Elektrolyte mit 1 · 1-wertigen und 1 · 2-wertigen Ionen einigermaßen sicher feststehend. Bei den Elektrolyten mit höherwertigen Ionen sind sie recht ungenau, obgleich gerade hier, wo die Änderungen mit der Konzentration besonders groß sind, die Theorie am besten geprüft werden könnte.

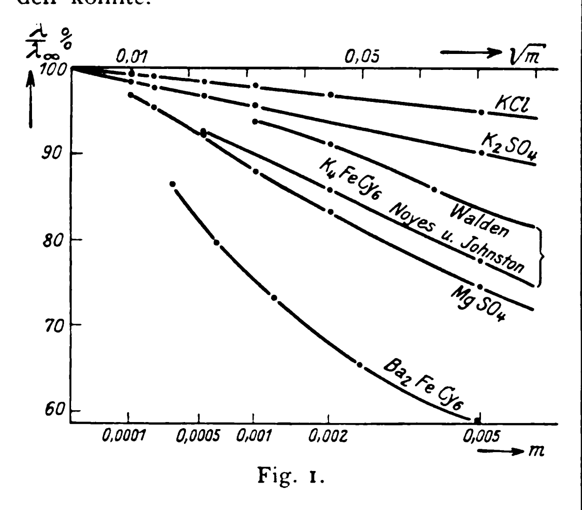


Fig. 1.

Die Fig. 1 zeigt die prozentuale Abweichung von Lösungen verschiedener Konzentration gegen die Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung λ_∞ für Elektrolyte mit Ionen verschiedener Wertigkeit. Als Ordinate ist die Leitfähigkeit in Prozenten von λ_∞, als Abszisse die Wurzel aus der Äquivalentkonzentration angegeben. Nur bei den Elektrolyten mit 1 · 1 und 1 · 2-wertigen Ionen ist die Kurve in einem größeren Bereich der Konzentration gradlinig. Bei Ionen höherer Wertigkeit, z. B. Magnesiumsulfat, Ferrocyankali, sind einmal die Beobachtungen recht unsicher, außerdem krümmt sich die Kurve, und zwar beginnt die Krümmung bei um so größerer Verdünnung, je höher die Wertigkeit der Ionen ist. Ferner tritt hervor, daß vielfach die Extrapolation der Beobachtungen für sehr verdünnte Lösungen nicht auf den Wert 100 hinführt, sondern darüber hinaus geht; wahrscheinlich eine Folge einer Ionenänderung (z. B. Hydrolyse). Fig. 2 zeigt, daß sogar bei einem Salz, wie Magnesiumsulfat die Unsicherheiten stark hervortreten. Aus allem folgt, daß eine sichere und klare Prüfung der Theorie auf Grund dieser Messungen nicht möglich ist.

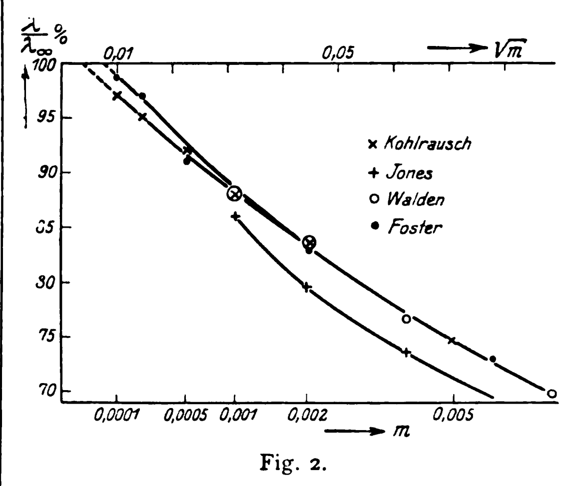


Fig. 2.

Abhängigkeit der Leitfähigkeit der Elektrolyte von der Frequenz und von dem Felde.

Neue Erscheinungen kann man bei der elektrischen Leitfähigkeit der Elektrolyte nach zwei Richtungen hin erwarten, einmal wenn man zur Messung der Leitfähigkeit Wechselstrom von sehr hoher Frequenz benutzt und untersucht, ob Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante von der zur Messung benutzten Frequenz abhängig sind. Die Theorie dafür ist in neuester Zeit von Debye und Falkenhagen[1]) ausgearbeitet worden. Die Messungen sind jedoch noch sehr im Rückstand, weil es für sehr hohe Frequenz noch keine Methode gibt, die gleichzeitig mit genügender Sicherheit Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante leitender Flüssigkeiten zu messen gestattet. Vorläufige Messungen im Leipziger Physikalischen Institut haben die Theorie bestätigt.

Eine andere Untersuchungsrichtung besteht darin, daß man die Leitfähigkeit der Elektrolyte in sehr hohen Feldern mißt, wobei die Ionen sehr große Geschwindigkeiten erhalten, und prüft, ob dabei Änderungen der Leitfähigkeit mit der Spannung zutage treten. Diese letzte Frage habe ich in den letzten Jahren mit meinen Mitarbeitern bearbeitet[2]) und hierüber will ich kurz berichten.

Wir sind gewöhnt, die Geschwindigkeit der Ionen in den Elektrolyten als schneckenhaft langsam anzusehen. Bei einem Feld von 1 Volt auf 1 cm bewegt sich z. B. ein Natrium-Ion 1,6 cm

1) P. Debye und H. Falkenhagen, Physik. Zeitschr. **29**, 121, 401, 1928.
2) M. Wien, Ann. d. Physik IV, **83**, 327, 1927. Ann. d. Physik IV, **85**, 795, 1928.

in der Stunde. Es fragt sich, ob die Geschwindigkeit der Ionen bis zu mehreren 100000 Volt/cm, proportional dem Felde wächst, wobei die Ionen die Geschwindigkeit von einigen Metern in der Sekunde erreichen, ob also das Ohmsche Gesetz für derartige Geschwindigkeiten noch gültig bleibt. Die Schwierigkeit der Untersuchung liegt darin, daß bei irgend längerer Dauer des

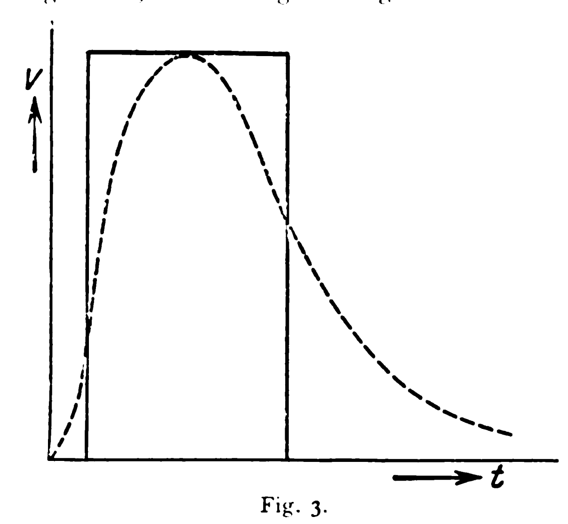


Fig. 3.

Stromes die gewaltige Wärmeentwicklung und elektrolytische Zersetzung jede Messung stören würde. Es bleibt also nur übrig, ganz außerordentlich kurze Stromstöße für diese Messungen zu verwenden, von der Dauer etwa von 1 Millionstel Sekunde. Es wäre natürlich gut, wenn die hohe Spannung während der kurzen Zeit konstant wäre, und die Form der ausgezogenen Linie der Fig. 3 hätte. Jedoch ist dies leider nicht möglich

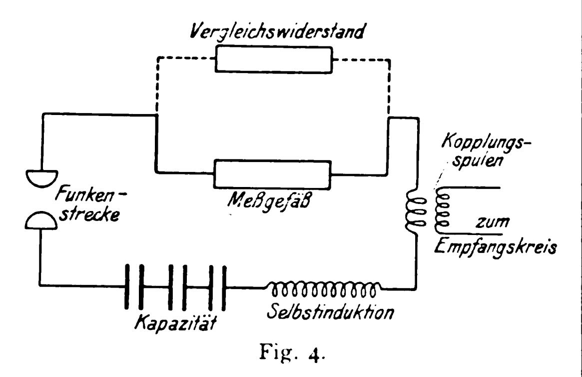


Fig. 4.

und es bleibt nur übrig, kurz dauernde stark gedämpfte Kondensatorentladungen zu benutzen, wobei die Spannung mit der Zeit etwa wie die punktierte Kurve verläuft. Dabei kann ein zeitlicher Mittelwert der Spannung und des Feldes annähernd berechnet werden.

Der Stromstoß, der die Spannung erzeugt, wird gleichzeitig zur Messung der Leitfähigkeit benutzt, indem man mit Hilfe eines Thermoelementes oder eines Detektors den Stromeffekt des Stromstoßes mißt (vgl. Fig. 4).

Am einfachsten geschieht dies, indem man den zu untersuchenden Widerstand abwechselnd mit einem von der Spannung unabhängigen Widerstand einschaltet und solange abändert, bis der Stromeffekt der gleiche ist. Erhöht man dann die Spannung durch Vergrößerung der Funkenstrecke, so erhält man auf diesem Wege die Änderung des zu untersuchenden Widerstandes mit der Spannung. Die Methode wurde von Herrn Malsch und mir[1]) zu einer Präzisionsmethode ausgebildet, indem an Stelle einer Ausschlagsmethode eine Nullmethode eingeführt wurde (vgl. Fig. 5). Der Stromkreis verzweigt sich,

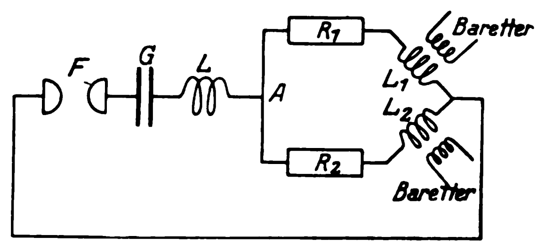


Fig. 5.

in den einen Zweig kommt der zu untersuchende, in den andern der Vergleichswiderstand. Beide Zweige sind mit je einem Zweig einer Baretter-einrichtung gekoppelt; sind sie gleich, so erfolgt im Baretter kein Ausschlag des Galvanometers. Die Methode ist sehr genau, Änderungen der Leitfähigkeit von ein Zehntel pro Mille können mit Sicherheit festgestellt werden, eine Genauigkeit, die bei der Kohlrauschschen Brückenmethode in der Regel kaum erreicht werden dürfte.

Ergebnisse.

Die Messungen ergaben, daß stets bei Elektrolyten eine Vermehrung der Leitfähigkeit mit der Spannung eintritt. Es wurden Änderungen bis zu 50 Proz. beobachtet. Der Verlauf der Änderung mit dem Felde ist in Fig. 6 für drei Lösungen mit Ionen verschiedener Wertigkeit schematisch wiedergegeben, wobei als Abszisse die Feldstärke aufgetragen ist. Die Leitfähigkeit steigt zunächst langsam mit dem Felde an (erster punktierter Teil der Kurve), dann folgt eine annähernd geradlinige Strecke (in der Figur ausgezogen) und schließlich tritt wieder eine Krümmung nach unten ein (zweiter punktierter Teil der Kurve). Die beiden punktierten Teile sind von besonderem Interesse. Der erste punk-

1) J. Malsch und M. Wien, Ann. d. Physik IV, **83**, 305, 1927.

tierte Teil, also die Wirkung verhältnismäßig schwacher Felder, läßt sich empirisch durch eine Formel der Art

$$\Delta\lambda = AX^2(1 - \mathfrak{B}X^2)$$

darstellen, worin X die Feldstärke bedeutet. Die Konstante A steigt schnell mit der Wertigkeit der Ionen, ist um so größer, je stärker die Verdünnung ist und steigt mit sinkender Di-

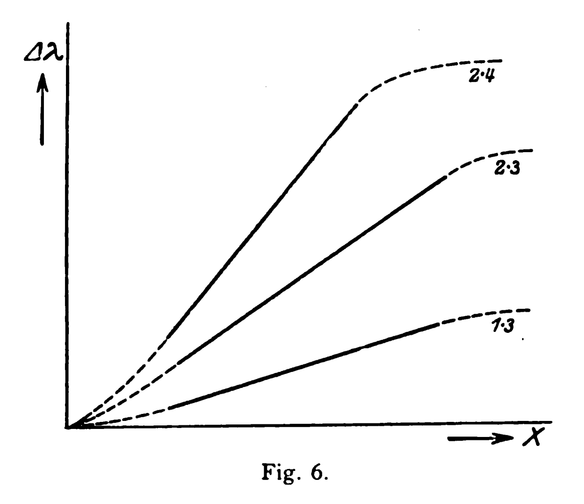


Fig. 6.

elektrizitätskonstante des Lösungsmittels. Dementsprechend sehen wir in Fig. 6 ein viel steileres Ansteigen der Kurve bei einer Lösung mit 2 · 4- und 2 · 3-wertigen Ionen, als bei der Lösung mit 1 · 3-wertigen Ionen.

Tabelle I.

Salz	$z_1^2 \cdot z_2^2$	$A \cdot 10^{11} \left(\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}\right)^2$ $\varkappa = 0{,}001$	$0{,}00025$
Li_3FeCy_6 . . .	9	0,51	0,88
Formel	9	0,5	1,0
Li_4FeCy_6 . . .	16	0,91	2,00
$FgSO_4$	16	1,11	1,96
Formel	16	0,9	1,8
$Mg_3(FeCy_6)_2$.	36	2,63	5,1
Formel	36	2,0	4,0
$Mg_2(FeCy_6)$.	64	3,8	9,6
Formel	64	3,5	7,1

In der Tabelle I sind einige Beobachtungen wiedergegeben, und mit einer empirischen Formel:

$$A = z_1^2 z_2^2 \sqrt{\frac{\varkappa_0}{\varkappa}} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-12}\,(\text{Volt/cm})^2$$

verglichen. Man sieht daß die Formel die Beobachtungen einigermaßen richtig wiedergibt.

Dieser erste Teil ist besonders deshalb von Interesse, weil er sich gut mit der Theorie vergleichen läßt.

Ich komme nun zu den stärkeren Feldern und damit zu dem oberen punktierten Teil der Kurve. Das Feld, bei dem ein Abbiegen der Kurve nach unten merklich wird, ist in hohem Maße von der Konzentration abhängig. Das Abbiegen tritt um so früher ein, je verdünnter die Lösung ist, so daß bei sehr verdünnten Lösungen der erste Anstieg zwar sehr steil ist, aber bald flach wird, während bei den konzentrierteren Lösungen der Anstieg zunächst langsam ist, aber bis zu sehr hohen Feldern andauert. Es ergibt sich somit das Bild der Fig. 7, die Kurven schneiden sich also.

Die Zunahme der Leitfähigkeit mit der Feldstärke wird bei starken Feldern immer schwächer und scheint einem Grenzwert zuzustreben. Dieser Grenzwert wird bei sehr verdünnten Lösungen

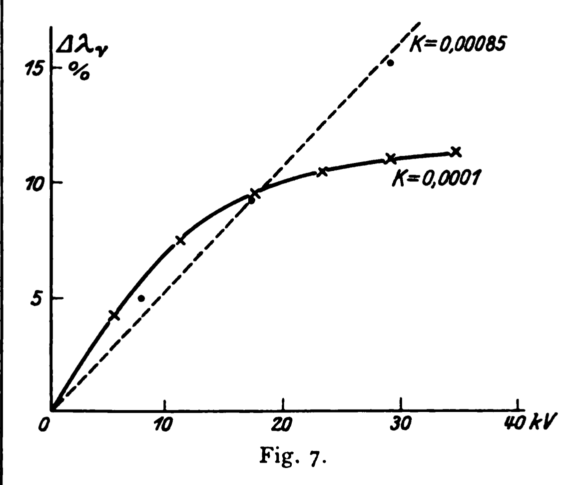


Fig. 7.

viel früher erreicht und liegt niedriger als bei konzentrierteren Lösungen. Ich habe den Grenzeffekt wegen Funkendurchschlags nur für sehr verdünnte Lösungen beobachten können. Dabei haben die letzten Versuche die bereits in einer früheren Arbeit ausgesprochene Vermutung bestätigt, daß der Grenzwert der Leitfähigkeit in sehr hohen Feldern mit der Leitfähigkeit bei der Verdünnung unendlich (λ_∞) innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt. Das heißt also, daß bei sehr großen Geschwindigkeiten die Gründe, welche das Sinken der Äquivalentleitfähigkeit mit der Konzentration bedingen, fortfallen. In der Fig. 8 gebe ich den Verlauf der Leitfähigkeit in sehr hohen Feldern für vier verschiedene Lösungen an. Man sieht, daß die Grenzwerte annähernd erreicht werden und daß sie bei höherwertigen Elektrolyten höher liegen als bei niedrigwertigen. In Tabelle II sind einige Zahlen für den Grenzeffekt angegeben und die beobachteten Werte $\Delta\lambda_g$ mit den aus den Leitfähigkeitsmessungen bei zwei verschiedenen Konzentrationen erhaltenen $\Delta\lambda_c$

verglichen. Die Übereinstimmung ist, wenn man die Unsicherheit der beiden Messungen berücksichtigt, genügend.

Bei sehr schlecht leitenden Flüssigkeiten hat kürzlich Gyemant[1]) mit dem Felde ebenfalls ein Ansteigen der Leitfähigkeit beobachtet.

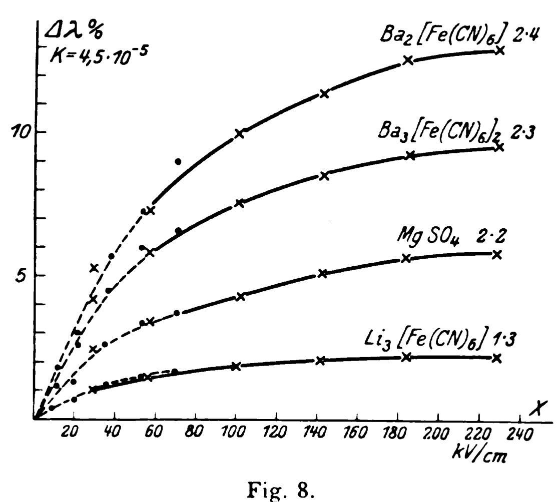


Fig. 8.

Bei der geringen Leitung konnte er das starke Feld längere Zeit wirken lassen, ohne allzu große Joulesche Wärme und Elektrolyse befürchten zu müssen. So konnte er die Leitfähigkeitsmessung und die Erzeugung des starken Feldes voneinander

Tabelle II.

$\varkappa = 2.3 \cdot 10^{-5}$

Salz	$z_1 z_2$	$m \cdot 10^3$	$\Delta\lambda_g$	$\Delta\lambda_c$
$Li_3(FeCy_6)$ . . .	1 · 3	0.18	2.8 Proz.	2.4 Proz.
$MgSO_4$	2 · 2	0,21	4.0 ,,	5.3 ,,
$Ba_3(FeCy_6)_2$ . .	2 · 3	0.15	6.2 ,,	7.0 ,,

$\varkappa = 9.2 \cdot 10^{-5}$

Salz	$z_1 z_2$	$m \cdot 10^3$	$\Delta\lambda_g$	$\Delta\lambda_c$
$Li_3(FeCy_6)$	1 · 3	0.74	5.5 Proz.	4.9 Proz.
$MgSO_4$	2 · 2	0.93	9.0 ,,	11,2 ,,
$Ba_3(FeCy_6)_2$ . .	2 · 3	0.73	14.2 ,,	15.0 ,,

trennen. Dabei zeigte sich die für die Theorie bedeutsame Erscheinung, daß die Vermehrung der Leitfähigkeit nur eintrat, wenn das starke Feld mit der zur Messung dienenden Spannung gleichgerichtet war, hingegen nicht, wenn Feld und Spannung senkrecht zueinander gerichtet waren.

1) A. Gyemant, Physik. Zeitschr. **29**, 289. 1928.

Zum Schluß seien die neuen Erscheinungen nochmals zusammengestellt:

Es tritt stets bei elektrolytischen Leitern eine Zunahme der Leitfähigkeit mit dem Felde ein. Diese Zunahme ist zunächst in schwächeren Feldern proportional dem Quadrat des Feldes. Die Proportionalitätskonstante steigt annähernd mit dem Quadrat des Produktes der Wertigkeiten an und ist größer bei niedrigerer Konzentration und bei niedriger Dielektrizitätskonstante. In sehr hohen Feldern strebt die Leitfähigkeit einem Grenzwert zu, der um so früher erreicht wird, je stärker die Verdünnung ist. Dieser Grenzwert stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit der Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung überein. Ist das Feld senkrecht zu der zur Messung der Leitfähigkeit benutzten Spannung, so tritt die Zunahme der Leitfähigkeit nicht ein.

Alle diese vielseitigen Erscheinungen müssen von einer richtigen Theorie der elektrolytischen Lösungen qualitativ erklärt und möglichst auch quantitativ errechnet werden können. Inwieweit dies der Fall ist, wird Herr Joos jetzt zeigen.

B) Georg Joos (Jena), Die theoretische Deutung von Spannungs- und Frequenzabhängigkeit der elektrolytischen Leitfähigkeit[1]).

Wie schon früher ausgeführt[2]), gibt die Dissoziationstheorie der Elektrolyte keine Handhabe zur auch nur qualitativen Erklärung der Spannungsabhängigkeit der elektrolytischen Leitfähigkeit hinsichtlich der Abhängigkeit des Effekts von der Wertigkeit der Ionen, der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und der Konzentration. Dagegen wird die theoretische Erklärung der Spannungs- und Frequenzabhängigkeit der elektrolytischen Leitfähigkeit in sehr weitgehendem Maß erreicht auf Grund der neueren Vorstellungen von der elektrolytischen Leitfähigkeit, welche im Gegensatz zu der klassischen Dissoziationstheorie bei den starken Elektrolyten als wesentliche Ursache der Konzentrationsabhängigkeit der elektrolytischen Leitfähigkeit die gegenseitige Behinderung der Ionen infolge ihrer elektrostatischen Wechselwirkungen annimmt. Um nun einen Maßstab zu gewinnen, inwieweit eine zahlenmäßige Berechnung der genannten Effekte als eine Bestätigung der

1) Zur Entschuldigung mancher Wiederholungen bekannter Dinge sei bemerkt, daß der Vortrag für einen größeren Kreis von Physikern und Chemikern bestimmt war.

2) G. Joos u. M. Blumentritt, Physik. Zeitschr. **28**, 836, 1927.

Theorie zu werten ist — je nach der Zahl der eingeführten willkürlichen Konstanten sind ja Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment verschieden hoch einzuschätzen — muß ich etwas näher auf die Grundgedanken der neuen Elektrolyttheorie eingehen. Die Grundlagen sind vollkommen durchsichtig und stehen außer allem Zweifel: wir sehen die Ionen als Kugeln an, welche sich unter dem Einfluß des angelegten Feldes im reibenden Lösungsmittel bewegen und beachten lediglich — was früher vernachlässigt wurde — daß sie Träger elektrischer Ladungen sind, infolgederen sie aufeinander Kräfte ausüben müssen. Daß diese elektrostatischen Kräfte nicht ganz klein sind, kann man an einem kleinen Scherz ermessen: Man trenne ein Mol Steinsalz in seine Ionen, bringe die beiden Arten in die Entfernung der Erdpole und man hat dann — wie leicht nachzurechnen — noch immer eine Anziehungskraft von rund 50 000 kg. So klar das physikalisch Gegebene ist, so schwierig ist die mathematische Behandlung dieser intraionaren Kräfte. Im Jahr 1923 gelang es zum erstenmal Debye und Hückel[1]) einen Ansatz zu finden, der einerseits rechnerisch noch zu bezwingen war, andererseits trotz der unumgänglichen Vereinfachungen der Natur keinen Zwang antat.

Wenn wir uns die Anordnung der Ionen in einer Salzlösung veranschaulichen, so haben wir zu bedenken, daß die Verteilung bei Zimmertemperatur noch nicht allzuviel abweicht von der beim absoluten Nullpunkt gültigen Anordnung kleinster elektrostatischer Energie. Diese Anordnung können wir uns am besten klar machen an einem Kristallgitter vom Steinsalztyp. Charakteristisch ist, daß in der nächsten Umgebung eines herausgegriffenen Ions Ionen entgegengesetzten Vorzeichens liegen. Diese Anordnung denken wir uns molluskenhaft verzerrt und kommen damit zu einem Bild der Ionenanordnung im Elektrolyten. Der große Gedanke von Debye und Hückel, welche die Kraftwirkung in dem so verwickelten System erst einer Berechnung zugänglich machte, besteht nun in folgendem: Denken wir uns bei vielen positiven Ionen die Verteilung der umgebenden positiven und negativen Ionen festgestellt, so können wir eine durchschnittliche Ladungsverteilung bilden, welche eine kontinuierlich mit der Entfernung abnehmende negative Raumladung ergibt. Mit dieser durchschnittlichen kontinuierlichen Ladung wird nun weiter gerechnet. Auf diese Weise lassen sich dann für die Umgebung eines herausgegriffenen Ions die der Kontinuumsphysik entnommenen Begriffe „Potential, Raumladungsdichte" verwenden. Bei der Wanderung eines Ions übt nun die ein Ion umgebende Raumladung zweierlei Kräfte aus: Einmal ist der Stokessche Reibungswiderstand des Lösungsmittels mit einem Mitschleppen des Lösungsmittels verbunden, welches zwar mit der Entfernung abnimmt, aber doch über den eigentlichen Ionenradius weit hinausreicht. Wenn nun in der Umgebung eines positiven Ions im Mittel gleich viel positive wie negative Ionen wären, so würden sich die Ausläufer der von der Umgebung erzeugten Strömung am Ort des herausgegriffenen Ions gerade aufheben. Wegen des Überwiegens der entgegengesetzten Ladung überwiegt aber eine der Bewegung des positiven Ions entgegengesetzte Komponente, was sich so auswirkt, als wäre der Reibungswiderstand erhöht. Diese erste Zusatzkraft wollen wir die elektrophoretische Kraft nennen. Wichtiger noch ist eine zweite Kraft, deren Ursache in der endlichen Ausbildungszeit der Ionenatmosphäre liegt. Denken wir uns die Atmosphäre einmal sehr träge, so daß sie die zur Zeit t vorhandene Kugelsymmetrie noch besitze, wenn das Ion nach einer Zeit Δt um eine gewisse Strecke weitergerückt ist, so sehen wir, daß nun an der Rückseite der Bewegung eine überschüssige negative Ladung liegt, welche eine rücktreibende Kraft ausübt. Die durch das Nachhinken der Raumladung bedingte Kraft nennen wir die Relaxationskraft. Debye und Hückel stellten nun die Differentialgleichungen für die Ausbildung der Raumladung auf, beschränkten sich aber dann sofort auf den zunächst allein interessierenden stationären Zustand, in welchem, vom bewegten Ion gesehen, die Raumladung ihre Verteilung beibehält. Die näherungsweise Integration der sehr verwickelten Gleichungen ergibt zunächst sowohl für die elektrophoretische als auch für die Relaxationskraft einen der Geschwindigkeit des Ions und damit der angelegten Feldstärke proportionalen Wert; d. h. das Ohmsche Gesetz, die Proportionalität zwischen Feldstärke und dem durch die Geschwindigkeit der Ionen bedingten Strom, wird durch diese Ionenkräfte in erster Näherung nicht gestört. Es ist aber zu beachten, daß bei weiter getriebener Rechengenauigkeit Abweichungen von dieser Proportionalität zu erwarten sind. Das Hauptresultat der Debye-Hückelschen Rechnung ist die Ableitung des empirischen Kohlrauschschen Grenzgesetzes, nach welchem für sehr verdünnte Lösungen der Leitfähigkeitsdefekt, d. h. die relative Abweichung der Äquivalentleitfähigkeit von dem für unendliche Verdünnung geltenden Wert der Wurzel aus der Konzentration proportional ist, während die Dissoziationstheorie vermöge des Massenwirkungsgesetzes eine Proportionalität mit der ersten Potenz der Konzentration fordert. Was die nu-

1) P. Debye und E. Hückel, Physik. Zeitschr. **24**, 305, 1923.

merische Prüfung der Debyeschen Rechnung betrifft, so ist zu beachten, daß die Formeln eine noch willkürliche Konstante enthalten, nämlich einen zur Berechnung der elektrophoretischen Kraft eingeführten Ionenradius, welcher nicht identisch ist mit dem Radius, welcher aus der Beweglichkeit des Ions gemäß dem Stokesschen Reibungsgesetz folgen würde. Die numerische Prüfung besteht daher darin, daß für diesen Radius vernünftige Zahlwerte, d. h. Zahlen der Größenordnung 10^{-8} herauskommen, was in der Tat der Fall ist.

Es lag nun sehr nahe, die bei hohen Feldstärken von Herrn Wien beobachtete Zunahme der Leitfähigkeit vom Standpunkt der Debye-Hückelschen Theorie zu betrachten. Qualitativ ist ein solcher Effekt aus folgender Überlegung zu erwarten: Denken wir uns die Ionenatmosphäre sehr träge und das Ion plötzlich ein großes Stück weiter gerückt, so ist ihr Einfluß in dieser Stellung nur noch sehr gering und verschwindet bei genügend großer Entfernung. Diese Überlegung, die in dieser Form einige Ähnlichkeit mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte hat, erhält indes erst ihre Berechtigung, wenn man etwas zahlenmäßiges über die Ausbildungszeit der Ionenatmosphäre weiß, was nunmehr durch die später zu besprechenden Rechnungen von Debye und Falkenhagen erreicht ist. Jedenfalls ist zu erwarten, daß die von der Ionenatmosphäre ausgehende Bremswirkung nicht in gleichem Maße wächst wie die Geschwindigkeit des Ions und dies folgt streng durch die Berechnung der nächsten Näherungen der Integration der Debye-Hückelschen Differentialgleichungen. Wie schon auf dem letzten Physikertag vorgetragen, erhält man so wenigstens qualitativ alle wesentlichen Züge der Beobachtungen, wie die Abhängigkeit des Spannungseffekts von der Konzentration, der Wertigkeit der Ionen, der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels. Was die Abhängigkeit von der Feldstärke betrifft, so ergab die Theorie nicht die beobachtete lineare Abhängigkeit. Es ließ sich aber zeigen, daß die beobachtete Gerade die Wendetangente einer nach Art eines Integralzeichens verlaufenden Kurve ist und weitere Messungen bei relativ kleinen Spannungen ergaben tatsächlich den von der Theorie geforderten Verlauf.

Diese Rechnungen wurden inzwischen von Frl. Blumentritt wesentlich verfeinert auf Grund einer von L. Onsager[1]) ausgeführten Verbesserung der Debye-Hückelschen Rechnungen. Die Debye-Hückelsche Theorie enthält in folgendem Punkt eine kleine Inkonsequenz: Die Bildung und Umbildung der Ionenatmosphäre wird wesentlich bedingt durch die Wärmebewegung. Diese ist aber bei dem herausgegriffenen Ion nicht in Rechnung gesetzt, von ihm ist angenommen, daß es geradeaus in Richtung des Feldes wandert. Nach einem von Debye stammenden Vergleich entspricht so das Ion einem sehr schweren dicken Mann, der sich durch eine durcheinander wimmelnde Menschenmenge seinen Weg bahnt. Diese Auszeichnung des herausgegriffenen Ions ist unberechtigt. Der Mann wird, da er keine größere Masse besitzt als die stoßenden Menschen, selbst hin- und hergeworfen und diese Zickzackbewegung ändert die Rechnung erheblich ab. Die so verbesserte Theorie macht die Einführung eines eigenen elektrophoretischen Radius überflüssig, es ergibt sich sehr gute Übereinstimmung, wenn man lediglich mit dem aus dem Reibungswiderstand am Lösungsmittel nach dem Stokesschen Gesetz folgenden Radius rechnet. Infolgedessen enthalten die Schlußformeln von Onsager, welche die erwähnten Resultate der Debyeschen Theorie, wie das Wurzelgesetz, unberührt lassen, keine anderen individuellen Konstanten als die für unendlich große Verdünnung geltenden Beweglichkeiten, aus denen ja vermöge des Stokesschen Widerstandsgesetzes der Radius folgt. Unter Zugrundelegung der Onsagerschen Differentialgleichungen erhält man nun für die Spannungsabhängigkeit der Leitfähigkeit folgende Schlußformel: Stellt man die Spannungsabhängigkeit durch eine zweikonstantige Formel

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = A X^2 (1 - \mathfrak{B} X^2)$$

dar, so werden die Koeffizienten

$$A = 6{,}61 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{z_1 z_2 (z_1 + z_2)^{1,5} \quad q^{2,5}}{T^{2,5} \sqrt{D} \sqrt{\eta} \cdot f_\lambda (1 - q)^3} k_1 +$$

$$+ 6{,}3 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{z_1 z_2 \sqrt{z_1 + z_2}\, q^{1,5} \sqrt{D}}{T^{1,5} \sqrt{\eta} (1 + \sqrt{q})^2 \Lambda \zeta}$$

$$k_1 = -0{,}2 \sqrt{q} + 0{,}075 + 0{,}15\, q - 0{,}025\, q^2$$

$$q = \frac{z_2 \varrho_1 + z_1 \varrho_2}{(z_1 + z_2)(\varrho_1 + \varrho_2)}$$

$$\mathfrak{B} = 1{,}09 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{D (z_1 + z_2) q\, k_2}{T \eta (1 - q)^2\, k_1}$$

$$k_2 = -0{,}00558 + 0{,}06696\, q + 0{,}10045\, q^2 - 0{,}02232\, q^3 + 0{,}00335\, q^4 - 0{,}14286\, q^{1,5}.$$

Hierin bedeuten

T die abs. Temperatur,
D die Dielektrizitätskonstante,
η die Äquivalentkonzentration, pro Liter,
z_i die Wertigkeit der Ionen,

1) L. Onsager, Physik. Zeitschr. **27**, 388, 1926; **28**, 277, 1927.

ϱ_i ihre Reibungswiderstände bei unendlicher Verdünnung (d. h. die reziproken Werte der Beweglichkeiten),

$f_\lambda = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$,

Λ_∞ Äquivalentleitfähigkeit bei ∞ großer Verdünnung,

ζ Viskosität des Lösungsmittels.

Wie man sieht, kommen außer der Beweglichkeit der Ionen, welche ja ohne weiteres gemessen werden können, keine individuellen Ionenkonstanten mehr vor. Die zahlenmäßige Übereinstimmung mit den Wienschen Ergebnissen, die an Hand einiger beliebig herausgegriffener Beispiele erläutert sei (Tab. I), ist so gut als man bei der immer noch starke Vereinfachungen enthaltenden Theorie nur erwarten kann.

Zahlwerte der Koeffizienten A und $\mathfrak{B}$ für den Spannungseffekt.

Salz (in H_2O)	Äquivalentkonzentration $\eta \times 1000$	$A \cdot 10^{11}$ ber.	$A \cdot 10^{11}$ beob.	$\mathfrak{B} \cdot 10^{11}$ ber.	$\mathfrak{B} \cdot 10^{11}$ beob.
$MgSO_4$	6,05	1,12	1,49	1,25	1,7
	2,72	1,50	1,96	2,78	2,3
	1,27	2,04	2,5	5,95	6,0
K_4FeCy_6	3,63	1,07	0,88	2,14	2,3
	1,72	1,48	1,17	4,51	2,9
	0,83	2,05	(0,82)	9,36	(3,8)
$Ba_3(FeCy_6)_2$	5,15	3,19	3,9	1,67	2,1
	2,25	4,16	5,1	3,82	4,5
	0,94	5,42	5,6	9,15	7,5
Ba_2FeCy_6	5,75	4,20	6,6	2,25	3,2
	2,60	5,54	10,9	4,98	3,9
	1,08	7,20	(11,6)	11,9	(6,9)
KJ in Aceton	8,33	1,82	1,5	1,04	3,0
	3,44	2,38	1,9	2,5	3,0
	1,51	3,18	2,3	5,7	3,5

Was beweist uns nun diese Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment? Sie zeigt, daß die Berechnung der Ionenkräfte in richtiger Weise durchgeführt wurde; denn die fast quantitative Wiedergabe so verwickelter Erscheinungen, wie sie in den Wienschen Versuchen gemessen sind, ist nicht gering zu werten. Auf die nächstliegende Frage: „Wie weit sind nun nach Berücksichtigung der Debyeschen Kräfte, die Lösungen starker Elektrolyte wirklich dissoziiert?", geben diese Versuche aber zunächst noch keine Auskunft. Denn die etwa vorhandenen undissoziierten Bestandteile spielen hier überhaupt keine Rolle. Und doch zeigt die Theorie einen Weg, auf dem man diese Frage wenigstens prinzipiell lösen kann, wenn auch noch manche experimentellen Schwierigkeiten im Weg stehen. Wir müssen nämlich nur solche Bedingungen suchen, unter denen die Ionenkräfte verschwinden. Die unter solchen Bedingungen gemessene Leitfähigkeitsdifferenz zwischen endlicher und unendlicher Verdünnung gibt dann wirklich ein Maß für die vorhandenen undissoziierten Moleküle. Ehe ich aber diese Bedingungen bespreche, möchte ich, um eine klare Diskussionsbasis zu bekommen, etwas auf die Definition von „dissoziiert" und „undissoziiert" eingehen. In der alten Dissoziationstheorie stellte man sich z. B. in einer NaCl-Lösung neben den Ionen echte NaCl-Moleküle vor, genau so wie man sich auch das feste Salz aus Molekülen aufgebaut dachte. Seitdem man aber weiß, daß das Gitter des festen Salzes ein Ionengitter ist, kann man an der Existenz wirklicher NaCl-Moleküle in der Lösung zweifeln. Indes wissen wir aus den Dampfdichtemessungen von Nernst, daß der Dampf dieser Salze zweiatomig ist, so daß doch die Möglichkeit solcher Molekülbildungen auch in der Lösung immerhin nicht ausgeschlossen ist. Diese Molekülbildung ist elektrostatisch nicht zu verstehen, die Elektrostatik würde immer wieder zu den Ionenatmosphären führen, vielmehr handelt es sich hier um eine diskontinuierliche quantenhafte Änderung, wie sie jetzt durch die Arbeiten von Heitler und London[1]) mit Hilfe der Quantenmechanik dem Verständnis näher gebracht wurde. Nur solche echte chemischen Moleküle definierter Zusammensetzung sind, wenn man von Assoziationsgrad redet, als Moleküle zu zählen. Größere elektrostatisch zusammengehaltene Gebilde sind im Prinzip immer wieder durch die Debyesche Theorie zu beherrschen. In diesem Sinn will auch Bjerrum[2]), wie er an mehreren Stellen betont, seine assoziierten Ionenaggregate nur als rechnerische Hilfsgrößen gewertet wissen, nicht als „echte" chemische Moleküle. Andererseits bestreitet niemand bei den schwachen Elektrolyten, insbesondere den organischen Salzen die Existenz echter chemischer Moleküle, und die Kontinuität der Natur läßt erwarten, daß derartige Gebilde auch in den starken Elektrolyten in geringem Maß vorhanden sind.

Den bisherigen Versuchen aus Beobachtungen, bei denen die Ionenkräfte wirksam waren, rechnerisch den Beitrag dieser Kräfte abzuziehen und aus dem übrigbleibenden Leitfähigkeitsdefekt den Dissoziationsgrad zu ermitteln, haftet eine erhebliche Unsicherheit an. Es ist nicht etwa jede Abweichung vom Debyeschen Wurzelgesetz der Konzentrationsabhängigkeit auf assoziierte Bestandteile zu schieben, vielmehr stellt auch das Wurzelgesetz nur eine erste Näherungslösung für sehr verdünnte Lösungen dar. Man

1) Vgl. z. B. den Vortrag von F. London, Physik. Zeitschr. **29**, 558, 1928.

2) N. Bjerrum, Ergebn. d. exakten Naturwissenschaften **5**, 125, 1926.

muß daher, wenn man zu konzentrierteren Lösungen übergeht, die Debye-Hückelschen bzw. Onsagerschen Differentialgleichungen in bezug auf die Konzentration weiter entwickeln. Eine solche Rechnung wurde von Redlich[1]) auf Grund der ursprünglichen Debye-Hückelschen Gleichungen durchgeführt. Er kommt bei den Alkalihalogeniden bis herauf zu Konzentrationen von 1 Zehntel molar zu völliger Dissoziation. Indes reicht die Genauigkeit der auf den ursprünglichen Debye-Hückelschen Gleichungen basierenden Rechnung, in die ein elektrophoretischer Ionenradius eingeht, nicht aus, um kleine Assoziationsgrade (von der Größenordnung eines Prozents) auszuschließen.

Ganz hypothesenfrei ist dagegen folgende Überlegung, welche Onsager[2]) und unabhängig von ihm etwas später Nernst[3]) zur Abschätzung des wahren Dissoziationsgrads benützten: Haben wir zwei Salze mit gleicher Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung und denselben Überführungszahlen, so sind alle in die Ionenkräfte eingehenden Größen bei beiden Salzen gleich. Zeigen sich nun bei größeren Konzentrationen Abweichungen in der Leitfähigkeit, so sind diese auf Kosten chemischer Änderungen zu setzen. In Band 28 dieser Zeitschrift ist auf S. 295 in Fig. 6 von Onsager ein solcher Vergleich durchgeführt. Die Salze sind nicht streng identisch und insofern kann man zweifeln, ob die individuellen Abweichungen der Alkalihalogenide nicht durch diese kleinen Unterschiede bedingt sind, außer allem Zweifel steht aber der abnorme Verlauf der Kurve für die Thallosalze, von denen seit langem bekannt ist, daß sie in wässeriger Lösung komplizierte Komplexe[4]) bilden. Nernst ist zu wesentlich höheren Konzentrationen gegangen, und gibt für 0,1 molare Lösungen folgende Assoziationsgrade an:

KJ	KBr	KCl	RbCl	CsCl	KNO_3	$TlNO_3$
1,1	1,7	(2)	2,6	3,1	5,2	14,4
Nach der alten Theorie:						
11	12	12	18	13	15	24,6

Diesen Zahlen liegt der aus den Verdünnungswärmen entnommene Wert einer 98proz. Dissoziation der 0,1-molaren KCl-Lösung zugrunde. Darunter stehen die aus der alten Theorie folgenden Assoziationsgrade. Im nächsten Vortrag wird diskutiert werden, inwieweit die von Nernst aus den Verdünnungswärmen entnommenen Assoziationsgrade, durch welche erst die Normierung der obigen Zahlen erreicht wird, als gesichert anzusehen sind.

Es ist jedenfalls erfreulich, daß die Theorie uns Wege zur direkten Bestimmung zeigt, indem sie die Bedingungen erkennen läßt, unter welchen die Ionenkräfte zum Verschwinden zu bringen sind. In zwei in diesem Jahr erschienenen großen Arbeiten haben Debye und Falkenhagen[1]) die Zeit berechnet, welche die Ionenatmosphäre zur Ausbildung braucht. Diese Aufgabe ist mathematisch natürlich noch viel schwieriger als die Berechnung der Verteilung der Ionenatmosphäre im stationären Zustand. Das Hauptergebnis ist, daß die Ausbildungszeit von der Größenordnung $10^{-10}/m$ (m = molare Konzentration) ist. Legen wir nun eine Wechselspannung an, deren Frequenz größer ist als diese Zeit, so sieht man schon qualitativ ein, daß die Relaxationskraft kleiner wird und bei sehr schnellem Wechsel schließlich verschwindet. Denn denken wir uns die Ionenatmosphäre ruhend, so wirkt sie zwar beim Hinweg des Ions bremsend, beim Rückweg im gleichen Maß beschleunigend. Die elektrophoretische Kraft ist dagegen im wesentlichen von der Frequenz unabhängig, da die Reibungskoppelung zwischen den Ionen und die zur elektrophoretischen Kraft führende gitterähnliche Verteilung nichts mit der Ausbildungszeit der Atmosphäre zu tun hat. In welchem Maß die Relaxationskraft dadurch frequenzabhängig wird, geht aus Fig. 4 auf S. 417 hervor.

Aber auch für den Spannungseffekt ist die Kenntnis der Relaxationszeit von Wichtigkeit: Gehen wir zu sehr hohen Feldern über, bei denen die Ionengeschwindigkeit von der Größenordnung 1 m/sec ist, so kommt das Ion schon nach Bruchteilen der Ausbildungszeit der Atmosphäre ganz außer ihren Bereich, d. h. bei den größten Geschwindigkeiten bildet sich die charakteristische Verteilung überhaupt nicht mehr aus, es verschwinden sowohl Relaxations- als elektrophoretische Kraft, so daß man bei den höchsten Feldstärken eine von den Ionenkräften befreite Leitfähigkeit mißt. Freilich darf man auch hier nicht beliebig hoch gehen — was schon durch den Durchschlag begrenzt ist — denn man kommt dann bald zu Geschwindigkeiten, bei denen nach der Hydrodynamik das Stokessche Reibungsgesetz modifiziert werden muß. Bei 1 m pro Sekunde beträgt diese Korrektur nach den Rechnungen von Oseen 1 Promille.

Gestatten Sie, daß ich zum Schluß schematisch noch einmal rekapituliere, wie das nun recht

1) O. Redlich, Physik. Zeitschr. **26**, 199, 1925; **27**, 528, 1926.

2) L. Onsager, Physik. Zeitschr. **28**, 295, Fig. 6. 1927.

3) W. Nernst, Berl. Ber. vom 19. 1. 1928.

4) Ob mit zunehmender Konzentration neutrale Molekeln oder höherwertige Ionen, die wegen ihres größeren Stokesschen Widerstands gleichfalls die Leitfähigkeit herabsetzen, entstehen, läßt sich nicht entscheiden.

1) P. Debye und H. Falkenhagen, Physik. Zeitschr. **29**, 121, 401, 1928.

abgerundete Bild der elektrolytischen Leitfähigkeit in bezug auf die feineren Erscheinungen aus den Grundansätzen für die Ionenatmosphären und ihre Kräfte entwickelt wurde:

Debye-Hückelsche bzw. Onsagersche Differentialgleichungen für die stationäre Ionenwanderung

1. Näherungsintegration: Ohmsches Gesetz, Kohlrauschsches Wurzelgesetz

Entwicklung nach der Konzentration: Abweichungen vom Wurzelgesetz	Entwicklung nach der Feldstärke: Spannungseffekt

Debye-Falkenhagensche Gleichungen für die Ausbildung der Ionenatmosphäre:

Verschwinden der Relaxationskraft bei hohen Frequenzen;
Verschwinden beider Ionenkräfte bei höchsten Spannungen.

Jena, Physikalisches Institut, September 1928.

C) E. Lange (München), Neue thermochemische und refraktometrische Untersuchungen auf dem Gebiete der starken Elektrolyte.

Als der Altmeister der Elektrolytforschung, Svante Arrhenius, vor nunmehr 41 Jahren seine umwälzende Theorie (1) der elektrolytischen Dissoziation aufstellte, da ahnte er wohl nicht, daß man vier Jahrzehnte später trotz bedeutender Fortschritte auf diesem Gebiete immer noch oder wieder eifrig über fundamentale Fragen der Natur der Elektrolytlösungen diskutieren werde. Einige Namen sind es außer ihm, die ich aus einer großen Anzahl anderer als charakteristisch für die Entwicklungsphasen der Theorie noch einmal herausgreifen möchte: van't Hoff (2) hatte zunächst die Grundlage geschaffen, indem er uns lehrte, die Gesetze der idealen Gase auf die sog. ideal verdünnten Lösungen anzuwenden. Dann kam Arrhenius (1), dessen Lehre, wonach ein mehr oder weniger großer Bruchteil der gelösten Elektrolyte in Ionen gespalten ist, auch heute noch für die sog. schwachen, d. h. wenig dissoziierten Elektrolyte gilt und zu der Anwendbarkeit des chemischen Massenwirkungsgesetzes in seiner ursprünglichen Form auf die Konzentrationsabhängigkeit des Dissoziationsgrades führt. Ich nenne dann N. Bjerrum (3) und G. N. Lewis (4), die strenge thermodynamische Begriffe für die sog. starken Elektrolyte schufen, welche eng mit der zuerst von Sutherland (5) ausgesprochenen Annahme (3) interionischer Kräfte zwischen den durch vollkommene Dissoziation entstandenen Ionen zusammenhängen. Und endlich P. Debye (6), dem es zusammen mit E. Hückel erstmalig gelang, eine zum mindesten in sehr verdünnten Lösungen brauchbare quantitative Theorie für solche praktisch vollständig dissoziierte Elektrolyte zu entwickeln. Heute untersucht man in wieweit man die experimentell erfaßbaren Eigenschaften, vor allem der mäßig verdünnten Lösungen allein auf Grund solcher interionischer Kräfte oder durch Berücksichtigung noch anderer Faktoren, insbesondere unter der Annahme undissoziierter Anteile, erklären kann. Schon N. Bjerrum (7) glaubte, die Aktivitätskoeffizienten unter Zuhilfenahme von Ionenassoziationen besser wiedergeben zu können. Dann wurde K. Fajans (8) an Hand refraktometrischer Untersuchungen in etwas anderer Form zu der Annahme unvollständiger Dissoziation geführt. Wenig später sprach W. Nernst (9) auf Grund von thermochemischen Messungen die gleiche Vermutung aus. Und schließlich gehören wohl auch die von H. v. Halban (10) jüngst veröffentlichten Arbeiten über Absorptionsspektren von Elektrolytlösungen hierher.

Aus diesem großen theoretischen und experimentellen Material möchte ich zwei Gebiete herausgreifen, deren Bearbeitung in diese jüngste Zeit fällt: Die Thermochemie der Elektrolytlösungen, in der es sich vornehmlich um die Berechnung und Messung von integralen Verdünnungswärmen mehr oder weniger verdünnter Elektrolytlösungen handelt, mit denen ich mich im ersten Teil meines Referates beschäftigen werde.

Im zweiten Teil möchte ich dann kurz auf einige optische Untersuchungen, vor allem von Fajans und Mitarbeitern (11) eingehen, in denen die Konzentrationsabhängigkeit der Molrefraktion von konzentrierteren Elektrolytlösungen zu Schlüssen über deren Natur herangezogen wird.

I.
Thermochemische Untersuchungen.

Was also zunächst die thermochemischen Messungen anbelangt, so handelt es sich bei den integralen Verdünnungswärmen um solche Wärmetönungen, die beim Verdünnen einer 1 Mol Salz enthaltenden Lösung bestimmter Ausgangskonzentration m bis zu unendlicher Verdünnung abgegeben werden. Nach van't Hoff sollte es überhaupt keine Verdünnungswärmen geben. Arrhenius hätte alle Verdünnungswärmen zurückgeführt auf Dissoziationswärmen von in den Anfangskonzentrationen noch vorhandenen undissoziierten Anteilen. Und nach

der Debye-Hückelschen Theorie wäre der gesamte, in einem vollkommen dissoziierten Elektrolyten meßbare Effekt durch interionische Kräfte bedingt. Die allgemeinen theoretischen Grundlagen der letzteren Auffassung sind schon in den beiden vorausgehenden Vorträgen genügend gestreift worden. Ich will daher im folgenden nur die wichtigsten Folgerungen in bezug auf die Verdünnungswärmen veranschaulichen.

Am klarsten liegen die Verhältnisse in sehr verdünnten Lösungen, z. B. bei 1,1-wertigen Salzen unterhalb 1/100 molar. Dieses Konzentrationsintervall bezeichnet man bisweilen auch als Grenzgebiet. Für wäßrige Lösungen läßt sich hier das zunächst sonderbar erscheinende Resultat ableiten (12), daß trotz oder gerade infolge der Anziehungskräfte zwischen den sich beim Verdünnungsvorgang voneinander entfernenden Ionen insgesamt eine positive Verdünnungswärme abgegeben wird. Und das kann man etwa folgendermaßen veranschaulichen. Zur Dehnung des Ionensystems allein, ausgehend von einer bestimmten Anfangskonzentration bis zu unendlicher Verdünnung, ist allerdings Dehnungsenergie aufzuwenden, was eine Abkühlung des Systems zur Folge haben müßte. Aber gleichzeitig wird in dem die Ionen umgebenden Dipolmedium Wärme entwickelt, weil die beim Verdünnungsprozeß zu der Lösung hinzukommenden Wassermoleküle zu einer Vergrößerung der Hydrathülle der Einzelionen, d. h. zu einer stärkeren Hydratation derselben führen. Und die hierbei von diesen Wassermolekülen abgegebene Wärmemenge ist bei Zimmertemperatur — man kann beinahe sagen zufällig — größer als die negative reine Dehnungsenergie, so daß insgesamt positive Verdünnungswärme auftritt.

Die Bestätigung der qualitativen Forderung eines positiven Vorzeichens der Verdünnungswärmen für sehr verdünnte Lösungen auch solcher Elektrolyte, die schon in wenig höheren Konzentrationen negative Verdünnungswärmen geben, konnte zunächst in einer Arbeit von Nernst und Orthmann (13) mangels genügender Meßgenauigkeit nicht erbracht werden. Sie gelang aber dann denselben Autoren in einer späteren Arbeit (14) und etwa gleichzeitig in einer eigenen, gemeinsam mit G. Meßner (15) durchgeführten Untersuchung. Nernst und Orthmann (16) geben die mit ihrem verbesserten Kalorimeter erreichte Genauigkeit auf rund 1/200 000 Grad an.

Zur quantitativen Prüfung zunächst der einfachen theoretischen Formeln, des sog. Grenzgesetzes, in dem der Ionendurchmesser vernachlässigt wird, ist es aber nötig, noch kleinere, unter Umständen nur etwa insgesamt 3—5 Milliontel Grad betragende Verdünnungswärmen möglichst genau zu bestimmen. In einer gemeinsam mit P. A. Leighton (17) ausgeführten Untersuchung war es nun möglich, das mit G. Meßner (15) erbaute adiabatische Differentialkalorimeter hinsichtlich seiner Genauigkeit von ursprünglich 1—2 Milliontel Grad auf etwa $^1/_2$ Milliontel Grad zu steigern. Dieses Kalorimeter (18) ist schematisch in der Fig. 1 dargestellt. Ein Dewargefäß von etwa 2 l Gesamtinhalt ist durch eine eingekittete Thermosäule aus 1000 hintereinander geschalteten Eisen-Konstantan-Elementen, die auf einer Hartgummiplatte montiert sind, in zwei Hälften geteilt. Mittels eines geeigneten Spiegelgalvanometers konnte damit die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Kalorimeterhälften auf 1 mm = 1 Milliontel Grad gemessen werden. Auf jeder Seite befindet sich, vollkommen von der Kalorimeterfüllung umgeben, eine Metallwandpipette, in der die zu verdünnende Lösung bereit gehalten wurde. Die Vermischung tritt bei gleichzeitigem Heben des oberen und unteren Pipettenstopfens ein, weil dann das von je einem Rührer dauernd in Strömung gehaltene Verdünnungswasser jeder Kalorimeterhälfte auch durch die dann offene Pipette hindurch strömen kann.

Die eigentlichen experimentellen Schwierigkeiten lagen darin, obige an sich sogar noch leicht steigerungsfähige thermometrische Empfindlichkeit durch Ausschaltung einer Reihe von Fehlerquellen auch bis zu einer ähnlich hohen kalorimetrischen Genauigkeit ausnützen zu können. Äußere Störungen, die durch Wärmeleitung aus der Umgebung des Kalorimeters herrühren können, wurden eliminiert, indem ein das Kalorimeter vollkommen umgebendes Wasserbad bis auf 1/1000 Grad genau immer auf derselben Temperatur gehalten wurde wie das Innere des Kalorimeters. Auch im Innern selbst können störende Wärmequellen vorhanden sein. So steigt die Temperatur der Kalorimeterflüssigkeit infolge der natürlich möglichst gering gehaltenen Rührenergie ganz langsam an; aus Trägheitsgründen bleibt aber die Temperatur der Lösungen in der Pipette trotz des guten Wärmekontaktes durch die Metallwandungen hindurch immer etwas hinter der der Kalorimeterfüllung zurück. Allein hierdurch wurde ein einseitiger Leereffekt von etwa 6 Milliontel Grad hervorgerufen. Man kann diesen Leereffekt aber dadurch umgehen, daß man ihn gleichzeitig und in gleicher Stärke in beiden Kalorimeterhälften hervorruft, indem man auf der einen Seite Lösung mit Wasser und auf der anderen in sonst ganz symmetrischer Weise Wasser mit Wasser vermischt. Zur Kontrolle, ob der Leereffekt tatsächlich symmetrisch ist und sich wirklich weitgehend heraushebt, sind mehrmals Blindversuche angestellt worden, indem beider-

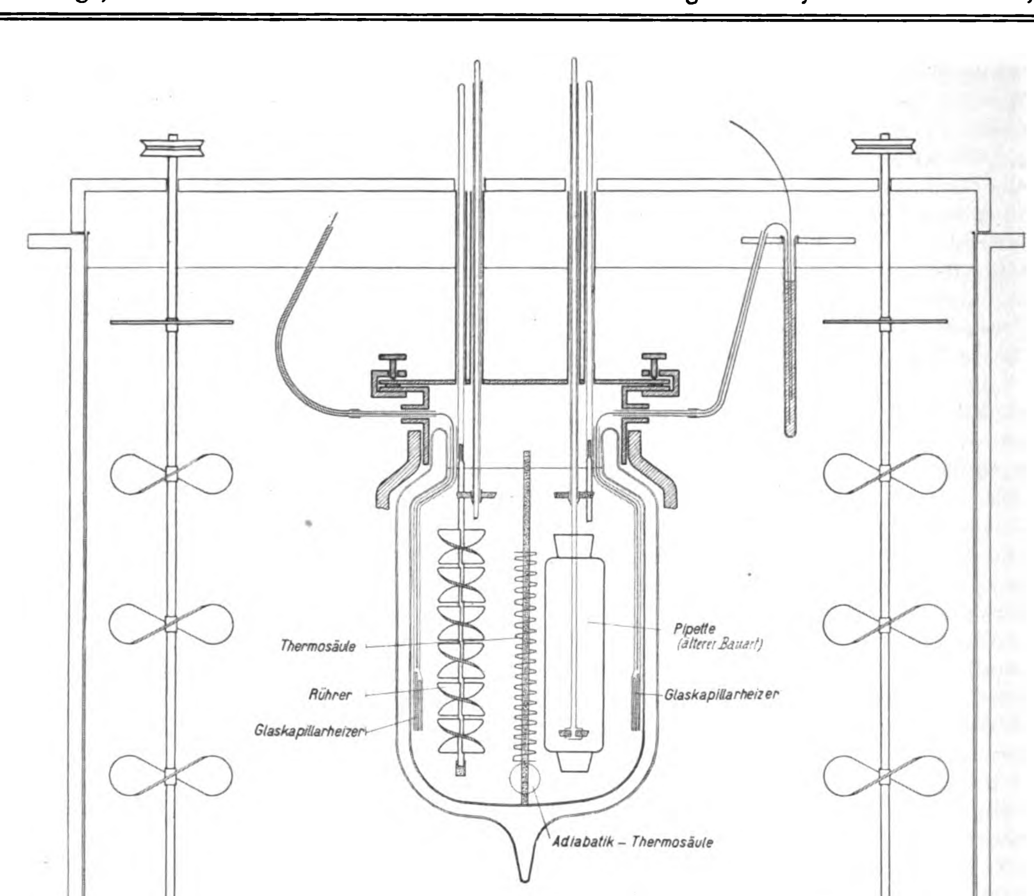


Fig. 1. Adiabatisches Differentialkalorimeter.

seits nur Wasser mit Wasser oder Lösung mit der gleichen Lösung vermischt wurde. Fig. 2 zeigt, daß die restlichen Fehler durchschnittlich nicht mehr als $^1/_2$ Milliontel Grad betragen. Vor und nach der Vermischung wurde die Galvanometerstellung alle 3 Sekunden abgelesen und auf den Zeitpunkt der Vermischung graphisch extrapoliert.

Die ganz ähnlich ausgeführten Messungen der kleinen Verdünnungswärmen seien durch die Fig. 3 charakterisiert. Wie man sieht, läßt sich die 2,5 Milliontel Grad betragende Verdünnungswärme des LiBr im Einzelversuch auf

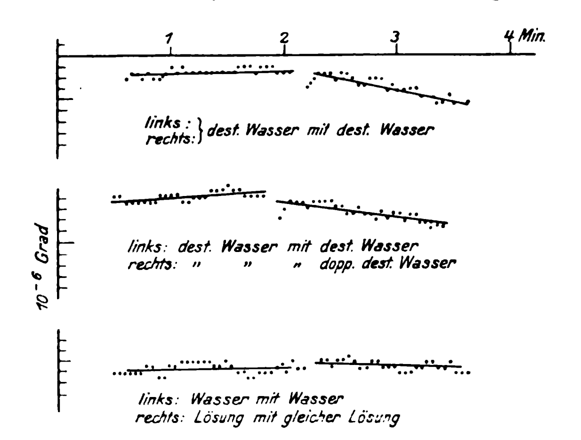


Fig. 2. Blindversuche zur Kontrolle der Symmetrie der beiderseitigen Leereffekte.

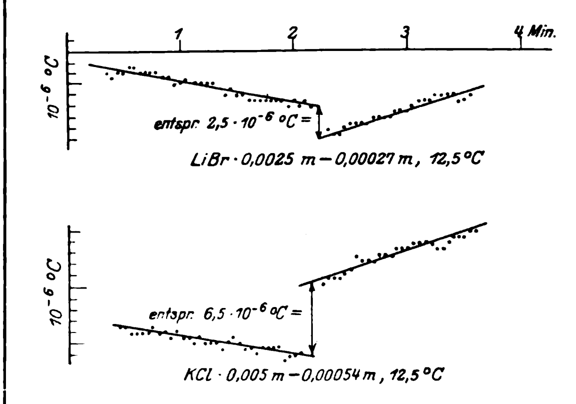


Fig. 3. Beispiele zweier kleiner Verdünnungswärmen.

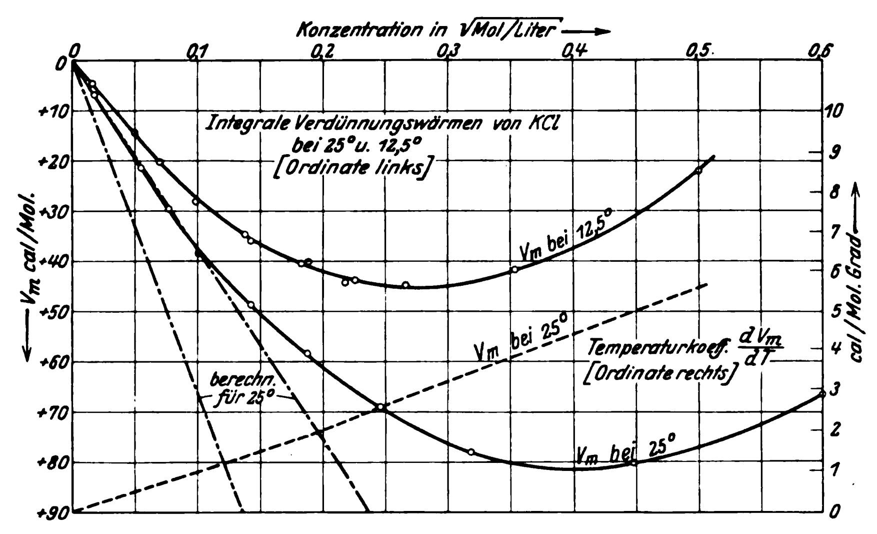


Fig. 4. Integrale Verdünnungswärmen des KCl bei 12,5 und 25° C.

etwa $^1/_2$ Milliontel Grad genau bestimmen und durch geeignete elektrische Eichung mit Joulescher Wärme in Kalorien umrechnen.

Aus der großen Anzahl von Versuchen mögen in Kürze nur einige Ergebnisse (19) herausgegriffen werden, die in enger Beziehung zu den theoretischen Forderungen für das Grenzgebiet stehen.

1. Zunächst zeigt die theoretische Formel (13, 15, 18, 22)

$$V_m = -\frac{0{,}239}{10^7}\cdot\left(\frac{\Sigma \nu_i Z_i^2}{2}\right)^{3/2}\cdot\sqrt{m}\cdot\frac{N\varepsilon^2}{D}\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon^2 N}{DkT\,1000}}\cdot\left(1+\frac{T}{D}\frac{dD}{dT}\right)\text{cal/Mol Salz,}$$

daß in sehr verdünnten Lösungen die durch interionische Kräfte bedingten Verdünnungswärmen proportional der Wurzel aus der Anfangskonzentration ansteigen sollten. Der theoretische Ausdruck der integralen Verdünnungswärmen sollte also von der Form V_m = Konstanz · $\sqrt{m}$ sein. Diese Forderung ist durch die in Fig. 4 graphisch dargestellten Meßergebnisse am KCl (17) innerhalb der erreichten Genauigkeitsgrenze von etwa 5 Proz. bis ungefähr zur Konzentration m/100 bestätigt: Die V_m-Werte zeigen bei $\sqrt{m}$-Abszisse geradlinigen Anfangsgang, und zwar sowohl bei 12,5 als auch bei 25°.

2. Fordert die Theorie, daß die Verdünnungswärmen gleichwertiger, etwa 1,1-wertiger Salze sich im $\sqrt{m}$-Gebiet bei gleicher Ausgangskonzentration nicht unterscheiden. Diese Forderung ist bei einigen Salzen wie KF, KCl, CsCl, LiBr usw., wie aus Fig. 5 hervorgeht, innerhalb der bisher erreichten Genauigkeit annähernd erfüllt. KNO_3 zeigt allerdings bereits in $^1/_{100}$ m-Lösung deutliche Abweichungen von den übrigen. Doch nähert es sich in geringeren Konzentrationen den übrigen Kurven so sehr, daß man annehmen kann, daß es in noch größerer Verdünnung auch sein $\sqrt{m}$-Gebiet

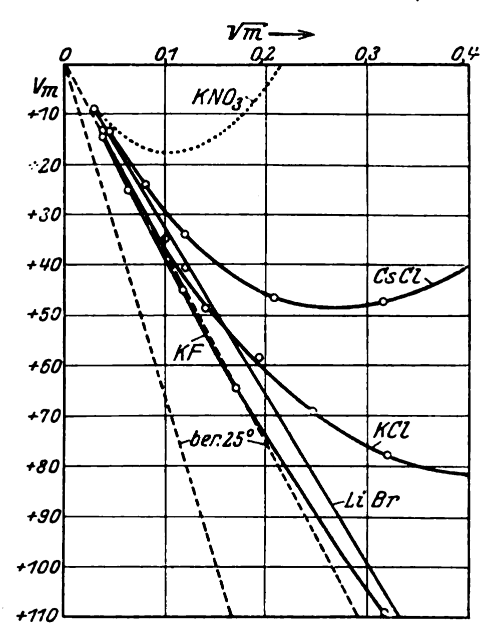


Fig. 5. Integrale Verdünnungswärmen einiger Alkalisalze bei 25° C.

erreichen und sich dann nicht mehr von anderen gleichwertigen Salzen unterscheiden würde. Beim CsCl und KCl tritt eben diese Annäherung z. B. an KF bereits bei höheren Konzentrationen auf. Auch für mehrwertige Salze hat sich in einer Reihe von Einzelmessungen annähernde Übereinstimmung, z. B. für die beiden Salze,

das 1,2-wertige Na_2SO_2 und das 2,1-wertige $Ca(NO_3)_2$ ergeben (15). Abweichungen von dieser theoretischen Forderung z. B. bei 2,2-wertigen Salzen dürften wahrscheinlich, wie beim KNO_3, so zu deuten sein, daß hier das $\sqrt{m}$-Gebiet noch nicht erreicht worden ist. Eine exaktere experimentelle Prüfung der Gleichheit der Verdünnungswärmen gleichwertiger Salze im Grenzgebiet ist im Gange.

3. Sollten sich die Verdünnungswärmen von Salzen gleicher Molarität, aber von verschiedenem Wertigkeitstypus im $\sqrt{m}$-Gebiet um ganz bestimmte, theoretisch berechenbare Faktoren unterscheiden. Dies ist tatsächlich der Fall, wenn wir z. B. die 1,1-wertige Gruppe (KCl, KF) mit der 2,1- bzw. 1,2-wertigen ($Ca(NO_3)_2$, Na_2SO_4) vergleichen. Das theoretische Verhältnis sollte sein 5,2, das experimentelle ist in annähernder Übereinstimmung damit 4,3. Noch vorhandene Abweichungen zwischen Theorie und Experiment dürften wiederum darauf zurückzuführen sein, daß bei den mehrwertigen Salzen das $\sqrt{m}$-Gebiet noch nicht erreicht ist.

4. Was nun endlich den Absolutbetrag der Konstanten k in dem theoretischen Ausdruck $V_m = k \cdot \sqrt{m}$ anbelangt, so hängt er stark von dem in dem vollständigen theoretischen Ausdruck vorkommenden Temperaturkoeffizienten dD/dT der Dielektrizitätskonstante des Mediums ab. Der dafür in erster Annäherung in Betracht kommende Betrag für das Wasser ist nun leider nur auf rund $\pm$ 8 Proz. genau bekannt; daraus folgt eine Schwankung des theoretischen Wertes der Verdünnungswärme, also der Konstanten k von rund $\pm$ 30 Proz. Zum Beispiel streuen die theoretisch zu erwartenden Verdünnungswärmen für 25° zwischen $374 \cdot \sqrt{m}$ und $661 \cdot \sqrt{m}$. (Die punktierten Linien in Fig. 5 geben die Grenzen des theoretischen Intervalles an.) Da nun der entsprechende, am KCl festgestellte experimentelle Betrag $376 \cdot \sqrt{m}$ lautet, so kann man nur sagen, daß der gemessene Wert nicht außerhalb der theoretischen Unsicherheitsgrenzen liegt.

Für große Verdünnungen führt also die experimentelle Prüfung der nach Debye-Hückel berechneten Verdünnungswärmen in mancher Hinsicht zu voller Übereinstimmung. In anderer Hinsicht stehen die Messungen angesichts der vorhandenen theoretischen und experimentellen Unsicherheiten in keinem Widerspruch zur Theorie.

Weniger übersichtlich liegen indessen die Verhältnisse in etwas höheren Konzentrationen. Hier ist in den theoretischen Formeln der Minimalabstand, bis auf den sich zwei entgegengesetzt geladene Ionen einander nähern können, nicht mehr zu vernachlässigen. Für das einfachere Gebiet der Gefrierpunktserniedrigung konnte kürzlich von H. Gronwall, V. K. La Mer und K. Sandved (20) gezeigt werden, daß die mit passend gewählten Ionendurchmessern berechneten theoretischen Daten sogar gut mit den experimentellen Messungen übereinstimmen. Auf der gleichen Grundlage kann man bei Berücksichtigung des Ionendurchmessers ableiten, daß auch die integralen Verdünnungswärmen in höheren Konzentrationen nicht mehr einfach proportional der Wurzel aus der Ausgangskonzentration ansteigen sollten. Von welcher Konzentration ab die einfache $\sqrt{m}$-Proportionalität aufhört, und wie stark die Abweichung von ihr ist, ist ganz individuell von dem mittleren Durchmesser der jeweiligen Ionen abhängig. Nun würden sich hiernach gegenüber dem einfachen $\sqrt{m}$-Gesetz wohl kleinere Verdünnungswärmen, aber keine negativen Verdünnungswärmen errechnen lassen. Für die tatsächlich beobachteten negativen Werte muß man deshalb noch andere Erklärungsmöglichkeiten in Betracht ziehen. Da es sich bei den besagten Durchmessern um hydratisierte Ionen handelt und die Hydrathülle irgendwie von der Temperatur beeinflußt werden wird, wäre es nicht ausgeschlossen, daß auch der Temperaturkoeffizient des mittleren Durchmessers von der Theorie berücksichtigt werden muß (21). Damit könnte man aber, wie Bjerrum (22) gezeigt hat, leicht negative Verdünnungswärmen formal erklären. Fernerhin ist es kaum erlaubt, in höheren Konzentrationen noch einfach mit der Dielektrizitätskonstante des Wassers und ihrem Temperaturkoeffizienten zu rechnen. Auch dadurch könnten Zusatzglieder bedingt sein und zur Erklärung qualitativer und quantitativer Abweichungen der experimentellen von den nach den einfacheren theoretischen Formeln berechneten Verdünnungswärmen herangezogen werden können (16, 22).

Eine wichtige Zusatzannahme zur Erklärung von negativen Verdünnungswärmen ist von Nernst (23) eingeführt worden. Nernst nimmt an, daß sich in den Verdünnungswärmen außer den interionischen Kräften auch Dissoziationswärmen von Resten undissoziierter Anteile bemerkbar machen. Er gelangt so z. B. für KCl bei 18° zu 2 Proz., für KNO_3 zu 5 Proz. undissoziiertem Anteil in $n/10$-Lösung.

Diese Zahlen würden übrigens der Größenordnung nach den von Bjerrum (24) angegebenen Assoziationsgraden nahekommen. Nernst (26) gibt an, daß sich zwischen den so auf Grund von Verdünnungswärmen berechneten Assoziationsgraden einerseits und einigen Eigenheiten von osmotischen und Leitfähigkeitsdaten andrerseits eine gewisse Übereinstimmung finden läßt.

Man kann wohl sagen, daß die Verdünnungswärmen in den höheren Konzentrationen qualitativ durch Überlagerung von Dissoziationswärmen verständlich gemacht werden können; bei der quantitativen Prüfung geht aber Nernst von einigen Näherungsannahmen (25) aus. Da der reine interionische Effekt in den betreffenden Konzentrationen ohnehin theoretisch nicht exakt berechnet werden kann, nimmt er erstens, gestützt auf Messungen am LiCl, $\sqrt{m}$-Proportionalität im Sinne des Grenzgesetzes bis zu relativ hohen Konzentrationen an. Hierzu ist zu sagen, daß man dies allein schon infolge des Einflusses des Ionendurchmessers nicht erwarten sollte. Und zweitens ist bei der Berechnung der in den Verdünnungswärmen enthaltenen Anteile an Dissoziationswärmen, deren Konzentrationsabhängigkeit sich nach dem Massenwirkungsgesetz zu $Q(1-\alpha) = K \cdot m \cdot f^2 \cdot \alpha^2$ ergibt, der Aktivitätskoeffizient f als konzentrationsunabhängig angenommen worden.

Wenn somit die Nernstsche Annahme auch noch nicht als quantitativ bewiesen gelten kann, so sprechen doch verschiedene, und zwar auch optische Daten, dafür, daß eine strenger durchgeführte Kombination der klassischen Arrheniusschen mit einer erweiterten Debye-Hückelschen Theorie über das bisherige theoretische Stadium hinausführen wird.

II.

Refraktometrische Untersuchungen.

Die Theorie der Elektrolytlösung hat sich schon frühzeitig außer auf thermodynamische und elektrische auch noch auf optische Kriterien gestützt. Sehr bekannt sind die Farbänderungen, die manche Indikatoren, z. B. Lackmus, Phenolphtalein unter gewissen Bedingungen erfahren. Solche sichtbare optische Änderungen haben sich in vielen Fällen darauf zurückführen lassen, daß z. B. schon beim bloßen Verdünnen undissoziierte Moleküle in freie Ionen dissoziieren. Nun zeigte sich, daß die starken Elektrolyte beim Verdünnen eine nur sehr geringe Änderung ihrer Farbe bzw. ihres Absorptionspektrums erfahren (27). Bisweilen sind solche geringen Änderungen mit nicht sehr genauen Methoden sogar übersehen worden. Unter dem Eindruck auch dieser Tatsachen gelangte bekanntlich Bjerrum zu der Überzeugung, daß die Gruppe der starken Elektrolyte praktisch vollkommen dissoziiert sei und daß die beobachteten Abweichungen der osmotischen und Leitfähigkeitsdaten von der nach den idealen Lösungsgesetzen berechneten Konzentrationsabhängigkeit lediglich auf interionische Kräfte zurückgeführt werden könnten. Nicht das unwichtigste Argument unter den ja schon eingangs erwähnten Bedenken gegen diese extreme Theorie ist die Tatsache, daß mit schärferen Meßmethoden sich unter Umständen doch eine gewisse Konzentrationsabhängigkeit der optischen Eigenschaften der Lösungen nachweisen ließ. Hierher gehören vor allem die Absorptionsmessungen von H. v. Halban und J. Eisenbrand (11, 28) und die refraktometrischen Untersuchungen von K. Fajans, H. Kohner und W. Geffcken (29). Es sei allerdings von vornherein nicht verschwiegen, daß es sich dabei meist um relativ hohe Konzentrationen, über 1 normal handelt, in denen die im ersten Teil meines Referates erwähnten thermochemischen Daten theoretisch nicht mehr überschaubar sind. Ein wichtiges Kriterium der Halbanschen Untersuchungen, ob undissoziierte Anteile vorhanden sind oder nicht, besteht in folgendem: Nehmen wir an, daß sowohl die undissoziierten Moleküle eines gelösten Elektrolyten als auch die freien Ionen spezifische Absorptionsspektren besitzen, und daß sich die Kurven der Extinktionskoeffizienten der beiden extremen Spektren bei irgendeiner Wellenlänge schneiden. Wenn nun mit immer größerer Verdünnung mehr und mehr Moleküle in Ionen dissoziieren, so wird auch das Absorptionsspektrum der betreffenden Lösung, stets auf ein Mol bezogen, immer mehr vom Molekülspektrum in das Ionenspektrum übergehen. Der resultierende Extinktionskoeffizient wird sich also bei allen Wellenlängen stetig ändern — mit einer Ausnahme: dort, wo sich schon die beiden reinen Spektren schneiden würden, wird auch im Laufe der Verdünnung keine Änderung des molaren Extinktionskoeffizienten zu beobachten sein. Umgekehrt kann man daher das Auftreten eines solchen exakten, mehrfachen Schnittpunktes im Laufe der Verdünnung als eine starke Stütze für die Annahme diskreter Molekülumwandlungen ansehen. Halban und Eisenbrand glauben nun, u. a. aus ihren recht genauen Messungen an manchen starken Elektrolyten wenigstens in mittleren Konzentrationen mit einer gewissen Annäherung solche Schnittpunkte entnehmen zu können. Das in dieser Hinsicht vorliegende Material dürfte aber wohl noch nicht zu einer endgültigen Entscheidung im Sinne des Vorhandenseins undissoziierter Moleküle in starken Elektrolyten ausreichen.

Eine weitere optische Stütze für die Annahme der Existenz undissoziierter Anteile erblickt nun Fajans in den Ergebnissen seiner mit Kohner und Geffcken ausgeführten refraktometrischen Untersuchungen (29). Wenn auch diese Messungen im engen Zusammenhang mit den Vorstellungen von der Deformation der Atome und Ionen stehen, so sei doch gleich eingangs erwähnt, daß die noch zu besprechenden Schlüsse

auch weitgehend unabhängig von den letzteren theoretischen Gesichtspunkten gezogen werden können und sich zum großen Teil einfach auf Grund optischer Analogien zwischen Salzlösungen und Säurelösungen ergeben.

Zum besseren Verständnis aber werde ich zunächst einige Grundlagen der Fajansschen Deformationsbetrachtungen kurz andeuten. Gehen wir zu dem Zweck von den auf die einzelnen Ionen bezogenen Molrefraktionswerten aus, wie sie in der Fig. 6 graphisch dargestellt sind. Diese von Fajans und G. Joos (30) abgeleiteten Molrefraktionswerte *R* der freien gasförmigen Ionen geben ein Maß für die Beweglichkeit ihres Elektronengebäudes im elektro-

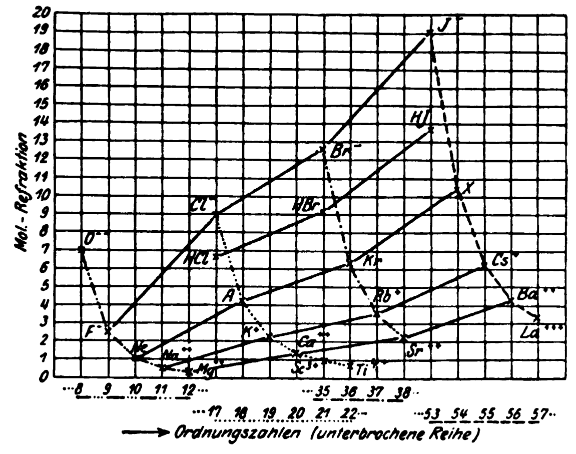


Fig. 6. Molrefraktion von einigen Gasen und gasförmigen Ionen.

magnetischen Feld an; je größer *R* ist, um so stärker verschieblich ist das Gebilde. Wir sehen z. B. an dem Vergleich des Jods mit dem Chlor, daß die Molrefraktion um so größer ist, je größer der Ionendurchmesser ist, je weniger fest also die Außenelektronen gebunden sind.

Nun geht Fajans von der Vorstellung aus, daß z. B. die Elektronenhülle der Anionen durch ein sich näherndes positives Kation noch fester gebunden wird, und erklärt damit, daß die Molrefraktion des Anions, des Cl, beim Übergang zum HCl geringer wird. Und zwar ist es einleuchtend, daß diese Verminderung der Refraktion um so größer ist, je lockerer die Elektronen gebunden waren, je größer also die ursprüngliche Refraktion des Anions selbst ist. Die Refraktion z. B. des großen freien Jodions wird durch den stark deformierend, verfestigend wirkenden H-Kern bei der Bildung von Jodwasserstoff weit stärker vermindert als die des kleineren Chlorions beim Übergang zum Chlorwasserstoff. Ferner ist die Verfestigung des Anions um so größer, je stärker das elektrische Feld des aktiven Kations wird, also je größer seine positive Ladung und je kleiner sein Radius ist. Im letzteren Falle kann eben das Kation näher an das deformierbare Anion gelangen. Auch dafür ließen sich experimentelle Beispiele anführen.

Im Gegensatz zu dieser Refraktionsverminderung bei der Deformation eines Anions wird die Elektronenhülle eines Kations unter dem Einfluß eines sich nähernden negativen Anions

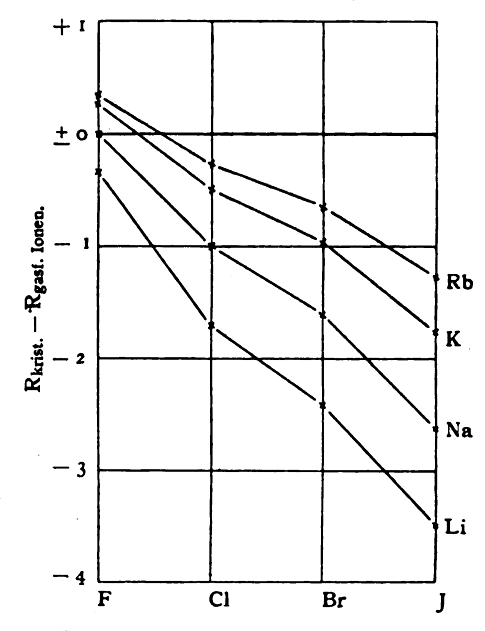


Fig. 7. Änderung zu Molrefraktion beim Übergang: Gasförmige Ionen → Kristall.

eine Abstoßung, eine Lockerung erfahren; die Molrefraktion des Kations wird also dabei etwas, wenn auch im allgemeinen weniger stark, vergrößert werden. Wieder ist natürlich dieser Effekt um so erheblicher, je kleiner das in diesem Fall aktive Anion und je größer das passive Kation ist.

Daß sich in Wirklichkeit meist beide Effekte, der stärkere negative und der meist schwächere positive Effekt überlagern, sehen wir am besten an Hand der in Fig. 7 dargestellten Gesamtänderung der Molrefraktion beim Übergang von freien gasförmigen Ionen zum festen Kristall: Bei den großen Anionen (Jod) starke Verminderung der Refraktion durch Verfestigung, und zwar um so stärker, je kleiner das Kation ist. Bei den größeren Kationen dagegen (Rb) macht sich unter dem Einfluß der kleineren Anionen (Fluor) schließlich der entgegengesetzte, positive Effekt infolge der Lockerung der Elektronen des Kations bemerkbar, so daß bei KF und RbF insgesamt ein deutlich positiver Gesamteffekt herauskommt.

Wenden wir uns nun zunächst der Besprechung

Tabelle I.

Konzentrationsabhängigkeit der Molrefraktion von Säure- und Salzlösungen.

	$R_{H^+_{gel.}}$	R_{X^-}	$(R_{H^+_{gel.}} + R_{X^-})$ vollk. dissoz.	ΔR $[HX_{und.} - (H^+_{gel.} + X^-)_\infty]$	R_{HX} undissoz.	ΔR $[NaX_{5n} - (Na^+ + X^-)_\infty]$
HJ	– 0,6	+ 19,24	+ 18,64	**– 4,90**	+ 13,74	**– 0,225**
HBr	– 0,6	+ 12,67	12,07	**– 2,93**	9,14	**– 0,085**
HCl	– 0,6	+ 9,07	8,47	**– 1,80**	6,67	**– 0,053**
H Azet.	– 0,6	+ 14,36	13,76	**– 0,74**	13,02	**– 0,05**
HNO_3	– 0,6	+ 11,01	10,41	**– 0,4**	10,0	**– 0,027**
$^1/_2\,H_2SO_4$	– 0,6	+ 7,42	6,82	**– 0,07**	6,75	**0,0**
$HClO_4$	– 0,6	+ 13,25	12,65	**+ 0,6**	13,20	**+ 0,042**

der Konzentrationsabhängigkeit der Molrefraktion von wäßrigen Säurelösungen zu. Hier wissen wir von vornherein, daß z. B. $HClO_4$ in sehr verdünntem Zustand (Molrefraktion $R = 12{,}65$) vollkommen dissoziiert, in 100 proz. Lösung, d. h. in reinem flüssigen Zustand ($R = 13{,}20$) aber größtenteils undissoziiert ist. Da der H-Kern selbst keine Elektronen, also keine Molrefraktion besitzt, kann der in der Tabelle I Spalte 5 angegebene Effekt, der einer Zunahme der Molrefraktion der Perchlorsäure um + 0,6 Einheiten beim Übergang von unendlicher Verdünnung bis zur wasserfreien Säure entspricht, nicht nur auf den sicher negativen Teileffekt der Verfestigung des Anions durch den Wasserstoffkern beruhen. Es muß vielmehr bei wäßrigen Lösungen noch in Betracht gezogen werden, daß jedes Ion, vor allem das kleine freie Wasserstoffion selbst, auf das umgebende Wasser eine verfestigende, also die Refraktion vermindernde Wirkung ausübt. Dem freien hydratisierten H-Ion entspricht eine negative Refraktion von — 0,6 (Spalte 2) Einheiten. Gibt nun der H-Kern beim Übergang zum Anion unter Bildung des neutralen Moleküls seine Wasserhülle, wenigstens zum Teil, frei, so wird hierdurch ein positiver Teilbetrag der Gesamtrefraktion um die besagten 0,6 Einheiten auftreten, und dies kommt zu der erwähnten Verminderung der Refraktion des Anions infolge seiner Verfestigung hinzu. Je nachdem, ob der letztere, der Anionenverfestigung entsprechende negative Effekt zahlenmäßig größer oder kleiner als der positive Effekt von 0,6 Einheiten bei der Dehydratation des H-Kernes ist, ist der Gesamtbetrag noch negativ oder schon positiv. In Spalte 5 der Tabelle I sieht man, daß die Gesamtänderung der Refraktion unter Umständen, vor allem bei den großen, leicht deformierbaren Halogenionen, in den wäßrigen Säurelösungen mit steigender Konzentration stark negativ ist. Bei der Perchlorsäure aber, die ein sehr wenig deformierbares Anion besitzt, tritt praktisch nur der positive Effekt von seiten des vom H-Ion freigegebenen Wassers in Erscheinung.

Nun haben die Untersuchungen von Fajans, Kohner und Geffcken mit genauen Meßmethoden ergeben, daß auch in den konzentrierten Lösungen der Salze kleine aber deutliche Änderungen der Molrefraktion auftreten, wie z. B. aus der Fig. 8 hervorgeht.

Experimentell festgestellt wurde der Brechungsindex und die Dichte der Lösungen oberhalb 2-normal. Die daraus unter Abzug der Refraktion des Wassers berechnete Molrefraktion des gelösten Salzes, die also den Hydratationseffekt mit einschließt, wurde jeweils bis zu unendlicher Verdünnung extrapoliert. Die dann erhaltenen Werte erweisen sich bis auf eine Einheit der zweiten Dezimale als vollkommen additiv aus den Einzelwerten für die freien gelösten Ionen zusammengesetzt. In der Fig. 8 ist nun die Änderung der Molrefraktion der gelösten Salze bei steigender Konzentration gegenüber diesen auf unendliche Verdünnung bezogenen Werten aufgetragen, und zwar in Einheiten der zweiten Dezimale. Man sieht, daß z. B. die Molrefraktion bei KF um 0,13 Einheiten ansteigt, dagegen bei NaJ um mehr als 0,3 Einheiten abnimmt, wenn man von unendlicher Verdünnung bis zur Sättigungskonzentration übergeht.

Vergleichen wir nun einmal diese Effekte in den Salzlösungen zunächst mit den schon erwähnten bei den Säuren und dann mit denen, die bei der Bildung fester Kristalle aus freien Ionen auftreten. Zu dem Zweck sei zunächst auf Spalte 5 und 7 der Tabelle I hingewiesen. In Spalte 5 sind die Änderungen der Refraktion der Säuren beim Übergang von unendlicher Verdünnung zu 100 proz. Säure angegeben; in Spalte 7 stehen die ganz entsprechenden Werte für die zugehörigen Na-Salze von unendlicher Verdünnung bis zu 5-normaler Lösung. Aus diesen beiden Zahlenreihen erkennt man, daß zwischen beiden Refraktionsänderungen auffallende Ähnlichkeit nach Vorzeichen und relativer Abstufung besteht. Da nun die Ursache bei den Säuren sicher mit der Bildung undissoziierter Moleküle zusammenhängt, zieht Fajans den

Schluß, daß auch die zahlenmäßig kleineren Differenzen bei den Na-Salzen und damit natürlich bei allen starken Elektrolyten auf eine teilweise Assoziation zu undissoziierten Anteilen zurückzuführen sind. Es sei dabei hervorgehoben, daß

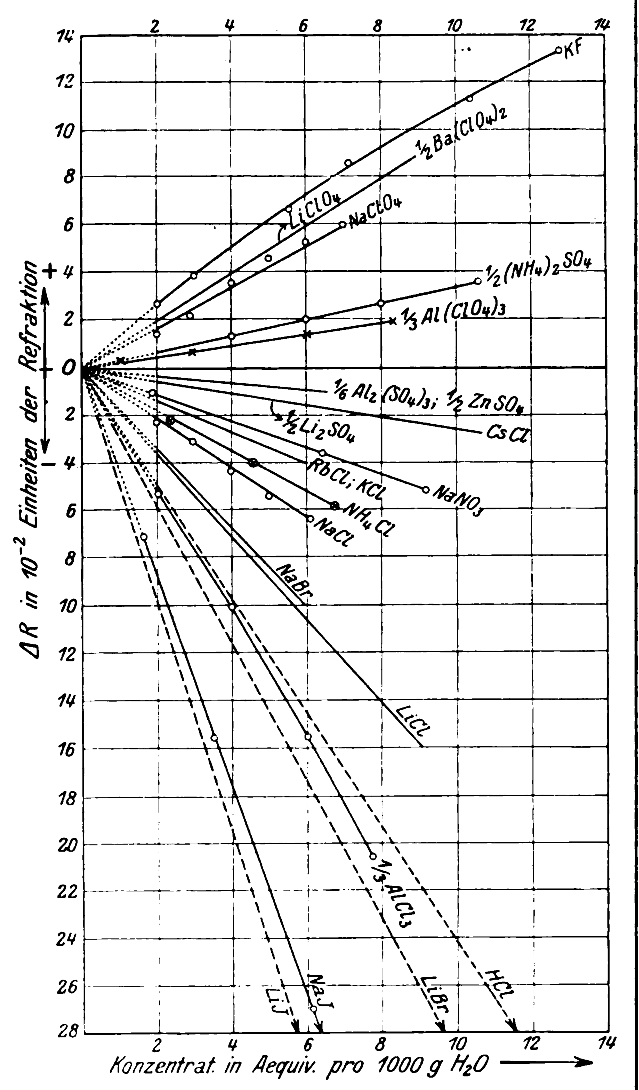


Fig. 8. Konzentrationsabhängigkeit der scheinbaren Molrefraktion gelöster Elektrolyte.

dies ein reiner Analogieschluß ohne Rücksicht auf die damit zusammenhängenden Deformationsvorstellungen wäre.

In die gleiche Richtung weist auch der andere Vergleich der Effekte in den Salzlösungen (Fig. 8) mit denen bei der Kristallbildung (Fig. 7). Man sieht, daß z. B. NaJ und LiJ in beiden Fällen eine stark negative Veränderung der Refraktion aufweisen, die hauptsächlich von der starken passiven Verfestigung des großen J-Ions durch die kleinen Na- bzw. Li-Ionen herrührt. Andererseits ist bei KF in beiden Fällen ein positiver Effekt zu beobachten.

Diese Änderungen der Refraktion bei der Bildung des festen Kristalles und bei der des natürlich hydratisierten Moleküls werden nun ähnliche Abstufungen aufweisen, zumal eine Ähnlichkeit zwischen beiden auch an anderen Eigenschaften z. B. hinsichtlich Gitterenergie und Ionisierungsenergie des dampfförmigen Moleküls, zum Ausdruck kommt. Auch aus diesem zweiten Vergleich zieht Fajans den Schluß, daß die optischen Effekte in Lösungen durch das Vorhandensein solcher Kombinationen von entgegengesetzt geladenen Ionen bedingt sind, die ohne Zwischenschaltung von Wassermolekülen aneinanderstoßen, die wir also als undissoziierte Anteile bezeichnen wollen.

Ein Einwand wäre vielleicht noch möglich, daß nämlich die Veränderung der Refraktion in den Salzlösungen durch die zwischen den gelösten Ionen durch das Wasser hindurch wirkenden interionischen Kräfte hervorgerufen sein könnten. Wenn man auch diese Erklärungsmöglichkeit noch nicht vollkommen bündig ausschließen kann, so werden doch von Fajans eine Reihe von Gegengründen angeführt, auf Grund deren er die letztere Erklärungsmöglichkeit nicht als wahrscheinlich ansieht. Einer dieser Gründe läuft darauf hinaus, daß etwaige durch solche interionische Kräfte in den Lösungen bedingte optische Effekte noch kleiner sein müßten als die beobachteten Daten. Denken wir uns zu dem Zweck die Ionen in einer 5-*n* NaJ-Lösung in erster Näherung gittermäßig in der Lösung verteilt, so kann man den mittleren Ionenabstand zu 5,5 Å berechnen, der also 1,7 mal größer wäre als im festen NaJ-Kristall (3,2 Å). Da nun nach den experimentellen Daten die Verminderung der Refraktion eines Anions, hier des J-Ions, umgekehrt proportional mit der 4. Potenz des Abstandes (31) verläuft, so wäre bei 1,7-fachem Abstand im Vakuum die Refraktionsverminderung 8,3-mal kleiner als im Kristall (aus Fig. 7 zu 2,67 zu entnehmen), also $2,67 : 8,3 = 0,32$.

Der so berechnete Wert müßte aber aus einem anderen Grunde noch weiter vermindert werden, und zwar deshalb, weil in der Lösung die Anziehungskräfte durch die zwischen den Ionen liegenden Wassermoleküle stark vermindert werden, während dies natürlich im Kristall nicht der Fall ist. Man wird hierbei natürlich kaum mit der Dielektrizitätskonstante des reinen Wassers rechnen können. Wenn wir aber sogar mit dem gewiß gering geschätzten Wert $D = 5$ statt 80 rechnen, so ist einzusehen, daß der eben berechnete Wert der Refraktionsverminderung noch merklich kleiner werden muß, sagen wir etwa auf — 0,06 Einheiten sinkt. Dieser geschätzte

Wert ist nun aber gegenüber der beobachteten Verminderung von 0,27 (aus Fig. 8) wesentlich zu klein.

Würde man nun noch schätzungsweise den mit der teilweisen Dehydratation der Ionen, vor allem des Na-Ions, beim Assoziationsvorgang verbundenen optischen Effekt in der Hydrathülle selbst berücksichtigen wollen, so könnte dieser zwar zahlenmäßig kleine, aber positive Teilbetrag den Wert —0,06 nur noch mehr ins Positive verändern, also noch mehr vom gemessenen Wert —0,27 entfernen. Und so kommt Fajans zu dem Schluß, daß die Lösungseffekte nicht durch interionische Kräfte, die durch Wasser hindurch wirken, bedingt sein können. Als wahrscheinliche Erklärung würde demnach die Annahme bestehen bleiben, daß in konzentrierten Salzlösungen merkliche undissoziierte Anteile vorhanden sind, bei denen sich jedenfalls zwischen den Ionen keine Wassermoleküle mehr befinden. Genaueres läßt sich allerdings über die Natur dieser Anteile von diesem Gesichtspunkt aus wohl nicht aussagen.

Fassen wir also das thermochemische und optische Ergebnis zusammen, so zeigt sich folgendes: In sehr verdünnten Lösungen sprechen die Messungen der Verdünnungswärmen in einigen wesentlichen Zügen für die Richtigkeit der Debye-Hückelschen Theorie, in anderer Hinsicht, solange wenigstens keine genaueren theoretischen Daten berechnet werden können, keineswegs dagegen. In größeren Konzentrationen treten nicht unerwartete Abweichungen vom einfachen $\sqrt{m}$-Gesetz auf. Die Annahme merklicher Mengen undissoziierter Moleküle auch in Lösungen der starken Elektrolyte läßt sich zwar bisher weder durch thermochemische noch durch optische Kriterien streng beweisen. Doch scheint eine Reihe von Tatsachen für diese unvollständige Dissoziation zu sprechen, und damit wäre eine schon lange Zeit gesuchte, aus thermodynamischen Gründen geforderte Brücke zwischen den starken und den schwachen Elektrolyten geschaffen.

München, Chemisches Laboratorium der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Chemische Abteilung.

Literatur.

1) Zeitschr. f. physik. Chem. **1**, 631, 1887.
2) Zeitschr. f. physik. Chem. **1**, 481, 1887.
3) Proc. 7. Int. Congr. Appl. Chem., Sect X, London 1909. Zeitschr. f. El.-Chem. **18**, 470, 1912.
4) Zeitschr. f. physik. Chem. **61**, 129, 1907; Journ. Am. Chem. Soc. **34**, 1631, 1912.
5) Phil. Mag. **14**, 1, 1907.
6) Physik. Zeitschr. **24**, 185, 1923; **25**, 97, 1924.
7) Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. **7**, 9. Heft, 1926.
8) Trans. Farad. Soc. **23**, 357, 1927.
9) Zeitschr. f. El.-Chem. **33**, 428, 1927.
10) Lit. siehe Zeitschr. f. El.-Chem. **34**, 489, 1928.
11) Lit. siehe Zeitschr. f. El.-Chem. **34**, 502, 1928.
12) N. Bjerrum, Zeitschr. f. physik. Chem. **119**, 147, 1926; E. Lange, Zeitschr. f. El.-Chem. **33**, 431, 1927. Dort auch weitere Literatur.
13) Ber. Berl. Akad. S. 51, 1926.
14) Ber. Berl. Akad. S. 136, 1927.
15) Naturwiss. **15**, 521, 1927.
16) Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **6**, 183, 1927.
17) Zeitschr. f. El.-Chem. **34**, 566, 1928.
18) Weitere Einzelheiten: Zeitschr. f. El.-Chem. **33**, 431, 1927; **34**, 566, 1928. Fortschr. d. Chem., Phys., phys. Chem. **19**, Heft 6. Berlin 1928.
19) Siehe auch a. a. O. Anm. 15, 17, 18; sowie die Arbeiten von Nernst und Mitarbeitern, z. B. 9, 14, 16.
20) Physik. Zeitschr. **29**, 358, 1928.
21) Ph. Groß und O. Halpern, Physik. Zeitschr. **26**, 403, 1925.
22) Trans. Farad. Soc. **23**, 445, 1927.
23) A. a. O. Anm. 9.
24) A. a. O. Anm. 7.
25) Siehe auch Anm. 17, 18.
26) Zeitschr. f. physik. Chem. **135**, 237, 1928.
27) N. Bjerrum, D. kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (7) **4**, 1, 1906.
28) Zeitschr. f. physik. Chem. **132**, 401, 433, 1928.
29) Trans. Farad. Soc. **23**, 357, 1927. Zusammenfassung und ausführliche Literaturangaben in Zeitschr. f. El.-Chem. **34**, 502, 1928.
30) Zeitschr. f. Phys. **23**, 1, 1924.
31) K. Fajans, Zeitschr. f. physik. Chem. **130**, 724, 1927.

Diskussion.

Herr Falkenhagen: Ich möchte mir eine ergänzende Bemerkung zu den Ausführungen des Herrn Joos erlauben. Die für die Debyesche Theorie charakteristische Ionenatmosphäre ermöglicht ein Verständnis der Wienschen Kurve in ihrem ganzen Verlauf. Die Rechnungen sind unter gewissen Vernachlässigungen (Verzicht auf die hydrodynamische Korrektion der Stokesschen Reibungskraft, was für sehr kleine Geschwindigkeiten auf eine Vernachlässigung der Elektrophorese hinausläuft und auf die Onsager-Korrektion infolge der Brownschen Bewegungsschwankungen der Ionen) für den Spezialfall symmetrischer Elektrolyte mit Ionen gleicher Beweglichkeit durchgeführt[1]). Für kleine Geschwindigkeiten ist die Relaxationskraft proportional dem Geschwindigkeitswert. Legt man immer höhere und höhere Feldstärken an, so biegt die Kurve der Relaxationskraft um und nähert sich für ganz hohe Felder einem Grenzwert.

Mit anderen Worten die Leitfähigkeit wächst bis zu dem Wert λ_∞, der der unendlichen Ver-

[1]) Näheres s. in der demnächst in der Physik. Zeitschr. erscheinenden Notiz.



dünnung entspricht. Sehen wir uns die Kurven an, die den Quotient

$$\frac{\text{Leitfähigkeitsdefekt für Feld } E}{\text{Leitfähigkeitsdefekt für das Feld } E = 0} = \delta$$

als Funktion der Feldstärke darstellen, so erkennen wir, daß δ mit wachsendem Feld gegen Null strebt, während es sich für ganz schwache Feldstärken der Eins nähert. Für sehr geringe Konzentrationen strebt die δ-Kurve rascher gegen Null als für sehr hohe Konzentrationen, was damit im Zusammenhang steht, daß im ersten Fall die Relaxationszeit der Ionenwolke größer ist als im letzteren. Dies steht im Einklang mit den Ausführungen von Herrn M. Wien. Für unsere speziellen Elektrolyte zeigt sich ein intimer Zusammenhang des Wieneffekt mit dem Dispersionseffekt bei schwachen Feldstärken. Man hat sich nur in den Dispersionskurven zur qualitativen Erfassung der Abhängigkeit des Wieneffekts von Konzentration, Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels, Temperatur, Wertigkeit usf., statt der Kreisfrequenz die Feldstärke zu denken. Vermutlich besteht dieser Zusammenhang auch für nichtsymmetrische Elektrolyte.

Ja überdies, die Debyesche Elektrolyttheorie ist sogar imstande, die Dispersion der Leitfähigkeit bei sehr hohen Feldern oder kurz ausgedrückt die Dispersion des Wieneffekts zu deuten. Die bremsende Relaxationskraft steigt dann für große $\omega\Theta$ (ω = Kreisfrequenz, Θ = Relaxationszeit) wieder linear mit der Feldstärke, allerdings erheblich weniger an, biegt ebenfalls um, wie wir das im stationären Fall auseinandergesetzt haben. Es ist der Theorie also möglich, die Überlagerung der Frequenzabhängigkeit über die Feldabhängigkeit zu erfassen.

Herr Orthmann: Nernst hat seine Rechnungen mit Absicht bei den 1—1 wertigen Salzen so durchgeführt, daß möglichst wenig mehr oder weniger willkürliche Korrektionen angebracht wurden. Bei den 2—2 wertigen Salzen scheinen nach im Gange befindlichen Messungen die Rechnungen nicht mehr so einfach durchführbar zu sein.

Herr Lange: Auf die Bemerkung von Herrn Orthmann möchte ich mir die Erwiderung gestatten, daß ich in meinem Vortrage wohl nur zu erwähnen vergessen habe, daß die von Nernst eingeführten Näherungsannahmen natürlich als solche erkennbar sind. Die Festlegung auf das LiCl als undissoziierte Ausgangssubstanz hat aber doch gewisse Schwierigkeiten. Auch wenn die Durchmesser der hydratisierten Alkali-Ionen sämtlich gleich wären, wäre eine $\sqrt{m}$-Proportionalität des Debyeeffektes bis zu so hohen Konzentrationen kaum zu verstehen. Und was die in den Nernstschen Rechnungen angenommene Konzentrationsunabhängigkeit des Aktivitätskoeffizienten anbelangt, so wäre wohl diese Näherungsannahme heute nicht mehr nötig gewesen.

J. Malsch (Köln), Über die Messung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten bei hohen elektrischen Feldstärken. II.

1. Vor kurzer Zeit ist eine Methode beschrieben worden[1]), die es gestattet, die Dielektrizitätskonstanten[2]) von Flüssigkeiten in sehr hohen elektrischen Feldern (von der Größenordnung 100000 V/cm) zu messen, selbst dann, wenn die Leitfähigkeit der betreffenden Flüssigkeiten verhältnismäßig groß (etwa $\lambda = 10^{-6}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$) war. Es konnte gezeigt werden, daß sowohl beim Wasser als auch beim Glyzerin keine meßbare Änderung der DK selbst bei Feldstärken von etwa 100000 V/cm auftraten. Dabei hätten sich Änderungen von etwa 5 pro Mille noch bemerkbar machen müssen. Nach der Dipoltheorie von P. Debye ist jedoch eine Abnahme der DK mit wachsender Feldstärke zu erwarten. Um nun den Debyeschen Dipoleffekt der also sehr klein ist, doch zu finden, mußte die Meßgenauigkeit noch erheblich gesteigert werden. Versuche in dieser Richtung mit einer anderen Methode sind schon früher angedeutet worden[1]). In der folgenden Arbeit soll über neuerdings mit der früher beschriebenen verbesserten Methode ausgeführte Messungen berichtet werden.

1) J. Malsch, Ann. d. Phys. **84**. 841. 1927.

2) In dieser Arbeit soll für Dielektrizitätskonstante immer die Abkürzung DK geschrieben werden.

2. Zur Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung wird schematisch durch Fig. 1 wiedergegeben. Sie hat gegenüber der alten Versuchsanordnung insofern eine Abänderung erfahren, als die alte Vergleichsmethode durch eine Substitutionsmethode ersetzt wurde (Fig. 1). Ähnlich wie in den früheren Anordnungen wurde ein Kondensator C über eine Selbstinduktion L, eine Funkstrecke F und die Stromverzweigungen R_1, C_{R_1} und R_2, C_v, bzw. R_2, C_x entladen. Die Stromeffekte in den beiden Verzweigungen wurden genau wie in der früheren Arbeit durch Koppelung mit einer Baretteranordnung über die

1) J. Malsch, l. c. S. 877.

Koppelungswiderstände ϱ_1 und ϱ_2 gemessen und auf Gleichheit eingestellt. Der Kondensator C_{R_1} parallel R_1 war jetzt im Gegensatz zur ursprünglichen Anordnung ein fester Kondensator. Parallel R_2 wurden jetzt abwechselnd veränderliche Vergleichskondensatoren C_v wie sie in Fig. 3 der früheren Arbeit abgebildet sind, und der zu messende Kondensator C_x in den Schwingungskreis eingeschaltet. Im übrigen war die Versuchsanordnung ungeändert.

Als Hauptfehlerquelle wurde in der früheren Arbeit der störende Einfluß der Leitfähigkeit der

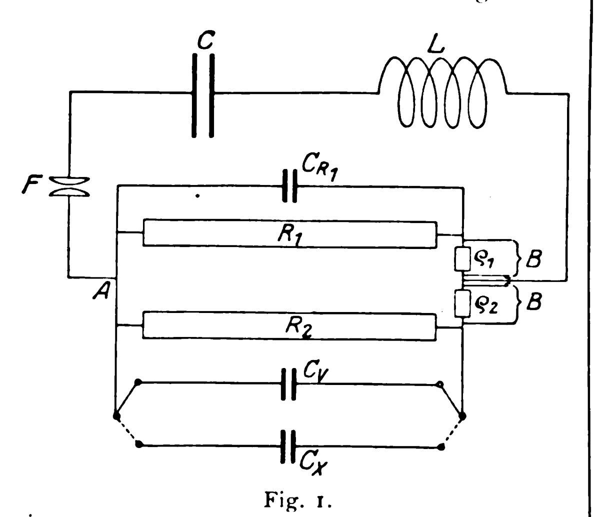


Fig. 1.

zu untersuchenden Substanzen angegeben[1]). Wenn also die Meßgenauigkeit gesteigert werden sollte, mußte vor allem dieser Effekt möglichst herabgedrückt werden[2]).

Früher ist gezeigt worden[3]), daß bei einer gleichzeitigen Änderung der DK und der Leitfähigkeit, also bei gleichzeitiger Änderung von Kapazität und Widerstand eine Kompensation erzielt wird durch eine Änderung ΔC_v der Vergleichskapazität C_v, die gegeben ist durch[4]):

$$\frac{\Delta C_v}{C_v} = \frac{\Delta C_x}{C_x} - \frac{C_x^2}{C_v^2} \frac{LCp\,(4\pi\lambda)^2}{\varepsilon^2} \frac{\Delta W}{W} \qquad (1\,\mathrm{a})$$

oder, wenn $C_x = C_v$ ist:

$$\frac{\Delta C_v}{C_v} = \frac{\Delta C_x}{C_x} + \frac{LCp\,(4\pi\lambda)^2}{\varepsilon^2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \qquad (1\,\mathrm{b})$$

In diesen Formeln bedeuten:

W = Widerstand des zu untersuchenden Gefäßes C_x.

$p = \frac{W}{R}$.

λ = Leitfähigkeit } der zu untersuchenden
ε = DK } Substanz.

Ferner ist gesetzt: $R_1 = R$; $R_2 = \frac{RW}{R+W}$

$$= R \cdot \frac{p}{1+p}.$$

Wie aus dieser Formel hervorgeht, hängt die „Leitfähigkeitswirkung" außer von den Konstanten ε und λ der zu untersuchenden Flüssigkeit noch von den Parametern des Schwingungskreises ab. Es ergeben sich daher für die Verbesserung der Methode zwei sogleich zu besprechende Gesichtspunkte:

a) Es müssen die Parameter im Schwingungskreis möglichst günstig gewählt werden.

b) Die Leitfähigkeit der zu untersuchenden Flüssigkeit muß möglichst verringert werden.

a) Es ist also notwendig, zunächst einmal die Empfindlichkeit der Methode auf Widerstandsänderung ΔR_2 mit der auf Kapazitätsänderungen ΔC_v zu vergleichen und durch passende Wahl der Parameter eine möglichst hohe Empfindlichkeit gegenüber Kapazitätsänderungen und gleichzeitig eine möglichst geringe Empfindlichkeit hinsichtlich Widerstandsänderungen zu erzielen. Es konnte experimentell erreicht werden, daß eine kleine Widerstandsänderung $\frac{\Delta R_2}{R_2}$ eine kleine Kapazitätsänderung derselben Größe $\frac{\Delta C_v}{C_v}$ im Parallelzweig gerade kompensierte:

$$\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta C_v}{C_v} = 0.$$

Da in unseren Versuchen sich infolge des Wieneffektes nur W ändert, während die übrigen Widerstände konstante Drahtwiderstände sind, täuscht also der „Leitfähigkeitseffekt" eine Kapazitätsänderung vor von der Größe:

$$\left(\frac{\Delta C_v}{C_v}\right)_\lambda = -\frac{R}{R+W}\frac{\Delta W}{W} = +\frac{R}{R+W}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

In den hier in Frage kommenden Versuchen war etwa:

$$R = 300\,\Omega$$
$$W \geqq 24000\,\Omega,$$

also wird:

$$\left(\frac{\Delta C_v}{C_v}\right)_\lambda \leqq \frac{1}{80}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

1) Neben dem Debye-Effekt tritt bei hohen Feldstärken bekanntlich auch ein Leitfähigkeitseffekt (Wieneffekt) auf.

2) Diese Ausführungen beziehen sich hauptsächlich auf die mit Wasser ausgeführten Messungen, da sie aber allgemein gelten, seien sie hier mit behandelt.

3) J. Malsch, l. c. S. 863.

4) Diese Formeln gelten nur unter gewissen Bedingungen für die Koppelung und die Konstanten des Meßkreises. Näheres vgl. l. c. S. 859.

Beträgt der Wieneffekt größenordnungsmäßig einige Prozent¹), setzen wir etwa $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}04$, so ergibt sich

$$\left(\frac{\Delta C_v}{C_v}\right)_{\lambda} \sim \frac{1}{2000} = 0{,}05 \text{ Proz.}$$

Der Leitfähigkeitseffekt wird sich also in unseren Messungen bei der jetzigen Anordnung selbst dann nicht störend bemerkbar machen können, wenn die Meßgenauigkeit etwa 0,1 Proz. beträgt.

b) Da versucht werden muß, die Leitfähigkeit der zu untersuchenden Substanzen möglichst herabzudrücken, konnten als Meßkondensatoren

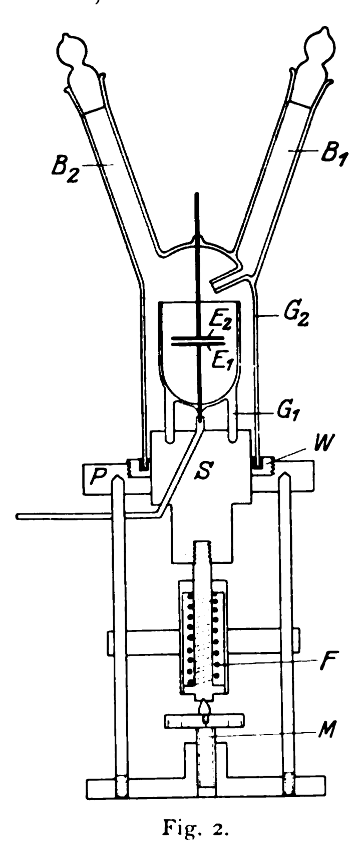


Fig. 2.

nicht mehr die früher beschriebenen Gefäße benutzt werden. Es mußten vielmehr in Glasgefäße eingeschmolzene Platinelektroden verwandt werden. Eine zweckmäßige Konstruktion der neuen Gefäße zeigt Fig. 2. Das Glasgefäß G_1, in welches die untere Elektrode E_1 eingeschmolzen ist, wird in einen Hartgummisockel S fest eingekittet. Der Hartgummisockel seinerseits wird von einer Feder F gegen eine Mikrometerschraube M gedrückt, welche fest mit dem äußeren Teil des Gefäßes verbunden ist. Die zweite Elektrode E_2 wurde in ein Glasgefäß G_2 eingeschmolzen, welches in ein Hartgummigewinde W eingekittet wurde. Dieser äußere Teil des Gefäßes konnte dann in die Hartgummiplatte P des feststehenden Teils eingeschraubt werden. Durch Einfügung des Gewindes war eine bequeme Reinigung des Gefäßes jederzeit möglich, ohne daß die verkitteten Teile voneinander getrennt zu werden brauchten. Die Verkittung war notwendig, um eine genaue Parallelität der beiden Elektroden zu erzielen. Die Justierung geschah in der Weise, daß die Einkittung des äußeren Gefäßteiles vorgenommen wurde, während beide Elektroden genau aufeinander lagen. Mit Hilfe der Mikrometerbewegung M_Q, die eine genaue Parallelverschiebung der unteren Platte bewirkt, konnte dann leicht und sehr genau jeder gewünschte Abstand erzielt werden. Der kleinste benutzte Abstand betrug etwa 0,2 mm. Die Platten hatten einen Durchmesser von 20 mm und 12 mm. Das Gefäß G_2 war mit zwei Ansätzen B_1 und B_2 versehen, um die zu untersuchenden Flüssigkeiten direkt in das Gefäß hinein destillieren zu können. Der Abstand des unteren Teils des Gefäßes von der eigentlichen Meßanordnung (Platinplatten), war so groß, daß ein kapazitiver Einfluß auf die übrigen Teile der Versuchsanordnung ausgeschlossen war. Außerdem war infolge der Art der Konstruktion das Gefäß gegen äußere Temperaturschwankungen sehr unempfindlich. Auf gute Temperaturkonstanz muß besonders geachtet werden, da bei dem kleinen zu erwartenden Effekt sehr kleine Temperaturschwankungen die Messungen schon beträchtlich fälschen können. Die Leitfähigkeit des in diesen Gefäßen untersuchten Wassers betrug etwa:

$$\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\,\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1}.$$

3. Ausführung der Messungen. Meßgenauigkeit.

Die Messungen im einzelnen wurden ähnlich wie in der früheren Arbeit ausgeführt. An Stelle der alten Vergleichsmethode trat jetzt eine Substitutionsmethode entsprechend der früher angegebenen Widerstandsmethode¹). Diese Me-

1) In der Tat ist der Wieneffekt hier jedenfalls noch sehr viel kleiner als er oben abgeschätzt wurde. Nach M. Wien (Ann. d. Phys. **83**, 357—358, 1927) nimmt die Größe des Effektes ab mit wachsender Verdünnung der Elektrolytlösungen. Die bei hohen Spannungen beobachtete molekulare Leitfähigkeit nähert sich sehr wahrscheinlich der mit gewöhnlichen Methoden beobachteten molekularen Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung. Da wir es hier mit dem möglichst „reinen" Lösungsmittel zu tun haben, ist der Zustand der „unendlichen Verdünnung" jedenfalls vollständig erreicht.

1) J. Malsch und M. Wien, Ann. d. Phys. **83**, 305, 1927.



Tabelle I.

Prüfung der als Vergleichskapazitäten benutzten Kondensatoren.

$C = 3200$ cm, $C_v = 200$ cm, $R = 300$ Ohm.

Funkenstrecke	2 mm	3 mm	5 mm	6 mm	
Stellung des Vergleichskondensators[1]):	3,50	3,48	3,53	3,53	Mittel 3,51
Abweichungen vom Mittelwert in cm	—0,033	—0,099	+0,066	+0,066	
Abweichungen vom Mittelwert in Proz.	—0,02	—0,05	+0,03	+0,03	

Maximale Abweichungen der Werte untereinander: 0,08 Proz.

„ „ „ „ vom Mittelwert: 0,05 „ .

thode hat den Vorteil, daß alle Fehlerquellen, die etwa in der Unsymmetrie der Anordnung, insbesondere der Empfangsanordnung vorhanden sein können und wie sie früher besprochen worden sind, von vornherein ausgeschaltet werden. Solche Fehler mußten sich natürlich bei der jetzigen erhöhten Meßgenauigkeit in viel stärkerem Maße bemerkbar machen[2]). Die Ausführung der Messungen geschah in der Weise, daß die Galvanometerausschläge bei zwei verschiedenen Stellungen des Vergleichskondensators gemessen wurden, die so gewählt wurden, daß der beim Einschalten des Meßgefäßes C_x erhaltene Galvanometerausschlag zwischen den beiden nur sehr wenig voneinander verschiedenen und sehr kleinen Ausschlägen der Vergleichskondensatoren C_v^1 und C_v^2 lag. Durch Interpolation wurde dann der Wert der kompensierenden Kapazität erhalten.

Bevor nun mit den eigentlichen Messungen begonnen wurde, war noch nachzuweisen, daß die benutzten Vergleichskondensatoren unabhängig von der Funkenspannung genau gemessen werden konnten[3]). Um diesen Nachweis zu führen, wurde mit der Substitutionsmethode die verschiedensten hier als Vergleichskondensatoren dienende Kapazität (z. B. die Kondensatoren Fig. 2, 3 der früheren Arbeit, Dubilier-Kondensatoren, Luftkondensatoren usw.) miteinander verglichen, und zwar so, daß auch die Kondensatoren C_{R_1} und C_v miteinander vertauscht wurden. Ein Beispiel einer solchen Messung ist in Tabelle I dargestellt. Man sieht, daß irgendeine Abhängigkeit von der Feldstärke nicht vorhanden ist. Tabelle I gibt zugleich ein Bild von der Genauigkeit der Einzelmessungen.

Jetzt konnte mit den eigentlichen Messungen begonnen werden. Um kleine Versuchsfehler (z. B. Temperaturänderungen) zu kontrollieren, wurden die Messungen so ausgeführt, daß abwechselnd bei hohen und niedrigen Feldstärken gemessen wurde. Wie dies im einzelnen zu verstehen ist, zeigt als Beispiel die folgende Meßreihe Tabelle II.

Tabelle II.

Beispiel einer Meßreihe, Alkohol.

$C = 3200$ cm, $R_1 = 300$ Ohm, $C_{R_1} = 180$ cm, $W = 30000$ Ohm.

Einstellung des Vergleichskondensators für:

C_{v_1}: 3,6 $C_{v_2} = 4{,}0$ $C_{v_3} = 4{,}4$.

Funkenstrecke	Galvanometerausschläge bei:				Wert der kompensierenden Kapazität.
	C_v	C_v	C_v	C_x	
2	2,8	—	7,9	3,0	3,63
5	—	19,6	31,6	23,7	4,14
5	—	19,6	31,6	25,7	4,20
2	2,8	—	7,9	3,1	3,65
4	7,8	14,9	22,4	12,9	3,89
4	—	14,9	22,4	13,6	3,93
2	2,6	5,4	—	3,1	3,69
3	4,5	10,0	—	7,3	3,80
6	20,4	34,2	49,4	50,2	4,42
6	—	34,2	47,2	50,2	4,34
3	4,0	9,2	—	6,5	3,79
4	6,6	13,7	—	13,0	3,96
2	2,75	5,1	—	3,0	3,64
7	Durchschlag				—

Die Ergebnisse dieser Meßreihe sind in Tabelle III nochmals zusammengestellt:

1) Die Angaben in dieser und den folgenden Tabellen beziehen sich auf die Teilung des Vergleichskondensators. Eine Änderung von C_v um 0,1 Skalenteile in der Richtung der größeren Zahlen entspricht einer Verkleinerung der Kapazität um 0,33 cm.

2) Es sei bemerkt, daß die Messungen auch nach der Substitutionsmethode ausgeführt werden konnten, indem die eben erwähnten Fehler durch Korrektionen berücksichtigt wurden.

3) Insbesondere ist darauf zu achten, daß keine Sprühwirkungen bei hohen Spannungen auftreten.

Tabelle III.
Ergebnisse von Tabelle II.
Alkohol, $C_R = 180$ cm.

$F =$	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm
Kompensierende Kapazität	3,63 3,65 3,69 3,64	3,80 3,79	3,89 3,93 3,96	3,14 4,20	4,42 4,34	Durchschlag
Mittel	3,65	3,795	3,93	4,17	4,38	

Maximale Abweichungen der Werte voneinander bei: $F = 6$ mm

$\Delta C_v = 0{,}08 = 0{,}26$ cm $= 0{,}15$ Proz.

Die folgenden Tabellen IV und V zeigen in derselben Weise die Ergebnisse von Messungen mit Nitrobenzol und Wasser.

Aus den Tabellen II bis V ist wiederum die Meßgenauigkeit der Methode ersichtlich. Die maximalen Abweichungen der Werte untereinander sind stets kleiner als zwei Promille. Die wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte sind also jedenfalls kleiner als ein Promille. Dieses Resultat stimmt mit dem der Tabelle I überein. Die in Tabelle I angegebenen Einzelwerte sind durch Beobachtung der Galvanometerausschläge einer etwa gleich großen Zahl von Funkenentladungen ermittelt, wie die in den letzten Zeilen der Tabellen III—V angegebenen Mittelwerte. Eine weitere Steigerung der Meßgenauigkeit bei den soeben beschriebenen Versuchen durch Vergrößerung der Zahl der Einzelbeobachtungen war nicht möglich, da bei längerer zeitlicher Ausdehnung der Meßreihen oft kleine Änderungen im Meßkondensator auftraten[1]).

4. Ergebnisse der Messungen. Vergleich mit der Dipoltheorie von P. Debye.

Aus den Tabellen II—V ist bereits ersichtlich, daß die Kapazitäten C_v und somit auch die DK der untersuchten Substanzen mit wachsender Feldstärke kleiner werden. Nach der Dipoltheorie ist eine solche Abnahme der DK auch zu erwarten, und zwar verlangt die Dipoltheorie eine Abnahme, die dem Quadrate der elektrischen Feldstärke proportional ist[2]). Stellt

Tabelle IV.
Nitrobenzol, $C_R = 180$ cm.

$F =$	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm
Kompensierende Kapazität	3,54 3,63	3,695 3,715 3,63	3,73 3,71	3,89 3,82 3,79	3,90 3,93 3,83	3,96 3,97 3,97	4,17 4,11	**Durchschlag**
Mittel	3,59	3,68	3,72	3,83	3,89	3,97	4,14	

Maximale Abweichungen der Werte untereinander bei: $F = 5$ mm und $F = 6$ mm

$\Delta C_v = 0{,}1 = 0{,}33$ cm $= 0{,}18$ Proz.

Reihenfolge der Messungen: $F = 2, 2, 4, 3, 5, 5, 3, 5, 4, 6, 6, 7, 7, 6, 7, 3, 8, 8$ mm.

Tabelle V.
Wasser, $C_R = 285$ cm.

$F =$	2 mm	3 mm	3,5 mm	4 mm	4,5 mm	5 mm
Kompensierende Kapazität	2,48 2,53 —	2,75 2,72 2,615 —	2,745 2,895 —	2,94 —	3,02 2,97 —	Durchschlag
Mittel	2,505	2,695	2,82	2,94	2,995	

Maximale Abweichungen der Werte untereinander bei: $F = 3{,}5$ mm

$\Delta C_v = 0{,}15 = 0{,}49$ cm $= 0{,}17$ Proz.

Reihenfolge der Messungen: $F = 2;\ 3{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 2;\ 3;\ 4;\ 4{,}5;\ 3;\ 4{,}5$ mm.

1) Die Meßgenauigkeit der Methode an sich kann sehr wohl noch gesteigert werden, doch wird ihr bei der Anwendung auf die Messung der DK gut leitender Substanzen vor allem auch durch das Auftreten des Wieneffektes bereits eine Grenze vorgeschrieben (vgl. Abschnitt 2a).

2) Die Dipoltheorie ist für den Fall hoher elektrischer Felder bisher nur für nicht assoziierte Flüssigkeiten entwickelt worden. Es kann daher ein Vergleich auch nur mit dieser Theorie durchgeführt werden.

Tabelle VI.

Äthylalkohol, $C_R = 180$ cm.

F	C_R beob.[1])	C_R ber [1])	$100 \frac{C_{v_0} - C_v}{C_{v_0}}$ beob.	$100 \frac{C_{v_0} - C_v}{C_{v_0}}$ ber.	Δ Proz. quadr.	Δ' Proz. linear.
0	—	3,570	—	0,00	—	—
2	3,65	3,662	0,15	0,17	— 0,02	+ 0,05
3	3,795	3,778	0,41	0,38	+ 0,03	— 0,01
4	3,925	3,939	0,65	0,68	— 0,03	— 0,11
5	4,17	4,147	1,10	1,06	+ 0,04	+ 0,01
6	4,38	4,400	1,48	1,52	— 0,04	+ 0,06

Tabelle VII.

Nitrobenzol, $C_R = 180$ cm.

F	C_R beob.[1])	C_R ber.[1])	$100 \frac{C_{v_0} - C_v}{C_{v_0}}$ beob.	$100 \frac{C_{v_0} - C_v}{C_{v_0}}$ ber.	Δ Proz. quadr.	Δ Proz. linear.
0	—	3,592	—	0,00	—	—
2	3,59	3,625	0,00	0,06	— 0,06	+ 0,05
3	3,68	3,667	0,16	0,14	+ 0,02	+ 0,05
4	3,72	3,725	0,24	0,24	0,00	— 0,03
5	3,83	3,800	0,44	0,38	+ 0,06	0,00
6	3,89	3,892	0,55	0,55	0,00	— 0,06
7	3,97	4,000	0,70	0,75	— 0,05	— 0,08
8	4,14	4,125	1,01	0,98	+ 0,03	+ 0,07

Tabelle VIII.

Wasser, $C_R = 285$ cm.

F	C_R beob.[1])	C_R ber.[1])	$100 \frac{C_{v_0} - C_{v_0}}{C_{v_0}}$ beob.	$100 \frac{C_{v_0} - C_v}{C_{v_0}}$ ber.	Δ Proz. quadr.	Δ' Proz. linear.
0	—	2,410	--	0,00	—	—
2	2,505	3,532	0,11	0,14	— 0,03	0,00
3	2,695	2,686	0,33	0,32	+ 0,01	— 0,02
3,5	2,82	2,785	0,47	0,43	+ 0,04	0,00
4	2,94	2,900	0,61	0,57	+ 0,04	+ 0,03
4,5	2,995	3,028	0,68	0,72	— 0,04	— 0,02

1) Die Angaben der Spalten 2 und 3 beziehen sich auf die Teilung des Vergleichskondensators. Vgl. Anm. zur Tabelle I.

man die Werte C_v der Tabellen II—V als Funktion der Quadrate der Funkenspannung, die der Feldstärke proportional ist, dar, so erhält man die Figuren 3—6, und zwar sind in Fig. 4—6 die in den Tabellen III—V angegebenen Mittelwerte eingetragen, während in Fig. 3 zur Illustration der Genauigkeit der Einzelmessungen nochmals sämtliche beobachteten Einzelmessungen der Tabelle II angegeben sind. Die Geraden in den Figuren lassen erkennen, daß in der Tat innerhalb der Fehlergrenzen (Maximale Fehler der Mittelwerte kleiner als 1 Promille) die von Debye geforderte Abhängigkeit der DK von der Feldstärke vorhanden ist. Zur besseren Übersicht sind in den Tabellen VI—VIII die Ergebnisse nochmals zusammengestellt. In der ersten Spalte sind die Funkenlängen, in der zweiten

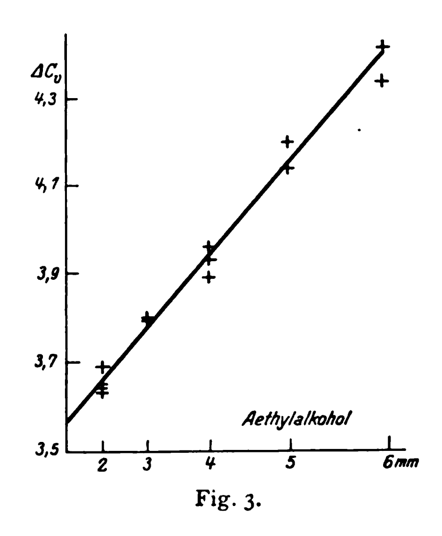


Fig. 3.

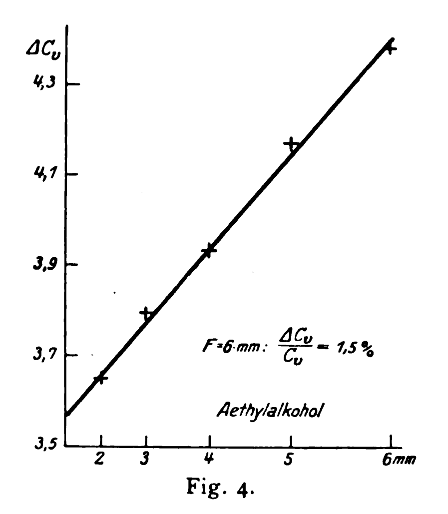


Fig. 4.

die beobachteten Kapazitätsänderungen und in der dritten Spalte die nach der Formel:

$$C_{vF} = C_{v_0}(1 - \alpha F^2) \quad (1)$$

berechneten Werte eingetragen. Die beiden folgenden Spalten enthalten dann die beobachteten und berechneten Werte für die relativen Änderungen der Kapazitäten oder der DK. In der vorletzten Spalte sind die Abweichungen $\varDelta$ der berechneten von den beobachteten Werten in Prozenten angegeben.

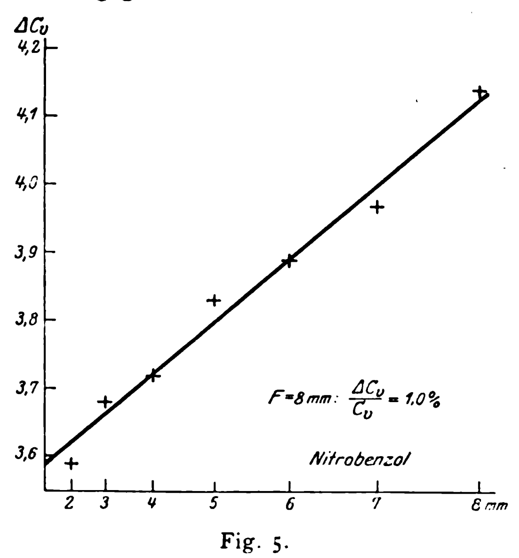


Fig. 5.

Man sieht, daß die Werte $\varDelta$ immer durchaus innerhalb der Fehlergrenze der Meßgenauigkeit liegen. Da die Gesamtänderungen der DK außerordentlich klein sind, liegt die Vermutung nahe, daß auch eine Darstellung der beobachteten Werte in der Form:

$$C_{vF} = C_{v_0}(1 - \beta \cdot F) \quad (2)$$

möglich wäre. In der letzten Spalte der Tabellen VI—VIII sind deshalb die den Werten $\varDelta$ entsprechenden Werte $\varDelta'$, die nach der Formel (2) sich ergeben, dargestellt. Man sieht, daß beim Alkohol, wo die gemessenen Änderungen am größten sind, eine solche Darstellung innerhalb der Fehlergrenzen nicht möglich ist, ebenso zeigten wiederholte Messungen am Nitrobenzol[1]), daß die Werte $\varDelta'$ systematisch von den Beobachtungen abweichen[2]), so daß auch hier eine lineare Darstellung unmöglich ist. Nur für Wasser sind die Gesamtänderungen $\frac{\varDelta \varepsilon}{\varepsilon}$ so klein, daß eine Entscheidung zwischen den beiden Formeln (1) und (2) nicht getroffen werden kann. Fig. 7

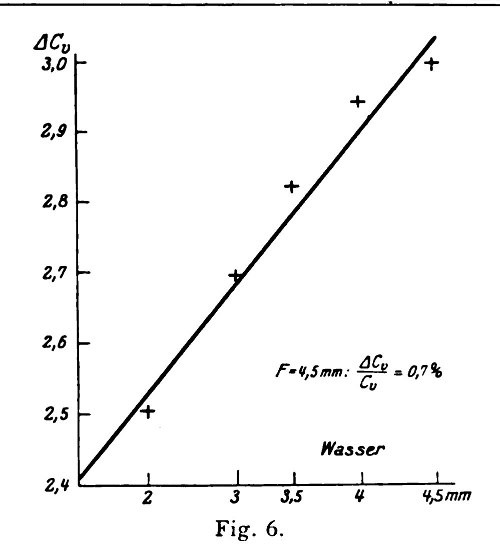


Fig. 6.

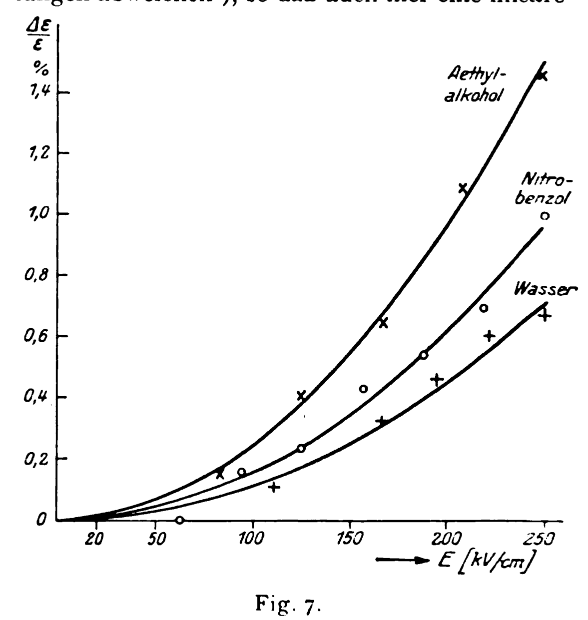


Fig. 7.

1) In dieser Arbeit sind nur einzelne Beispiele von Meßreihen aufgeführt.

2) Die Werte $\varDelta'$ für große und kleine Werte von F sind stets positiv, die mittleren Werte stets negativ.

zeigt nochmals die Ergebnisse der Messungen, aus denen ohne weiteres ersichtlich ist, daß die Debyesche Dipoltheorie qualitativ durchaus in Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen Resultaten sich befindet. Als Abszissen sind in dieser Fig. direkt die „mittleren Feldstärken", die für die Versuche maßgebend sind, und deren Berechnung aus der Funkenspannung in der früheren Arbeit gegeben worden ist[1]), aufgetragen. Aus Fig. 7 geht hervor, daß der Effekt nicht, wie man etwa erwarten könnte, mit wachsender DK zunimmt, sondern im Gegenteil abnimmt[2]). Die Absolutwerte des Effektes sind außerordentlich klein, für Wasser z. B. findet sich für 100000 V/cm: $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 0{,}7$ Proz. Mit der früher beschriebenen Anordnung, die nur auf 5 Promille genau zu messen gestattete, konnte dieser Effekt nicht gefunden werden[3]).

Die sehr kleinen Absolutwerte $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$ und auch die Abnahme des Effektes mit wachsender DK lassen vom Standpunkt der Dipoltheorie unbedingt auf Assoziation der Moleküle schließen. Daher ist auch eine Berechnung des Dipolmomentes aus den Messungen nicht möglich, und andererseits muß die Berechnung des zu erwartenden Effektes zu anderen Werten führen, als sie sich aus den Beobachtungen ergeben[4]).

1) Vgl. J. Malsch, Ann. d. Phys. **84**, 867, 1927.

2) Vor kurzem hat Wo. Ostwald (Zeitschr. f. Kolloidchemie **45**, 78, 1928) in einer sehr reichhaltigen Zusammenstellung auf den Zusammenhang zwischen Molekularpolarisation und DK verschiedener Substanzen aufmerksam gemacht. Trägt man die Molekularpolarisation als Funktion der Dielektrizitätskonstante auf, so findet man, daß die so erhaltene „Mittelwertskurve" ein Maximum für Werte der DK besitzt, die ungefähr zwischen $\varepsilon = 10$ und $\varepsilon = 20$ liegen und die nach der Seite der größeren DK hin wieder langsam abfällt. Die Vermutung, daß zwischen den oben angeführten Beobachtungen und dem Verhalten der Molekularpolarisation ein Zusammenhang besteht, liegt daher nahe.

3) Vgl. J. Malsch, Ann. d. Phys. **84**, 879, 1927.

4) Eine solche Berechnung liefert für Wasser für 100000 V/cm einen Wert, der etwa 100fach größer ist als der beobachtete Wert. Meine früheren theoretischen Berechnungen, die in der Hauptsache zur Orientierung über die Größenordnung der etwa zu erwartenden Effekte dienen sollten, sowie der Schlußsatz des ersten Absatzes der Zusammenfassung meiner Arbeit, welcher lautet: „Diese Ergebnisse sind mit der Debyeschen Theorie nicht zu erklären" haben zu dem Mißverständnis Anlaß gegeben: ich halte die Dipoltheorie als solche nicht auf die von mir untersuchten Flüssigkeiten für anwendbar. Indessen habe ich die Möglichkeit, mit Hilfe von Assoziationserscheinungen die früheren Resultate durch die Dipoltheorie zu erklären, schon auf S. 877 meiner Arbeit mit folgenden Worten ausgesprochen: „Wie die Versuche auf Grund der Dipoltheorie Debyes theoretisch zu deuten wären, ließe sich vielleicht durch eine gründliche theoretische Untersuchung besonders der Assoziationserscheinungen und der Art, wie die Dipole sich zusammenschließen, diskutieren. Selbstverständlich kann bei höheren Feldstärken der Debyesche Effekt sehr wohl noch eintreten."

Debyes Formeln für Flüssigkeiten enthalten bekanntlich neben der einen Voraussetzung über die Dipolstruktur der Molekeln, noch die andere davon unabhängige Voraussetzung, daß die gegenseitige Wirkung der Moleküle mit Hilfe der Clausius-Mosottischen Hypothese berechnet werden könne. Auf Grund dieser zweiten Annahme folgt für die von mir untersuchten Flüssigkeiten ein sehr hoher Wert für das innere Feld und diese Besonderheit ist maßgebend dafür, daß die Formeln in unserem Falle einen Effekt berechnen lassen, der viel größer ist als der Sättigungseffekt in normalen Flüssigkeiten, wie z. B. Äthyläther. Es wird also empfehlenswert sein, die Tatsache, daß nach meinen Messungen eine so große Verstärkung des Effektes als rechnerisch erwartet wird, nicht besteht, darauf zurückzuführen, daß die Berechnung des inneren Feldes im Falle der von mir untersuchten, stark assoziierten Flüssigkeiten, in anderer Weise erfolgen muß, während die Dipoltheorie als solche nicht berührt wird. Außerdem kann sich die Stärke der Assoziation mit der Feldstärke ändern.

5. Zusammenfassung.

Die Abhängigkeit der DK von der elektrischen Feldstärke wird für Wasser, Nitrobenzol und Alkohol untersucht. Es zeigt sich, daß eine Darstellung in der Form:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - a F^2)$$

möglich ist, in Übereinstimmung mit der Debyeschen Theorie. Der Effekt ist um so größer, je kleiner die DK ist, so daß vom Standpunkt der Dipoltheorie aus auf Assoziationserscheinungen geschlossen werden muß. Der Absolutwert des Effektes beträgt bei etwa 250000 V/cm für Wasser: $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 0{,}7$ Proz., für Nitrobenzol $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 1{,}0$ Proz. und für Alkohol $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 1{,}5$ Proz. Nach der einfachen Debyeschen Theorie (ohne Berücksichtigung von Assoziationserscheinungen) wären wesentlich größere Werte zu erwarten.

Herrn Professor Försterling, Köln, der mir die Mittel seines Instituts in weitestem Maße zur Verfügung stellte, möchte ich ebenso wie der Helmholtzgesellschaft für die Überlassung eines großen Funkeninduktors meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Köln, Institut für theoretische Physik der Universität, den 15. Juli 1928.

A. Nikuradse (München), Elektrizitätsleitung und Entladung in dielektrischen Flüssigkeiten.

Inhalt: Ausbildung der Stromspannungsverhältnisse und die darauf folgende Entladung. Ionenleitung und Ionenkonstanten. Zusammenhang zwischen $J=f(U)$-Kurven, Durchschlagsspannung, Zähigkeit, Temperatur und Druck.

Bei diesem Bericht soll es weniger darauf ankommen, eine Theorie der Elektrizitätsleitung und der Entladungen in dielektrischen Flüssigkeiten darzulegen, als gesicherte experimentelle Tatsachen mitzuteilen, weil es gerade bei dielektrischen Flüssigkeiten sehr schwierig ist, reproduzierbare Bedingungen zu schaffen. Für das exakte Studium der elektrischen Verhältnisse

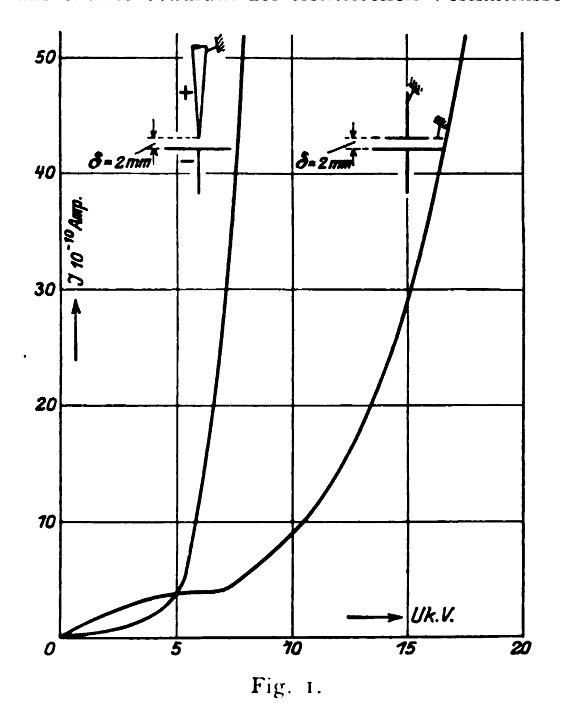


Fig. 1.

in dielektrischen Flüssigkeiten muß man diese Flüssigkeiten sehr sorgfältig reinigen. Durch Stromdurchgang erzielt man die Reproduzierbarkeit der $J=f(U)$-Kurven, ohne die jede Messung hinfällig ist. Bei nicht genügend gut gereinigten oder ungereinigten Flüssigkeiten sieht die Stromspannungscharakteristik anders aus, als bei sehr gut gereinigten. Im ersten Fall tritt kein Sättigungsstrom auf, dank der elektrolytischen Beimengungen (Elektrolyt). Dagegen in extrem gereinigten Flüssigkeiten tritt die Sättigung des Stromes mit der Spannung auf; sie stehen in ihrem elektrischen Verhalten den dichten Gasen näher. Die $J=f(U)$-Kurve bei Plattenelektrodenanordnung zeigt (Fig. 1), daß im Gebiet der ganz niedrigen Feldstärken in extrem gut gereinigtem Mineralöl das Ohmsche Gesetz erfüllt ist. Bei weiterer Steigerung der Feldstärke wächst der Strom langsamer, bis er bei noch weiterer Spannungszunahme konstant wird (Sättigungsstrom). Wird die Feldstärke noch weiter gesteigert, so wächst der Strom mit der Spannung sehr stark. Kurz vor der Entladung steigt der Strom oft auch ohne Spannungssteigerung an, worauf die Entladung erfolgt. (Bei Elektrodenanordnung Spitze gegen Platte zeigt sich diese Erscheinung nicht. Ist die Spitze sehr scharf, so läßt sich die Glimmspannung messen.) Die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes und das Auftreten des Sättigungsstromes lassen sich ionentheoretisch gut deuten, analog wie in Gasen. Bis zu Feldstärken einschließlich des Sättigungsstromgebietes spielen die primären Ionen, die durch spontane Ionisation und radioaktive Strahlen gebildet werden, eine Rolle. Erst bei Feldstärken über dem Sättigungsstromgebiet werden neue, sekundäre Ionen ins Leben gerufen, die den starken Anstieg des Stromes mit der Spannung bei diesen hohen Feldstärken verursachen. Kurz vor der Entladung können sich die Ionen auch ohne Spannungssteigerung vermehren und dadurch vielleicht auch die Entladung einleiten; denn es erfolgt ja unmittelbar darauf die Entladung. Die Beziehung zwischen Ionenstrom und Spannung bei den Feldstärken über dem Sättigungsstromgebiet läßt sich durch den Ausdruck

$$J = A \cdot e^{CU} = f(\delta) \cdot e^{CU}$$

darstellen. In der logarithmischen Darstellung $\lg J = f(U)$ ergeben diese Kurven Gerade, die durch Veränderung der Elektrodenentfernung δ parallel zueinander verschoben werden (Maßstabänderung). Durch Veränderung der Elektrodenentfernung δ wird der Faktor A beeinflußt $A = f(\delta)$. Die Konstanten A, C kann man zahlenmäßig bestimmen. Bemerkenswert ist dabei, daß die Höhe der Leitfähigkeit für die Entladungsspannung keine Rolle spielt, soweit sie das Feld nicht wesentlich verzerrt. Das besagen die folgenden experimentellen Ergebnisse (Tabelle):

1. Durch Reinigung der Flüssigkeit wird ihre Leitfähigkeit λ herabgesetzt, zugleich die Durchschlagsspannung U_d gesteigert, aber U_d steigt nicht in demselben Maße wie λ fällt; und umgekehrt durch Verunreinigung oder elektrolytische Zusätze wird die Leitfähigkeit gesteigert und zugleich die Entladungsspannung herabgesetzt, aber bei weitem nicht in demselben Maß.

2. Mit der Temperatur T steigt die Leitfähigkeit; auch U_d steigt in vielen Ölsorten zwischen 20⁰ und 60—80⁰ C.



Tabelle.

Einfluß von	auf Leitfähigkeit λ	auf Durchschlagspannung U_d	auf Ionenkonstanten
Reinigung	verkleinert	vergrößert	————
Stromdurchgang	verkleinert	vergrößert, aber nicht in demselben Maß wie λ fällt	————
Feuchtigkeit und Verunreinigung der Flüssigkeit und der Elektroden	vergrößert	verkleinert	————
Polarität bei $\vee^{+}$		wächst etwas mit der Temperatur	————
Anmerkung:	$\lambda^{+} < \lambda^{-}$	$U_d^{+} > U_d^{-}$	
Bei $+\vee^{+} \rightarrow \lambda^{+}$; U_d^{-}	Durch viele Durchschläge ändert sich die Polarität		
$-\vee^{+} \rightarrow \lambda^{-}$; U_d^{-}	$\lambda^{+} > \lambda^{-}$	$U_d^{+} < U_d^{-}$	
	hängt vom Spitzenelektrodenmaterial ab		
Elektrodenmaterial	$\lambda_{Ag} < \lambda_{Fe}$	$U_{d\,Ag} > U_{d\,Fe}$	
Temperatur	vergrößert Temperaturkoeff. positiv	Bei vielen Transformatorenölen gibt es zwischen 20° und 120° C ein Maximum. Beim Hexan, Hylol und einigen Ölen fällt U_d zwischen 20° und 120° C; kein Maximum	abhängig
Druck zwischen 760 und 3 mm Hg bei	konstant	steigt mit dem Druck	unabhängig
Leitfähigkeit	————	Bei konstanter Temperatur beobachtet man die Zunahme von U_d mit abnehmendem λ, aber bei weitem nicht in demselben Maß wie λ abnimmt	
		Mit steigender Temperatur steigt λ; gleichzeitig beobachtet man bei vielen Ölsorten, daß U_d zwischen 20° und (60—80° C) wächst	
		λ ist mit dem Druck konstant; U_d steigt mit dem Druck	

3. Die Leitfähigkeit erwies sich unabhängig vom Druck p zwischen 3 und 760 mm Hg, dagegen steigt die Entladungsspannung U_d mit dem Druck.

Die Tatsache, daß die Stromstärke auf die Entladungsspannung keinen Einfluß hat, darf uns nicht zu der Annahme verleiten, daß die Ionisierung mit dem Entladungsphänomen nichts zu tun hätte, denn alle charakteristischen Erscheinungen, die man durch Aufnahme der $J = f(U)$-Kurven bei konstanter Temperatur und konstantem Druck feststellt, sind auch bei den Entladungsspannungen vorhanden: Polarität, Umkehrung der Polarität, Einfluß des Reinheitsgrades der Elektroden und der Flüssigkeit, Einfluß des Elektrodenmaterials usw. (siehe Tabelle). Man beobachtet, wenn die Leitfähigkeit verkleinert wird, so wird die Entladungsspannung U_d größer (wenn auch nicht in demselben Maß) und umgekehrt. Aber das gilt nur bei $T = \text{const}$ und $p = \text{const}$; denn mit T wird sowohl λ als auch U_d (bis 60°—80° C) größer (in einigen Ölen) und mit p (zwischen 760° und 3 mm Hg) wächst U_d, während λ konstant bleibt.

An dieser Stelle soll noch gezeigt werden, wie Durchschlagsspannung und Zähigkeit von der Temperatur abhängen (Fig. 2).

Die Stromtemperaturkurven, die bei verschiedenen Spannungen (von 2 KV bis zu Spannungen kurz vor der Entladung, etwa 65 KV) aufgenommen worden sind (Fig. 3), zeigen, daß der Temperaturkoeffizient $\frac{d\lambda}{dT} \cdot \frac{1}{\lambda_{20^\circ C}}$ zwischen 20° und 115° C bei allen Spannungen positiv ist. Die Abnahme der Zähigkeit $-\frac{d\eta}{dT}$ ist in niedri-

gen Temperaturbereichen groß (Fig. 4); sie wird mit steigender Temperatur kleiner, bis sie bei ganz hohen Temperaturen in der Nähe von 100° C verschwindet; $\left(-\frac{d\eta}{dT}=0\right)$. Infolge der Zähigkeitsabnahme wächst die Ionenbeweglichkeit, was eine Leitfähigkeitszunahme mit T

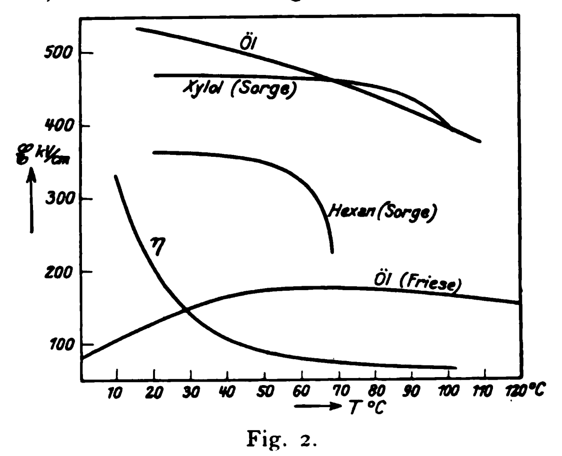


Fig. 2.

verursacht. Aber die starke Zunahme der Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen, bei denen $-\frac{d\eta}{dT}=0$ oder sehr klein ist, kann man durch Vergrößerung der Ionenbeweglichkeit nicht erklären, vielmehr haben die Experimente ergeben,

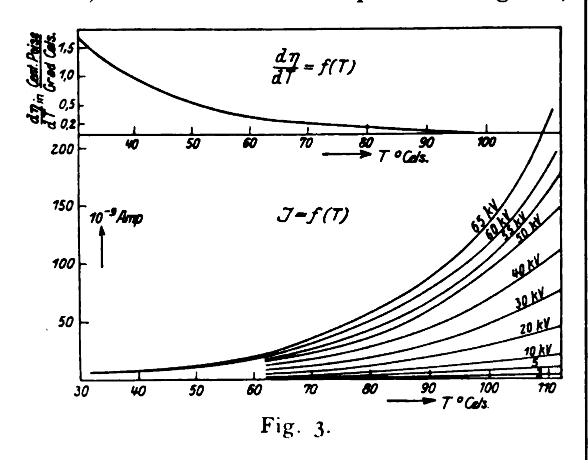


Fig. 3.

daß die Ionenbildungsgeschwindigkeit in diesem Temperaturbereich stark wächst. Eine hohe Temperatur wirkt also als Ionisator. Die $J=f(T)$-Kurven werden durch den Ansatz

$$J=\mathfrak{G}\cdot e^{\alpha\cdot T}=f(U)\cdot e^{\alpha\cdot T}$$

wiedergegeben. Auch die Strom-Temperaturkurven sind in logarithmischer Darstellung $\lg J=f(T)$ Gerade, die durch Variation der angelegten Spannung parallel zueinander ver-

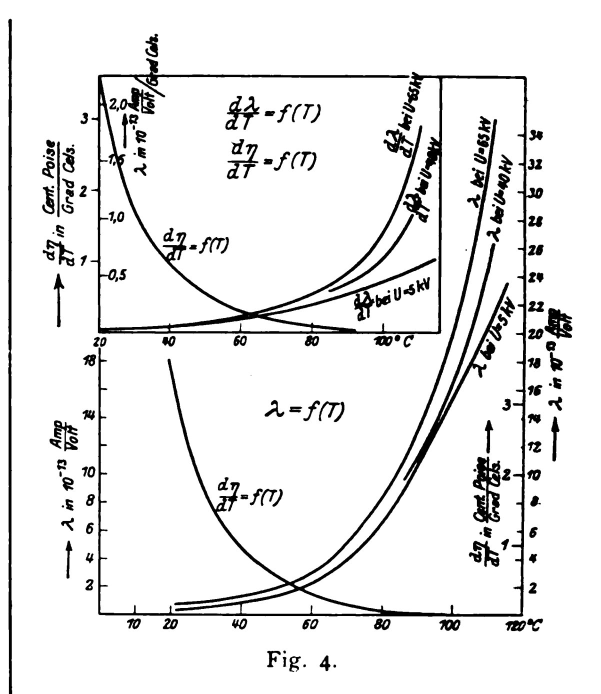


Fig. 4.

schoben werden $\mathfrak{G}=f(u)$. Es gilt $\frac{dJ}{J}=\alpha\cdot dT$ oder $\frac{dJ}{dT}=\alpha\cdot J$. Die Höhe der angelegten Spannung bestimmt den Koeffizienten, er wächst mit der Spannung.

In sehr gut gereinigtem Mineralöl sind die Ionenkonstanten bei spontaner Ionisation, bei konstanter Temperatur und konstantem Druck bestimmt und dann ihre Abhängigkeit vom Druck

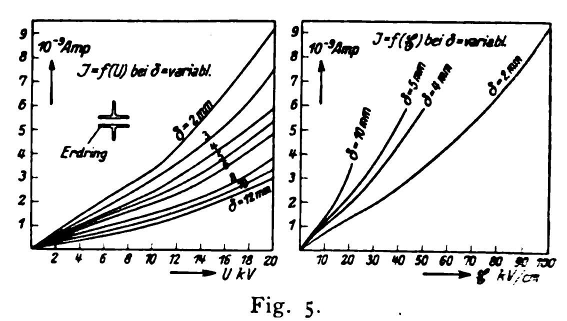


Fig. 5.

und Temperatur studiert worden. Ionenbildungsgeschwindigkeit, spezifische Ionengeschwindigkeit, der Rekombinationskoeffizient der Ionen, die Dissoziationskonstante und Äquivalentleitfähigkeit haben sich vom Druck zwischen 760° und 3 mm *Hg* unabhängig ergeben. (Die Elektroden lagen tief im Öl.) Das über der Öloberfläche erzeugte Vakuum hat auf die Flüssigkeitsmoleküle wahrscheinlich keinen Einfluß (inkompressibel). Diese Konstanten sind von der Temperatur stark abhängig.

Hält man die Feldstärke 𝔈 konstant und vergrößert man die Elektrodenentfernung δ, so wächst der Strom J bei niedrigen Feldstärken bei weitem nicht in demselben Maß, wie das Volumen zwischen den Elektroden (Fig. 5). Den Elektroden ist ein gewisser Anteil des Stromes zuzuschreiben, der mit δ etwa konstant bleibt, ausgenommen ganz kleine δ. Der andere Teil von J wächst mit der Elektrodenentfernung etwa proportional. Über die zahlenmäßige Trennung der beiden Stromkomponenten, ferner über die Fragen, welche Rolle den Elektroden bei dem Stromleitungs- und Entladungsmechanismus zuzuschreiben ist, über den Stromleitungsmechanismus oberhalb des Sättigungsstromgebietes und über den Entladungsmechanismus wird gegenwärtig in dem von Herrn Prof. Dr. W. O. Schumann geleiteten Elektrophysikalischen Laboratorium der Technischen Hochschule München gearbeitet.

Zusammenfassung.

Durch Erforschung der Ausbildung der Stromspannungsverhältnisse von niedrigen Spannungen bis zur Entladung, insbesondere kurz vor der Entladung wurde versucht, einen experimentellen Beitrag zur Klärung der Entladungsphänomene zu liefern. Es wurde studiert, welcher Zusammenhang zwischen Stromspannungskurven (Leitfähigkeit), Zähigkeit, Temperatur, Druck und Durchschlagsspannung besteht. Im extrem gereinigten Mineralöl (Transformatorenöl!) sind die Ionenkonstanten bei spontaner Ionisation bestimmt worden. Die bisherigen Arbeiten untersuchten die Leitfähigkeit der dielektrischen Flüssigkeiten nur beim Normaldruck. Hier wurde studiert, in welcher Abhängigkeit die Leitfähigkeit und Ionenkonstanten von Temperatur und Druck stehen.

BESPRECHUNGEN.

J. Stark, Die Axialität der Lichtemission und Atomstruktur. 8°. XII u. 124 S. Mit 11 Tafeln und 47 Figuren. Berlin, Polytechnische Buchhandlung A. Seydel. 1927. RM. 6.—.

In der vorliegenden Schrift nimmt J. Stark, der durch seine atomphysikalischen Arbeiten (Dopplereffekt an Kanalstrahlen, Starkeffekt) rühmlichst bekannte Autor Stellung zu den modernen Atomtheorien und entwickelt seine eigenen Anschauungen in experimenteller und theoretischer Hinsicht. Besonders bemerkenswert wird allen, die die frühere schroffe Ablehnung der Bohrschen Theorie, überhaupt der Quantentheorie, durch den Verfasser kennen, die Tatsache erscheinen, daß J. Stark hier seinen Standpunkt wesentlich modifiziert, eine neue Quantentheorie des Strahlungsvorgangs und der emittierten Strahlung selbst formuliert und durch Experimente zu erhärten sucht. Ausgangspunkt seiner Überlegung ist etwa folgender: Die sichtbare Strahlung muß in Polarisation, Intensitätsverteilung, Frequenz bzw. Serienbau Rückschlüsse gestatten auf die Struktur des Atomfeldes, aus dem die Emission stammt. Die raumzeitliche Änderung des „Atom-Ion-Feldes" ist der Ursprung aller von uns bemerkbaren Linienspektren und ihrer Gesetzmäßigkeiten, wie wir sie am unbeeinflußten Atom oder einem durch elektrische und magnetische Felder gestörten Atom beobachten. Die Schwankungen des „Atom-Ion-Feldes" zwischen zwei Zustandsflächen (Bohrsche Elektronenbahnen) und der Übergang von einem energetisch höheren zu einem tieferen Energieniveau führen zur Emission der Linien bestimmter Frequenz. Eigene und fremde Beobachtungen am Starkeffekt geben Anlaß zur Feststellung, daß bestimmte Atome untereinander Ähnlichkeiten der Struktur, also des Aufbaues zeigen müssen, die zu experimentellen Forschungen anregen. Stark schließt aus einem Vergleich zwischen den Serien der Elemente Helium, Lithium, Quecksilber mit den Effektkomponenten in der Balmerserie, daß die genannten Elemente „Atomionfelder" mit Achsen rotatorischer Symmetrie besitzen, die aber in bezug auf ihre Drehachsen einseitig ein dissymmetrisches „Atom-Ion-Feld" ergeben. Die Untersuchungen hat der Autor gemeinsam mit den Herren Döpel und v. Hirsch ausgeführt, befindet sich aber mit der Deutung der Experimente nicht völlig mit ihnen in Übereinstimmung. Die Versuche sind an Kanalstrahlen angestellt, knüpfen zum Teil an ältere Arbeiten von W. Wien und seinen Schülern an (Abklingleuchten der Kanalstrahlen), zum Teil auch an frühere Polarisationsbeobachtungen und Intensitätsmessungen an den Kanalstrahlen. Hervorzuheben ist, daß Stark hier erstmalig seine Auffassung fallen läßt, die er lange Jahre hindurch verteidigt hat, daß die positiven Atomionen die Träger des Dopplereffekts seien. Bei der Untersuchung der Polarisation im Abklingleuchten der Kanalstrahlen folgert der Verfasser aus den erhaltenen Schwärzungskurven, daß die Lichtanregung bei dem Kanalstrahlleuchten sich aus zweierlei Arten von Emission zusammensetzt: Einem Stoßleuchten unmittelbar nach dem Zusammenprall zweier Atome und einem Nach- oder Phosphoreszenzleuchten, das längere Zeit nach dem Zündstoß einsetzt, eine Zeitlang anhält und normalerweise unpolarisiert ist — im Gegensatz zu ersterem. Die Versuche sind in der Hauptsache am Wasserstoff und Helium angestellt, zum Teil in der Weise, daß Kanalstrahlen des einen Gases in das andere Gas eintreten, um für sich ruhende und bewegte Emission prüfen zu können. Es wurden dergestalt verschiedene Polarisationsverhältnisse für die Balmerserie des Wasserstoffs und verschiedene Serien von Ortho- und Parahelium ermittelt. An den gleichen Gasen wurden für die einzelnen Serienglieder nach einer geschickten Untersuchungsmethode die Intensitätsverhältnisse der Linien unter verschiedenem Azimut gegen die Kanalstrahl-Bewegungsrichtung bestimmt, d. h. sie wurden unter den Winkeln 45°, 90° und 135° miteinander verglichen und aus den

gemessenen Unterschieden wurde die „Axialität der Intensität" fixiert. Die spektrographischen Aufnahmen wurden mit verschiedenen Prismenspektrographen erhalten und die Spektrogramme teils okular mit dem Hartmannschen Mikrophotometer, teils mit Registrierphotometern ausgewertet. Es versteht sich von selbst, daß bei den Methoden der Messung der photographischen Intensität, die Fehlerquellen durch Polarisation der Apparatur, durch Schwärzungsmessung usw. nach Möglichkeit ausgeschaltet, und soweit trotzdem vorhanden, berücksichtigt und diskutiert wurden. Einzelheiten der interessanten Versuche im Auszug wiederzugeben, würde zu weit führen, ebenso wie Einzelheiten des Atomaufbaues nach der Starkschen Auffassung aus „Archionen" und Valenzelektronen bestimmter Eigenstruktur sich mit knappen Zügen nicht wiedergeben lassen und leicht zu schiefer Auffassung führen könnten. Nicht unerwähnt soll aber dabei bleiben, daß der Verfasser zu einer speziellen Deutung der Planckschen Konstanten kommt, deren Universalität sich in den Strahlungsgesetzen und Serienformeln gezeigt hat, indem er dem positiven „Archion" (Baustein des Atomkerns) einen Drehimpuls $\frac{h}{2\pi}$ zuschreibt. Mit Folgerungen und Ausblicken für künftige Forschungen, die in einem Schlußkapitel über die Lichtquanten, d. h. die elektromagnetischen Energiewirbel, zusammengestellt werden, schließt die für den Physiker wie Chemiker gleich interessante Broschüre.

W. Steubing.

R. Haußner, Analytische Geometrie der Ebene. (Sammlung Göschen Bd. 65.) Kl. 8⁰. 164 S. Mit 60 Figuren. Berlin und Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1928. Geb. RM. 1.50.

Diese überaus klar und verständlich geschriebene Einführung in die analytische Geometrie, behandelt zunächst Koordinaten auf der Geraden und in der Ebene und bringt sodann der Reihe nach die analytische Behandlung der Geraden, der Kurven 2. Ordnung, des Punktes und der Kurven 2. Klasse; und zwar nicht nur die allgemeine Theorie, sondern auch zahlreiche spezielle Sätze. Also eine Fülle von Stoff, auf kleinem Raum. Die Lektüre erfordert nur elementarste mathematische Vorkenntnisse. Referent kann das Büchlein dem Physiker als treffliche Einführung in die oben angegebenen Gebiete nur aufs wärmste empfehlen.

Haupt.

K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. 2. Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. (Sammlung Göschen Bd. 878.) Kl. 8⁰. 143. S. Berlin und Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1928. Geb. RM. 1.50.

Die höchst verdienstvolle Aufgabensammlung bietet dem mathematisch interessierten Physiker ein sehr empfehlenswertes Hilfsmittel, um sich Methoden der höheren Funktionentheorie anzueignen; von Interesse dürfte für ihn sein, daß u. a. ein Kapitel der konformen Abbildung gewidmet ist. Das Bändchen enthält zugleich die Lösungen aller Aufgaben.

Haupt.

H. Semiller, Vorschule der Chemie und Mineralogie 6. Aufl. 8⁰. X und 98 S. Mit 4 Abb. u. 91 Fig. Berlin, Weidmannsche Buchh. 1927. Geb. M. 2.60.

Das gut ausgestattete Lehrbuch ist als Teil III des Lehrbuchs der Physik von Börner-Semiller zum Gebrauch an den Mittelschulen bestimmt und nach den neuen Richtlinien bearbeitet. Nach einführenden Betrachtungen über die Verbrennung, die Luft und das Wasser, werden die Metalloide und die Metalle, sowie einige organische Verbindungen und physiologische Prozesse behandelt; theoretische Abschnitte sind eingeschoben. Die Darbietungen des Lehrstoffs schließen sich nach den Grundsätzen des Arbeitsunterrichts, soweit möglich, an gut beschriebene „Versuche" an, deren „Ergebnis" kurz zusammengefaßt und durch „Mitteilungen" ergänzt wird.

Die logische Durcharbeitung und der methodische Aufbau lassen leider nicht wenig zu wünschen übrig. Die Ausdrucksweise ist oft unkorrekt; die als „Ergebnis" bezeichneten Abschnitte bringen allzu häufig Tatsachen, die sich niemals aus den angeführten Versuchen ergeben können, und sind auch sonst nicht immer Musterbeispiele für „sorgfältiges Prüfen" und „gewissenhaftes Folgern"; die erste Einführung der wichtigen chemischen Grundbegriffe „Element", „Säure", „Base", „Salz", der chemischen Formeln und Gleichungen könnte methodisch viel besser vorbereitet sein; eine klare Einführung der Ausdrücke „Reduktion" und „Neutralisation" vermißt man überhaupt, ebenso wie kurze Angaben über die wichtigsten Eigenschaften der Schwermetalle und vieler Mineralien und manches andere. Ob unter diesen Umständen das Ziel, dem das Buch dienen will, „die logisch bildende Wirkung des chemischen Unterrichts zu erhöhen", erreicht werden kann, erscheint fraglich.

Aign.

A. Nádai, Der bildsame Zustand der Werkstoffe. 8⁰. 271 S. Berlin, J. Springer. 1927. M. 15.—, geb. M. 16.50.

So eingehend bisher die elastischen Formänderungen der Werkstoffe erforscht worden sind, fehlte eine Zusammenfassung auf dem Gebiete der plastischen Formänderungen. A. Nádai hat es verstanden, in der vorliegenden Schrift eine sehr anschauliche Darstellung dieses gerade jetzt so wichtig werdenden Gebietes zu geben. Die bildsamen Formänderungen der Werkstoffe werden in größtem Umfang im Walzwerk, in der Schmiede und bei der Fertigung der Bauteile und auch der Gebrauchsgegenstände angewendet, doch sind die Erforschungen der Gesetzmäßigkeiten noch nicht soweit gediehen, als es wünschenswert wäre. Durch die Forschungsarbeiten der Metallkunde, wodurch die so wichtigen Zusammenhänge zwischen den mechanischen, chemischen, thermischen und strukturellen Eigenschaften erhellt wurden, kamen auch die grundlegenden Fragen über den bildsamen Zustand der Werkstoffe in Fluß.

In 33 kleineren Abschnitten wird in klarer und übersichtlicher Weise wenigstens das Grundlegende auf diesem Gebiete vermittelt und A. Nádai kann sich dabei vielfach auf eigene und reichhaltige Forschungen stützen, berücksichtigt aber auch die zahlreichen und vielfach sehr verstreuten Arbeiten anderer Forscher. In der vorliegenden Besprechung kann nicht auf die vielen Einzelheiten eingegangen werden. Bei der großen Bedeutung der Fließvorgänge an

Einkristallen, wäre es wohl wünschenswert, wenn diese hier eingehender behandelt worden wären, denn sie werden voraussichtlich den Schlüssel liefern, die plastischen Formänderungen rechnerisch erfassen zu können. Auch einige Hinweise auf die Zusammenhänge zwischen dem Raumgitteraufbau der Kristalle und deren mechanischen Eigenschaften, z. B. daß die am dichtesten besetzten Netzebenen den Gleit- und Spaltflächen entsprechen usw., wäre hier wohl angebracht gewesen. Auch die Härteunterschiede in Abhängigkeit von der Orientierung u. a. m. aus der Kristallphysik. Die Erforschung der Anordnung der Atome im Raumgitter dürfte auch hier wesentliche Aufklärungen bringen. Auf S. 21 werden Kalkspatkristalle fälschlich als rhombisch, statt rhomboedrisch bezeichnet; die grundlegenden Forschungen über die Kristalldeformation von E. Reusch in Tübingen wurden zu erwähnen vergessen. Dies soll nur nebenbei bemerkt werden, denn es ist hier unmöglich, das außerordentlich große und reichhaltige Material, einzeln kritisch zu beleuchten. In 10 Jahren wird die Erforschung der Naturkräfte auch auf diesem Gebiete weit vorangekommen sein, und das vorliegende, ebenso fleißige wie geschickt behandelte Werk, das den heutigen Stand unserer Kenntnisse über den bildsamen Zustand der Werkstoffe zusammenfaßt, erscheint mir berufen, die Grundlagen in ausgezeichneter Weise zu vermitteln. Die durchaus anschaulichen Darstellungen werden durch 298 vorzügliche Textabbildungen in wertvollster Weise ergänzt, ja man kann sagen, diese bilden neben den Formeln den wichtigsten Teil des vorliegenden Buches, das der Verlag in der bekannten, sorgfältigen Weise ausgestattet hat. Leider fehlt ein Namen- und Sachverzeichnis. M. v. Schwarz (München).

H. Koschmieder, Methoden und Ergebnisse definierter Luftdruckmessungen. Forschungsarbeiten des Staatl. Observatoriums Danzig. Herausgegeben von dessen Direktor H. Koschmieder. Heft 1. 39 S. Mit 21 Fig. Druck von A. W. Kafemann, Danzig. Selbstverlag des Observatoriums. 1928.

Die Luftdruckbeobachtungen auf den Bergstationen zeigen gegenüber den statisch auf das obere Niveau reduzierten Luftdruckwerten der Basisstationen einen Unterdruck, der mit der Windgeschwindigkeit stark zunimmt; als Ursache dieser Erscheinung wurde gewöhnlich eine Saugwirkung der Strömung auf das Gebäude angegeben. In der vorliegenden Arbeit hat K. durch systematische Untersuchungen an der Schneekoppe eine Klärung dieser Frage gebracht.

Ein von K. konstruiertes Druckabnahmegerät gestattet den Betrag der „Gebäudestörung" zu messen, d. h. die Druckdifferenzen zwischen der Außenluft an verschiedenen Stellen in der Nähe des Gebäudes und dem Druck im Innern desselben. Die Versuche zeigten, daß eine Gebäudestörung an der Schneekoppe nur bei Winden zwischen WSW und NNW auftritt, bei SW dagegen nicht; als Ursache wird angegeben, daß im ersten Falle Stationsgebäude und Druckabnahmegerät entsprechend der Topographie des Gipfels in einer laminaren Strömung sich befinden, während im zweiten Falle, wo der Wind den Steilabfall im SW zu überwinden hat, das Druckabnahmegerät sich im Luv also in laminarer Strömung, das Gebäude aber im Lee, d. h. in einem Gebiete außerordentlich turbulenter Strömung sich befindet. Quantitativ ergeben sich im ersten Falle die folgenden Werte:

0 mm bei 13 m. s.
1.0 mm bei 21 m. s.
2.0 mm bei 30 m. s.

Nachdem es durch diese erste Versuchsreihe möglich gewesen war, die Gebäudestörung auf der Schneekoppe auszuschalten, zeigte sich außerdem noch eine „Geländestörung", welche gleichmäßig den ganzen Koppengipfel bedeckt; im Gegensatz zur Gebäudestörung ist diese aber bei Winden zwischen WSW/und NNW praktisch gleich Null und tritt nur bei SW auf. Da durch das Berghindernis auch die Lufttemperatur der Bergstation dynamisch gestört wird, ist eine einwandfreie Reduktion des Luftdrucks der Basisstation mit Hilfe der Mitteltemperatur auf die Gipfelhöhe nicht mehr möglich, so daß ein Vergleich der beiden Luftdruckwerte kein Kriterium mehr liefert für die Richtigkeit des einen oder anderen Wertes. K. versuchte nun durch Auswahl von Festpunkten bei unter dem Schwellenwert (10 m. s.) liegenden geringen Windgeschwindigkeiten und unter der Annahme eines geradlinigen Druckverlaufs zwischen den Festpunkten den ungestörten Druckverlauf in der freien Atmosphäre zu erhalten und findet so folgende Werte für die Geländestörung bei SW:

0 mm bis 11 m. s.
1.0 mm bei 18 m. s.
2.0 mm bei 25 m. s.

Die Studie zeigt die Schwierigkeiten der Luftdruckmessungen auf Bergstationen bei starken Winden und gibt erwünschte Anhaltspunkte für die Größe der auftretenden Störungen nicht nur auf Bergstationen sondern auch unter ähnlich gelagerten Verhältnissen wie bei Küstenstationen, auf Schiffen, bei Drachenaufstiegen usw. Peregrin Zistler.

L. Dede, Komplexchemie. Einführung in die Chemie der komplexen Verbindungen. (Sammlung Göschen Bd. 981.) Kl. 8°. 116 S. Mit 5 Fig. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1928. Geb. M. 1.50.

Das Erscheinen eines Buches, das in möglichst knapper und dabei leicht faßlicher Form die theoretischen Grundlagen der Chemie der Komplexverbindungen behandelt und zugleich — im Gegensatz zu den bekannten klassischen und umfangreichen Werken von A. Werner, P. Pfeiffer und R. Weinland — unter Hervorhebung nur der hauptsächlichsten Typen der Verbindungen höherer Ordnung die große Bedeutung dieses Gebiets für die anorganisch-chemische Systematik darstellt, ist insbesondere vom didaktischen Standpunkt aus lebhaft zu begrüßen. Ist doch die Kenntnis insbesondere der physikalisch-chemischen Grundlagen der Koordinationslehre heute zum Verständnis der modernen Chemie geradezu unentbehrlich, ein Tatbestand der leider auch in manchen bekannten Lehrbüchern der anorganischen Chemie nicht genügend berücksichtigt ist und so den Studierenden zu einer Vernachlässigung dieses Gebiets verleitet.

Anregend und für den Physiker von besonderem Interesse ist der Versuch des Verfassers, die Koordinationslehre weitgehend vom Standpunkt der neuesten Entwicklung der Atomtheorie und der elektrostatischen Theorie der Molekülbildung aus zu behandeln. Die Einleitung bringt in großen Zügen die atom-

theoretischen Grundlagen und die Kosselsche Theorie. Daran schließt sich die Darstellung der Wernerschen Koordinationslehre. Besonders eingehend werden im Kapitel „Die Koordinationszahl" die Vorstellungen von Magnus mit ihren rechnerischen Grundlagen erläutert. Schließlich werden im systematischen Teil die einzelnen Gruppen der komplexen Verbindungen mit der üblichen Einteilung in Anlagerungs-, Einlagerungs-Verbindungen und Innere Metallkomplexsalze abgehandelt. Auffallend kurz geht der Verfasser im Schlußkapitel auf die so wichtigen Isomerieverhältnisse der Komplexverbindungen ein.

Die an sich sehr begrüßenswerte knappe Form der Darstellung geschieht leider mitunter auf Kosten der Verständlichkeit. Dies gilt von der Beschreibung der atomtheoretischen Grundlagen, die erfahrungsgemäß nicht ohne jede Erläuterung vorausgesetzt werden dürfen; auch die Kosselsche Theorie hat eine wohl allzu bündige und abstrakte Schilderung erfahren. Unverhältnismäßig ausführlich werden andererseits die Fragen der Koordinationszahl behandelt, ebenso im systematischen Teil das Kapitel der inneren Komplexsalze, während die für die Entwicklung der Koordinationslehre ganz grundlegenden und allgemein wichtigen Isomerien nur recht flüchtig erwähnt sind. Daß im systematischen Teil mitunter einige Beispiele nicht gut gewählt bzw. weit hergeholt sind (so im Kap. der Ammoniakate der Metallsalze), bekannte klassische Fälle wiederum fehlen (z. B. bei den gemischten Einlagerungsverbindungen, Nichtelektrolyte u. a.), ebenso daß sich einige sinnstörende Druckfehler eingeschlichen haben [S. 34 „anodische" anstatt anionische Komplexe; S. 64 $Fe(CO)_9$ anstatt $Fe_2(CO)_9$ für Eisennonacarbonyl usw.], sei nur beiläufig erwähnt.

Im ganzen gewährt jedenfalls das Büchlein einen allgemeinen und übersichtlichen Einblick in das Gebiet der Komplexverbindungen und kann daher zur Einführung in diesen wichtigen Abschnitt der modernen Chemie empfohlen werden. Hieber.

C. Dorno, Grundzüge des Klimas von Muottas-Muraigl (Oberengadin). Eine meteorologisch-physikalisch-physiologische Studie. Heft 3 des Schweizerischen Institutes für Hochgebirgs-Physiologie und Tuberkulose-Forschung in Davos. Gr. 8⁰. XI u. 177 S. Mit 41 Tab. u. 11 Fig. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges. 1927. RM. 8.—.

Muottas-Muraigl, 2456 m über dem Meere im Oberengadin gelegen, ist eine Zweigstation des „Schweizerischen Instituts für Hochgebirgs-Physiologie und Tuberkuloseforschung in Davos"; in den Jahren 1923 und 1924 wurden dort in jedem Vierteljahr während einer etwa 14tägigen Periode alle meteorologisch-physikalischen und physiologisch-klimatischen Werte gemessen. Erscheint dieses Material dem Umfange nach für den ersten Augenblick noch als recht dürftig, so gewinnt es doch erhöhte Bedeutung dadurch, daß es Vergleiche gestattet einerseits mit dem in der Luftlinie nur 32 km entfernten 1500 m hochgelegenen Davos, von dem 20jährige systematische Beobachtungen vorliegen, und andererseits mit dem abermals etwa 1000 m tiefergelegenen Zürich.

Dorno verfolgt mit der vorliegenden Studie einen dreifachen Zweck:

1. Die Feststellung der physikalisch-meteorologischen Konstanten von Muottas-Muraigl; soweit die spärlichen Beobachtungen eine Beurteilung zulassen, ergibt sich, daß die für die organische Natur entscheidenden Elemente der Lufttemperatur, der Lufttrockenheit und des Windes mit dem Aufstieg von Davos zur Höhe von Muottas-Muraigl ebenso schnell Extremwerten zustreben wie beim Aufstieg von Zürich nach Davos. Die für die Heilbedürftigen wichtige, außerordentlich windgeschützte Lage vom Davoser Hochtal tritt besonders deutlich hervor.

2. Die Feststellung der im alpinen Hochgebirge mit dem Aufstieg von 1500 m auf 2500 m Höhe verbundenen klimatischen Differenzen. Die Messungen der Sonnen- und Himmelsstrahlung, getrennt nach den verschiedenen Spektralbereichen, ergaben, daß die Steigerung der klimatischen Reize in der Höhenstufe 1500—2500 m nicht geringer ist als zwischen 500—1500 m; am meisten wachsen die Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung und die Werte der luftelektrischen Elemente.

3. Die Aufstellung eines Beispiels, wie meteorologisch-physikalisch-physiologische Studien zweckmäßig und möglichst vollständig durchgeführt werden können. Dieser Abschnitt dürfte das meiste Interesse beanspruchen nicht nur bei Medizinern sondern bei allen Naturwissenschaftlern; denn hier wird die Brücke zu schlagen versucht zwischen den meteorologisch-physikalischen Beobachtungsdaten und deren praktischer Anwendung für die Therapie, in dem zwei neue physiologische Größen die „Austrocknungs- und Abkühlungsgröße" zur Einführung gelangen. Als erste Voraussetzung ergibt sich hierbei die Kenntnis der Oberflächentemperaturen der betrachteten Objekte, welche unter den verschiedensten äußeren Bedingungen sowohl für die Erdoberfläche (Gestein, Wiese, Schnee usw.) und mannigfache tote Objekte, als auch speziell für die Hautfläche des menschlichen Körpers untersucht werden. Für letztere stellt Dorno die folgende Beziehung auf: Da die Oberhauttemperatur abhängig ist von der physikalischen Abkühlungsgröße einerseits und andererseits von der Wärmeproduktion des Körpers, so ist letztere durch die Bestimmung der ersten beiden Größen gegeben und damit der Wärmeanspruch, welchen das Klima stellt. Die Abkühlungsgröße, zu deren Messung das registrierende Davoser Frigorimeter empfohlen wird, ist in Muottas-Muraigl in der Mittagszeit um 50 Proz., am Morgen und Abend um 100 Proz. höher als in Davos.

Der Studie liegt eine Anzeige von Dorno bei, wonach er am 1. April 1928 von der Leitung des von ihm 1907 aus privaten Mitteln gegründeten Davoser Meteorologisch-Physikalischen Observatoriums zurücktritt; in diesen 21 Jahren regster Forschungsarbeit hat das Davoser Institut bahnbrechend gewirkt auf dem Gebiete der Strahlungsforschung und deren praktischer Anwendung im Dienste der Menschen-, Tier- und Pflanzenphysiologie.

Peregrin Zistler.

R. C. Tolman, Statistical Mechanics with applications to Physics and Chemistry. Gr. 8⁰. 334 S. New York, Chemical Catalog Company. 1927. Geb. $ 7.00.

Inhalt: I. Die klassische statistische Mechanik. 1. Methoden der statistischen Mechanik. 2. Elemente der klassischen Mechanik. 3. Eigenschaften statisti-



scher Gesamtheiten. 4. Ableitung des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes. 5. Anwendung desselben auf Probleme der Molekulargeschwindigkeit. 6. Anwendung auf Energieverteilung und spezifische Wärmen. II. Einführung der Quantentheorie. 7. Elemente der quantentheoretischen Mechanik. 8. Einführung der Quantentheorie in die statistische Mechanik. 9. Spezifische Wärme zweiatomiger Gase. 10. Spezifische Wärme fester Körper. 11. Energieverteilung der Strahlung bei Wärmegleichgewicht. 12. Allgemeine Bestimmung des wahrscheinlichsten Zustandes eines Systems. 13. Dampfdruck über Kristallen und Gläsern bei tiefen Temperaturen. 14. Gasgleichgewichte bei Temperaturen konstanter spezifischer Wärmen. III. Anwendung auf Molekularprozesse. 15. Allgemeines über Molekularzustände und Molekularprozesse. 16. Strahlungsabsorption und Emission. 17. Stöße erster und zweiter Art. IV. Die Geschwindigkeit physikalisch-chemischer Veränderungen. 18. Einführung. Boltzmanns H-Theorem. 19. Die Geschwindigkeit einiger physikalischer Prozesse. Transportprobleme. 20. Chemische Reaktionsgeschwindigkeit. 21. Der Temperaturkoeffizient der Reaktionsgeschwindigkeit. 22. Photochemische Reaktionen. V. Schluß. 23. Die Beziehungen zwischen statistischer Mechanik und Thermodynamik. 24. Abschließende Bemerkungen.

Das von der American Chemical Society herausgegebene Werk will eine systematische Darstellung der statistischen Mechanik geben und einen Überblick über deren Anwendungsgebiete sowohl für Chemiker als für Physiker — vielleicht ein wenig mehr für die ersteren. Die Vermeidung allzu schwieriger mathematischer Ausführungen und der angenehm lesbare Text sind den Anforderungen dieses weiten Leserkreises wohl in ausgezeichneter Weise angepaßt. Inhaltlich möchten wir das Buch jedoch mehr als eine kinetische Gastheorie mit statistischem Einschlag, denn als eine wirkliche moderne statistische Mechanik ansprechen. Die vom Verf. entwickelten statistischen Grundlagen führen kaum über den berühmten Enzyklopädieartikel von P. und T. Ehrenfest aus dem Jahre 1904 hinaus. Die spätere Entwicklung, vor allem die grundlegende Einführung der Ehrenfestschen „Gewichtsfunktion" ist völlig unberücksichtigt geblieben. Sie hätte, wie bekannt, eine einheitliche Darstellung von klassischer und Quantenstatistik zugelassen und eine Einführung der letzteren ermöglicht, welche allein auf makroskopische Ergebnisse gegründet ist. Der Verf. hat demgegenüber eine unvermittelte, knappe Darstellung der älteren Quantentheorie eingefügt und sich mit einer durchaus formalen Umschreibung der klassisch statistisch-mechanischen Verteilungsformel begnügt. Ob dies besonders die Chemiker befriedigen wird, müssen wir dahingestellt sein lassen, nachdem seinerzeit gerade von hervorragender chemischer Seite gegen einen derartigen Vorgang Protest erhoben worden ist. In der Tat ist die Schwäche eines solchen Verfahrens besonders auffällig, wenn man die statistische Mechanik, wie der Verf., auf eine unbekümmert radikale Benutzung der Ergodenhypothese stützt. Nach dem Vorwort zu schließen, ist der Verf. überzeugt, hierin einem mit der Zeit unausweichlichen Entschlusse gefolgt zu sein. Die Untersuchungen v. Mises' haben nun aber gerade zu der gegenteiligen Erkenntnis und zu einem höchst erfreulichen Anschluß an die quantentheoretischen Verhältnisse geführt. Der Übergang von der Raum- zur Zeitgesamtheit läßt sich danach ausschließlich auf dem Boden wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansätze über die Wechselwirkung der statistischen Teilsysteme erledigen, wie das in der Quantenstatistik ja überhaupt nicht anderweitig möglich wäre. Auch bezüglich einiger anderer weniger wichtiger Punkte vermögen wir uns dem Verf. nicht anzuschließen. Die verallgemeinerte Fassung des Gleichverteilungssatzes ist nicht neu, die sehr ausführlichen Erörterungen über die Wahrscheinlichkeitsbeziehungen zwischen direkten, zeitlich entgegengesetzten („reversen") und „inversen" Molekularvorgängen (principle of microscopic reversibility) sind nicht korrekt. Die sog. „neueren Quantenstatistiken" waren zur Zeit der Beendigung des Buches wohl noch zu wenig bekannt, um darin Aufnahme finden zu können.

Trotz der erhobenen Bedenken gegen Umfang und systematische Entwicklung der statistischen Grundlagen möchten wir dem Buche die wärmste Empfehlung mitgeben mit Rücksicht auf seine übrigen Seiten, vor allem seine vollständige Behandlung der physikalisch-chemischen Kinetik, insbesondere aller Fragen der Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit. Hier befindet sich der Verf. fühlbar in seinem Element, seinem langjährigen Arbeitsgebiete. Man wird ihm nicht genug Dank dafür wissen können, daß er dieses wegen seiner Unfertigkeit in den Darstellungen der kinetischen Gastheorie sonst meist gemiedene Gebiet mit so großer Ausführlichkeit und Klarheit dargestellt hat. Es bildet das eigentliche Ziel, die Krönung des Tolmanschen Werkes. Wer immer sich über diese Fragen unterrichten will, wird am besten tun, Tolmans Buch zur Hand zu nehmen.

A. Smekal.

J. Chazy, La théorie de la relativité et la mécanique céleste. Tome I. Gr. 8⁰. VIII u. 261 S. Paris, Gauthier-Villars et Cie. 1928. Fr. 60.—.

Die hier gegebene mathematische Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie zeichnet sich vor anderen dadurch aus, daß sie sehr ausführlich auf die Probleme der Himmelsmechanik eingeht. Sie enthält neben der Mechanik der Relativitätstheorie einen Abriß der klassischen Himmelsmechanik und der Versuche, das Newtonsche Gesetz zu erweitern; sie diskutiert die numerischen Untersuchungen von Leverrier und Newcomb und die verschiedenen Hypothesen, die aufgestellt wurden, um die Abweichungen der Beobachtungen von der Newtonschen Theorie zu erklären. So bedeutet das aus Vorlesungen an der Faculté des Sciences in Paris hervorgegangene Buch eine wertvolle Bereicherung der Literatur über die Relativitätstheorie.

A. Kopff.

R. v. Mises, Fluglehre. Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. Gr. 8⁰. VI u. 321 S. Mit 192 Abb. 3., stark erweiterte Auflage. Berlin, Julius Springer. 1926. Geh. RM. 12.60, geb. RM. 13.50.

Die beiden ersten Auflagen dieses seiner Bestimmung einer elementaren und doch streng sachlichen Darstellung in mustergültiger Weise gerecht werdenden Buches sind an dieser Stelle bereits eingehend gewürdigt worden. Wir können uns daher darauf beschränken, die umfangreichen Erweiterun-

gen der vorliegenden Neuauflage namhaft zu machen. Vor allem ist — unserm Wunsch in der letzten Besprechung entsprechend — ein dem ganzen Rahmen gut angepaßter Abschnitt über den motorlosen Flug hinzugekommen, der auch sehr instruktive Betrachtungen über die Anwendung des Ähnlichkeitsgesetzes auf das Fliegen aus eigener Kraft enthält, manche Irrtümer von Helmholtz richtig stellend. Neu ist ferner ein ausführlicher Abschnitt über Gipfelhöhe und Steigzeit, und schließlich werden auch Fragen des Luftverkehrs und die wirtschaftliche Verwendung des Flugzeugs in neuen Kapiteln behandelt. Alles in allem bleibt uns jetzt kaum ein sachlicher Wunsch mehr übrig; nur formal möchten wir wünschen, daß die Bezeichnungsweisen den sonst üblichen, etwa der Göttinger Veröffentlichungen oder der „Hütte" angepaßt würden. L. Schiller.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1928/1929.

Technische Hochschule Aachen. Starke: Experimentalphysik I, 4, Übungen im physikalischen Laboratorium, 4 und 2, für Vorgeschrittene, 4; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl. — **Seitz:** Theoretische Physik: Theorie der Wärme, 4, Übungen, 1; Experimentalphysik, enzyklopädischer Kurs, 2; Übungen im physikalischen Praktikum, 2; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl. — **Polis:** Allgemeine Meteorologie: Aerologie, 1; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie, 1; Meteorologische Technik, mit Übungen, 1. — **Kirschbaum:** Ausgewählte Kapitel der Physik: Röntgenstrahlen und Radioaktivität, 2, Übungen, 1; Ergänzungen zur Experimentalphysik: Didaktisch-seminaristische Übungen, 1. —

Universität Basel. Hagenbach: Experimentalphysik II, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, halb- und ganztägig, für Anfänger (mit Veillon), 8; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Bernoulli:** Photochemie, 1; Physikalische Chemie II, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4, für Vorgerückte, 8; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum: Anleitung zu selbständigen Arbeiten in Physikalischer Chemie und Elektrochemie, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Rupe, Fichter und Ruggli), 1 *g*. — **Matthies:** Mechanik, 5, Übungen, 2; Potentialtheorie, 2; Mathematisch-physikalisches Seminar, 1. — **Veillon:** Mathematische Behandlung physikalischer Aufgaben, 2. — **Zickendraht:** Aerodynamik und Luftfahrt, mit Demonstrationen auf dem Flugplatze, 2; Radiotelephonie und internationales Rundspruchwesen, mit Exkursionen, 2. — **Bürki:** Repetitorium der Physikalischen Chemie, 1; Optische Eigenschaften und chemische Konstitution, 1. — **Wehrli:** Freie Elektronen und Ionen, 2. —

Universität Berlin. Nernst: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalisches Kolloquium (mit v. Laue), 2 *g*; Physikalische Forschungsarbeiten (mit Wehnelt, Pringsheim, Hettner und Czerny), tägl. — **Planck:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4. — **Schrödinger:** Statistische Theorie der Materie und der Strahlung, 4, Theoretisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Hettner:** Theorie der Strahlung der Gase und der festen Körper, 4. — **Wehnelt:** Elektrizität in Gasen, 2; Physikalisches Anfängerpraktikum, 7, Ergänzungen, nach Vereinbarung, *g*; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das naturwissenschaftliche Arbeiten, 3. — **Pringsheim:** Einführung in die Experimentalphysik, 4; Lichtanregung durch Einstrahlung, 1 *g*; Physikalisches Proseminar (mit v. Laue, Einstein und Hettner), $1^1/_2$; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene (mit Czerny), 8. — **Henning:** Einführung in die wichtigsten Kapitel der Thermodynamik, 2. — **Becker:** Kinetische Theorie der Gase und festen Körper, 2. — **Ladenburg:** Experimentelle Grundlagen der Quantentheorie, 1. — **Bothe:** Einführung in die Röntgenphysik, 1. — **London:** Quantenmechanik, insbesondere Anwendungen auf die Mehrkörperprobleme und auf die Chemie, 2. — **Weissenberg:** Molekulartheorie der Festkörper, 1. — **Paschen:** Neuere spektroskopische Forschungen, 2. — **Schüler:** Grundlagen und Probleme der Atomphysik, 1. — **Grotrian:** Ausgewählte Kapitel aus der Astrophysik, 1. — **Kiebitz:** Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der elektrischen Wellen, 1. — **Gehrcke:** Ausgewählte Kapitel aus der Optik, 1. — **Czerny:** Kinetische Gastheorie und ihre Anwendung in der Vakuumtechnik, 1. — **Meitner:** Besprechung chemischer und physikalischer Atomprozesse unter Berücksichtigung neuerer radioaktiver Arbeiten (mit Hahn), $1^1/_2$. — **Bonhoeffer:** Probleme der Atomphysik und -chemie (mit Kallmann, London und Szilard), $1^1/_2$ *g*. — **Kallmann:** Einführung in die Quantenmechanik, $1^1/_2$. — **Skaupy:** Physikalische Prinzipien der Beleuchtungstechnik, 2. — **Scheffer:** Über wissenschaftliche Mikroskopie und Mikrophotographie, mit Übungen, *g*; Über angewandte wissenschaftliche Photographie, mit Übungen, *g*. — **v. Laue:** Mathematisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Blasius:** Praktische Übungen für Fortgeschrittene, 7. — **Szilard:** Besprechung neuerer Arbeiten zur Quantentheorie (mit Kallmann, London und Neumann v. Margitta), $1^1/_2$ *g*. — **Neumann v. Margitta:** Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, 4. — **Fock:** Über die Entwicklung der Naturphilosophie in der Neu- und Jetztzeit, 1; Einleitung in die Physik und Chemie, 1. — **Wellmann:** Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften in der römischen Kaiserzeit II, 1 *g*. — **Reichenbach:** Naturphilosophische Denker der Gegenwart, 1; Die philosophischen Probleme des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, mit einer Einführung in die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3; Naturphilosophisches Seminar, 2 *g*. — **Byk:** Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 2. — **v. Ficker:** Wetter und Wettervorhersage, 2; Anleitung zur Ausführung meteorologisch-klimatologischer Arbeiten (mit Knoch), tägl. *g*. — **Hergesell:** Meteorologie und Flugwetterdienst, nach Vereinbarung, *g*; Meteorologisches Kolloquium, unter besonderer Berücksichtigung der Erfahrungen des Flugwetterdienstes, nach Vereinbarung, *g*. — **Kähler:** Luftelektrizität, 1. — **Bartels:** Statistische Methoden der Geophysik und Meteorologie, 1. — **Robitzsch:** Probleme der Aerologie, 1. — **Less:** Praktische Witterungskunde, 1. — **Knoch:** Allgemeine Klimatologie, 2. —

Technische Hochschule Berlin. Hertz: Experimentalphysik, 4; Physikalische Übungen für Fortgeschrittene, 8; Anleitung zum selbständigen physikalischen Arbeiten, tägl.; Kolloquium über neuere Probleme aus den Gebieten der Physik und Chemie (mit Becker und Volmer), 2. — **Westphal:** Physikalische Übungen für Anfänger, 4. — **Becker:** Wärmetheorie, 3, Übungen, 2; Kinetische Gastheorie, 2. — **Cranz:** Kolloquium über Probleme der technischen Physik (mit Angenheister, Becker, Engl, Gehl-

hoff, Hertz, Kock, Korn, Leithäuser, Pirani, Seegert, Schachenmeier, Schulz, Volmer, Weidert), 14tägig, $1\frac{1}{2}$ g; Ausgewählte Kapitel aus der technischen Physik, $1\frac{3}{4}$, Übungen, 4. — **Schachenmeier:** Ausgewählte Probleme aus der theoretischen Physik, 1. — **Schmid:** Zur Physik der plastischen Deformation, 1. — **Wigner:** Atombau und Quantentheorie I, 2. — **Angenheister:** Einführung in die Geophysik I, 2; Geophysikalisches Seminar, 2. — **Kassner:** Verdunstung und Niederschläge als Grundlage von Wasserwirtschaft und Wasserbau, 1; Das Wetter in der Technik, 1. — **Korn:** Die Telegraphengleichung, 2; Bildtelegraphie, 1. — **Leithäuser:** Eigenschaften und Konstruktion der Röhrensender, 1; Praktische Übungen in der Hochfrequenztechnik für Fortgeschrittene, nach Vereinbarung. — **Luyken:** Erdmagnetismus, nach Vereinbarung. — **Engl:** Strahlungsmessung, 1; Registrierung und Analyse veränderlicher elektrischer Vorgänge, 1; Anleitung zu selbständigen physikalischen Arbeiten, nach Vereinbarung. — **Pirani:** Einführung in die theoretische Behandlung chemischer und physikalischer Probleme mit besonderer Berücksichtigung graphischer Methoden II, 1. — **Gehlhoff:** Physikalische Grundlagen der Lichttechnik, 2. — **Weidert:** Geometrische Optik, 2; Seminar für Optisches Rechnen, 4; Optische Instrumentenkunde, 3; Übungen im Gebrauch optischer Instrumente, 3. — **Seegert:** Handfernrohre und bildaufrichtende Prismensysteme, 1; Entwicklung, Methoden und Ergebnisse der modernen Spektroskopie, 1. —

Universität Bern. Greinacher: Experimentalphysik: Wärme, Elektrizität, Magnetismus, 5, Ergänzungen, 1; Repetitorium der Physik, 1; Physikalisches Kolloquium (mit Gruner), nach Vereinbarung, g; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 4, für Vorgerücktere, 3 halbe Tage, Vollpraktikum, tägl. — **Gruner:** Optik, 4; Molekulare Wärmetheorie, 3; Einleitung in die theoretische Physik, 1; Seminar für theoretische Physik, 2. — **Koestler:** Grundlagen der Wechselstromtheorie, 2; Die Methode der virtuellen Verrückungen in der Statik, 1—2; Anwendung der Mathematik auf Biologie, 1—2; Anwendung der Mathematik auf Physik, Chemie und Biologie, Statistische Methoden: Beobachtungsfehler, 1—2. —

Universität Bonn. Konen: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, 3, Wärme, 2; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 9, für Fortgeschrittene, tägl.; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Pflüger, Grebe, und Mecke), 2. — **Pflüger:** Theorie der Elektrizität, 5. — **N. N.:** Angewandte Elektrizitätslehre, mit Übungen, 2; Physikalische Technologie, 2; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Mecke), 3. — **Grebe:** Einführung in die theoretische Physik: Mechanik, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik der Röntgenstrahlen, tägl. — **Mecke:** Theorie der Wärme II: Kinetische Gastheorie, Wärmestrahlung, 2; Ausgewählte Kapitel der Spektroskopie, 1; Einführung in das Physikalische Praktikum, 1. —

Technische Hochschule Braunschweig. Diesselhorst: Experimentalphysik I: Elektrizität und Magnetismus, 4; Einführung in die Theorie der Elektrizität, 3; Physikalisches Praktikum I und II; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 g. — **Bergwitz:** Elektrische Leitung in Gasen, mit Versuchen, 2; Elektronisch-radiologisches Praktikum, 1 Nachmittag. —

Universität Breslau. Schaefer: Experimentalphysik II: Elektrizität, Optik, Atomphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Senftleben und Bergmann), 3 oder 6, für Fortgeschrittene (mit Steubing, Senftleben und Bergmann), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Reiche, Steubing und Waetzmann), 2 g. — **Reiche:** Statistische Mechanik und Quantentheorie, 5, Seminar, 1 g; Besprechung neuerer quantenmechanischer Arbeiten, nach Vereinbarung, g. — **Steubing:** Physikalische Meßmethoden und Meßtechnik, 1; Meteorologie, 1; Handfertigkeitspraktikum, 2; Photographische Übungen für Fortgeschrittene, 3. — **Jüttner:** Allgemeine Relativitätstheorie, 2. — **Bergmann:** Schwingungsprobleme in der Physik, mit Demonstrationen, 2; Hochfrequenzpraktikum, 3. — **Senftleben:** Thermodynamik, 4. —

Technische Hochschule Breslau. Waetzmann: Experimentalphysik I, 4; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3; Physikalisches Zwischenpraktikum, 6; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Schaefer), 2; Physikalisches Seminar, nach Vereinbarung. — **N. N.:** Aerostatik, nach Vereinbarung; Das Verkehrsluftschiff, nach Vereinbarung. — **Noether:** Höhere Mathematik I: Differential- und Integralrechnung, 2; Mathematisch-Physikalisches Seminar: Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, 2; Theoretische Physik I: a) Mechanische Prinzipien, b) Elektro- und Magnetstatik, nach Vereinbarung. —

Technische Hochschule Brünn. Lohr: Allgemeine und technische Physik: Elektromagnetische Erscheinungen und Optik, $3\frac{1}{2}$; Technische Physik II, 3; Physikalisches Praktikum, 4 und 3. — **Schoklitsch:** Meteorologie und Klimatologie, 3. —

Bergakademie Clausthal. Valentiner: Experimentalphysik I: Mechanik starrer, flüssiger, gasförmiger Körper, Wellenlehre, Elektrizität und Magnetismus, 4; Physikalisches Praktikum, 3; Physikalische Grundlagen der Wärmetechnik: Technische Wärmelehre, 2; Physikalisches Kolloquium, 2 g; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig. — **Rössiger:** Meßmethoden der angewandten Geophysik, 1; Geophysikalisches Praktikum, 2. —

Technische Hochschule Danzig. Ramsauer: Experimentalphysik I, 5; Kleines physikalisches Praktikum I und II (mit Wolf), $3\frac{3}{4}$; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene I (mit Bartels), nach Vereinbarung, halbtägig, II, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Bartels), 1 g. — **Bartels:** Atomphysik, 4, Übungen, 2 g. — **Kalähne:** Einführung in die Radio- und Elektrophysik, 1; Photographie und Reproduktionsverfahren, 1; Röntgenstrahlen und ihre Anwendungen, 1; Übungen in Photographie und Reproduktionsverfahren I, für Anfänger, 3, II, für Fortgeschrittene, tägl.; Großes radio- und photophysikalisches Praktikum, tägl.; Radiopraktikum I und II, 4. — **Koschmieder:** Allgemeine Meteorologie, 2; Meteorologisches Kolloquium, 2 g. — **Wolf:** Demonstrationspraktikum (mit Buchwald), 8; Einführung in das kleine physikalische Praktikum, 1; Handfertigkeitspraktikum für technische Physiker, 4. —

Technische Hochschule Darmstadt. Rau: Experimentalphysik unter besonderer Berücksichtigung der technischen Anwendungen: Mechanik der



festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Schwingungslehre, einschließlich Akustik, Geometrische Optik, Farbenlehre, Wellenlehre des Lichtes, 5; Physikalische Übungen, 3 Nachmittage, für Fortgeschrittene, 4 halbe Tage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik, nach Vereinbarung; Physikalisches Kolloquium, 1 *g*. — **Zeissig**: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrostatik, Elektrische Ströme, Optik, 3; Physikalische Meßkunde und Apparatebau, 2; Ausgewählte Kapitel aus der technischen Physik, 1—2; Kolloquium in technischer Physik (mit Reutlinger), 1; Arbeiten aus der technischen Physik, nach Vereinbarung. — **Baerwald**: Theorie der Wärme I, 3. — **Knipping**: Physikalisches Seminar für Fortgeschrittene (mit Baerwald), 2 *g*; Röntgenstrahlen, 2, Übungen, 1, Praktikum, 3. — **Georgii**: Spezielle Flugmeteorologie, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Physik der freien Atmosphäre, 1; Aerologie, 2; Meteorologisch-flugwissenschaftliches Kolloquium, 2; Meteorologisch-aerologisches Praktikum, Meßflüge, 3. —

Technische Hochschule Dresden. Dember: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Optik, 5, für Bauingenieure, 4; Physikalisches Praktikum I, 3 und 6, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, ganztägig; Physikalisches Kolloquium (mit Toepler und Wiarda), 1 *g*. — **Toepler**: Theoretische Physik: Optik, 3, Übungen, 1; Elektrizitätsdurchgang durch Gase, einschließlich Blitzbildung, 2; Größere physikalische Arbeiten, ganztägig; Hochspannungspraktikum, ausgewählte Aufgaben für Fortgeschrittene, 6; Kolloquium über Strahlenforschung (mit Wiedmann und Saupe), 1 *g*. — **Wiarda**: Theorie der Integralgleichungen, 3; Elektromagnetische Lichttheorie, 2. — **Wiedmann**: Röntgenstrahlen und ihre technische Verwendung, 1; Röntgentechnische und spektroskopische Übungen, 3; Selbständige Arbeiten, ganztägig. — **Alt**: Ausgewählte geophysikalische Probleme, 1. — **Luther**: Photographie, 2; Photographisches Praktikum für Anfänger, 4 und 8, für Fortgeschrittene, 4, 8 und 12; Selbständige Arbeiten, 2, 4, ganz- und halbtägig; Physikalisch- und anorganisch-chemisches Kolloquium (mit Foerster, Lottermoser und Müller), 1 *g*. — **Goldberg**: Angewandte Photographie in Wissenschaft und Technik, 1 *g*. — **Klughardt**: Die Berechnung optischer Systeme II, mit Übungen, 2; Die Strahlengänge in den optischen Instrumenten, 1. —

Universität Erlangen. Gudden: Experimentalphysik II, 5; Besprechung physikalischer Tagesfragen (mit Reiger, Rump und Kohl), 1 *g*; Übungen für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, 20; Übungen zu physikalischen Vorführungen, 5 *g*; Physikalisches Seminar (mit Kohl), 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Reiger**: Theoretische Physik: Mechanik, 4, Übungen, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten, 40. — **Rump**: Physik der Röntgenstrahlen, 1 *g*; Übungen im Messen der Röntgenstrahlen, 2 *g*; Einführung in die Tiefenbehandlung mit Röntgenstrahlen (mit Wintz), 1 *g*. — **Kohl**: Experimentalphysik IV, 2. —

Universität Frankfurt a. M. Wachsmuth: Experimentalphysik II: Optik und Elektrizität, 5; Elektrizitätsleitung in Gasen II, 1; Repetitorium der Experimentalphysik I, 1; Physikalisches Kolloquium (mit Madelung, Meissner), 14tägig, 2; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 5, für Fortgeschrittene, tägl.; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten (mit Meissner), tägl. — **Meissner**: Höhere Experimentalphysik IV: Atomtheorie, 3; Einführung in die Astrophysik II, 2; Wesen und Bau der Fixsterne, 1; Astrophysikalisches Praktikum, 4; Astronomisches Praktikum, 4; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten auf dem Gebiete der Astrophysik, tägl. — **N. N.**: Orts- und Zeitbestimmung: Sphärische Astronomie, 2. — **Mauz**: Elektrische Meßmethoden, 2. — **Seddig**: Die optischen Verfahren für die Zwecke des Chemikers, 1; Photographisches Praktikum, 4 oder 8; Leitung selbständiger Arbeiten aus dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie, tägl. — **Madelung**: Elektrodynamik, 4, Übungen, 1; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Lanczos**: Statistische Mechanik, 2. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom, 3; Die elektrische Gleichstrommaschine, 1; Kleines elektrotechnisches Praktikum, 3 oder 6; Großes elektrotechnisches Praktikum, 6 halbe Tage; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig; Kolloquium über angewandte Physik (mit Dessauer), 1. — **Dessauer**: Einführung in die medizinische Physik I: Grundlagen, Mechanik, Wärmelehre, 1½; Physikalische Dosimetrie der Röntgenstrahlen, 1; Kolloquium für medizinische Physik: Lektüre und Besprechung neuerer Arbeiten und Probleme, 2; Wissenschaftliche Arbeiten für Fortgeschrittene, ganz- und halbtägig. — **Bestelmeyer**: Magnetismus, 1. — **Gramberg**: Maschinenkunde, 2. — **Linke**: Repetitorium der theoretischen Meteorologie, 2; Aeronautische Meteorologie, 1; Meteorologisch-geophysikalisches Kolloquium (mit Gutenberg und Stüve), 2. — **Gutenberg**: Erdbebenkunde, 1. — **Stüve**: Allgemeine Klimatologie, 2; Synoptische Übungen, 2. —

Bergakademie Freiberg. Brion: Elektrotechnik, 3; Elektrotechnisches Praktikum, 2; Experimentalphysik, 4; Physikalisches Praktikum, 2; Physikalisches Repetitorium, 1; Elektrotechnisches Kolloquium, nach Vereinbarung. — **Aeckerlein**: Elektronik und Radioaktivität, 1, Praktikum, 3. — **Papperitz**: Aktuelle Probleme der mathematischen Physik, 1. —

Universität Freiburg i. Br. Mie: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5, Mathematische Ergänzungen, 2; Physikalische Übungen, 6, für Fortgeschrittene (mit Kast), halbtägig; Kleines physikalisches Praktikum, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, ganztägig; Physikalisches und physikalisch-chemisches Kolloquium (mit v. Hevesy), 2 *g*. — **Kast**: Experimentalphysik IIIa: Optik aller Wellenlängen, 2. — **Koenigsberger**: Relativitätstheorie mit Übungen, 2; Kinetische Gastheorie, 1; Theorie der Strömung: Kugel-Zylinderfunktionen, mit Übungen, 3 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Cohn**: Das elektromagnetische Feld, 4. — **Hammer**: Elektrizität in Gasen, 1. — **Lyon**: Drahtlose Telegraphie, 1. — **v. Hevesy**: Physikalische Chemie II: Elektrochemie, 2; Radioaktivität, 1; Physikalisch-chemische Übungen, ganztägig, für Chemiker, halbtägig und 5; Selbständige Arbeiten, ganztägig; Kolloquium über neuere chemische Arbeiten für Vorgerücktere (mit Staudinger), 1 *g*. —

Universität Freiburg (Schweiz). Joye: Experimentalphysik, 5, Ergänzungen, 2; Mathematische Physik: Optik, 2; Repetitorium, 1; Praktische physikalische Übungen, 4; Physikalisches Laboratorium für Anfänger, 12, für Fortgeschrittene und Untersuchungsarbeiten, tägl. außer Montag. —

Universität Gießen. König: Experimentalphysik II: Elektrizität, Optik, 5; Physikalisches Praktikum (mit Cermak), 6 und 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten (mit Cermak), tägl.; Übun-

gen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14tägig, 2 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Jaffé und Cermak), 14tägig, 2. — **Jaffé:** Optik und Elektronentheorie, 4; Einführung in die spezielle Relativitätstheorie, 1; Übungen zur theoretischen Physik, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Cermak:** Höhere Experimentalphysik: Interferenz und Polarisation, 1; Handfertigkeitspraktikum, 3. — **Uller:** Einführung in die Fluglehre, 1; Einführung in die Technische Fertigkeitslehre, 1; Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik, 1; Anleitung zu selbständigen theoretisch-physikalischen Arbeiten, tägl. — **Lihotzky:** Photographische Optik, 1; Optische Grundlagen der Mikroskopie und Mikrophotographie, 1. — **Fromme:** Allgemeine Meteorologie und Klimatologie, 2; Einleitung in die Ausgleichungsrechnung und die höhere Geodäsie, 2. —

Universität Göttingen. Franck: Physikalisches Praktikum, 7 und 4; Physikalisches Seminar (mit Born), 2 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Born, Pohl und Reich), 2 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Born:** Optik, 4, Übungen, 1; Seminar über Struktur der Materie (mit Hilbert), 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. *g*. — **Pohl:** Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Hertz:** Einführung in die theoretische Physik, 4, Übungen, 1. — **Schuler:** Die Relativitätstheorie von Einstein, 1 *g*. — **Nadai:** Mechanik der Kontinua: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, mit Übungen, 4; Mechanikpraktikum, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Elastizität und Festigkeit: Werkstoffuntersuchung, tägl. — **Oldenberg:** Experimentelle Grundlagen der kinetischen Gastheorie, 1. — **Frl. Sponer:** Experimentelle Grundlagen der Quantentheorie, 1. — **Sommer:** Bandenspektra und Molekülbau, 1. — **Cario:** Optische Instrumente, insbesondere spektroskopische Instrumente, 1. — **Reich:** Angewandte Elektrizität I, mit Experimenten, 2, Seminar, 2 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Elektrophysikalisches Praktikum, 3. — **Prandtl:** Aeromechanik und Luftfahrt, 4; Besprechung von Fragen der angewandten Mechanik, einschließlich Hydrodynamik und Aerodynamik (mit Betz, Nadai und Schuler), 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Betz:** Aerodynamische Messungen, mit Übungen, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Aerodynamik, tägl. —

Universität Graz. Benndorf: Experimentalphysik: Einführung in die Physik, 3; Physikalisches Rechnen, 2; Physikalische Übungen für Anfänger I (mit Rumpf), 6, II, 9; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend, *g*; Besprechung physikalischer Fragen (mit Radaković und Hess), 2 *g*. — **Hess:** Experimentalphysik I, 5; Physikalische Besprechungen, mit Experimenten, 1 *g*. — **Rumpf:** Einführung in die Elektrotechnik, 2. — **Rosenberg:** Methodik des Unterrichtes in der Physik, 1; Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 2. — **Radaković:** Elektrizität, 5; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Brell:** Vektorenrechnung mit Übungen, 3. — **Hillebrand:** Astromechanik (Fortsetzung), 3; Der Bau des Fixsternsystems, 2. — **Wegener:** Die Theorie der Kontinentverschiebung, 2; Die Erforschung der höheren Luftschichten: Aerologie, 2; Meteorologisch-geophysikalische Besprechungen, 1. —

Technische Hochschule Graz. Kohlrausch: Physik I: Optik, 5, II: Wärmelehre, 5. — **Kremann:** Physikalische Chemie, 5; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene. — **Müller:** Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene. —

Universität Greifswald. Krüger: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 4; Physikalisches Praktikum, 6 und 3; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl.; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (Kolloquium) (mit Seeliger), 1½ *g*. — **Seeliger:** Mechanik der festen und flüssigen Körper, 4, Übungen und Ergänzungen, 14tägig, 2; Seminar für Fortgeschrittene: Theorie der Phasengrenzflächen (mit Jung), 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl. — **Jung:** Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, mit Übungen, 3. — **Reinkober:** Ausgewählte Kapitel aus der experimentellen Optik, 1; Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 3; Einführung in das physikalische Praktikum: Maßeinheiten und Meßmethoden, 1 *g*. — **Mierdel:** Atomtheorie, 1. —

Universität Halle. Hoffmann: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 4; Physikalisches Praktikum, 6, für Mediziner, 3, für Landwirte und Pharmazeuten, 2; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen physikalischen Arbeiten (mit Hanle), tägl. — **Smekal:** Theoretische Physik II: Elektrizität und Magnetismus, 4; Technisch-physikalisches Praktikum, 6; Technisch-physikalische Arbeiten, tägl. — **Hanle:** Höhere Experimentalphysik: Kathodenstrahlen, Kanalstrahlen, Elektrizitätsleitung in Gasen und Metallen, 2; Kernphysik: Radioaktivität, Isotope, Atomzertrümmerung, 1; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, 6; Physikalisches Proseminar, 2 *g*. — **Bernstein:** Industrie und Technik in der Gegenwart (Fortsetzung), 2 *g*. —

Universität Hamburg. Koch: Experimentalphysik II: Wärme, Elektrizität, 4; Physikalisches Praktikum (mit Goos, L. Müller und Minkowski), 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Lenz, Möller und Stern), 2 *g*. — **Lenz:** Theoretische Optik, 3, Übungen, 1; Theoretisch-physikalisches Vortragsseminar (mit O. Stern und Jordan), 2 *g*. — **Gordon:** Quantentheorie, 2. — **Jordan:** Spezielle Relativitätstheorie, 1. — **Minkowski:** Kathoden- und Kanalstrahlen, 2. — **Goos:** Die optischen Instrumente, 1. — **Estermann:** Physikalisches Proseminar (mit Jordan und Minkowski), 2 *g*. — **L. Müller:** Anleitung zur Ausführung von physikalischen Schulversuchen, 2. — **Möller:** Elektronik und ihre technischen Anwendungen, mit Versuchen, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten Fortgeschrittener, tägl.; Maschinenlehre I: Wärmekraftmaschinen, 1. — **Schott:** Geophysikalisches Kolloquium (mit Tams und Kuhlbrodt), 14tägig, 1½ *g*; Physische Meereskunde II, 2. — **Tams:** Die Konstitution des Erdkörpers, 2; Seismische Übungen, 2. — **Jensen:** Die Hypothesen über die Beschaffenheit der höheren Atmosphärenschichten, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Himmelsphotometrie, 1; Kosmophysikalisches Kolloquium, 14tägig, 2. —

Technische Hochschule Hannover. Precht: Experimentalphysik, 4; Physikalisches Praktikum, 4 und 6; Arbeiten im physikalischen Laboratorium für Fortgeschrittene, ganz- und halbtägig; Physikalisches Kolloquium (mit Herweg), 2. — **Seilkopf:** Allgemeine Meteorologie und Aerologie, 2. — **Herweg:** Elektromagnetische Lichttheorie und Optik, 2,

Übungen, 1; Drahtlose Telegraphie und Tephonie I, 2; Hochfrequenzpraktikum, 3, für Fortgeschrittene, 6, halb- und ganztägig. —

Universität Heidelberg. **Lenard:** Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker und Schmidt), 6; Physikalisches Seminar und theoretisch-physikalische Übungen (mit Becker), 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten im Physikalischen und Radiologischen Institut (mit Becker und Schmidt), tägl. außer Sonnabend. — **Becker:** Theoretische Mechanik, 4. — **Schmidt:** Radiologie: Korpuskularstrahlen, 2. — **Rasch:** Fernübertragung elektrischer Energie, 1. — **Strecker:** Einführung in die technische Physik, 1. — **Peppler:** Allgemeine und physikalische Meteorologie I, 2; Meteorologische Übungen, 2. —

Landwirtschaftliche Hochschule Hohenheim. **Wigand:** Experimentalphysik, einschließlich Meteorologie und Klimatologie I, 4; Physikalische Übungen, 2; Physikalische und meteorologische Arbeiten für Vorgeschrittene, nach Vereinbarung, *g*. —

Universität Innsbruck. **Lerch:** Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, 10 *g*. — **March:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 5, Seminarübungen, 2 *g*. — **Sonvico:** Einführung in die Starkstromtechnik, 2 *g*. — **Scheller:** Astrophysik I, 4; Photographisch-photometrische Meßmethoden, 1. — **Wagner:** Klimatologie, 3; Ozeanographie 2; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, 10 *g*. — **Oberguggenberger:** Theorie der Finsternisse und Bedeckungen, 1; Übungen für Fortgeschrittene. —

Universität Jena. **Wien:** Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 4; Physikalisches Praktikum, 6, 4, 3, für Fortgeschrittene (mit Joos), 9; Leitung physikalischer Spezialaufgaben (mit Auerbach, Straubel, Joos), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Esau, Joos und Jentzsch), 2 *g*. — **N. N.:** Experimentalphysik für Fortgeschrittene: Wärme, Optik, 2 Tage. — **Auerbach:** Einführung in die theoretische Physik: Begriffe, Prinzipe, Methoden, 3. — **Joos:** Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Stoffe, 3; Elektro- und Magnetooptik, 2; Theoretisch-physikalisches Seminar: a) Übungen zur Mechanik, 1, b) Vortragsseminar für höhere Semester, 1 *g*; Anleitung zu selbständigen theoretisch-physikalischen Arbeiten, tägl. — **Bauersfeld:** Flugmechanik, 1. — **Esau:** Gleichstromtechnik, 3; Kraftmaschinen für Landwirte, 1; Technisch-physikalisches Praktikum, 3; Großes technisch-physikalisches Praktikum, tägl.; Technisch-physikalisches Seminar, *g*. — **Jentzsch:** Wellenoptik, 2; Einführung in die Theorie des Mikroskops, mit Übungen, 2; Gebrauch des Polarisationsmikroskops bei chemischen und biologischen Untersuchungen, $1^1/_2$; Leitung selbständiger Arbeiten, tägl. — **Siedentopf:** Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroskopie, mit Übungen, 1. — **Hecker:** Geophysikalisches Praktikum (mit Meisser), nach Vereinbarung, *g*. — **Meisser:** Einführung in die angewandte Geophysik. —

Technische Hochschule Karlsruhe. **Gaede:** Physik I A, 2, II A, 2; Physikalisches Laboratorium, 6; Optisches Laboratorium für Vorgeschrittene (mit Riede), 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, nach Vereinbarung. — **Albert:** Physikalische Meteorologie II, 2; Klimatologie unter besonderer Berücksichtigung des Strahlenklimas, 2; Meteorologische Übungen I, 4, II, 4. — **Brüderlink:** Theorie der elektromagnetischen Störungen, 4. — **Riede:** Technische Optik B: Wellen- und Strahlungslehre, 2. — **N. N.:** Theoretische Physik II, 2. — **Scheel:** Die Elektronenröhre, 1. —

Universität Kiel. **Geiger:** Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 4; Besprechung neuerer physikalischer Fragen, für Doktoranden, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Zahn), 4, für Vorgeschrittene, 8; Forschungsarbeiten (mit Kossel), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Kossel und Zahn), $1^1/_2$ *g*. — **Zahn:** Ergänzungen zur Experimentalphysik: Vorführung und Besprechung ausgewählter Versuche, 2. — **Kossel:** Optik und Theorie der Wärmestrahlung, 4, Übungen, 1; Ausgewählte Fragen der theoretischen Physik, für Vorgeschrittene, 1 *g*. — **Martienssen:** Kreiseltheorie und ihre praktischen Anwendungen, 2. — **Schmidt:** Anleitung zu physikalischen Schülerübungen, 1. —

Universität Köln. **Rinkel:** Experimentalphysik II: Elektrizität, Wärme, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 7; Großes physikalisches Praktikum, 28; Seminar, 1. — **Försterling:** Mechanik, 4; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Kolloquium über neuere physikalische Arbeiten (mit Rukop), 2. — **Malsch:** Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2. — **Rukop:** Technische Elektrizitätslehre I: Grundlagen, Maschinen, Transformatoren, 4, Seminar, 1; Experimentelle Untersuchungen für Fortgeschrittene, tägl.: Bildtelegraphie und Fernsehen, 1 *g*. — **Wever:** Thermodynamik heterogener Systeme, 1; Physik des technischen Eisens, 1. —

Universität Königsberg. **Kaufmann:** Experimentalphysik II: Elektrizitätslehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Gans), 6 und 3; Physikalisches Kolloquium (mit Gans), 14tägig, 2 *g*; Physikalisches Proseminar (mit Gans und Kretschmann), 14tägig, 2 *g*. — **Gans:** Theorie des Lichts, mit Demonstrationen und Übungen, 5; Selbständige physikalische Arbeiten, für Fortgeschrittene, ganztägig. — **Kretschmann:** Einführung in die Einsteinsche Relativitätstheorie, 2; Kinetische Gastheorie, 2. — **Steinke:** Experimentalphysik II: Elektrizität, 2, Übungen und Praktikum, 2; Radioaktivität, 2. — **Errulat:** Einführung in die Meteorologie I, 2; Physikalische Methoden zur Auffindung wirtschaftlich wichtiger Rohstoffe im Bergbau, 1; Besprechung geophysikalischer und meteorologischer Arbeiten, 14tägig, 2 *g*. —

Universität Leipzig. **Debye:** Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität, 5; Höhere Physik, experimentelle und mathematische Ergänzungen zur allgemeinen Experimentalphysik, 1; Physikalisches Praktikum (mit Möbius und Kämpf), 9, für Fortgeschrittene (mit Marx, Schiller, Karolus, Möbius und Kämpf), 9; Selbständige physikalische Arbeiten (mit Marx, Schiller, Karolus, Möbius und Kämpf), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Heisenberg), $1^1/_2$ *g*. — **Heisenberg:** Thermodynamik und kinetische Gastheorie, 4, Übungen, 1 *g*; Seminar über die Struktur der Materie (mit N. N.), 2 *g*; Selbständige theoretisch-physikalische Arbeiten (mit N. N. und H. Schmidt), tägl. — **N. N.:** Allgemeine Relativitätstheorie, 2; Mathematische Hilfsmittel der modernen Physik: Kugel- und Zylinderfunktionen, 2. — **Marx:** Kathodenstrahlen und Röntgenstrahlen in Physik und Technik, mit Experimenten, 2; Radiologisches Praktikum, 2. — **Schiller:** Technische Mechanik starrer Körper, 2. — **Karolus:** Elektrotechnik I: Gleichstrom, 2, Praktikum, 3. — **Möbius:** Elektronen,

Atome, Moleküle, 2. — **Kämpf:** Physikalische Grundlagen der Strahlentherapie, 2. — **H. Schmidt:** Elastizitätstheorie, 2; Graphische Statik, 2. — **Weickmann:** Allgemeine Meteorologie I: Klima und Witterungskunde, 2 *g*; Neuere Arbeiten (seit Margules) über die Dynamik der Atmosphäre, 2; Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl. *g*; Geophysikalisches Praktikum, 3; Geophysikalisches Kolloquium, 2 *g*. —

Universität Marburg. Grüneisen: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 5; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene: Leitung wissenschaftlicher Arbeiten (mit Schulze und Tomaschek), tägl., für Anfänger (mit Tomaschek), 6, für Mediziner (mit Tomaschek), 3. — **Schulze:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 5; Kinetische Gastheorie, 2; Theoretisch-Physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Tomaschek:** Die experimentellen Grundlagen der Relativitätstheorie, 1. — **Berek:** Dunkelfeld- und Ultramikroskopie, mit Demonstrationen, 1; Überblick über die Hilfsmittel zur Berechnung optischer Systeme, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten: Abbildungstheorie und angewandte Optik, nach Vereinbarung, *g*. —

Universität München. Rüchardt: Experimentalphysik II: (Elektrizität, Magnetismus, Optik), 5; Übungen für Fortgeschrittene, ganztägig, (mit Kirchner); Anleitung zu selbständigen Arbeiten, täglich, (mit Kirchner). — **Ott:** Thermodynamik und statistische Gastheorie, 4; Übungen zur Thermodynamik, 2 *g*; Seminar 2 *g* (mit Laporte). Vektorrechnung und Einführung in die theoretische Physik, 3; Ausgewählte Kapitel aus der Gittertheorie, 2. — **Graetz:** Einleitung in die theoretische Physik I, 4; Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Übungen, 1. — **Kirchner:** Höhere Experimentalphysik V, 2; Physikalische Übungen, 4 oder 8. — **Laporte:** Ausgewählte Fragen der Spektroskopie, 2. —

Technische Hochschule München. Zenneck: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik, Magnetostatik, Elektrostatik, 6; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8, für Fortgeschrittene (mit Kulenkampff), halbtägig; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten (mit Kulenkampff), ganztägig. — **Fischer:** Grundzüge der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 3; Elektron- und Atombau, mit Versuchen, 2; Praktisch-physikalische Übungen, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Methoden der Physik: Anleitung zu selbständigen Arbeiten, 8. — **Emden:** Grundzüge der Relativitätstheorie, 2; Meteorologie und Klimatologie, 2. — **v. Angerer:** Elektron und Atom, 1. — **Kulenkampff:** Röntgenstrahlen, 2. — **Kühl:** Einführung in die Theorie der wichtigsten optischen Instrumente, 2. — **Dieckmann:** Drahtlose Telegraphie und Telephonie, 3, Übungen, 1; Technische Hilfsmittel zur Luftnavigation, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiet der angewandten Physik, halb- oder ganztägig. — **Huber:** Meteorologie des Luftverkehrs, 1; Die Niederschlagsverhältnisse Deutschlands, 1. — **Knoblauch:** Anwendungen der Thermodynamik auf physikalisch-chemische Erscheinungen, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiet der technischen Physik, nach Vereinbarung. — **Reiher:** Einführung in die Gesetze der Wärmeübertragung, 2; Beleuchtungstechnik, 14tägig, 4, Praktikum, 2; Grundzüge des Wärme- und Schallschutzes, der Beleuchtung, Heizung und Lüftung, 2, Übungen, 1. —

Universität Münster. Schmidt: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Szivessy), 3 oder 6, für Mediziner, 3, für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Szivessy und Durau), 14tägig, 2 *g*. — **Kratzer:** Elektrodynamik, 4, Übungen, 2 *g*; Relativitätstheorie, 3; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Szivessy:** Neuere Thermodynamik, 1. — **Siemens:** Elektrotechnik, mit Vorführungen und Lichtbädern, 2 *g*. — **Durau:** Ausgewählte Kapitel aus der neueren Physik, 1. —

Technische Hochschule Prag. Tuma: Physik: Reine Mechanik, 5; Technische Physik, 3; Physikalisches Praktikum, 3 und 6. — **Lichtenecker:** Ausgewählte Kapitel der Physik, 2. — **N. N.:** Physik, 3. — **Koerner:** Wärmelehre der Gase, 2. —

Universität Prag. Rausch-Traubenberg: Experimentalphysik I, 5; Einführung in die Physik, 5; Physikalisches Praktikum I, 3 *g*, für Mediziner, 3; Physikalisches Kolloquium (mit Frank und Fürth), 2 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig. — **Frank:** Elektromagnetische Strahlung, nach der klassischen Elektrodynamik, 3; Wellenmechanik, 2; Seminar für theoretische Physik, 2. — **Fürth:** Einführung in die theoretische Physik III: Thermodynamik, kinetische Theorie der Materie, 5; Übungen über theoretische Physik, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, ganztägig, *g*. — **Spitaler:** Allgemeine Meteorologie, 4; Das solare Klima, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, *g*. — **Pollak:** Allgemeine Klimatologie, 2; Theoretische Meteorologie I: Statik und Kinematik, 2. —

Universität Rostock. Füchtbauer: Experimentalphysik: Wärme, Elektrizität, 4; Physikalische Übungen, 8; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar: Kolloquium (mit Hund), 14-tägig, 1½ *g*. — **Hund:** Theoretische Physik II: Elektrizität und Magnetismus, 4, Übungen, 2; Theorie der Kristallgitter, 2. — **Falckenberg:** Allgemeine Meteorologie, 1; Meteorologisches Praktikum für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, tägl. —

Technische Hochschule Stuttgart. Regener: Physik I: Experimentalmechanik, einschließlich Akustik, 3, III: Elektrizität I, 3; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 12, für Fortgeschrittenere, 12; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Ewald), 1½. — **Braunbek:** Physikalische Messungen, zur Einführung in das physikalische Praktikum, 2; Lichttechnik, 1. — **Ewald:** Theoretische Physik I: Mechanik, 4, Übungen, 2; Anleitung zu Arbeiten auf dem Gebiet der theoretischen Physik, nach Vereinbarung; Seminar über Atomphysik (mit Fues), 1—2. — **Fues:** Atomphysik: Kinetische Theorie der Gase, 1; Einführung in die mathematische Behandlung der Physik, 2. — **Glocker:** Röntgentechnik, 2; Röntgenpraktikum für Anfänger, 3, für Fortgeschrittene, 3; Übungen zur Materialprüfung mittels Röntgenstrahlen, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im Röntgenlaboratorium, ganztägig. — **Wigand:** Meteorologie, 2; Geophysikalisch-meteorologisches Kolloquium (mit Kleinschmidt), 14tägig, 2 *g*. —

Universität Tübingen. Gerlach: Experimentalphysik: Elektrizität, Magnetismus, Wärme, 5; Ausgewählte Kapitel aus der Physik der Röntgen-

strahlen, 1; Physikalische Übungen für Anfänger, 4, für Mediziner, 3, für Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Seminar, 1 *g*; Wissenschaftliche Untersuchungen (mit Back und Schütz), ganztägig; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Back**: Ausgewählte Fragen der Spektroskopie II, 1. — **Schütz**: Mathematische und physikalische Ergänzungen zum Praktikum, 1. — **Landé**: Theoretische Wärmelehre, 4; Statistische Mechanik, 1. —

Hochschule für Landwirtschaft und Brauerei Weihenstephan. **Frank**: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Elektrizität I, 4; Angewandte Physik I, 3; Physikalische Übungen für Landwirte, 2, für Fortgeschrittene, 4; Übungen in Hochfrequenztechnik: Radiotechnik, 1; Witterungskunde, 1. —

Universität Wien. **Jäger**: Elektrizität, 5; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. *g*; Besprechung neuerer Arbeiten, 1 *g*. — **Meyer**: Radioaktivität, 3; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener im Radiuminstitute, tägl. *g*. — **Ehrenhaft**: Experimentalphysik, 5, Theoretische Ergänzungen, 1 *g*, Demonstrationsergänzungen, 1 *g*; Seminar, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. *g*. — **Schweidler**: Experimentalphysik, 5, Demonstrationsergänzung, 1 *g*; Atmosphärische Elektrizität (Fortsetzung), 1 *g*; Mittelschulexperimentierpraktikum, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. *g*. — **Thirring**: Theoretische Mechanik, 5; Seminar für theoretische Physik, 1 *g*; Proseminar, 1 *g*. — **Hascheck**: Physikalisches Praktikum, 6; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, 12; Farbenlehre, 2. — **Kottler**: Optik, 5. — **Przibam**: Experimentelle Atomistik, 3. — **Haas**: Neuere Probleme der Atomtheorie, 1. — **Smekal**: Partielle Differentialgleichungen der Physik I, 3; Physikalisches Praktikum, 6; Kristallphysikalische Elektronentheorie der Metalle, 2. — **Lampa**: Physik, 2. — **Flamm**: Allgemeine Relativitätstheorie, 1. — **Konstantinowsky**: Die Physik des Starkstromkabels, 1. — **Kirsch**: Einführung in wissenschaftliche Arbeiten, 4; Atomzertrümmerung, 2. — **Stetter**: Elektrische Entladungen in Gasen, 1. — **Exner**: Allgemeine Meteorologie, 3; Besprechung neuerer Arbeiten aus Meteorologie und Geophysik (mit Conrad), 2 *g*. — **Conrad**: Allgemeine Klimatologie I, 2. —

Technische Hochschule Wien. **Mache**: Physik: Optik, Wärmelehre, 2; Elektrizität und Magnetismus, 3; Physikalisches Praktikum II, 30. — **Flamm**: Physik: Physikalische Optik, 2; Geometrische Optik, 2; Allgemeine Relativitätstheorie, 1. — **Aigner**: Physik, 3 und 2; Elektrische Meßinstrumente, 2. — **Smekal**: Partielle Differentialgleichungen der Physik, 3; Kristallphysik II: Elektronentheorie der Metalle, 2. — **v. Hofe**: Photographische Optik und andere optische Instrumente, 2. — **Bauer**: Quantentheorie der optischen Spektren, 2; Grundzüge der Wellenmechanik, 1. — **Schmidt**: Wetter- und Klimalehre für Ingenieure, 1½. —

Universität Würzburg. **Harms**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 4; Physikalisches Praktikum, 6, für Fortgeschrittene, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, täglich. — **N. N.**: Theoretische Physik: Hydrodynamik, kinetische Gastheorie, 4, Übungen dazu, 1 *g*. —

Universität Zürich. **Meyer**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5, Ergänzungen, 1, Seminar (mit Bär), 2 *g*; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3½, für Vorgerücktere, halbtägig; Physikalisches Praktikum: Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. — **Wentzel**: Theorie des Lichtes, 4, Übung, 1; Proseminar für theoretische Physik, 1, Seminar, 2 *g*. — **Ratnowsky**: Quantentheorie, 2. — **Bär**: Übungen im Demonstrieren von Schulexperimenten, 2; Radiologisches Praktikum, 4. —

Technische Hochschule Zürich. **Scherrer**: Physik I, 4, Repetitorium, 1; Probleme der Elektrizitätsleitung in Gasen, flüssigen und festen Körpern, 2; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Tank), 4 und 8, für Vorgerücktere, 4, 8, 12 und 24; Physikalisches Kolloquium (mit Pauli und Tank), 2; Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, 8, 12 und 24. — **Pauli**: Optik und Elektronentheorie, 3, Übungen, 1; Struktur der Materie, 2; Wissenschaftliche Arbeiten in theoretischer Physik, 12 und 24. — **Tank**: Experimentalphysik II, 4, Repetitorium, 1; Drahtlose Telegraphie, 2; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12, 24. — **Ackeret**: Aerodynamik, 2. — **Andronescu**: Grundzüge der theoretischen Elektrotechnik, 2. — **Brunner**: Allgemeine Astronomie, 3, Übungen, 2; Einführung in die Astrophysik, 2. — **Dällenbach**: Elektrizitätsdurchgang in verdünnten Gasen, 2 *g*. — **Heinemann**: Geschichte der Technik I: Elektrizität, 1 *g*; Geschichte der Optik und ihres Einflusses auf die moderne Weltanschauung, 1 *g*. — **Rüst**: Photographie I, 2; Photographisches Praktikum, 2; Kinematographie, 1. —

Berichtigung

zu der Arbeit „Über die Struktur der Atome" von F. J. Wisniewski. Diese Zeitschr. **29**, 716–721.

In dieser Arbeit ist an vielen Stellen durch ein Versehen bei der Korrektur in den Formeln als Index statt eines (großen) K ein (kleines) k stehen geblieben. Es muß also überall, z. B. bei den Intensitätswerten I, heißen: I_K statt I_k.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Ludwig Ebert für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. L. Ebert zum a. o. Professor für Physikalische Chemie an der Universität Würzburg, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Friedrich Adolf Willers zum ord. Professor für Mathematik und darstellende Geometrie an der Bergakademie Freiberg i. S.

Gestorben: Der a. o. Professor der Chemie an der Universität Kiel Dr. Gerhard Preuner, der Assistent am Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Berlin Dr. Gottfried Ramsauer, der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Victor Cordier von Löwenhaupt.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 22. Ausgegeben am 15. November 1928. Nr. 770. Printed in Germany. **29. Jahrgang.**

INHALT:

Originalmitteilungen:

Vorträge und Diskussionen von der 90. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg vom 16.—22. September 1928:

Besprechungen:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 22 | 15. November 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 24 am 10. Dezember 1928.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Theorie des Hörens. Die Schwingungsform der Basilarmembran.

(Mitteilung aus dem K. ung. Telegraphentechnischen Versuchsamt, Budapest.)

Von Georg v. Békésy.

1. Einleitung.

Bei der Bearbeitung einer Reihe von telephontechnischen Fragen stört das Fehlen einer Hörtheorie[1]), welche die mannigfachen Beobachtungen unter einem Gesichtspunkt wenigstens zu ordnen gestattet. Unter den bis jetzt bekannten Hörtheorien ist zweifellos die Resonanztheorie von Helmholtz die eleganteste. Sie nimmt an, daß die in der Basilarmembran liegenden Querfasern kleine Resonatoren darstellen, von denen jedes auf eine andere Frequenz anspricht. Da die Abstimmung der einzelnen Querfasern längs der Membran sich stetig ändert, so kommen bei der Erregung durch einen einzigen Ton nur einige eng aneinander liegende Resonatoren in Mitschwingung, so daß sich die Membran nur an dieser Stelle ausbuchtet und nur hier durch die Deformation die Nerven erregt werden. Da je nach der Frequenz des Tones andere Resonatorengruppen ansprechen, so kommt stets eine andere Stelle der Membran in Schwingung, so daß auf jede Frequenz ein anderer Nerv reagiert, wodurch sich eine Klanganalyse in einfacher Weise erklären läßt. Die Hauptschwierigkeit dieser Theorie bil-

1) Zusammenfassende Darstellungen: E. Waetzmann, Hörtheorien in Bethes Handb. d. Physiol. **11**, Berlin 1926; E. Meyer, Das Gehör, im Handb. d. Phys. von H. Geiger u. K. Scheel, **8**, Kap. 11, Berlin 1927.



det die Größe der Dämpfung der einzelnen Ohrenresonatoren, deren logarithmisches Dekrement von Helmholtz ungefähr zu $\vartheta = 0{,}1$ bestimmt wurde. Einerseits erscheint diese Dämpfung zu groß, um die Hörstörungen in der Schnecke zu erklären, wo es oft vorkommt, daß die Ohrenempfindlichkeit sich bei einer 10proz. Frequenzänderung um mehr als das hundertfache ändert, wozu offenbar die Resonanzschärfe bedeutend größer sein muß. Anderseits sind die Querfasern derart in die umgebenden häutigen Teile und der Ohrflüssigkeit eingebettet, so daß man aus rein anatomischen Gründen eine größere Dämpfung erwartet. Nach den Gegnern der Resonanztheorie darf man überhaupt die einzelnen Fasern nicht als Resonatoren auffassen, sondern die ganze Membran als solche stellt ein schwingungsfähiges Gebilde dar. Dies vielleicht mit um so mehr Recht, als bei einzelnen Tieren (Katzen, Vögel und Kaninchen) nicht eine Faserschicht in der Basilarmembran enthalten ist, wie beim Menschen, sondern deren zwei[1]), von denen die eine etwas dünnere Fasern besitzt.

Unter den Nichtresonanztheorien ist besonders die Schallbildtheorie von Ewald zu erwähnen. Bei ihr bilden sich, bei einer sinusförmigen Bewegung des Steigbügels, längs der Membran eine Reihe von stehenden Wellen, deren Wellenlänge von der Bewegungsfrequenz abhängt. Es ist Aufgabe des Nervensystems, die längs der gesamten Membran verteilten Reize zu dem Eindruck eines Tones zu vereinheitlichen. Je nach dem Schwingungsbild der Membran, dem Schallbild, empfindet man einen anderen Ton. Da auf diese Weise die gesamte Klanganalyse dem Nervensystem auferlegt wird, über dessen Tätigkeit man gegenwärtig noch vollständig im Unklaren ist, so können aus dieser Theorie keine weiteren Schlußfolgerungen gezogen werden.

Nach den Theorien von C. H. Hurst, P. Bonnier, E. ter Kuile und Max Meyer, erzeugt die Hin- und Herbewegung des Steigbügels einen längs der Membran fortschreitenden Wellenzug, der sich je nach den Dämpfungsverhältnissen mehr oder weniger rasch totläuft. Nach Hurst ist die Dämpfung des Wellenzuges sehr klein, da er sich bis zur Spitze der Schnecke und von dort zurück fortpflanzt. Es entstehen daher stehende Wellen, womit sich diese Theorie im Prinzip der Ewaldschen nähert. Die Betrachtungsweise ist jedoch verschieden, indem Ewald von dem eingeschwungenen Zustand ausgeht, während Hurst den Einschwingvorgang betrachtet. Von den anderen Forschern wird eine größere Dämpfung des Wellenzuges angenommen.

1) H. Held, Die Cochlea der Säuger und der Vögel, ihre Entwicklung und ihr Bau. Handb. d. Physiol. von Bethe. **11**. 405, Berlin 1926.

Den anatomischen Verhältnissen scheinen diese Theorien am meisten gerecht zu werden. Schwieriger ist es sich vorzustellen, wie bei dem fortschreitenden Wellenzug die Nerven gereizt werden sollen. Am verständlichsten ist die Annahme von ter Kuile, nach welcher die Länge der Membran, bis zu der sich der Wellenzug noch mit einer gewissen Amplitude fortpflanzt, die Tonhöhe bestimmt. Diese Länge ist für hohe Töne, wegen der kürzeren Wellenlänge kleiner als für tiefe Töne.

Der wesentliche Unterschied zwischen den verschiedenen Theorien besteht darin, daß für die Größe der mechanischen Eigenschaften der Basilarmembran, der Elastizität und der Reibung, stets verschiedene Werte angenommen werden. Nur so ist es möglich, daß für die gleiche Membrangröße und Anregungsart, sämtliche mögliche Schwingungsformen einer Membran vertreten sind. Man kann sich daher für die eine oder andere Theorie entscheiden, wenn die Schwingungsform der Basilarmembran bekannt ist. Da das Beobachten derselben unmittelbar in der Schnecke mit ganz außerordentlichen anatomischen Schwierigkeiten verbunden ist, so stellt man sich zunächst ein Ohrenmodell her, das allerdings den wirklichen Verhältnissen möglichst genau angepaßt sein muß, wenn die damit erhaltenen Ergebnisse entscheidend sein sollen.

2. Ohrenmodell.

Die Breite der Basilarmembran beträgt in der Nähe des Steigbügels etwa 0,1 mm und nimmt bis zur Schneckenspitze auf etwa 0,5 mm zu. Der mit Flüssigkeit ausgefüllte Raum über und unter der Basilarmembran ist ebenfalls nur etwa 2 mm hoch. Da es schwer ist bei so kleinen Dimensionen Versuche anzustellen, so kommt es zunächst darauf an das Ohrenmodell zu vergrößern, ohne daß die Bewegungserscheinungen geändert werden. Führt man sämtliche Abmessungen des Modelles mittels Verhältniszahlen auf eine Länge l, z. B. der Länge der Basilarmembran zurück, so sind zwei Modelle, bei denen diese Verhältniszahlen gleich sind, einander ähnlich. Damit auch die Bewegungen einander ähnlich werden, muß man dafür sorgen, daß trotz der Änderung der Längen um ein gewisses Vielfache, die Bewegungsgleichung die gleiche bleibt. Nun wird die Bewegung der Membran, sowie der umgebenden Flüssigkeit durch eine Reihe von Konstanten bestimmt, wie die für die Abmessungen des Modelles charakteristische Länge l, der Dichte ϱ und dem Reibungskoeffizienten η der Flüssigkeit, der Frequenz f der Bewegung des Steigbügels und der Elastizität ε der Membran. Diese wollen wir durch das Volumen pro Längeneinheit charakterisieren, um

das sich die Membran ausbuchtet, wenn auf der einen Seite der Druck um eine Einheit erhöht wird. Andere Konstanten, wie z. B. die Dichte der Membran, die sich von der Flüssigkeit nur wenig unterscheidet, wollen wir vernachlässigen, da wir sie sowieso nur sehr schwer nachbilden könnten. Da die Bewegungsgleichung sich in der Form

$$\varphi\,(l, \varrho, \eta, f, \varepsilon) = 0 \qquad (1)$$

schreiben läßt, d. h. dimensionslos ist, so können in ihr die Konstanten nur zu dimensionslosen Produkten gruppiert vorkommen. Von den fünf hier betrachteten Konstanten, von denen ε die Dimension

$$\varepsilon = \frac{\text{Volumen}}{\text{Länge} \times \text{Druck}} = m^{-1}\,l^3 t^2$$

hat, lassen sich nach bekannten Regeln zwei dimensionslose Produkte bilden, so daß die Bewegungsgleichung die Form hat

$$\Phi\left(\frac{\varrho f l^2}{\eta}, \frac{\eta^2 \varepsilon}{\varrho\, l^4}\right) = 0\,. \qquad (2)$$

Wählt man daher die Konstanten so, daß beim Übergang von dem einen Modell zum anderen Modell die Produkte konstant bleiben

$$\frac{\varrho f l^2}{\eta} = \text{konst. und } \frac{\eta^2 \varepsilon}{\varrho\, l^4} = \text{konst.}, \qquad (3)$$

so bleibt die Bewegungsgleichung dieselbe, womit auch die Bewegungen in den beiden Modellen einander ähnlich werden. Zunächst folgt aus der Gleichung (3) daß bei einer Vergrößerung des Modelles die Frequenz quadratisch abnehmen muß. Wichtiger sind die Folgerungen, die sich auf die Elastizität der Membran beziehen. Nimmt man die bei den Modellen verwendete Gummimembran als eine Membran ohne innere Steifheit an, so ist bekanntlich bei kleinem Druck die Ausbuchtung der Membran parabolisch und es bestimmt sich ε in Abhängigkeit von der Membranbreite d und der Querspannung τ nach der Formel

$$\varepsilon = \frac{d^3}{12 \cdot \tau}, \text{ daher ist } \frac{\eta^2 d^3}{\tau\, \varrho\, l^4} = \text{konst.} \qquad (4)$$

Da die Membranbreite d proportional l ist, so sieht man, daß bei einer Vergrößerung von l die Spannung τ der Membran abnehmen muß, damit die Bewegungsähnlichkeit erhalten bleibt. Da die Basilarmembran schon in Natur außerordentlich fein ist, so ist bei ihrer Nachbildung durch eine Gummihaut einer Vergrößerung des Modelles bald ein Ende gesetzt. Am zweckmäßigsten bewährte sich eine 4—5fache Vergrößerung. Auch ist ersichtlich, daß die Beobachtungen z. B. an dem von Wilkinson[1]) verwendeten Ohrenmodell, wo die Basilarmembran durch eine Reihe von abgestimmten Messingdrähten dargestellt wird, die mit Gelatine überklebt sind, nicht beweisend sind, da bei einer solchen willkürlichen Annahme der mechanischen Eigenschaften der Membran jede beliebige Schwingungsform erhalten werden kann.

1) Wilkinson, Nature **110**, 560, 1922.

Um das Modell den natürlichen Verhältnissen möglichst anzupassen, wurde zunächst der Reibungskoeffizient der Ohrenflüssigkeit bestimmt[1]). Da man der menschlichen Schnecke nur einen ganz kleinen Tropfen dieser Flüssigkeit entnehmen kann, so erfolgte dies derart, daß der Tropfen in einer senkrecht stehenden, etwa 50 cm langen Kapillarröhre aufgesaugt wurde, wobei sich dann die Fallgeschwindigkeit der etwa 20 cm langen Flüssigkeitssäule messen ließ, indem man die Durchgangszeiten der Flüssigkeitssäule an zwei, an der Kapillare angebrachten Marken ermittelt. Bezeichnet man die so bestimmte konstante Fallgeschwindigkeit mit v und nimmt ferner an, daß die Länge des Flüssigkeitsfadens l groß ist, gegenüber dem Radius r der Kapillare, so kann man näherungsweise die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes annehmen, wonach die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt hindurchfließende Flüssigkeitsmenge gleich ist

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4 p}{\eta\, l}\,.$$

Setzt man für den Druck den Wert

$$p = 981\, l\, \varrho$$

ein, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet, so ergibt sich

$$V = 981\,\frac{\pi}{8}\,\frac{\varrho\, r^4}{\eta} = \pi r^2 v, \text{ d. h. } v = 981\,\frac{\varrho\, r^2}{8\,\eta} \cdot \qquad (5)$$

Berücksichtigt man noch den Druckabfall, der durch die Reibung der Luftsäule entsteht, die von der Flüssigkeit mit sich genommen wird, so ist v noch mit

$$1 + \frac{\eta_0 (L - l)}{\eta\, l}$$

zu multiplizieren. Dabei bedeuten η_0 den Reibungskoeffizienten der Luft und L die gesamte Länge der Kapillare. Die auf diese Weise für den kinetischen Reibungskoeffizienten der Ohrenflüssigkeit bei 37^0 C erhaltenen Werte waren bei frischen und etwa 10tägigen Leichen die gleichen.

1) Ich möchte bei dieser Gelegenheit Herrn Privatdozenten Dr. Franz Kiss, I. Anatomisches Institut, Budapest, meinen herzlichsten Dank aussprechen, mir Gelegenheit gegeben zu haben, anatomische Studien zu treiben und ebenso Herrn K. Frauler, Präparator, für die dabei geleistete Hilfe.

Der aus einer größeren Meßreihe erhaltene Mittelwert betrug

$$\eta = 0{,}0197 \text{ C.G.S.}$$

Ebenso wurde die Dichte der Ohrenflüssigkeit bei 37^0 C zu

$$\varrho = 1{,}034$$

ermittelt. Es diente daher als Flüssigkeit im Ohrenmodell, wenn es in natürlicher Größe ausgeführt wurde, eine verdünnte Lösung von Glyzerin in Wasser. Bei den größeren Modellen wurde nur Wasser verwendet.

Schwierig ist es die Basilarmembran nachzubilden. Zunächst muß man auf ihre spiralige Krümmung, wie sie es in der Schnecke besitzt,

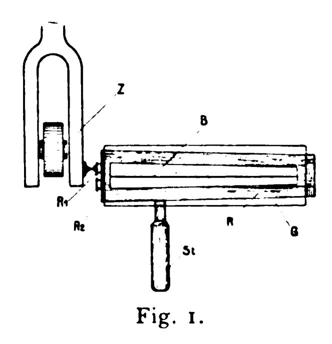


Fig. 1.

verzichten, da dadurch das Ohrenmodell ganz bedeutend vereinfacht werden kann. Wesentlich ist diese Krümmung für eine Hörtheorie nicht, da einige Tiere, z. B. der Ameisenigel, an Stelle der Schnecke nur eine ganz schwach gekrümmte Röhre besitzen. Ebenso muß die Reißnersche Membran vorläufig weggelassen werden. Dies scheint bis zu einem gewissen Grade berechtigt zu sein, da der Ductus cochlearis, der einerseits von der Reißnerschen Membran, anderseits von der Basilarmembran, begrenzt wird, von einer gallertigen Flüssigkeit ausgefüllt wird, so daß bei den zeitlich sich rasch ändernden Bewegungen

Fig. 2.

der Membran die Flüssigkeit nicht Zeit hat seitlich abzufließen. Es bewegen sich daher die beiden Membranen ganz gleich und können daher durch eine ersetzt werden. Das verwendete Ohrenmodell hatte daher die in Fig. 1 dargestellte Form. In der Mitte eines länglichen Messingrahmens ist ein dünnes Metallband *B* befestigt, das wie die Fig. 2 in Draufsicht zeigt, ausgeschnitten ist. Der schraffierte Teil des Ausschnittes ist von der, die Basilarmembran darstellenden und sich allmählich verbreiternden Gummimembran überzogen, während das Loch das Helikotrema darstellt, dessen Durchmesser beim menschlichen Ohr zwischen 0,5 und 0,8 mm liegt und eventuelle Druckdifferenzen zwischen den beiden Flüssigkeitskammern auszugleichen hat. Auf den Messingrahmen werden nun seitlich zwei Glasplatten *G* angeklebt, derart, daß sie auch an der Kante des Metallbandes *B* fest schließen und der sich nun so bildende Trog wird mit Flüssigkeit gefüllt. Das Ende der beiden kleinen Röhren R_1 und R_2, die das ovale und das runde Fenster darstellen, werden mit kleinen Gummimembranen verbunden und auf das eine von ihnen wird ein kleiner Messingstift, der Steigbügel, angeklebt, der seinerseits an die Zinke *Z* einer Stimmgabel befestigt ist, die von einem Röhrensender elektromagnetisch angetrieben wird. Das ganze Modell kann an dem Stiel *St* festgehalten werden.

Die Gummimembran wurde ähnlich wie bei Ewald aus Paragummilösung hergestellt, indem meist die fertige Lösung, wie sie die Radfahrer

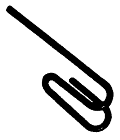


Fig. 3.

verwenden, mit dem gleichen Volumen Benzin verdünnt wurde. Von dieser Lösung wurde nun mittels einer Drahtschlinge oder bei größeren Membranen mittels des in der Fig. 3 dargestellten Drahtes eine gewisse Flüssigkeitsmenge aufgenommen und einmal gleichmäßig über das ausgeschnittene Metallband gestrichen. Man beginnt dabei zweckmäßig an der engeren Stelle des Ausschnittes, da dann ein Reißen der rasch trocknenden Membran infolge der starken Kapillarkräfte weniger oft eintritt. Es lassen sich auf diese Weise Membranen bis zu 5 mm Breite und 20 cm Länge herstellen. Zur Herstellung noch größerer Membranen diente ein Gefäß, das eine spaltförmige Ausflußöffnung besaß. Die so hergestellten Membranen sind schön gleichmäßig und vollkommen glatt im Ausschnitt des Metallbandes ausgespannt.

Es fragt sich nun, wie die Dicke der Gummimembran zu wählen ist, damit ihre elastischen Eigenschaften denen des menschlichen Ohres entsprechen. Leider ist die Elastizität der Ohrmembran nicht einmal der Größenordnung nach bekannt und voraussichtlich auch schwer direkt zu bestimmen. Um sie trotzdem richtig nachbilden zu können, muß nach einer Erscheinung gesucht werden, die von den elastischen Eigenschaften der Membran abhängt und genügend charakteristisch ist. Wird nun die Dicke der

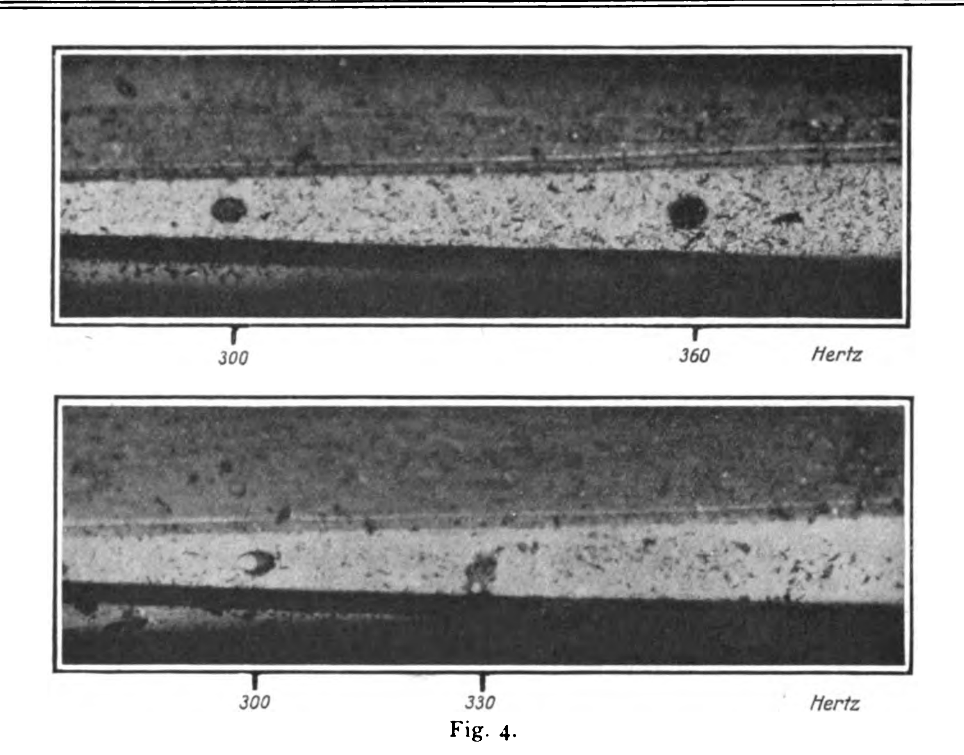


Fig. 4.

Gummimembran solange geändert, bis im Ohrenmodell die gleiche Erscheinung auftritt, so kann man sicher sein, daß die Gummimembran den natürlichen Verhältnissen angepaßt ist. Einen solchen, anatomisch einwandfreien und für diesen Zweck sehr geeigneten Befund stellen die Versuche von K. Wittmack[1]) dar.

Wurden nämlich Meerschweinchen einer starken Tonwirkung ausgesetzt, so zeigte es sich, daß je nach der Höhe des Tones verschiedene Teile der Basilarmembran zerstört werden, wie nachträglich durch Sektion festgestellt werden kann. Bei hohen Tönen werden die Teile in der Nähe des Steigbügels und bei tiefen Tönen die Teile nahe dem Helikotrema zerstört. Wählt man die Lautstärke des Tones nicht zu groß, so erstreckt sich dabei die Zerstörung nur auf einem kleinen Bereich der Basilarmembran.

Bei der Nachbildung dieser Versuche am Ohrenmodell wurde die Dicke der Gummimembran durch Auftragen konzentrierterer Lösungen allmählich verdickt. Es zeigte sich dabei, daß bei einer konstanten Erregerfrequenz dünne Membranen, wie sie etwa von Ewald benutzt werden, in der Nähe des Steigbügels auf einer größeren Strecke ganz unregelmäßig durchlöchert werden. Bei zunehmender Dicke wird die Zahl der Löcher immer kleiner und schließlich erhält man, so oft auch der Versuch wiederholt wird, nur ein einziges Loch in der Nähe des Steigbügels an der engsten Stelle der Membran. Verdickt man weiter die Membran, so wandert dieses Loch in reproduzierbarer und kontinuierlicher Weise den breiteren Stellen der Membran zu, bis schließlich bei ganz starken Membranen die Energie der Stimmgabel nicht mehr ausreicht die Membran zu durchlöchern, um so mehr, da sich die Druckschwankungen bei starken Membranen zum Teil schon über das Helikotrema ausgleichen.

Es ist somit leicht die richtige Membrandicke auszuwählen, bei der das Loch für eine Frequenz an der gleichen Stelle entsteht, wie bei dem natürlichen Ohr. Die entstehenden Löcher sind außerordentlich scharf, wie man an den beiden Mikrophotographien (Fig. 4) erkennen kann, die sich auf ein zweimal vergrößertes Ohrenmodell beziehen. Die schwarzen Flecken, die die durchlöcherten Stellen der Membran darstellen, entstehen derart, daß sich bei einer nicht zu großen Schwingungsamplitude das bei einer Ausbuchtung entstehende Loch, beim Zurückschwingen der Membran, wegen dem starken Kleben des Gummis teilweise wiederum zusammenklebt, wobei der feine Holzkohlenstaub, der zur Sichtbarmachung der Flüssigkeitsbewegungen verwendet wurde, ebenfalls am Gummi haften bleibt. Man kann diesen Vorgang unter dem Mikroskop bei stroboskopischer Beleuchtung deutlich verfolgen. Bei größerer Schwingungsamplitude bildet sich ein bleibendes Loch, wie es bei der zweiten Aufnahme deutlich sichtbar ist.

1) K. Wittmack, Beitr. z. Anat., Physiol., Pathol. u. Therapie d. Ohres, d. Nase u. d. Halses, **9**, 1—37, 1917.

Bemerkenswert ist, daß bei einer kleinen Frequenzänderung ganz nahe beieinander zwei Löcher hergestellt werden können, ganz gleichgültig, ob man zuerst den hohen oder tiefen Ton einwirken läßt. Dies deutet darauf hin, daß im Gegensatz zu den von Ewald beobachteten Schallbildern, die eine sehr gleichförmige Membran erfordern, selbst größere Unregelmäßigkeiten, wie ein Loch in der Membran, die Bewegung der benachbarten Teile der Membran nur sehr wenig beeinflussen, was auch mit den Erfahrungen bei krankhaften Hörstörungen übereinstimmt.

Betrachtet man bei einer so ausgewählten Membran, welche die Verhältnisse sicherlich wenigstens der Form nach richtig wiedergibt, die Verteilung der Schwingungsamplitude längs der Membran, bei Erregung durch einen Ton von etwa 500 Hertz, so sieht man, daß vom Steigbügel beginnend bis über die Mitte sämtliche Teile der Membran stark schwingen und nur in der Nähe des Helikotrema die Membran vollkommen ruhig ist. Die ungefähren Werte der Schwingungsamplitude sind in der Fig. 5 dargestellt. Da sich aus dieser Resonanzkurve für die Ohrenresonatoren sozusagen ein aperiodisches Mitschwingen ergibt, was mit zahlreichen ausgeführten Messungen über die Dämpfung der Ohrenresonatoren in Widerspruch steht, so wollen wir uns zunächst mit der Dämpfung der Ohrenresonatoren befassen.

Fig. 5.

3. Die Dämpfung der Ohrenresonatoren.

Es gibt prinzipiell zwei Methoden die Dämpfung eines Resonators zu bestimmen, die Aufnahme der Resonanzkurve und die Beobachtung der Einschwingzeit. Die direkte Aufnahme der Resonanzkurve der Ohrenresonatoren ist nur bei krankhaften Hörstörungen in der Schnecke möglich, besonders wenn die Nerven in einem größeren zusammenhängenden Abschnitt der Basilarmembran zerstört sind. Man hört dann einen Ton, der nur diesen Teil der Basilarmembran in Schwingung versetzt, überhaupt nicht. Ändert man nun die Frequenz so, daß allmählich auch die gesunden Teile der Membran in Schwingungen geraten, so nimmt die Lautstärke des Tones fortwährend zu, bis die dem ersten gesunden Nerv entsprechende Querfaser die maximale Schwingungsamplitude erreicht hat. Bei einer weiteren Änderung der Frequenz bleibt die Lautstärke des Tones konstant, da die maximale Schwingungsamplitude auf andere gesunde Nervenfasern übertragen wird. Man kann daher auf diese Weise sozusagen die eine Hälfte der Resonanzkurve der ersten gesunden Faser aufnehmen, indem man entweder die Zunahme der Lautstärke des Tones mit der Frequenzänderung bestimmt oder jedesmal die Schallstärke feststellt, bei der der Ton gerade hörbar wird. Derartige Hörkurven wurden schon von mehreren Forschern aufgenommen, wobei gelegentlich auch nachträglich anatomisch festgestellt werden konnte, daß die Hörstörung nicht etwa durch eine Unregelmäßigkeit in den mechanischen Eigenschaften der Basilarmembran bedingt war, sondern durch die Degeneration einer größeren Nervengruppe entstand. Ein Teil einer derartigen Hörkurve ist in Fig. 6 dargestellt. Die

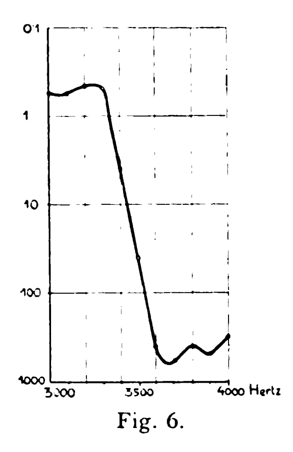


Fig. 6.

Ordinate gibt an, wievielmal größer der Schalldruck gegenüber dem bei einem normalen Ohr sein muß, damit der Ton hörbar wird. Die Abszisse stellt die Frequenz dar.

Man sieht, daß bei einer 10proz. Frequenzänderung sich die Hörschwelle um mehr als das tausendfache ändern kann.

Setzt man diese Werte in die bekannte Gleichung für das logarithmische Dämpfungsdekrement ϑ eines Resonanzsystemes ein

$$\vartheta = \pi \left(\frac{f^2}{f'^2} - 1\right) \sqrt{\frac{1}{\frac{i_r^2}{i^2} - 1}},$$

in der $\frac{f}{f'}$ die Verstimmung und $\frac{i_r}{i}$ das Verhältnis der Amplitude bei Resonanz und Verstimmung bedeutet, so ergibt sich für das logarithmische Dämpfungsdekrement ungefähr der Wert

$$\vartheta = 0{,}0006\,.$$

Diese scheinbar scharfe Resonanz steht mit sämtlichen anderen Messungen und Erfahrungen im Widerspruch, insbesondere sind einer solchen Dämpfung entsprechende lange Einschwingzeiten nicht beobachtet worden. Sie kann daher nicht

dazu verwendet werden die wirkliche mechanische Dämpfung der Ohrenresonatoren zu ermitteln. Vielmehr deutet sie daraufhin, daß die Reizung der einzelnen Nervenfasern nicht proportional ist der Schwingungsamplitude der entsprechenden Stelle der Basilarmembran, sondern ganz anders erfolgt. Dies folgt übrigens schon aus den Beobachtungen am Ohrenmodell, da man sich sonst bei der fast aperiodischen Bewegung der Membran nicht erklären kann, wie zwei Töne bei geringem Frequenzunterschied getrennt werden können.

Zur Beobachtung der Einschwingzeit der Ohrenresonatoren wurden mehrere Methoden ersonnen. Hartridge[1]) verwendete dazu einen Ton, dessen Phase er plötzlich ändert. Stimmt man nämlich einen Resonator auf die Erregerfrequenz ab und gibt plötzlich der Erregung eine Phasenänderung, z. B. um 180°, so nimmt die Amplitude des Resonators auf Null ab, um dann wiederum einzuschwingen. Den Phasensprung erzeugte Hartridge mittels einer Lochsirene, bei der an einer Stelle der Zwischenraum zwischen den beiden Löchern ausgelassen wurde. Er konnte dabei jedesmal, bei einem Phasensprung eine deutliche Abnahme der Lautstärke des Tones wahrnehmen.

Da man etwa daraus auf eine Dämpfung der Ohrenresonatoren schließen könnte, die bedeutend kleiner ist, als die vom Ohrenmodell zugelassene, so wurde dieser Versuch wiederholt.

Um die akustischen Einschwingvorgänge des Zimmers zu vermeiden, die bei Verwendung einer Lochsirene schwer zu übersehen sind, diente als Schallquelle ein Röhrengenerator mit Fernhörer.

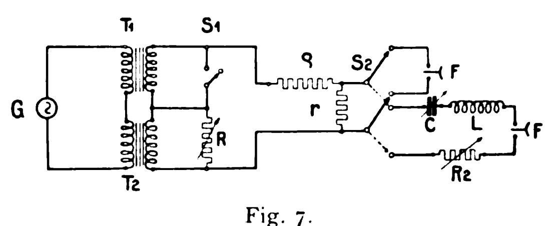


Fig. 7.

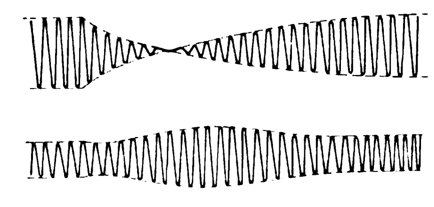
Der Phasensprung wurde so hergestellt, daß zu der ursprünglichen Wechselspannung plötzlich eine zweimal so große und der ersteren entgegengesetzt gerichtete Wechselspannung hinzugeschaltet wurde, was einem Polwechsel oder einem Phasensprung um 180° gleichkommt. Die entsprechende Schaltung ist in Fig. 7 dargestellt. G ist ein Generator, der auf die beiden Transformatoren T_1 und T_2 arbeitet. Ihre beiden Sekundärwicklungen sind einander entgegen geschaltet, und die eine von ihnen an den Widerstand R_1 geschaltet, der so eingestellt wird, daß beim Öffnen und Schließen des Schalters S_1 die Lautstärke des Tones im Fernhörer F gleich bleibt. r und $\varrho \gg r$ sind Schwächungswiderstände. Ist S_2 nach oben geschaltet, so gelangt der Wechselstrom unmittelbar in den Fernhörer.

Trotzdem die Versuche von mehreren Beobachtern wiederholt wurden, so konnte nicht festgestellt werden, daß im Augenblick beim Ein- oder Ausschalten von S_1 eine vorübergehende Änderung der Lautstärke eintrat. Um sicher zu sein, daß diese kurzdauernde Lautstärkenabnahme, welche bei dem Dämpfungsdekrement $\vartheta = 0{,}1$ und der verwendeten Schwingungszahl von 350 Hertz nach 0,02 sek. ihr Minimum erreicht, vom Ohr tatsächlich wahrgenommen werden kann, so wurde in der unteren Stellung des Schalters S_2 der Fernhörer in einen Schwingungskreis eingeschaltet, dessen Dämpfungsdekrement sich gemäß der Gleichung berechnet

$$\vartheta = 2\pi^2 f \cdot C\,(R_2 + r_2 + r_f + r)$$

und durch den veränderlichen Widerstand R_2 auf 0,1 eingestellt wurde, f bedeutet dabei die Frequenz des Generators und C die Kapazität des Schwingungskreises. In diesem Falle konnte eine sehr deutliche Lautstärkeabnahme beobachtet werden.

Diese vorübergehende Abnahme der Schwingungsamplitude eines Resonators bei einer Phasenumkehr ist übrigens nur dann zu beobachten, wenn der Resonator auf die Erregerfrequenz abgestimmt ist. Ist dies nicht der Fall, so schwingt der Resonator mit einer kleineren Amplitude und es nimmt im Gegenteil bei einer Phasenumkehr


Fig. 8.

seine Amplitude vorübergehend zu. Der zeitliche Ablauf der Schwingungen bei einer Phasenumkehr ist in Fig. 8 dargestellt. Die obere Schwingungskurve bezieht sich auf einen abgestimmten Resonator mit dem logarithmischen Dämpfungsdekrement $\vartheta = 0{,}1$ und die untere auf den gleichen Resonator, jedoch derart verstimmt, daß seine Amplitude im eingeschwungenen Zustand nur die Hälfte der bei Resonanz beträgt.

Experimentell lassen sich diese Verhältnisse sehr schön am Frahmschen Zungenfrequenzmesser zeigen. Polt man die Wechselspannung um, so nimmt die Amplitude der in Resonanz befindlichen Zunge ab, während die der beiden seitlichen Zungen gleichzeitig zunimmt.

1) H. Hartridge, E. Waetzmann, a. a. O. S. 684.

Da beim Ohr ganz ähnlich nicht nur die auf den betreffenden Ton abgestimmte Faser in Schwingung kommt, sondern auch die benachbarten etwas verstimmten Fasern, so wird durch ihr Verhalten die Amplitudenabnahme der abgestimmten Faser teilweise verdeckt. Es kann daher bereits theoretisch kein besonders starker Einfluß der Phasenänderung auf die Lautstärke eines Tones erwartet werden. Jedenfalls erlauben die Beobachtungen eine fast aperiodische Dämpfung der Ohrenresonatoren anzunehmen.

Die bekannteste Methode die Dämpfung zu bestimmen rührt von Helmholtz her. Sie besteht darin, daß man einen Ton in einem gewissen Takt unterbricht, derart, daß auf jedes Tönen eine gleich lange Pause folgt. Aus der Unterbrechungsgeschwindigkeit, bei welcher der Ton beginnt infolge der Ein- und Ausschwingvorgänge zusammen zu fließen, läßt sich die Dämpfung der Ohrenresonatoren bestimmen.

Da ganz allgemein jeder Reiz eine gewisse Zeit braucht, um zum Bewußtsein zu kommen, so fragt es sich ob diese Einschwingvorgänge nicht etwa durch die Trägheit der Nerven vorgetäuscht werden. Um dies zu entscheiden vergleicht man die maximale Unterbrechungsgeschwindigkeit eines Tones mit der eines Geräusches. Bei einem Ton schwingt der Resonator ein und aus, wobei sich die Pausen verwischen können, bei einem Geräusch aber werden in zeitlich rascher Folge stets andere Resonatoren erregt, so daß der Resonator nicht Zeit hat einzuschwingen. Es muß daher die Unterbrechungsgeschwindigkeit bei einem Geräusch bedeutend

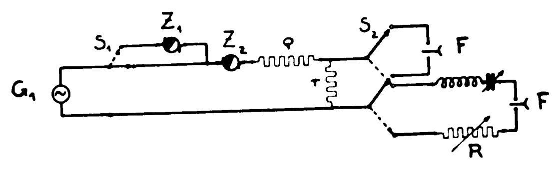


Fig. 9.

größer sein, als bei einem Ton, wenn die Ohrenresonatoren tatsächlich eine mehrere Schwingungen betragende Einschwingzeit haben.

Die zur Untersuchung dieser Frage verwendete Schaltung ist in Fig. 9 dargestellt. Z_1 ist ein Unterbrecher, der die vom Röhrengenerator G erzeugte Wechselspannung zerhackt, so daß man im Fernhörer F ein Geräusch hört. Z_2 ist ebenfalls ein rotierender Unterbrecher, dessen Unterbrechungsgeschwindigkeit mittels eines Umdrehungszählers ermittelt werden kann. Der Schalter S_1 dient dazu, um bald den Ton oder das Geräusch einzuschalten. Um festzustellen ob durch den Unterbrecher Z_1 der Ton genügend zerhackt wird, kann in der unteren Stellung des Schalters S_2 ein Schwingungskreis eingeschaltet werden. Ändert man dessen Abstimmung, so kann man sich leicht überzeugen, daß in dem Geräusch sämtliche Töne des Hörbereiches enthalten sind. Um zu zeigen, daß bei dem Geräusch der Resonator nicht Zeit hat einzuschwingen, wurde das Dämpfungsdekrement des Schwingungskreises mittels des veränderlichen Widerstandes auf $\vartheta = 0{,}1$ eingestellt. Stimmt man nun den Schwingungskreis auf die Erregerfrequenz ab, so wurde die Lautstärke des Tones im Fernhörer etwa achtmal kleiner, wenn der Unterbrecher Z_1 in Tätigkeit gesetzt wurde. Ein Zeichen dafür, daß der Schwingungskreis durch das Geräusch in zeitlich so rasch wechselnder Weise angestoßen wird, daß er nicht einschwingen kann.

Mit dieser Methode der gestörten Resonanz wurden nun eine Reihe von Messungen ausgeführt, indem der Beobachter, S_2 nach oben geschaltet, zunächst bei einem Ton die Unterbrechungsgeschwindigkeit von Z_2 solange vergrößerte, bis die Pausen nicht mehr ganz rein erschienen und hierauf dieselbe Messung bei dem Geräusch wiederholte. Die beim Ton gemessene Unterbrechungszahl dividiert durch die beim Geräusch erhaltene Unterbrechungszahl ergab bei vier Beobachtern die folgenden Werte:

0,912; 1,009; 1,071; 1,200; im Mittel 1,049.

Es ist hieraus ersichtlich, daß der Ton gleich rasch seine Endlautstärke erreicht, wie das Geräusch, was darauf hinweist, daß sozusagen kein Einschwingen der Ohrenresonatoren eintritt. Schaltet man anderseits den Fernhörer in den Schwingungskreis ein, dessen Dämpfung auf 0,1 eingestellt wurde, so nimmt die Unterbrechungsgeschwindigkeit bei dem Ton um das 1,5fache ab.

Aus diesen Ergebnissen läßt sich daher mit Bestimmtheit folgern, daß das logarithmische Dämpfungsdekrement der Ohrenresonatoren wesentlich größer ist als $\vartheta = 0{,}1$, was auch mit den Beobachtungen am Ohrenmodell übereinstimmt.

Außerdem wurde auch zur Bestimmung des Dämpfungsdekrementes die gegenseitige Beeinflussung zweier Töne verwendet. Insbesondere bedienten sich R. L. Wegel und C. E. Lane[1]) der Tonverdeckung. Man beobachtet nämlich, daß die Lautstärke, bei der ein Ton eben wahrnehmbar wird, ganz bedeutend erhöht wird, wenn gleichzeitig ein zweiter lauterer Ton vorhanden ist. Bezeichnet man dieses Verhältnis um das die Hörgrenze gehoben wird als Verdeckung, so zeigt es sich, daß bei normalen Lautstärken, wo die nichtlinearen Eigenschaften des Ohres noch keine wesentliche Bedeutung haben, die Verdeckung klein ist, wenn der Frequenzunterschied zwischen

1) R. L. Wegel u. C. E. Lane, Phys. Rev. **23**, 266, 1924; Electrical Communications **3**, 49, 1924.

den beiden Tönen groß ist. Nähert sich dagegen die Frequenz des verdeckten Tones derjenigen des stärkeren verdeckenden Tones, so nimmt die Verdeckung zu, bis schließlich Schwebungen auftreten und wegen dieser neuen Erscheinung die Verdeckung abnimmt. Fallen die beiden Frequenzen zusammen, so gibt die Verdeckung die Unterschiedsempfindlichkeit bei einer Amplitudenänderung des Tones an. Trägt man daher die Verdeckung in Abhängigkeit von der Frequenz auf, so erhält man, wenn man das Gebiet der Schwebungen wegläßt, eine Kurve, die leicht zu einer Art Resonanzkurve ergänzt werden kann.

Um nun aus dieser Kurve auf die Schwingungsform der Basilarmembran schließen zu können, muß man folgendes annehmen.

Zunächst, daß die Reizung der Nerven an jeder Stelle der Basilarmembran proportional ist der Schwingungsamplitude so, daß ein zweiter schwächerer Ton nur dann wahrgenommen werden kann, wenn die durch ihn bedingte Zunahme der Schwingungsamplitude in einem gewissen Verhältnis steht zu der Schwingungsamplitude, wie sie dem verdeckenden Ton an jener Stelle der Basilarmembran entspricht. Diese Annahme erscheint, gemäß den dargestellten Beobachtungen bei krankhaften Hörstörungen und ebenso wegen der im nächsten Abschnitt zu erwähnenden Kontrastwirkung der Nervenreize, noch nicht genügend begründet zu sein.

Ferner muß man auch annehmen, daß im Nervensystem, sowohl im peripheren als auch im zentralen, nicht etwa eine ähnliche Verdeckung der Empfindungen eintritt, die deshalb als möglich erscheint, da Untersuchungen vorliegen, nach denen ein Nerv gleichzeitig mehrere Hörzellen durchsetzt, so daß die Reizung eines Nerves durchaus nicht etwa punktförmig erfolgt.

Leider gelang es bis jetzt nicht, die Verdeckung durch die Nerven von der durch die Schwingungsform der Membran bedingten zu trennen. Denn die einfachste Methode, den verdeckten Ton in das eine Ohr und den verdeckenden in das andere Ohr zu verlegen, um auf diese Weise die Verdeckung des zentralen Nervensystemes zu erhalten, versagt wegen der ganz außerordentlichen Fähigkeit des Nervensystemes die Schallwirkungen in den beiden Ohren zu trennen. Man muß daher dem verdeckenden Tone derart große Amplituden geben, daß schon infolge der Knochenleitung genügend Schall in das andere Ohr gelangt, um dort den Ton zu verdecken, so daß sich die gemessene Verdeckung nicht auf das Nervensystem bezieht. Bevor jedoch der Anteil der Nerven an der Verdeckung nicht quantitativ festgestellt ist, braucht man die so ermittelte Schwingungsform der Basilarmembran nicht für unbedingt richtig zu erachten.

Um einen Begriff zu haben, in welchem Maße man die Schallwirkungen in den beiden Ohren bei Gebrauch von Fernhörern als Schallquellen auseinander zu halten vermag, dient die Fig. 10. Die Ordinate gibt an, um wievielmal sich die Hörgrenze eines Tones bei Verwendung eines Fernhörers in einem Ohr erhöht, wenn gleichzeitig der gleiche Ton im anderen Ohr eine Lautstärke besitzt, die ein in der Abszisse angegebenes Vielfache der Hörgrenze ist.

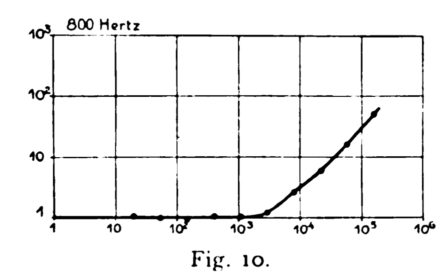


Fig. 10.

Wie man sieht, kann die Lautstärke des Tones im einen Ohr bereits das tausendfache der Lautstärke im anderen Ohr betragen, ohne daß dort eine Beeinflussung der Hörgrenze eintritt. Die erhaltene Verdeckungskurve bei Erregung beider Ohren mit dem gleichen Ton reiht sich gut ein in die von R. L. Wegel und C. E. Lane[1]) erhaltenen Werte der Verdeckung bei verschiedenen Tonfrequenzen.

Ein der vorigen Methode verwandtes Verfahren zur Bestimmung der Dämpfung der Ohrenresonatoren rührt von H. Barkhausen und G. Lewicki[2]) her. Sie bestimmten nämlich wie sich die gesamte Lautstärke zweier gleich lauter Töne ändert, wenn man ihre Frequenz sich einander nähern läßt. Ist der Frequenzunterschied zwischen den beiden Tönen sehr groß, so ändert sich die Lautstärke nicht, wenn dem einen Tone noch der andere Ton hinzugeschaltet wird. Nähern sich dagegen die beiden Frequenzen, so nimmt die Lautstärke der beiden Töne zusammen immer zu, gegenüber der Lautstärke eines ein-

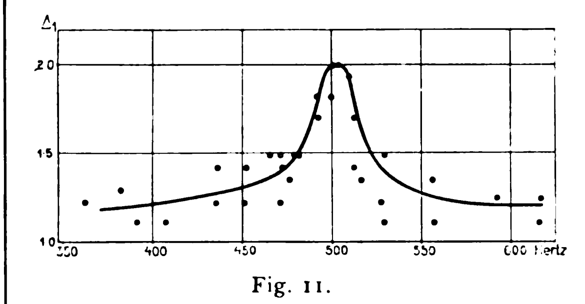


Fig. 11.

1) A. a. O.
2) H. Barkhausen u. G. Lewicki, Physik. Zeitschr. **25**, 537, 1924.

zigen Tones, bis schließlich beim Zusammenfallen der beiden Frequenzen die Lautstärke doppelt so groß wird. Die Frequenzabhängigkeit dieser Lautstärkezunahme stellt ebenfalls eine Art Resonanzkurve dar und ist in Fig. 11 dargestellt. Dabei wurde der eine Ton mit 500 Schwingungen konstant gehalten und ein zweiter Ton, dessen Frequenz die Abszisse angibt auf gleiche Lautstärke eingestellt und darauf dem ersten Ton hinzugeschaltet, wobei dann festgestellt wurde, wievielmal die Amplitude des ersten Tones erhöht werden muß, damit der Ton gleichlaut erscheint, wie die beiden Töne zusammen. Die erhaltenen

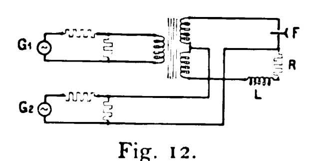


Fig. 12.

Werte Δ_1 sind in der Figur als Ordinaten eingetragen, wobei sich die Kreise und Punkte auf zwei verschiedene Beobachter beziehen.

Um den Fernhörer F gleichzeitig mit zwei Wechselströmen zu erregen, ohne daß sich die beiden Wechselstromquellen G_1 und G_2 gegenseitig beeinflussen, diente die in der Fig. 12 dargestellte Brückenschaltung, in welcher der Widerstand R und die Selbstinduktion L dem Scheinwiderstand des Fernhörers angepaßt sind oder durch einen zweiten gleichartigen Fernhörer ersetzt werden.

Daß nun die so erhaltene Kurve nicht nur durch die mechanischen Eigenschaften der Basilarmembran bestimmt wird, sondern auch die Nerventätigkeit eine bedeutende Rolle spielt, ersieht man daraus, daß man beim Wiederholen des

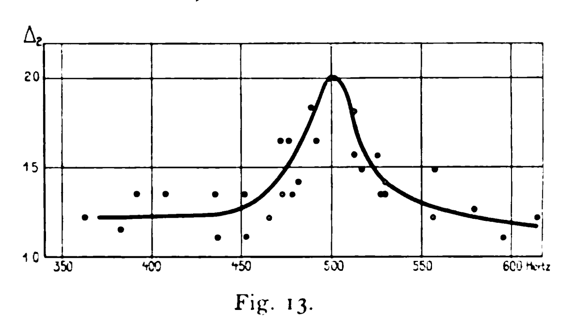


Fig. 13.

gleichen Versuches, mit dem Unterschiede, daß die beiden Töne nicht einem Ohre, sondern jeder Ton einem anderen Ohr zugeführt wird, so daß wegen der kleinen Schallüberleitung von einem Ohr zum anderen Ohr keine gegenseitige mechanische Beeinflussung der beiden Töne eintreten konnte, doch eine ganz ähnliche Resonanzkurve erhält. Sie ist in der Fig. 13 dargestellt.

Da bei diesen Lautstärkenverhältnissen eine so große gegenseitige Beeinflussung zweier Töne im zentralen Nervensystem stattfindet, so ist es sehr unwahrscheinlich, daß an der Hörgrenze bei der Tonverdeckung keine gegenseitige Beeinflussung eintreten sollte.

Man kann daher zusammenfassend behaupten, daß die bis jetzt bekannten Beobachtungen über die Dämpfung der Ohrenresonatoren einem sozusagen fast aperiodischen, aber jedenfalls bedeutend größerem Dämpfungsdekrement als $\vartheta = 0{,}1$ nicht widersprechen.

4. Das Kontrastgesetz.

An die von R. L. Wegel und C. E. Lane verwendete Methode zur Bestimmung der Schwingungsform der Basilarmembran anknüpfend, fragt es sich ganz allgemein, ob man annehmen darf, daß die Nervenreizung an jeder Stelle der Membran proportional ist der an jener Stelle stattfindenden mechanischen Reizung. Betrachtet man nämlich im Gehirn den maschigen Charakter der Nervenzellen, so erwartet man, daß sich die Nerven die eine Masche bilden, gegenseitig beeinflussen, so daß die Reizwirkung, die an einer Stelle der Basilarmembran erfolgt auch durch die Reizstärke rechts und links von dieser Stelle beeinflußt wird. E. Mach war der erste, dem es gelang auf optischem Gebiete den Beweis dafür zu erbringen[1]).

Es ließ sich nämlich zeigen, daß einer in Fig. 14a dargestellten räumlich verteilten Reizstärke eine in Fig. 14b dargestellte empfundene Reizstärke entspricht, d. h. man sieht einen dunklen Fleck an jeder Stelle, wo die Helligkeit sich räumlich so ändert, daß die, die Intensität der Helligkeit darstellende Kurve eine Krümmung nach unten hat, wie in der Figur bei a, da dort die Helligkeit scheinbar stark abnimmt. Dort da-

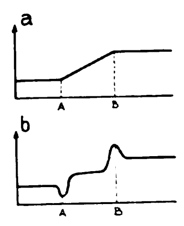


Fig. 14a. 14b.

gegen, wo die Intensitätskurve der Helligkeit eine Krümmung nach oben besitzt, entsteht eine scheinbare Erhöhung der Helligkeit. Diese Abweichungen von der tatsächlichen Helligkeitsverteilung sind

1) E. Mach, Sitzungsber. d. Akademie d. Wiss. Wien, II. Abt. **52**, 303, 1865; **54**, 131, 1866; **57**, 11, 1868. Weitere Literaturangaben bei Kühl, Physik. Zeitschr. **29**, 1, 1928.

nicht etwa klein, sondern sind von der Größenordnung der Helligkeit selbst, so daß die empfundene Helligkeitsverteilung ganz wesentlich von der wirklichen abweicht. Betrachten wir z. B.

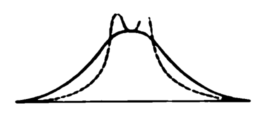
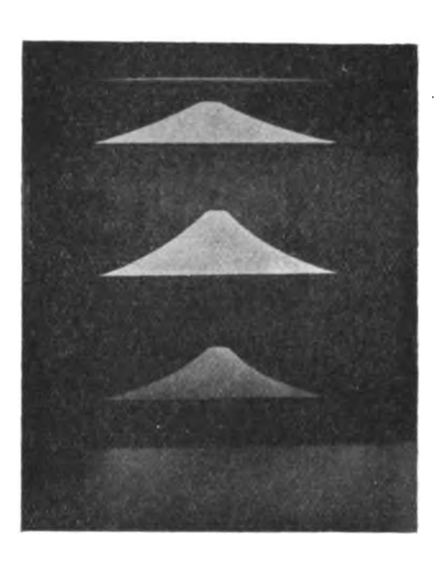


Fig. 15.

eine Helligkeitsverteilung, wie sie der Reizwirkung auf der Basilarmembran entspricht, wenn diese gleichzeitig von zwei Tönen erregt wird, deren Frequenz sich nur sehr wenig voneinander unterscheiden. Es fließen dann die beiden Resonanzkurven derart zusammen, daß sich an der Spitze ein Gebiet mit konstanter Reizstärke ausbildet, wie in Fig. 15 die stark ausgezogene Kurve darstellt. In diesem Falle erwartet man, daß die beiden Töne voneinander nicht getrennt werden können. Infolge des Kontrastgesetzes aber wird der empfundene Reiz sich so verhalten, wie es die punktierte Linie in der Figur zeigt, so daß die beiden Frequenzen noch sehr gut voneinander getrennt werden können. Man kann dies an den Photographien Fig. 16 nachprüfen, welche eine schwarze Trommel darstellen, auf der obiger Resonanzkurve entsprechende weiße Flächen aufgemalt sind. Befindet sich die Trommel in Rotation, so sind in der Mitte zwei deutliche weiße Streifen sichtbar.



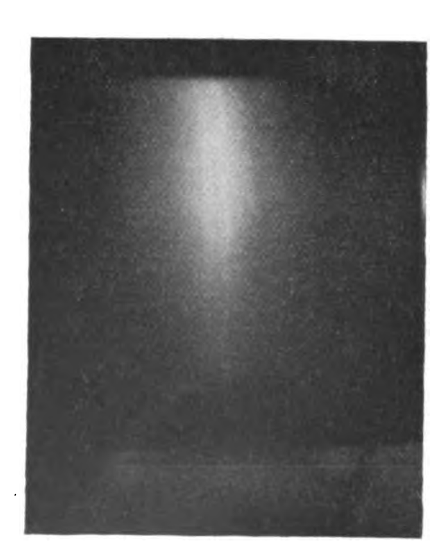


Fig. 16.

Da das Entstehen der Kontrastwirkung aus anatomischen Gründen zum größten Teil dem zentralen Nervensystem zuzuschreiben ist, so erwartet man, daß es nicht nur auf optischem Gebiet, sondern auch auf der Basilarmembran zur Geltung kommt, wo die Nerven ähnlich der Netzhaut verteilt sind. Wenigstens ist auch beim Tastsinn auf der Oberfläche der Haut die Kontrastwirkung deutlich nachzuweisen.

Man braucht zu diesem Zweck nur aus einem stärkeren Pappdeckel etwa Druckkörper auszuschneiden, wie sie durch die schwarzen Flächen in der Fig. 17 dargestellt sind. Drückt man nun

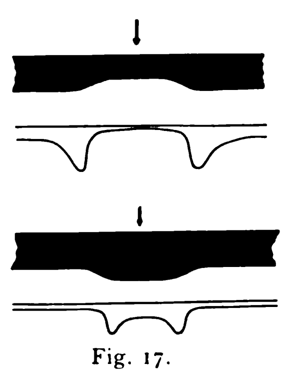


Fig. 17.

diese Körper für einen kurzen Augenblick z. B. gegen die Hautfläche des Oberarmes, so empfindet man nicht etwa eine Druckverteilung, wie sie dem Druckkörper entspricht, sondern eine andere, die die unterhalb dem Druckkörper befindliche Kurve darstellt und deutlich die Kontrastwirkung zeigt. Ganz korrekt ist dieser Versuch allerdings nicht, da durch den Druckkörper nicht nur die Nerven in der Haut gereizt werden, sondern auch zum Teil die Nerven in den darunter liegenden Muskelschichten.

Es kommt daher unseres Erachtens nach dem Machschen Kontrastgesetz in der Theorie des Hörens eine ganz bedeutende Rolle zu. Denn es erzielt eine gewisse schematisierende Wirkung der

Empfindungen, indem es z. B. bei einer Reizverteilung, wie es einer Resonanzkurve entspricht, gerade das Maximum ganz bedeutend zuspitzt, da dort die stärkste Krümmung in der Verteilung der Reizstärke vorhanden ist, während rechts und links davon die Reizwirkung herabgesetzt wird, da dort die Einbuchtung nach unten gerichtet ist. Es wird somit die Hypothese von O. Fischer und E. Budde[1]), nach der jeweils nur die maximale Amplitude der Basilarmembran bei der Reizwirkung zur Geltung kommen soll, vom Kontrastgesetz wesentlich unterstützt. Gleichzeitig bewirkt die Kontrastwirkung, indem es die Änderungen in der Amplitudenverteilung hervorhebt, eine bedeutende Erhöhung der Auflösungsfähigkeit des Ohres, so daß die gegenseitige Beeinflussung zweier Töne und z. B. das Heraushören eines Tones aus einem Akkord wohl ohne Berücksichtigung des Kontrastgesetzes nicht erfolgreich behandelt werden kann.

Nachdem wir nun gesehen haben, daß die Versuche, die Annahme einer fast aperiodischen Dämpfung der Ohrenresonatoren zum Teil bestätigen, zum Teil noch nicht genügend ausgearbeitet sind, als daß sie maßgebend wären, so wollen wir uns nun den weiteren Betrachtungen des Ohrenmodelles zuwenden.

5. Die Schwingungsform der Gummimembran im Ohrenmodell.

Um beim Ohrenmodell nicht nur die Bewegung der Membran, sondern auch die der umgebenden Flüssigkeit verfolgen zu können, wurde in die Flüssigkeit ganz feiner Holzkohlenstaub und für photographische Zwecke fein zerriebene Aluminium-Folien oder Blattgold eingemischt. Setzt man nun die Stimmgabel in Tätigkeit, so wird dieser feine Staub, der sich auf die Membran absetzt, mit großer Geschwindigkeit vom Steigbügel zum Helikotrema befördert. Dies weist daraufhin, daß ein fortschreitender Wellenzug in der Richtung dem Helikotrema zu, vorhanden ist. Im eingeschwungenen Zustand, der sozusagen augenblicklich eintritt, kommt die Flüssigkeit in der Nähe des Helikotremas vollkommen zur Ruhe, so daß selbst bei stärkster Vergrößerung keine Bewegung des Pulvers beobachtet werden kann. Es gleichen sich somit sämtliche Druckschwankungen über die Membran aus, so daß über dem Helikotrema überhaupt keine Flüssigkeitsbewegung erfolgt.

Demgegenüber bilden sich an einer gewissen Stelle der Membran ober- und unterhalb derselben

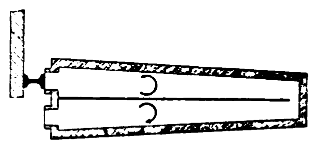


Fig. 18.

zwei scharf ausgeprägte Wirbel aus, die in der Fig. 18 dargestellt sind. Die photographische Aufnahme Fig. 19 stellt die beiden Wirbel ebenfalls dar, wobei gleichzeitig zu sehen ist, daß das Aluminiumpulver hauptsächlich in der Nähe des Helikotremas angehäuft ist. Auf der Photo-



Fig. 19.

1) E. Budde, Abderhaldens Handb. d. biol. Arbeitsmeth. Abt. V, Teil 71, H. 1, S. 175. 1920.

graphie sind die Wirbel nicht so scharf ausgeprägt, wie in Wirklichkeit, da wegen der starken Beleuchtung, die wegen der Vergrößerung angewendet werden mußte, ein einseitiges Erwärmen und damit eine langsame Bewegung der Flüssigkeit eintrat.

Der Durchmesser des Wirbels ist stets gleich der Flüssigkeitshöhe über der Membran und ihre Wirbelgeschwindigkeit ist der Amplitude des Steigbügels proportional bis zu den kleinsten Bewegungen herab.

Je nach der Frequenz des Steigbügels befindet sich der Wirbel an einer anderen Stelle der Membran, bei tiefen Frequenzen ist er ganz in der Nähe des Helikotremas, bei hohen Frequenzen in der Nähe des Steigbügels. Ebenso ist der Wirbel, konstante Erregerfrequenz vorausgesetzt, bei einer dicken Membran mehr dem Steigbügel näher, als bei einer dünnen Membran. Da die Gummimembran stark Wasser absorbiert, so nimmt ihre Elastizität mit der Zeit stark ab, womit der Wirbel ebenfalls dem Steigbügel zu wandert.

Das Entstehen dieser Wirbel läßt sich einfach erklären. Man kann nämlich in erster Annäherung die Gummimembran, ähnlich der Resonanztheorie in einzelne Querbänder zerlegen, deren Länge bei konstanter Breite, an den verschiedenen Stellen der Membran verschieden ist, so daß man die einzelnen Bänder als getrennte Resonatoren auffassen kann, deren Eigenfrequenz dem Helikotrema zu, kontinuierlich abnimmt. Setzt man nun ein derartiges System von Resonatoren einer sinusförmigen Erregung aus, so ergeben die Schwingungsamplituden zu verschiedenen Zeitpunkten eine Kurvenschar, ähnlich, wie sie die Fig. 20

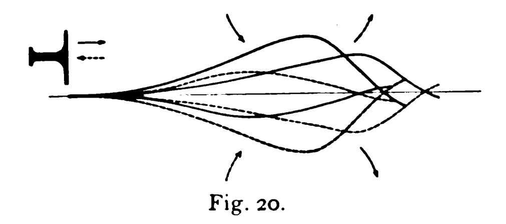


Fig. 20.

zeigt. Befindet sich der Steigbügel ganz links, so ist die Membran stark nach oben ausgebuchtet. Bewegt sich nun der Steigbügel nach rechts, was durch die stark ausgezogenen Kurven und Pfeile angedeutet ist, so buchtet sich die Membran allmählich ein, bis sie in der stark ausgezogenen punktierten Kurve ihre maximale Ausbuchtung nach unten erreicht hat.

Aus den dazwischen liegenden Kurven ist dabei deutlich zu ersehen, daß während dieser Bewegung der Membran die links oben befindliche Flüssigkeitsmenge in der Richtung des eingezeichneten Pfeiles angesaugt wird. Bei dem Zurückschwingen der Membran zeigen die punktierten Kurven, daß nun dieselbe Flüssigkeitsmenge nach rechts zu wegbefördert wird.

Es tritt somit beim Schwingen der Membran an ihrer Oberfläche in der Nähe der Resonanzstelle, der Stelle mit der höchsten Ausbuchtung, eine dauernde Beförderung der Flüssigkeit von den höher abgestimmten Resonatoren zu den tieferen. Natürlich muß die so beförderte Flüssigkeitsmenge oberhalb der Membran wiederum zurückfließen, wodurch eine Wirbelbewegung entsteht. Auf der unteren Seite der Membran vollzieht sich ganz das Gleiche, nur im Spiegelbild. Aus diesem Sachverhalt sind das Wandern der

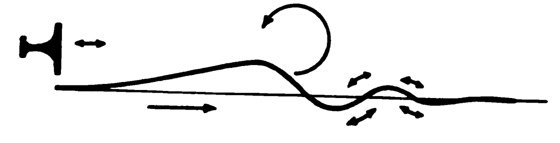


Fig. 21.

Wirbel bei einer Frequenzänderung und die übrigen erwähnten Erscheinungen ohne weiteres verständlich. Da die Schwingungsamplitude an der Stelle wo sich der Wirbel befindet, ihr Maximum besitzt, so tritt das Durchlöchern der Membran stets an dieser Stelle ein.

Die genaue Bewegung der Membran kann man sehr gut verfolgen, indem man bei stroboskopischer Beleuchtung die einzelnen, an der Membran haftenden Kohleteilchen im Mikroskop beobachtet und den Unterbrechungstakt der Lichtquelle so einstellt, daß die Membran etwa eine Schwingung pro Sekunde auszuführen scheint. Man sieht dann ganz deutlich, daß die Membran nicht etwa in stehenden Wellen schwingt, sondern daß sich die Wellen dauernd dem Helikotrema zu fortpflanzen, wobei sie ziemlich rasch ihre Amplitude einbüßen.

Eine augenblickliche Schwingungsform der Membran ist in der Fig. 21 dargestellt. Der von der Resonanzstelle dem Steigbügel zu liegende Teil der Membran schwingt dabei fast vollkommen gleichfasig, an der Resonanzstelle tritt ein Phasensprung ein und von hier ab bilden sich Wellen aus, deren Wellenlänge bei der verwendeten gleichmäßigen Gummimembran beim Fortschreiten immer kleiner wird. An der Stelle, wo sich die Wellen beginnen auszubilden, hört die Wirbelbewegung der Flüssigkeit auf, da sich die Flüssigkeit dort nur hin und her bewegt, ähnlich, wie es die eingezeichneten Pfeile anzeigen.

In der Fig. 22 ist nun diese Schwingungsform der Membran für eine tiefere und eine höhere Frequenz photographiert.

Gegenüber ähnlichen, von Ewald aufgenommenen Schwingungsformen von Gummimembranen, sind diese Aufnahmen bei strobo-

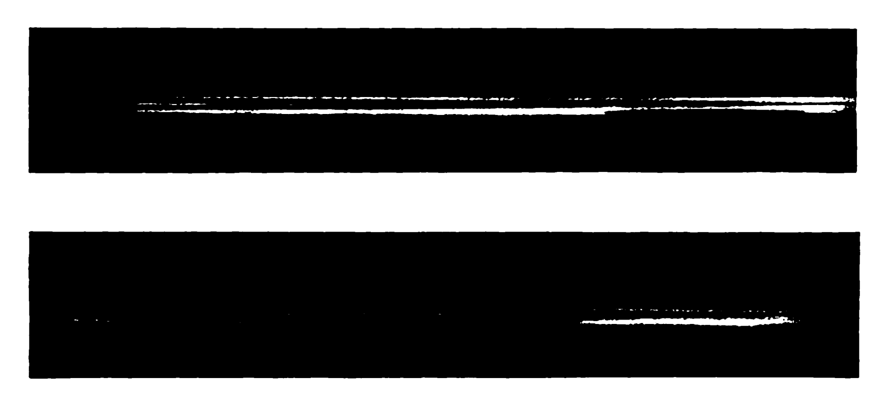


Fig. 22.

skopischer Beleuchtung aufgenommen, da wir beim Ohrenmodell keine stehenden Wellen beobachten konnten. Um die Schwingungen sichtbar zu machen, fiel das Licht unter einem ganz kleinen Winkel auf die Membran, die dabei gut beobachtet werden kann, da die Membran stark Wasser aufsaugt und damit trübe wird. Treten nun Wellen auf, so gelangen die Wellen-

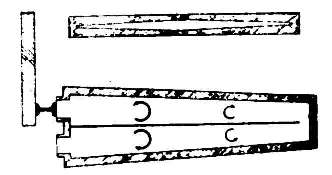


Fig. 23.

täler in den Schatten des die Membran haltenden Metallrahmens, womit die Membran an dieser Stelle dunkel erscheint, so daß die Einbuchtungen der Membran gut feststellbar sind.

Um beurteilen zu können, wie weit der Ductus cochlearis die Schwingungsform der Membran beeinflußt, wurde ein zweites Ohrenmodell konstruiert, in dem die Reißnersche Membran und der Ductus cochlearis nachgebildet sind. In der Fig. 23 stellt B die Basilarmembran und R die Reißnersche Membran dar, die im Gegensatz zur Basilarmembran nur einen ganz schmalen Rahmen besitzt, der mit einer ganz dünnen Membran überspannt wird, so daß seine elastischen Eigenschaften gegenüber denen der Basilarmembran wohl kaum zur Geltung kommen. Der Zwischenraum zwischen den beiden Membranen wurde nun mittels des Trichters mit einer zähen Flüssigkeit, z. B. Glyzerin oder Honig, ausgefüllt, um die im Ductus cochlearis vorhandene Masse nachzubilden. Ferner stellt noch die kleine seitliche Bohrung H das Helikotrema dar.

Es zeigt sich nun dabei, daß die Schwingungsform der Basilarmembran prinzipiell die gleiche ist wie früher, nur die Zahl der beobachteten Wellen beschränkt sich meist auf zwei, infolge der erhöhten Dämpfung. Der Wirbel über der Basilarmembran ist ebenfalls sichtbar, ebenso ein mehr verbreiteter Wirbel unter der Reißnerschen Membran, als Zeichen dafür, daß bei den raschen Schwingungen infolge der großen Zähigkeit der Flüssigkeit die beiden Membrane miteinander schwingen.

Ferner zeigen die Versuche, daß das Durchlöchern der Basilarmembran nicht mehr so punktförmig erfolgt, wie früher, sondern daß stets größere Bereiche zerstört werden, was auch mit den Erfahrungen am wirklichen Ohr übereinstimmt.

Nachdem nun die Verhältnisse am Ohrenmodell genügend untersucht worden sind, wollen wir versuchen festzustellen, ob die Bewegung der menschlichen Basilarmembran der im Ohrenmodell beobachteten entspricht.

6. Die Schwingungsform der Basilarmembran.

Um zu untersuchen, ob die Wirbelbildung der Flüssigkeit oder das starke Strömen der Flüssigkeit längs der Basilarmembran beim Einsetzen eines starken Tones im Ohr tatsächlich vorhanden

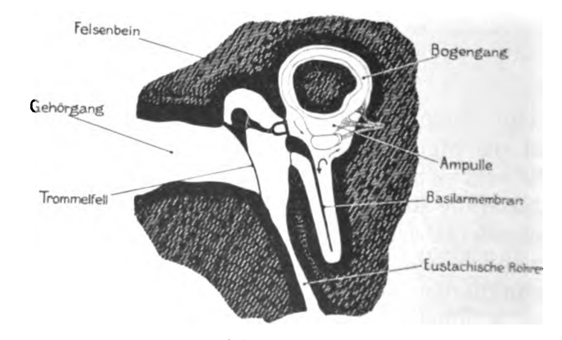


Fig. 24.

ist, betrachten wir die Fig. 24, die einen schematischen Querschnitt durch die Schnecke und den senkrechten Bogengang und den Ampullen darstellt, in denen bekanntlich das Gleichgewichts-

empfinden des Menschen geregelt wird. Tritt beim Einsetzen eines starken Tones tatsächlich ein Strömen der Flüssigkeit längs der Basilarmembran in dem in der Figur angedeuteten Sinne ein, so muß sich die Bewegung der Flüssigkeit in der Schnecke auch der Flüssigkeit in dem Bogengange mitteilen, da der Bogengang an zwei verschiedenen Stellen der Schnecke mündet, so daß zwischen diesen beiden Öffnungen bei Flüssigkeitsbewegung eine Druckdifferenz herrscht.

Nun bewirkt aber eine solche Strömung der Flüssigkeit im Bogengang eine Gleichgewichtsstörung derart, daß man z. B. den Kopf nach rechts oder links kippt. Um die Richtung dieses Kippens festzustellen, benutzen wir die aus der Physiologie gut bekannte Tatsache, daß beim Einspritzen von kaltem Wasser auf das Trommelfell sich die Flüssigkeit in dem, dem Trommelfell zunächst liegenden Teil des Bogenganges abkühlt und nach abwärts sinkt, was ein Kippen des Kopfes nach dem Trommelfell zu bewirkt. Da, wie die Pfeile andeuten, beim Einschalten einer Tonquelle die gleiche Strömung in dem Bogengange eintritt, so muß beim Einschalten eines Tones eine Bewegung des Kopfes der Tonquelle zu erfolgen. Ist der Ton sehr stark, d. h. ganz nahe der Fühlgrenze, so entstehen infolge der nichtlinearen Eigenschaften des Trommelfelles und der Schnecke, Oberwellen, die eine Verbreiterung des Wirbels dem Steigbügel zu bewirken, so daß die Strömung während dem Tönen auch in der Nähe des Bogenganges erhalten bleibt. Schaltet man daher den Ton aus, so hört die Bewegung der Flüssigkeit im Bogengang auf, was eine Bewegung des Kopfes nach der entgegengesetzten Seite bewirkt. Es konnten nun beide Reflexbewegungen bestätigt werden, wobei den letzteren Effekt ungeübte Beobachter meist früher wahrnehmen, da die Reflexbewegung, die durch das Strömen der Flüssigkeit in dem Bogengange entsteht, erst nach einiger Übung von dem Reflex getrennt werden kann, nachdem man ganz allgemein beim plötzlichen Einschalten einer Tonquelle das Ohr von der Tonquelle zu entfernen sucht. Ist man dagegen an das Abhören starker Töne gewöhnt, so lassen sich beide Effekte gleich sicher beobachten.

Man muß daher schon wegen diesem physiologischen Versuch annehmen, daß sich auf der Basilarmembran bei der Erregung ein fortschreitender Wellenzug ausbildet und keine stehenden Wellen.

Um dies auch durch direkte Beobachtungen der Basilarmembran zu bestätigen, wurde folgendermaßen verfahren.

Nachdem das Felsenbein möglichst frischer Leichen von allen unnötigen Teilen befreit war, wurde die Spitze der Schnecke mit einer feinen Schleifvorrichtung angeschliffen, so daß ein kleines Loch entstand, ohne daß dabei die Basilarmembran oder die Reißnersche Membran verletzt wurde. Da dieses Anschleifen außerordentlich schwer ist und auch bei größter Vorsicht nur ganz selten gelingt, so ist es zweckmäßig, besonders am Anfang durch lokale Dekalzination das Felsenbein an jener Stelle etwas zu erweichen, was das Arbeiten ganz bedeutend erleichtert. Dies ist um so mehr notwendig, da die Lagenverhältnisse der Schnecke bei den verschiedenen Personen verschieden sind, so daß die diesbezüglichen topographischen Erfahrungen nicht genügen. Wie das Anschleifen zu denken ist, ist

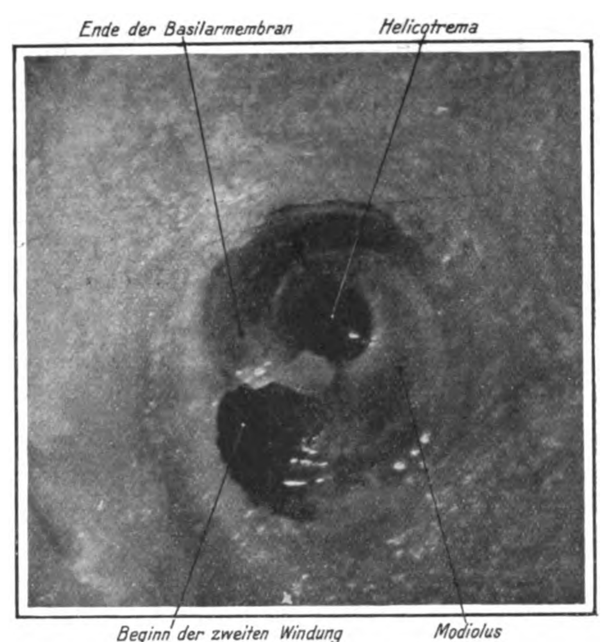


Fig. 25.

aus Photographie Fig. 25 ersichtlich, wo man deutlich feststellen kann, daß gar keine der Membrane irgendwie verletzt oder ihre Lage geändert wurde. Da die Schnecke etwa $2^3/_4$ Windungen besitzt und bei dieser Anordnung eine Windung deutlich zu sehen ist, so ist etwa $^1/_3$ der Basilarmembran beobachtbar.

Da die beiden Membrane fast vollständig durchsichtig sind, so muß man um ihre Bewegung gut sichtbar zu machen etwas Kohlen- oder Aluminiumpulver auf die Membran bringen. Zu diesem Zweck mengt man am besten zu der Flüssigkeit, verdünnter Kochsalzlösung, mit der man die Schnecke anfüllt, eines der Pulver, das sich dann an den Membranen absetzt.

Hat man die Schnecke mit Flüssigkeit vollständig gefüllt, so verklebt man schließlich die Öffnung mit einer kleinen Glasplatte, wie aus der Fig. 26 zu ersehen ist.

Da beim Anschleifen oft auch aus den tieferen Teilen der Schnecke die Flüssigkeit ausfließt, so bleiben beim Anfüllen Blasen zurück. Sie entfernen sich meist von selbst, wenn man vor dem Verkleben den Steigbügel momentan erregt, da dann die oben beschriebene Flüssigkeitsbewegung längs der Membran auftritt. Sollte dies nicht der Fall sein, so setzt man zu der Flüssigkeit etwas Alkohol hinzu und erwärmt vorsichtig die

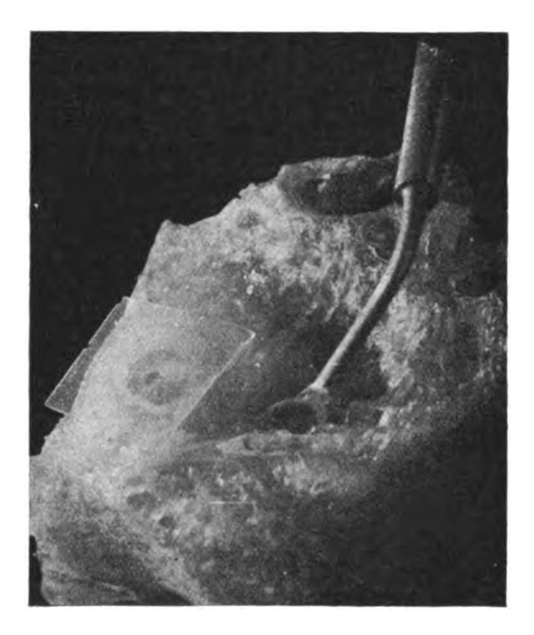


Fig. 26.

Schnecke, indem man sie z. B. in den Lichtkegel einer Bogenlampe bringt.

Ist nun das Felsenbein so vorbereitet, so entfernt man die Gehörknöchel bis auf den Steigbügel, den man vorsichtig an den in der Fig. 26 sichtbaren Drahtstift anklebt, der seinerseits an die Zinke einer elektromagnetisch angeregten Stimmgabel befestigt ist. Setzt man nun die Stimmgabel in Schwingungen, so kann man im Mikroskop die Bewegung der Basilarmembran verfolgen. Zur genaueren Untersuchung wurde stets eine stroboskopische Beleuchtung verwendet.

Der Beobachtung wird meist sehr rasch dadurch ein Ende gesetzt, daß der Steigbügel, besonders bei starken Amplituden, aus dem ovalen Fenster herausreißt. Um nun trotzdem die Beobachtung weiter fortsetzen zu können, wird in das ovale Fenster das in der Fig. 27 sichtbare Röhrensystem eingeführt, dessen unteres Ende am Rande des Fensters mit dem Knochen verklebt wird. Das erweiterte Ende dieser Röhre ist mit einer Gummimembran verbunden, die von einem kleinen Kolben, dem Steigbügel, in Bewegung versetzt wird.

Um etwaige Blasen in der Schnecke sicher zu beseitigen, entfernt man das Fenster an der Schneckenspitze und läßt mittels des Trichters durch das ganze Röhrensystem Flüssigkeit langsam durchströmen, bis sämtliche Blasen entfernt sind. Hierauf klebt man das Fenster wiederum zu und schließt auch den Hahn am Trichter.

Diese Anordnung besitzt den Vorteil, daß man bedeutend größere Schwingungsamplituden

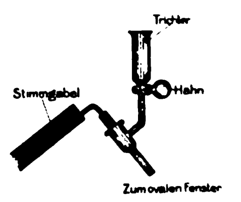


Fig. 27.

der Membran herstellen kann, so daß sie nun mit einem Mikroskop schwächerer Vergrößerung gut beobachtet werden können, wobei die ganze Membran auf einmal besser zu übersehen ist.

Da durch dieses zusätzliche Röhrensystem gleichsam der eine Schenkel der Schnecke verlängert wurde, so fragt es sich, ob dadurch nicht die Bewegungsform der Membran beeinflußt wird. Um dies zu entscheiden, wurde ein Ohrenmodell konstruiert, bei dem die Membran die in Fig. 28 oben gezeichnete Form besitzt, d. h. gleichzeitig zwei Basilarmembrane darstellt, die in der Schnecke an ungleiche Stellen zu liegen kommen. Trotzdem konnten, beim Erregen der Stimmgabel, die entstehenden Wirbel bei beiden Membranen ungefähr an der gleichen Stelle beobachtet werden, was darauf hinweist, daß die Länge der Flüssigkeitssäule über welche die Druckschwankungen der Membran mitgeteilt

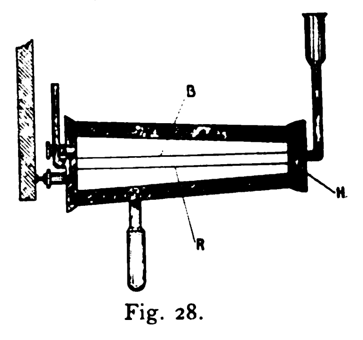


Fig. 28.

werden, für den Entstehungsort der Resonanzstelle der Membran nur eine untergeordnete Bedeutung besitzt. Das gleiche wurde bestätigt, indem die schwingende Flüssigkeitssäule in einem Schenkel der Schnecke dadurch verlängert wurde, daß die Membran des runden Fensters mit einer größeren Masse Blei belastet wurde. Es konnte dabei keine merkliche Verschiebung des Wirbel-

mittelpunktes beobachtet werden, so daß wir ruhig annehmen können, daß durch das zusätzliche Röhrensystem die Schwingungsform der Basilarmembran qualitativ nicht beeinflußt wird.

Dieser geringe Einfluß der Länge des Flüssigkeitsschenkels auf die Resonanzstelle der Basilarmembran scheint die Annahme von F. Lux[1]) nicht zu bestätigen, nach der die Eigenfrequenz eines Teiles der Membran bestimmt wird durch die Membranelastizität und durch die Masse der schwingenden Flüssigkeitssäule vom Steigbügel zur Resonanzstelle, auf der einen Seite der Membran und von der Resonanzstelle bis zum runden Fenster, auf der anderen Seite der Membran. Der Grund hierfür ist vielleicht darin zu suchen, daß die Flüssigkeit sich nicht nur in diesem angenommenen Sinne bewegt, sondern daß sich dieser Bewegung auch eine Schwingung der Flüssigkeit überlagert, die sich zwischen einem Wellenberg und Wellental vollzieht, etwa ähnlich so wie in der Fig. 21 rechts dargestellt ist. Die bei diesen Schwingungen in Betracht kommende Flüssigkeitsmasse ist nun lediglich von den lokalen elastischen Eigenschaften der Membran abhängig, wodurch auch die Resonanzstelle der Membran unabhängig wird von den an anderen Stellen vorhandenen Schwingungsverhältnissen.

Eine direkte Beobachtung der schwingenden Basilarmembran hat bereits R. Ewald[2]) an der Schnecke des Meerschweines ausgeführt. Doch beträgt der diesbezügliche Bericht bloß einige Zeilen, so daß man überhaupt nicht feststellen kann, wie der Versuch ausgeführt wurde.

Wahrscheinlich hat R. Ewald einen Teil der Membran aus der Schnecke entfernt und in der von ihm verwendeten akustischen Kamera in Schwingungen versetzt. Denn nur so erscheint die Bemerkung in seinem Nachlaß verständlich, wonach ihm das Photographieren der schwingenden Membran gelang. In der Schnecke nämlich sind beide Membrane sozusagen vollständig durchsichtig, so daß man die Reißnersche Membran nur an den haften gebliebenen Kohlenteilchen erkennen kann. Außerdem winden sich die beiden Membrane derart stark im Raume, daß man wegen der auftretenden Unschärfe kaum die Schwingungen in einem größeren Bereich der Membran abbilden kann. In der akustischen Kamera dagegen gelingt dies ähnlich, wie mit den Gummimembranen, einwandfrei.

Schließlich konnten auch die von R. Ewald beobachteten stehenden Wellen nicht bestätigt werden.

Erregt man nämlich die Stimmgabel mit einer tiefen Frequenz, etwa 200 Hertz, so konnte deutlich ein Fortschreiten der Wellen bei stroboskopischer Beleuchtung beobachtet werden, wobei sich die Reißnersche Membran und die Basilarmembran sozusagen miteinander bewegten. Die Dämpfung war dabei so groß, daß sich höchstens eine Welle deutlich unterscheiden ließ. Gibt man der Erregung eine höhere Frequenz, so bleibt der bei dem Versuch sichtbare Teil der Membran vollständig in Ruhe.

Es stimmt daher die Bewegung der Membran im Ohrenmodell mit der im wirklichen menschlichen Ohr qualitativ überein.

Auf welche Art und Weise bei dieser Schwingungsform der Membran die Nerven erregt werden, soll vorläufig noch nicht eingehend behandelt werden. Eine Möglichkeit ist z. B. die, daß die Nerven hauptsächlich durch die Druckwirkung des Wirbels auf die Basilarmembran erregt werden, in welchem Falle sich die Erregungszone bei einem reinen Ton auf einem ziemlich kleinen Bereich der Membran erstreckt, der durch die Kontrastwirkung noch weiter verengt erscheint.

Dabei würde dann die Reißnersche Membran dazu dienen, auf der einen Seite der Basilarmembran die Druckwirkung aufzuheben, so daß die Basilarmembran infolge des konstanten Druckes, die Zähigkeit des Ductus cochlearis überwindend, sich auf der einen Seite einbuchtet.

Es stellt in diesem Falle das Ohr einen aperiodisch ansprechenden Frequenzanalysator dar, wie ihn die Technik noch nicht besitzt. Wie grundsätzlich verschieden diese Lösung von denen in der Technik verwendeten ist, erkennt man z. B. am besten bei der Betrachtung der Mehrfach-Tonfrequenz-Telegraphie, wo das Trennen der, den einzelnen Apparaten entsprechenden Tonfrequenzen, stets mit einem Einschwingvorgang verbunden ist, der die Telegraphiergeschwindigkeit herabsetzt, während hier sozusagen ein aperiodisches Ansprechen erreicht ist.

Da ferner das Entstehen der Wirbel eine ausgesprochene Gleichrichtwirkung der schwingenden Flüssigkeitsbewegung ist, so läßt sich auch das Entstehen von Kombinationstönen in der Schnecke leicht verstehen.

Zusammenfassung.

Nach einem kurzen Erwähnen der bis jetzt bekannten Hörtheorien, wird darauf hingewiesen, daß bereits sämtliche mögliche Schwingungsformen der Basilarmembran vertreten sind. Man kann daher zwischen den verschiedenen Theorien entscheiden, wenn man die mechanischen Eigenschaften der Basilarmembran wenigstens der Größenordnung nach schätzen kann.

Zu diesem Zweck dient ein Ohrenmodell, dessen Eigenschaften mittels Dimensionsbetrachtungen so festgelegt wurden, daß die Bewegungs-

1) E. Budde, Resonanztheorie des Hörens, Physik. Zeitschr. **18**, 259, 1917.
2) R. Ewald, Zentralb. f. Physiol. **28**, 1914.



verhältnisse dem wirklichen Ohr möglichst entsprechen, auch wenn das Modell etwa zwei bis fünfmal größer ist. Die elastischen Eigenschaften der im Ohrenmodell verwendeten Gummimembran wurden mittels eines Durchlöcherungsversuches den wirklichen Verhältnissen angepaßt. Beobachtet man in einem derartigen Ohrenmodell, welches die Verhältnisse im wirklichen Ohr qualitativ richtig wiedergibt, die Schwingungsform der Membran, so folgt für die sogenannten Ohrenresonatoren eine bedeutend größere Dämpfung, als dem bis jetzt angenommenen Durchschnittswert für das logarithmische Dämpfungsdekrement $\vartheta = 0{,}1$ entspricht.

Eine genaue Überprüfung der bis jetzt verwendeten Methoden zur Bestimmung der Dämpfung zeigt, daß sie zum Teil noch zu unsicher sind, zum Teil gerade für eine fast aperiodische Dämpfung der Ohrenresonatoren sprechen, was mit den Beobachtungen am Ohrenmodell übereinstimmt.

Bei der Gelegenheit wurde auch das von Mach in der Optik entdeckte Kontrastgesetz erwähnt, dessen große Bedeutung gerade für die Hörtheorien offensichtlich ist.

Zum Ohrenmodell zurückkehrend, zeigt sich bei stroboskopischer Beleuchtung, daß die Schwingungsform der Membran einen stark gedämpften Wellenzug darstellt. Besonders interessant ist das Entstehen zweier kleiner Wirbel, die sich bei einer Frequenzänderung der Erregung längs der Membran verschieben. Daß eine derartige Gleichrichtwirkung im menschlichen Ohr tatsächlich vorhanden ist, dafür spricht auch ein physiologischer Versuch, bei dem sich diese gleichförmige Flüssigkeitsströmung in der Schnecke auch auf die Flüssigkeit in dem Bogengange überträgt und dabei eine augenblickliche Neigung des Kopfes nach der einen oder anderen Seite bewirkt. Ferner wurde eine Methode entwickelt, bei der die erste Windung der menschlichen Basilarmembran einer Leiche, in schwingendem Zustand beobachtet werden kann, ohne daß die Membran aus der Schnecke entfernt oder irgendwie der Zustand in der Schnecke geändert wurde. Diese Beobachtung bestätigt ebenfalls das Vorhandensein eines fortschreitenden Wellenzuges auf der Basilarmembran.

Da bei einem derartigen fortschreitenden Wellenzug die Erregungsart der Nerven schwer verständlich ist, so wurde zum Schluß noch auf die Möglichkeit hingewiesen, daß die Erregung der Nerven durch die Druckwirkung des verhältnismäßig kleinen Wirbels erfolgt. Genaueres hierüber werden jedoch erst die diesbezüglichen Versuche ergeben.

(Eingegangen 17. September 1928.)

Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn K. Hattori: „Über eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität“[1]).

Von Leopold Infeld.

Zu der Arbeit von Herrn Hattori möchte ich hier einige Bemerkungen hinzufügen, die vielleicht auch zur Klärung des Problems der Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie etwas beitragen könnten.

1. Die wesentlichen Beziehungen der zitierten Arbeit erhält man leicht, wenn man die entwickelte Geometrie als eine nicht-Riemannsche Geometrie betrachtet. Wie bekannt, werden in den nicht-Riemannschen Geometrien die Komponenten $\Gamma_{ik}^{\ l}$ der Parallelverschiebung durch die Beziehung:[2])

$$\Gamma_{ik}^{\ l} = \left\{ {l \atop ik} \right\} + M_{ik}^{\ l} \qquad (1)$$

verallgemeinert. $M_{ik}^{\ l}$ sind Komponenten eines beliebigen Tensors. Der Tensor

$$K_{ik} = R_{ik} + \triangle_k M_{is}^{\ s} - \triangle_s M_{ik}^{\ s} + M_{ij}^{\ s} M_{sk}^{\ j} - M_{ik}^{\ s} M_{sj}^{\ j} \qquad (2)$$

bildet eine entsprechende Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungstensors R_{ik}. Man erhält (2), indem man in die Gleichungen

$$K_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{is}^{\ s}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ s}}{\partial x^s} + \Gamma_{is}^{\ h} \Gamma_{hk}^{\ s} - \Gamma_{ik}^{\ h} \Gamma_{hs}^{\ s} \qquad (3)$$

die Werte (1) einsetzt. Wir betrachten jetzt den folgenden Spezialfall:

$$M_{ik}^{\ l} = \frac{1}{2} f_{iks} g^{sl}, \qquad (4)$$

wo f_{iks} die Komponenten eines vollkommen antisymmetrischen Tensors bedeuten[3]).

Setzt man (4) in (2) ein, so kann man in der Tat den nichtsymmetrischen Teil von K_{ik}

$$\frac{1}{2}(K_{ik} - K_{ki}) = F_{ik} = \triangle_s f_{ik}^{\ s}$$

mit der elektromagnetischen Feldstärke identifizieren, da die Beziehung

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \sqrt{-g}\, f^{iks}}{\partial x^k \partial x^s} = 0 \qquad (5)$$

1) Physik. Zeitschr. **29**, 538, 1928.

2) Vgl. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, Amer. Math. Soc. Publ. v. 8, 1927 oder auch den mathematischen Anhang meiner Arbeit: Zeitschr. f. Phys. **50**, 148.

3) Die Einführung des Tensors f_{ik} ist erst für das Wirkungsprinzip notwendig. Die f_{ik}, die auch in den Feldgleichungen nicht auftreten, haben keine evidente physikalische Bedeutung. Sie sind durch die Gl. (2, 4) nur bis auf eine additive Rotation eines beliebigen Vektors bestimmt.

als das eine Maxwellsche Gleichungssystem interpretiert werden kann.

Man kann leicht zeigen, daß man neben dieser Weltgeometrie (und außer der Weylschen und Eddingtonschen) auch andere angeben kann, die die Identifizierung des nichtsymmetrischen Teils von K_{ik} mit der elektromagnetischen Feldstärke erlauben. Ich möchte hier nur ein Beispiel angeben, das auch leicht auf dieselbe Weise, wie es K. Hattori tut, behandelt werden kann.

Wir setzen nämlich:

$$\Gamma_{ik}^{\ l} = \left\{ {l \atop ik} \right\} + 2\left(g_i^{\ l} \varphi_k - g_k^{\ l} \varphi_i\right), \tag{6}$$

wo mit φ_i das elektromagnetische Potential bezeichnet wird. Durch Ausrechnung findet man:

$$F_{ik} = \frac{1}{2}(K_{ik} - K_{ki}) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}. \tag{7}$$

Damit wird auch das eine Maxwellsche Gleichungssystem erfüllt, während das andere (wie bei Weyl — Eddington — Hattori) die Definitionsgleichung für den Stromvektor bildet.

2. Man kann aus der Arbeit von K. Hattori nicht entnehmen, auf welche Weise dort die Parallelverschiebung und die Gleichheit von zwei Vektoren definiert wird. Werden die Komponenten der Parallelverschiebung vermittels (1) definiert, so liegt (wie oben ausgeführt wurde) ein Spezialfall der nicht-Riemannschen Geometrie vor. Soll aber die Weltgeometrie eine Riemann-Einsteinsche sein, dann bildet auch der Inhalt der Arbeit keine geometrische Erweiterung der Relativitätstheorie. Jedenfalls versucht die Theorie durch das Wirkungsprinzip neue Gravitationsgleichungen aufzustellen.

3. Das Wirkungsprinzip liefert neue Feldgleichungen (Gl. [5,8]), die zu den Maxwellschen Feldgleichungen hinzukommen sollen. Aus ihnen folgt, daß das elektromagnetische Potential dem Stromvektor proportional sein soll. Diese von K. Hattori erhaltenen Feldgleichungen sind identisch mit denen, die durch Einstein aus der Eddingtonschen Theorie gefolgert wurden[1]). Der Unterschied besteht nur in der Schreibweise. Man überzeugt sich, daß die von Einstein dort gegen die Feld- und Gravitationsgleichungen gestellten Einwände, hier ihre Geltung bewahren.[2]) Das Bewegungsgesetz wird vom Wirkungsprinzip nicht geliefert. Gl. (4, 23) die von K. Hattori als Bewegungsgleichung bezeichnet wird, ist infolge der Feldgleichungen eine mathematische Identität, wie es ja sein muß, und wie man sich unmittelbar durch eine ganz einfache Umrechnung überzeugen kann. Die genannte Gleichung zeigt, daß der Tensor T_{ik} den Erhaltungssätzen genügt. Man sieht aber keinen Grund für die willkürliche und künstliche Teilung des Tensors T_{ik} in M_{ik} und E_{ik}. Ich glaube nicht, daß die genannten Folgerungen des Wirkungsprinzips für die Annahmen von K. Hattori sprechen.

4. Die Bemerkungen zeigen, wie ich glaube, daß (wie auch K. Hattori bemerkt) das Problem der Verallgemeinerung der Relativitätstheorie nicht auf rein formalem Wege gelöst werden kann. Man sieht zunächst nicht, wie die Wahl zwischen den verschiedenen nicht-Riemannschen Geometrien, die uns die Gravitations- und Maxwellschen Gleichungen ergeben, zu treffen ist. Die eigentliche Weltgeometrie, die zu einer einheitlichen Theorie von Gravitation und Elektrizität führen soll, kann nur durch Untersuchung ihres physikalischen Inhaltes gefunden werden.

(Eingegangen 11. September 1928.)

1) Vgl. Einsteins Note in Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, S. 367.

2) l. c. S. 371.

Wasserstoff-Ionen als Ursache für das Auftreten der lichtelektrischen spektralen Selektivität des Kaliums.

Von Rud. Suhrmann.

Durch die Arbeiten von Wiedmann[1]) und Fleischer[2]) schien es sichergestellt zu sein, daß molekularer Wasserstoff, mit Kalium in Berührung gebracht, das spektrale selektive Maximum der lichtelektrischen Empfindlichkeit des Kaliums bei 440 $\mu\mu$ hervorruft. Ich habe in letzter Zeit mit meinem Mitarbeiter H. Theissing die Versuche dieser Autoren in der Richtung wiederholt[3]), daß ich eine Kaliumzelle mit gründlichst gereinigtem und getrocknetem Wasserstoff von Atmosphärendruck füllte und etwa 6 Stunden stehen ließ und habe nach dem Evakuieren keine Änderung der gesamten Empfindlichkeitskurve feststellen können. Da dieser Versuch an mehreren Zellen vorgenommen wurde und da auch Richardson[4]) neuerdings keinerlei Beeinflussung der lichtelektrischen Empfindlichkeit des Kaliums durch molekularen Wasserstoff erhalten konnte, dürften meine Befunde wohl den Tatsachen entsprechen und die Ergebnisse von Wiedmann und Fleischer auf minimale Verunreinigungen des verwendeten Wasserstoffs zurückzuführen sein.

1) Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 333, 1916.

2) Ann. d. Phys. **82**, 75, 1927.

3) Die Veröffentlichung dieser Untersuchung erfolgt demnächst in der Zeitschr. f. Phys.

4) Proc. Roy. Soc. A. **107**, 387, 1925.

Nun ist bekannt, daß eine nach Elster und Geitel[1]) durch eine mit Kaliumhydrid versehene Zelle geschickte Glimmentladung die gesamte lichtelektrische Empfindlichkeit der Zelle stark erhöht und das spektrale Maximum der Empfindlichkeit bei 440 $\mu\mu$ scharf hervortreten läßt. Den gleichen Effekt erzielt man, wenn man in eine Zelle mit blanker Kaliumoberfläche einige Zehntel mm Wasserstoff gibt und eine Glimmentladung hindurchschickt. Pohl und Pringsheim[2]) erhielten für die Elektronenausbeute einer solchen Zelle bei 436 $\mu\mu$ $3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Coul.}}{\text{cal}}$, während sie für reine Kaliumoberflächen etwa $5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Coul.}}{\text{cal}}$ beträgt; Elster und Geitel, sowie Pohl und Pringsheim, nehmen an, daß die Elektronenauslösung an den kolloidal im Hydrid gelösten Kaliumteilchen erfolgt.

Im folgenden ist der Versuch gemacht worden, die Erscheinung in der Weise zu studieren, daß in einer Kaliumzelle an geeigneter Stelle Wasserstoff durch Elektronenstoß angeregt und dieser angeregte Wasserstoff mit der Kaliumoberfläche in Berührung gebracht wird. Es scheint, als ob die Versuchsresultate einen Beitrag zur Klärung der Frage nach der Ursache des selektiven Maximums zu liefern vermöchten[3]).

Versuchsanordnung.

Den Hauptbestandteil der Versuchsanordnung bildet die in Fig. 1 abgebildete lichtelektrische Zelle. Sie besteht aus einem langen, etwa 4 cm weiten Glasrohr, das vorn mit einem hohlen eingeschliffenen Quarzstopfen Q für den Lichteintritt versehen ist und hinten unter Vermittlung eines doppelseitig konisch geschliffenen Quarzrohres Z einen Schliff S_1 trägt, in welchen unter Verwendung dünner in das Glas eingeschmolzener Kupferfolie zwei Kupferstäbe Cu, die Träger einer 8 mm breiten Platinfolie K, eingesetzt sind. Die Platinfolie bildet mit der Zellenachse einen Winkel von 45°. Ihr gegenüber ist an die Zelle ein Rohr angeschmolzen, das einen mit vier Einschmelzungen versehenen Glasschliff S_2 trägt. An den Einschmelzungen befinden sich, durch Glasröhrchen gestützt, vier Kupferzuführungen, an deren Enden zwei Wolframdrähte W_1 und W_2 von 0,1 mm Durchmesser angesetzt sind. Diese Drähte können also elektrisch geglüht werden; sie verlaufen parallel der Platinfolie und haben einen Abstand von 1,06 cm voneinander. Der Abstand der Folie von dem ihr am nächsten angebrachten Wolframdraht W_1 beträgt etwa 5 cm. An der Stelle E ist in die Zellenwandung ein Platindraht eingeschmolzen, der mit ihr durch Vermittlung von etwas Schaumgold in gutem Kontakt steht. Unterhalb der

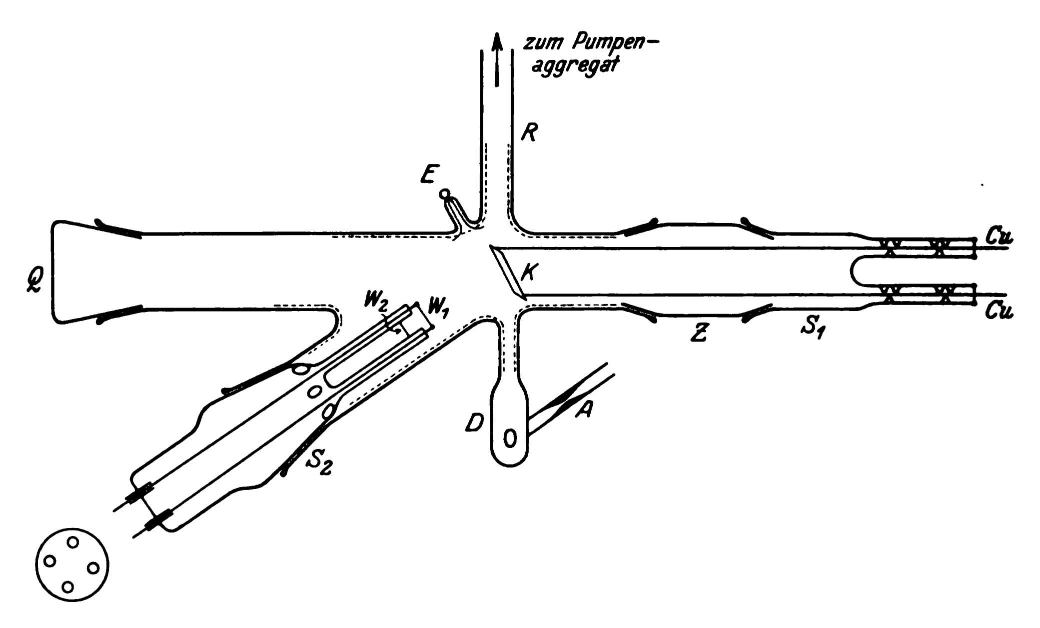


Fig. 1.

1) Physik. Zeitschr. **11**, 257, 1910.
2) Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 173, 1913.
3) Eine Unterredung mit Herrn Prof. Eucken über die Gründe für das Auftreten des selektiven Maximums führte zu einer wesentlichen Klärung der Auffassung des Verf. vom chemischen Standpunkt aus und veranlaßte z. T. die im folgenden geschilderten Versuche.

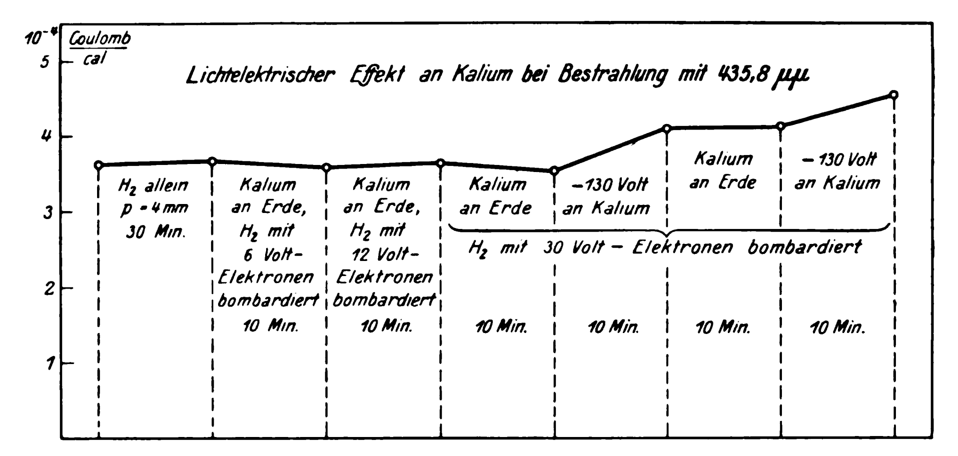


Fig. 2.

Folie ist an die Zelle eine kleine Vorlage *D* angesetzt, in die Kalium eindestilliert wird. Oberhalb der Folie ist die Zelle mit einem weiten Ansatzrohr *R* versehen, das über die mit flüssiger Luft gekühlte Quecksilberfalle zum McLeod und zum Hochvakuumpumpenaggregat führt. Das Pumpenaggregat kann durch einen Quecksilberverschluß abgesperrt werden. Zwischen Quecksilberverschluß und Quecksilberfalle befindet sich ein seitliches Rohr, das durch zwei gute hintereinandergesetzte Hähne mit einem Vorratskolben in Verbindung steht, aus welchem man gründlich gereinigten und getrockneten Wasserstoff durch die Quecksilberfalle in die Zelle einlassen kann.

Die optische Anordnung soll später an anderer Stelle ausführlich beschrieben werden. Hier genügt es, darauf hinzuweisen, daß die im Austrittsspalt des Quarzmonochromators austretende Quecksilberlinie durch einen im Ultraviolett reflektierenden Spiegel entweder in eine mit Thermosäule und Paschengalvanometer ausgeeichte Photozelle oder in die Versuchszelle auf die Platinfolie projiziert werden konnte.

Die Kupferzuführungen *Cu* der Platinfolie standen entweder mit einem Glühstromkreis oder mit einem Fadenelektrometer in Verbindung; in letzterem Fall wurde die lichtelektrische Aufladung der Folie bestimmt.

Zu bemerken ist noch, daß die verschiedenen Schliffe nicht gefettet, sondern an ihren oberen Enden mit Wachs-Kolophoniummischung eingekittet wurden. Dieser Kitt hat sich beim Arbeiten mit Alkalimetallzellen sehr gut bewährt[1]).

Durchführung der Versuche.

Nachdem die Zelle, die Platinfolie und die Wolframdrähte soweit wie möglich sorgfältig ausgeheizt waren, destillierte man das Kalium in die Vorlage *D* und schmolz die Destillationsapparatur bei *A* ab. Darauf erhitzte man *D* vorsichtig und destillierte das Kalium in dickem Belag auf die Folie *K* und die Zellenwandung (in Fig. 1 punktiert eingezeichnet), so daß es mit der Einschmelzung *E* in Berührung kam und somit bei der lichtelektrischen Untersuchung des auf der Folie befindlichen Kaliums als Anode dienen konnte.

Darauf wurde die Empfindlichkeitskurve der frischen Kaliumoberfläche (auf der Platinfolie *K*) aufgenommen, wobei die oben erwähnte Photozelle zur Ermittlung der Intensität der einzelnen Quecksilberlinien diente. Diese Kurve (Fig. 5, Kurve 1) weist ein schwaches Maximum bei 400 μμ auf, das vermutlich von geringen Spuren Sauerstoff[1]), die von den Metallteilen der Zelle abgegeben wurden, herrührt; es ist jedoch für die folgenden Versuche belanglos.

Nun wurde die Zelle mit Wasserstoff von 4 mm Quecksilbersäule gefüllt und eine halbe Stunde bei diesem Drucke belassen. Darauf evakuierte man wieder auf Klebvakuum und maß die lichtelektrische Empfindlichkeit des auf der Folie *K* befindlichen Kaliums mit der Hg-Linie 435,8 μμ. Wie man aus Fig. 2 (zweiter Meßpunkt) erkennt, hat sich die Empfindlichkeit nicht geändert.

Jetzt brachte man $2 \cdot 10^{-3}$ mm Wasserstoff in die Zelle, glühte den geerdeten Wolframdraht W_1 schwach, und legte an W_2 6 Volt, während der Kaliumbelag der Folie (und ebenso der Anodenbelag[2])) der Zelle bei *E*) geerdet war. Der Emissionsstrom zwischen den Wolframdrähten betrug $6{,}2 \cdot 10^{-6}$ Amp. Nach 10 Min. wurde der Glühstrom unterbrochen und der Druck zu

1) Bereits Hallwachs (Handb. d. Radiologie, Bd. III, S. 485) weist darauf hin, daß Wachs-Kolophoniumkitt keine lichtelektrische Ermüdung hervorruft.

1) Pohl u. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 637, 1913.

2) Der Anodenbelag blieb, wenn die Zelle mit Wasserstoff gefüllt war, stets geerdet; nur bei den lichtelektrischen Messungen lagen an ihm + 120 Volt.

$1 \cdot 10^{-4}$ mm bestimmt. Dann evakuierte man wieder auf Klebvakuum und stellte die lichtelektrische Empfindlichkeit des Kaliums fest; sie hatte sich nicht geändert (Fig. 2).

In gleicher Weise blieb die lichtelektrische Empfindlichkeit ungeändert, wenn die Elektronen 10 Minuten lang mit 12 und mit 30 Volt beschleunigt wurden und das Kalium an Erde lag. In letzterem Falle betrug der Emissionsstrom $4 \cdot 10^{-5}$ Amp. Der Druck nahm jedesmal von 10^{-3} auf 10^{-4} mm Quecksilbersäule ab.

Wurde jedoch an das Kalium ein negatives Potential von — 130 Volt gelegt, während der Wasserstoff mit 30 Volt-Elektronen bombardiert wurde, so nahm die lichtelektrische Empfindlichkeit zu, wie man aus Fig. 2 ersieht; dabei ist es gleich, ob man von 10^{-3} oder 10^{-2} mm Anfangsdruck ausgeht, wie die beiden letzten Versuche in Fig. 2 zeigen, bei denen der Anfangsdruck des Wasserstoffs 10^{-2} und der Enddruck 10^{-3} mm betrug.

Es liegt nahe, die Versuchsergebnisse in der Weise zu deuten, daß die Erhöhung der Empfindlichkeit durch die bei 30 Volt gebildeten H^+-Ionen hervorgerufen wird, denn sonst hätte sich nicht der Einfluß des an das Kalium angelegten negativen Potentials gezeigt.

Um den Effekt noch deutlicher zu erkennen, wurden die Versuche in einer zweiten Reihe über 7 Stunden ausgedehnt und ferner mit 38 Volt

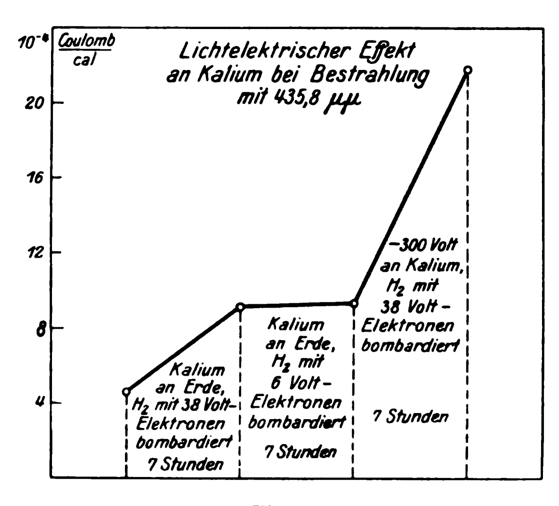


Fig. 3.

(anstatt 30 Volt) bombardiert, damit der Emissionsstrom zwischen den Wolframdrähten größere Werte annahm. In der Tat ist die Zunahme der lichtelektrischen Empfindlichkeit des Kaliums nun ganz beträchtlich, wie man aus Fig. 3 ersieht. Auch bei geerdetem Kalium erhöht sich jetzt die Empfindlichkeit, wenn man den Wasserstoff mit 38 Volt-Elektronen bombardiert, was nicht verwunderlich erscheint, da die freie Weglänge der H^+-Ionen während der Druckabnahme von 10^{-2} auf 10^{-4} mm längere Zeit den Abstand zwischen Wolframdrähten und Kaliumbelag (auf der Platinfolie) übertrifft.

Wird an das Kalium ein negatives Potential angelegt, so ist die Empfindlichkeitssteigerung wiederum größer (Fig. 3).

Um noch weiterhin festzustellen, daß die ge-

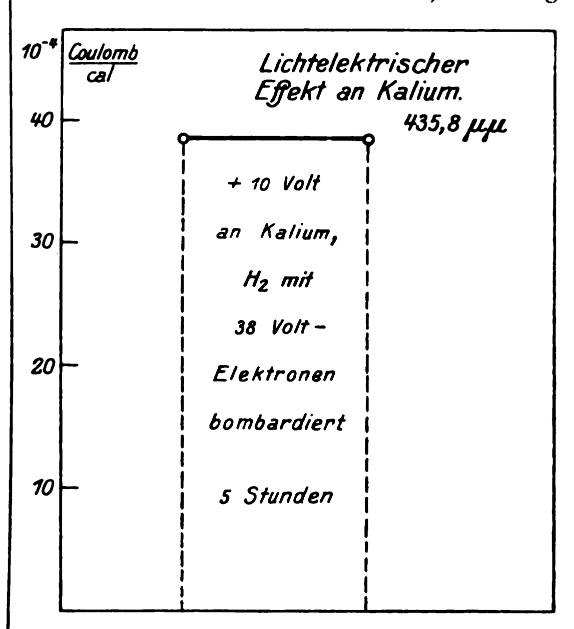


Fig. 4.

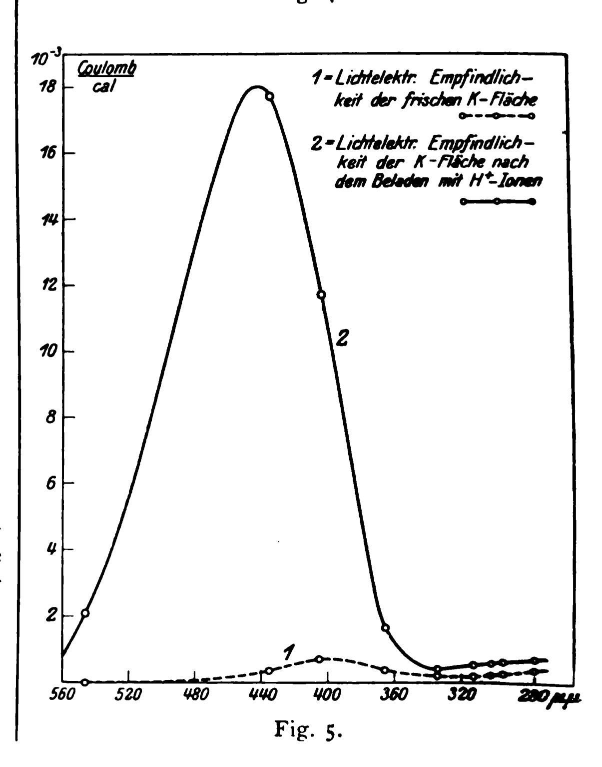


Fig. 5.

bildeten H^+-Ionen die Empfindlichkeitserhöhung hervorrufen, legte man schließlich an das Kalium + 10 Volt, während der Wasserstoff mit 38 Volt-Elektronen bombardiert wurde. Hierbei blieb die Empfindlichkeit konstant (Fig. 4), da dieses Potential genügte, um die positiven Wasserstoff-Ionen fernzuhalten.

Nach mehrfacher Wiederholung der vorstehend geschilderten Versuche mit dem gleichen Resultat, wurde zum Schluß nochmals die Empfindlichkeitskurve der Kaliumoberfläche durchgemessen. Wie Fig. 5 zeigt, besitzt die Kurve nun ein ausgeprägtes selektives Maximum bei 440 $\mu\mu$; die Elektronenausbeute beträgt $2 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{Coul.}}{\text{cal}}$ hat also die gleiche Größenordnung wie die von Pohl und Pringsheim für eine durch Glimmentladung hergestellte Zelle angegebenen Werte.

Diskussion der Ergebnisse.

Die Versuche sprechen mit großer Wahrscheinlichkeit dafür, daß die an die Kaliumoberfläche gelangenden H^+-Ionen das selektive Maximum des Kaliums bei 440 $\mu\mu$ hervorrufen. Diese H^+-Ionen sind nicht in gewöhnlicher Weise adsorbiert, sondern sie polarisieren die Kaliumatome und bilden mit ihnen gewissermaßen eine äußerst lockere, nur an der Metalloberfläche beständige Verbindung, sozusagen ionisierte KH-Moleküle[1]), die besonders leicht ein Elektron abzuspalten vermögen. Jedenfalls ist es nach den besprochenen Versuchsergebnissen sehr unwahrscheinlich, daß angeregter oder atomarer Wasserstoff die Empfindlichkeitserhöhung hervorruft[2]).

Das von Fleischer[3]) beobachtete Auftreten des selektiven Maximums beim Glühen eines in der Zelle vorhandenen mit Wasserstoff beladenen Platindrahtes, das zunächst mit den zu Anfang erwähnten Versuchen des Verfassers unvereinbar scheint, ist nun ohne weiteres dadurch zu erklären, daß der glühende Platindraht den absorbierten Wasserstoff in Form von H^+-Ionen abgab, die natürlich auch an die Kaliumoberfläche gelangten.

1) Herr H. Ludloff wies mich darauf hin, daß das KH-Molekül mit seinen beiden Elektronen eine relativ stabile Verbindung darstellt, während das Elektron des ionisierten KH-Moleküls leicht abgespalten werden müßte. Hierdurch wäre die große lichtelektrische Empfindlichkeit einer mit derartigen Ionen besetzten Kaliumfläche erklärt; das lichtelektrisch abgegebene Elektron würde aus der Kaliumunterlage nachgefüllt, wodurch vielleicht auch die Trägheit mancher „Kaliumhydrid"zellen eine Deutung finden würde.

2) Es ist beabsichtigt, die Versuche in der Weise zu vervollständigen, daß Kaliumhydrid auf eine Kaliumoberfläche direkt aufgebracht (dieses Hydrid müßte nach Elster und Geitel zunächst unempfindlich sein) und mit Elektronen verschiedener Geschwindigkeit im Hochvakuum bombardiert wird; von einer bestimmten Geschwindigkeit an müßte eine Ionisation des KH und damit eine Empfindlichkeitserhöhung eintreten. Ferner soll die Wirkung verschiedener Gasionen auf die lichtelektrische Empfindlichkeit von Metalloberflächen studiert werden.

3) l. c.

Zusammenfassung.

1. Gründlich gereinigter und getrockneter Wasserstoff ruft keine Erhöhung der lichtelektrischen Empfindlichkeit des Kaliums hervor.

2. Es werden Versuche beschrieben, die beweisen dürften, daß das bei 440 $\mu\mu$ gelegene selektive Maximum des Kaliums durch Auftreffen positiver Wasserstoff-Ionen auf die Kaliumoberfläche hervorgerufen wird. Diese Wasserstoff-Ionen bilden vermutlich mit Atomen der Kaliumoberfläche eine äußerst lockere, nur an der Metalloberfläche beständige Verbindung, sozusagen ionisierte KH-Moleküle.

Die für die Versuche benötigten Apparate verdankt der Verf. größtenteils der Notgemeinschaft und der Helmholtzgesellschaft.

Breslau, Physikal.-Chem. Institut der Techn. Hochschule, 14. September 1928.

(Eingegangen 12. Oktober 1928.)

Anschaulicher Beweis des Coriolisschen Satzes.

Von W. Staszewski.

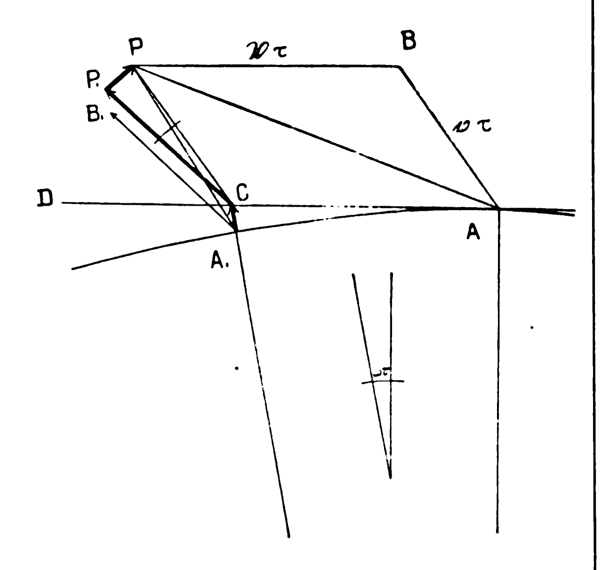
Die üblichen analytischen[1]) oder vektoranalytischen[2]) Beweise des Coriolisschen Satzes leiden so an Unübersichtlichkeit, daß man dabei tatsächlich „Gefahr läuft, sich in Einzelheiten zu verlieren und über den Formeln den Gegenstand zu vergessen"[3]). Angesichts der großen Bedeutung, die dem Satze in der Mechanik, Elektronenlehre und Optik (Larmorscher Satz) zukommt, wird deshalb vielleicht manchem Leser nachfolgende anschauliche Ableitung willkommen erscheinen.

1) A. G. Webster, The Dynamics, II ed. p. 313; Cl. Schaefer, Einführung in die theor. Physik. 1, p. 57.

2) G. Hamel, Elementare Mechanik, p. 21 und 31 oder R. Marcolonge, Theoretische Mechanik. 1, p. 114.

3) Klein und Sommerfeld, Theorie d. Kreisels, p. 1. 197.

Denken wir uns einen im Punkt A (s. Fig.) einer mit der Drehgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ rotierenden horizontalen Kreisscheibe befindlichen Beobachter, der zur Zeit $t = 0$ eine Kugel von der Masse m horizontal mit der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ fortschleudert. Sehen wir zunächst von der Schwere ab, so können wir behaupten, daß die Kugel gleichförmig und geradlinig fortschreiten wird mit der (absoluten) Geschwindigkeit $\mathfrak{v} + \mathfrak{V}$, wobei $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit des Punktes A bezeichnet. Während



einer unendlich kleinen Zeit τ verschiebt sich die Kugel nach P und $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \mathfrak{v}\tau + \mathfrak{V}\tau$. Die Scheibe dreht sich gleichzeitig um den Winkel $\omega\tau$ und führt den Beobachter von A nach A_1 mit, so daß er die relative Verschiebung $\overline{A_1 P}$ wahrnimmt. Diese wollen wir in drei Summanden folgendermaßen zerlegen: wir ziehen den Radiusvektor $\mathfrak{r} = \overline{OA_1}$ [1]) von der Drehachse O[1]) und senkrecht zu ihr nach dem Punkt A_1, verlängern die Gerade OA_1 und finden ihren Schnittpunkt C mit der Kreistangente AD; verbinden wir C mit P, so haben wir: $\overline{A_1 P} = \overline{A_1 C} + \overline{CP}$. Wir wollen noch $\overline{CP}$ in die Komponenten $\overline{CP_1}$ und $\overline{P_1 P}$ zerlegen, indem wir $\overline{CP_1}$ dem absoluten Betrag nach gleich $\overline{CP}$ annehmen und den Winkel $\measuredangle PCP_1 = \omega\tau$ wählen. Somit ist $\overline{A_1 P} = \overline{A_1 C} + \overline{CP_1} + \overline{P_1 P}$. Betrachten wir nun diese Komponenten nacheinander:

1. $\overline{A_1 C}$ ist längs dem Radiusvektor $\overline{OA_1}$ gerichtet und hat den absoluten Betrag $\frac{1}{2}\omega^2 r\tau^2$, wie aus der Beziehung $(r + A_1 C)^2 = r^2 + AC^2$ hervorgeht, wenn man darin $\overline{A_1 C^2}$ vernachlässigt und $AC = \widehat{AA_1} = r\omega\tau$ setzt. Dem von der Scheibe mitgeführten Beobachter erscheint diese Bewegung als gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung $\omega^2 \bar{r}$.
2. $\overline{CP_1}$ stellt auf der rotierenden Scheibe die Verschiebung dar, die allein auf der ruhenden Scheibe stattfinden würde, wenn die Kugel mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ geworfen wäre. Zum Beweis stellen wir uns vor, daß man auf der stillstehenden Scheibe den Vektor $\overline{AB} = \mathfrak{v}\tau$ irgendwie fixiert habe; nach der Drehung um $\omega\tau$ nimmt dieser die Lage $\overline{A_1 B_1}$ ein. Es ist leicht zu zeigen, daß die Vektoren $\overline{A_1 B_1}$ und $\overline{CP_1}$ gleich und gleichgerichtet sind: denn wegen der Kleinheit des Winkels $\measuredangle AOA_1 = \omega\tau$ kann man $AC = AA_1 = |\mathfrak{V}|\tau = BP$ setzen, d. h. das Viereck $ABPC$ als Parallelogramm ansehen; hieraus folgt $CP = AB = A_1 B_1$ oder, da wir $CP_1 = CP$ angenommen haben, $CP_1 = A_1 B_1 = |\mathfrak{v}|\tau$. Da die Vektoren $\overline{CP_1}$ und $\overline{A_1 B_1}$ den gleichen Winkel mit OA einschließen, so sind sie auch einander parallel.
3. Im Dreieck PCP_1 ist $\overline{P_1 P} \perp \overline{CP}$, also auch $\overline{P_1 P} \perp \mathfrak{v}$ und $P_1 P = CP \cdot \omega\tau = |\mathfrak{v}|\tau \cdot \omega\tau = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathfrak{v}\omega \cdot \tau^2$. Diese Formel zeigt, daß die Bewegung längs $\overline{P_1 P}$ beschleunigt ist und die Beschleunigung beträgt $2\,|\mathfrak{v}|\,\omega$. Dieselbe läßt sich, wie leicht ersichtlich, der Größe und Richtung nach durch das Vektorprodukt $2\,[\mathfrak{v}, \bar{\omega}]$ darstellen.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß das Rotieren des Bezugssystems das Auftreten zweier (relativen) Beschleunigungen $\omega^2 \bar{r}$ und $2\,[\mathfrak{v}, \bar{\omega}]$ hervorbringt, die von dem mitbewegten Beobachter der Wirkung der „Zentrifugalkraft" $m\omega^2 \bar{r}$ und der „Coriolisschen Kraft" $2m\,[\mathfrak{v}, \omega]$ zugeschrieben werden kann.

Das ist eben der Coriolissche Satz in dynamischer Fassung.

Der Beweis läßt sich einfach auf den Fall verallgemeinern, wo die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit der Drehgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ (also auch mit der Scheibenebene) einen beliebigen Winkel einschließt. Da nämlich die Vertikalkomponente der Bewegung durch die Rotation des Bezugssystems um die Vertikale unbeeinflußt bleibt, so brauchen wir nur auf die Horizontalkomponente unser Augenmerk zu richten. Hier sind aber unsere Betrachtungen ohne weiteres anwendbar, so daß die relative Bewegung mittels fiktiver Kräfte $m\omega^2 r$ und $2m\,[\mathfrak{v}_H \omega]$ beschrieben werden kann, wobei $\mathfrak{v}_H$ die Horizontalkomponente von $\mathfrak{v}$ bedeutet.

1) In der Figur nicht gezeichnet.

Statt des letzten Ausdrucks kann man aber einfach $2m[\mathfrak{v}\,\omega]$ schreiben, da die vertikale, zu ω parallele $\mathfrak{v}$-Komponente das Vektorprodukt unbeeinflußt läßt.

Ist schließlich der Punkt m nicht frei, wie bisher angenommen, sondern der Schwere oder irgendeiner Kraft $F = m\gamma$ unterworfen, so kommt er nach der Zeit τ nicht in P, sondern in einem unendlich nahen Punkt P_2 [1]) an, wobei $\overline{PP_2} = \frac{1}{2}\gamma\tau^2$ ist. Schreiben wir $\overline{A_1 P_2} = \overline{A_1 P} + \overline{PP_2}$ und zerlegen $\overline{A_1 P}$ wie oben, so gelangen wir zum Schluß, daß auch jetzt die durch die Drehung des Bezugssystems hervorgerufene scheinbare Störung der Bewegung auf das Auftreten der zentrifugalen und der Coriolisschen Kraft zurückgeführt werden kann.

1) In der Figur nicht gezeichnet.

Wilno, Pilsudskiego 22, 17. August 1928.

(Eingegangen 22. August 1928.)

Über „verbotene“ Wasserstofflinien.

Von A. Rubinowicz.

Die Feststellung von I. S. Bowen, daß die sogenannten Nebulium-Nebellinien verbotenen Übergängen aus metastabilen Anfangszuständen entsprechen, bildet eine überaus überzeugende experimentelle Stütze für die Auffassung, daß die Auswahlregeln der Quantentheorie im allgemeinen nur in erster Näherung gelten, in den weiteren aber durchbrochen werden können[1]). Vom Standpunkte des Korrespondenzprinzips ist diese Tatsache einleuchtend, da ja eine nach dem gewöhnlichen Rechenverfahren, ohne Berücksichtigung retardierter Potentiale verschwindende Dipolstrahlung eine, wenn auch sehr schwache, im allgemeinen aber nicht verschwindende Multipolstrahlung ergibt. Analoge Verhältnisse sind nun in der neueren Quantentheorie zu erwarten. Im folgenden sollen daher die verbotenen Übergänge in dem einfachsten Falle der Lyman-Wasserstoffserie näher untersucht werden, indem die Schrödingerschen Ansätze für die Strom- und Ladungsdichte als Ausgangspunkt genommen und die retardierten Potentiale nicht nur in erster Näherung[2]), sondern ganz streng berücksichtigt werden. Das hat zur Folge, daß sich dann Übergänge aus allen Anfangszuständen in den Grundzustand als möglich erweisen, mit alleiniger Ausnahme solcher mit verschwindender azimutaler Quantenzahl; mit wachsender azimutaler Quantenzahl nimmt jedoch die Intensität der entsprechenden Linien sehr stark ab. Die Multipole, die den im folgenden betrachteten Übergängen entsprechen, strahlen dabei nach der klassischen Elektrodynamik Impulsmoment und Energie in dem gleichen Verhältnisse aus, wie sie ihnen „mechanisch“ durch die entsprechenden Größen im Anfangs- und Endzustande des Atoms zur Verfügung gestellt werden.

1) I. S. Bowen, Proc. Nat. Acad. Amer., 14, 30, 1928.

2) Vgl. O. Klein, Zeitschr. f. Phys., 41, 407, 1927.

§ 1. Das elektromagnetische Feld des Wasserstoffatoms bei vollständiger Berücksichtigung der retardierten Potentiale.

Bei einem zwischen zwei Quantenzuständen σ und σ' stattfindenden Übergange eines Ein-Elektronensystems wird nach Schrödinger die räumliche Strom- und Ladungsdichte ($\mathfrak{J}$ bzw. ϱ) bis auf den Zeitfaktor $e^{2\pi i\nu t}$ durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \frac{eh}{4\pi i m_0}(\tilde{u}_{\sigma'}\,\mathrm{grad}\,u_\sigma - u_\sigma\,\mathrm{grad}\,\tilde{u}_{\sigma'}), \\ \varrho &= -e\,u_\sigma\,\tilde{u}_{\sigma'} \end{aligned} \qquad (1)$$

gegeben. Dabei bedeuten: u_σ, $u_{\sigma'}$ zwei Eigenlösungen der zeitfreien, nichtrelativistischen Schrödingerschen Differentialgleichung, E_σ, $E_{\sigma'}$ die zugehörigen Energiewerte, m_0 die Elektronenmasse und $\nu = \frac{E_\sigma - E_{\sigma'}}{h}$ die ausgestrahlte Frequenz. Durch $\sim$ wird die Bildung des konjugiert komplexen Wertes angezeigt.

Das der obigen Strom- und Ladungsverteilung (1) entsprechende elektromagnetische Feld ist bis auf den gleichen Zeitfaktor durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\,\mathrm{grad}\,\varphi - ik\mathfrak{A}, \\ \mathfrak{H} &= \mathrm{rot}\,\mathfrak{A} \end{aligned} \qquad \left(k = \frac{2\pi\nu}{c}\right) \qquad (2)$$

bestimmt, wobei die Potentiale $\mathfrak{A}$ und φ durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{c}\int \mathfrak{J}\frac{e^{-ikR}}{R}\,d\tau, \\ \varphi &= \int \varrho\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,d\tau \end{aligned} \qquad (3)$$

gegeben werden. R bedeutet dabei die Entfernung des Punktes P, in dem das elektromagnetische Feld ermittelt werden soll, von dem Punkte P_1 des Integrationsgebietes.

Den Gang der Rechnung bestimmt die Tatsache, daß die Schrödingerschen Eigenlösungen in unserem Falle als Faktor eine Kugelfunktion enthalten. Werden demnach für P und P_1 die

üblichen räumlichen Polarkoordinaten r, φ, ϑ bzw. r_1, φ_1, ϑ_1 eingeführt, so wird $R^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\chi$, wo χ den Winkel zwischen den beiden Richtungen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ von r bzw. r_1 bezeichnet und $\cos\chi = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$ ist. Für $\frac{e^{-ikR}}{R}$ gilt dann im Falle $r > r_1$ die bekannte Heinesche Entwicklung:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{1}{ik}\frac{1}{rr_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)\zeta_\nu(kr)\psi_\nu(kr_1)P_\nu(\cos\chi). \tag{4}$$

Die Funktionen ζ_ν und ψ_ν[1]) hängen dabei in einfacher Weise mit den Besselschen Funktionen zusammen. Es ist nämlich:

$$\zeta_\nu(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi\varrho}{2}}\,H^{(2)}_{\nu+1/2}(\varrho),$$

$$\psi_\nu(\varrho) = \Re e\,\zeta_\nu(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi\varrho}{2}}\,J_{\nu+1/2}(\varrho).$$

Die Kugelfunktionen P_ν $(\cos\chi)$ lassen sich mittels des Additionstheorems:

$$P_\nu(\cos\chi) = P_\nu(\cos\vartheta)\,P_\nu(\cos\vartheta_1) + 2\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}P^\mu_\nu(\cos\vartheta)\,P^\mu_\nu(\cos\vartheta_1)\cos\mu(\varphi-\varphi_1) \tag{5}$$

in den Polarkoordinaten φ, ϑ ausdrücken, wo die zugeordneten Kugelfunktionen P^μ_ν mit F. Neumann als durch

$$P^\mu_\nu(\cos\vartheta) = \sin^\mu\vartheta\,\frac{d^\mu P_\nu(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^\mu}$$

gegeben, anzunehmen sind.

Um die folgenden Rechnungen möglichst einfach zu gestalten, soll nur der Übergang in den Grundzustand des Atoms in Betracht gezogen werden. Wir setzen also nach Schrödinger

$$u_{n'} = R_1(r_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\,e^{-\frac{r_1}{a_0}} \tag{6}$$

$$u_n = R_2(r_1)\cdot F_n$$

wo

$$F_n = r_1^n\sum_{m=0}^{n}P^m_n(\cos\vartheta_1)\cdot(\alpha_m\cos m\varphi_1 + \beta_m\sin m\varphi_1)$$

eine räumliche Kugelfunktion n-ter Ordnung und

$$R_2(r_1) = \left(\frac{2}{la_0}\right)^n e^{-\frac{r_1}{la_0}}L^{2n+1}_{n+l}\left(r_1\frac{2}{la_0}\right) \tag{6'}$$

bedeutet. l ist die Gesamtquantenzahl, $a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m_0 e^2}$ der „Radius“ des Wasserstoffatoms im Normalzustande und L^{2n+1}_{n+l} sind die bei Schrödinger auftretenden Ableitungen der Laguerreschen Polynome. Die Funktion $u_{n'}$ ist dabei gleich normiert angegeben worden. Die Normierungskoeffizienten von u_n hingegen sind mit den α_m und β_m in F_n vereinigt zu denken. Den drei Integrationen nach φ_1, ϑ_1, r_1 entsprechend, zerfallen sie in drei Faktoren[1]):

$$\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{la_0}\right)^3\frac{1}{2l}\frac{(l-n-1)!}{[(l+n)!]^3}}$$

$$\left(\varepsilon_m = 1 \text{ für } m \neq 0,\ \varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{6''}$$

Die Annahme (6) ergibt nun mit Rücksicht auf (1) für die Strom- und Ladungsdichte

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= \frac{eh}{4\pi i m_0}\left\{R_1R_2\,\mathrm{grad}_1\,F_n + \Phi F_n\,\mathfrak{r}_1\right\},\\ \varrho &= -eR_1R_2F_n\end{aligned} \tag{7}$$

wo $\Phi = R_1\frac{dR_2}{dr_1} - R_2\frac{dR_1}{dr_1}$ und $\mathfrak{r}_1$ den Einheitsvektor in der Richtung von $\mathfrak{r}_1$ bedeutet. Der Operator grad wurde dabei mit dem Index 1 versehen, weil diese Operation sich hier auf die Punkte P_1 des Integrationsgebietes bezieht. Für die Berechnung von $\mathfrak{A}$ ist nun Klarheit über die Ordnung der in $\mathfrak{J}$ auftretenden Kugelfunktionen notwendig. F_n ist als räumliche Kugelfunktion n-ter Ordnung in x_1, y_1, z_1 homogen vom n-ten Grade. $\mathrm{grad}_1 F_n$ enthält daher nur Kugelfunktionen $(n-1)$-ter Ordnung. Um die Ordnung der in $\mathfrak{r}_1 F_n$ auftretenden Kugelfunktionen zu bestimmen, bemerken wir, daß

$$\mathrm{grad}_1\frac{F_n}{r_1^{2n+1}} = \frac{1}{r_1^{2n+1}}\,\mathrm{grad}_1 F_n - \frac{2n+1}{r_1^{2n+2}}\,F_n\,\mathfrak{r}_1,$$

und daher

$$F_n\mathfrak{r}_1 = \frac{1}{2n+1}\left(r_1\,\mathrm{grad}_1 F_n - r_1^{2n+2}\,\mathrm{grad}_1\frac{F_n}{r_1^{2n+1}}\right) \tag{8}$$

ist. Nun sieht man, daß $\mathrm{grad}_1\frac{F_n}{r_1^{2n+1}}$ Kugelfunktionen $(n+1)$-ter Ordnung enthält; denn bekanntlich ist $\frac{F_n}{r_1^{2n+1}}$ eine räumliche Kugelfunktion $-(n+1)$-ter Ordnung und daher ihr Gradient eine solche $-(n+2)$-ter Ordnung. In übersichtlicher Schreibweise läßt sich somit die Stromdichte $\mathfrak{J}$ nach (7) und (8) ausdrücken in der Gestalt:

1) Bezeichnung wie bei P. Debye, Ann. d. Phys., **30**, 57, 1909.

1) Vgl. Y. Sugiura, Zeitschr. f. Phys. **44**, 190, 1927.

$$\mathfrak{J} = \frac{eh}{4\pi i m_0}\left\{\left(R_1 R_2 + \frac{\Phi r_1}{2n+1}\right)\operatorname{grad}_1 F_n - \frac{r_1^{2n-2}}{2n+1}\Phi \operatorname{grad}_1 \frac{F_n}{r_1^{2n+1}}\right\}. \tag{7'}$$

$\mathfrak{A}$ und φ können nun leicht angegeben werden, wenn man beachtet, daß nach (3), (7) und (7′) bei ihrer Berechnung Integrale von der Form

$$\int f(r_1)\, r_1^n P_n^m(\cos\vartheta_1)\frac{\cos}{\sin} m\varphi_1 \frac{e^{-ikR}}{R}\, d\tau = \int \frac{e^{-ikR}}{R} P_n^m(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1 \frac{\cos}{\sin} m\varphi_1 f(r_1)\, r_1^{n+2}\, dr_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1 \tag{9}$$

auftreten, die sich mit Hilfe von (4) und (5) und der Normierungsrelation der Kugelfunktionen

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\vartheta)\, P_\nu^m(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \nu = n \\ 0 & \nu \neq n \end{cases} \tag{10}$$

bestimmen lassen. Die Komplikation, die aus der Tatsache entspringt, daß Entwicklung (4) nur für $r > r_1$ gilt, kann dabei umgangen werden, wenn man $\mathfrak{A}$ und φ, was für unsere Zwecke vollständig hinreicht, nur für große r-Werte angibt. Da nach (6) und (7) die Funktion $f(r_1)$ im Unendlichen exponentiell verschwindet, kann in diesem Falle die Integration nach r_1 bei Verwendung von (4) ins Unendliche erstreckt werden und es ergibt sich dann für (9) aus (4), (5) und (6):

$$\frac{4\pi\zeta_n(kr)}{ik\, r^{n+1}} r^n P_n^m(\cos\vartheta)\frac{\cos}{\sin} m\varphi \int_0^\infty \psi_n(kr_1) f(r_1)\, r_1^{n+1}\, dr_1.$$

Nun ist ohne weiteres einzusehen, daß man für $\mathfrak{A}$ und φ die folgenden Ausdrücke erhält:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{ic}\left\{\frac{\zeta_{n-1}(kr)}{r^n}\operatorname{grad} F_n \cdot I_1 \right. \\ &\quad \left. - r^{n+1}\zeta_{n+1}(kr)\cdot \operatorname{grad}\frac{F_n}{r^{2n+1}}\cdot I_2\right\}, \\ \varphi &= -\frac{\zeta_n(kr)}{r^{n+1}} F_n I_3, \end{aligned} \tag{11}$$

wo

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{eh}{ikm_0}\int_0^\infty \psi_{n-1}(kr_1)\left(R_1 R_2 + \frac{r_1\Phi}{2n+1}\right) r_1^n\, dr_1, \\ I_2 &= \frac{eh}{ikm_0}\int_0^\infty \psi_{n+1}(kr_1)\frac{\Phi}{2n+1} r_1^{n+1}\, dr_1, \\ I_3 &= \frac{4\pi e}{ik}\int_0^\infty \psi_n(kr_1) R_1 R_2 r_1^{n+1}\, dr_1 \end{aligned} \tag{12}$$

bedeutet. $\mathfrak{A}$ und φ entsprechen offenbar einer im Koordinatenursprung liegenden in einem strom- und ladungsfreien Raume befindlichen Multipol-Lichtquelle. Dies ist verständlich, da ja die Potentiale $\mathfrak{A}$ und φ, ihrer Ableitung nach, das Feld asymptotisch nur im Unendlichen darstellen, also in einem Gebiet, wo Strom- und Ladungsdichte verschwinden.

Zwischen den drei Integralen (12) besteht dabei der Zusammenhang:

$$I_3 = \frac{1}{c}\left(n I_1 - (n+1) I_2\right). \tag{13}$$

Er kann etwa aus der Tatsache erhalten werden, daß $\mathfrak{A}$ und φ miteinander durch die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\mathfrak{A} + ik\varphi = 0$ verknüpft sind, wenn man die bekannten Relationen für räumliche Kugelfunktionen

$$\begin{aligned} &\Delta F_n = 0, \quad \Delta \frac{F_n}{r^{2n+1}} = 0, \\ &\mathfrak{r}\operatorname{grad} F_n = n F_n, \quad \mathfrak{r}\operatorname{grad}\frac{F_n}{r^{2n+1}} = -(n+1)\frac{F_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned} \tag{14}$$

sowie die aus den Rekursionsformeln[1]):

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{k}\frac{d\zeta_n(kr)}{dr} &= (n+1)\zeta_{n-1}(kr) - n\zeta_{n+1}(kr), \\ \frac{2n+1}{k}\frac{\zeta_n(kr)}{r} &= \zeta_{n-1}(kr) + \zeta_{n+1}(kr) \end{aligned} \tag{15}$$

sich unmittelbar ergebenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} r^n \zeta_n(kr) &= k r^n \zeta_{n-1}(kr), \\ \frac{d}{dr}\frac{\zeta_n(kr)}{r^{n+1}} &= -k\frac{\zeta_{n+1}(kr)}{r^{n+1}} \end{aligned} \tag{15'}$$

benützt. Die Relation (13) kann aber auch direkt aus der Schrödingerschen Differentialgleichung für χ[2]) erhalten werden. Mit Rücksicht auf das Folgende sei noch bemerkt, daß (15) ebenso wie (15′) auch für den Realteil der ζ_ν d. h. für die Funktionen ψ_ν gilt.

Berücksichtigt man nun die Vektorrelation $\operatorname{rot}\varphi\mathfrak{a} = \varphi\operatorname{rot}\mathfrak{a} - [\mathfrak{a}\operatorname{grad}\varphi]$, so erhält man schließlich aus (2) und (11) unter Zuhilfenahme von (8), (13), (15) und (15′) für das elektromagnetische Feld die Ausdrücke:

1) Vgl. P. Debye, l. c.
2) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361, 1926.

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \left\{-\frac{n+1}{2n+1}\frac{\zeta_{n-1}(kr)}{r^n}\,\mathrm{grad}\,F_n + \frac{n}{2n+1}\,r^{n+1}\zeta_{n+1}(kr)\,\mathrm{grad}\,\frac{F_n}{r^{2n+1}}\right\}\frac{k}{c}(I_1+I_2)\,,\\ \mathfrak{H} &= i\,\frac{\zeta_n(kr)}{r^{n+1}}\,[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,F_n]\,\frac{k}{c}(I_1+I_2)\,.\end{aligned} \tag{16}$$

§ 2.

Energie- und Impulsmomentstrahlung.

Die zeitlichen Mittelwerte E und $\mathfrak{J}$, von Energie und Impulsmoment, die von unserer Lichtquelle ausgestrahlt werden, sind durch

$$\begin{aligned}E &= \frac{c}{8\pi}\,\mathfrak{Re}\int_K \mathfrak{r}\,[\mathfrak{E}\tilde{\mathfrak{H}}]\,df,\\ \mathfrak{J} &= \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{Re}\int_K \left\{[\mathfrak{E}\mathfrak{r}]\,(\tilde{\mathfrak{E}}\mathfrak{r}) + [\mathfrak{H}\mathfrak{r}]\,(\tilde{\mathfrak{H}}\mathfrak{r})\right\}df\end{aligned} \tag{17}$$

bestimmt, wo $\mathfrak{r}$ den Einheitsvektor in der Richtung von $\mathfrak{r}$ bedeutet. Die Integration ist über irgendeine die Lichtquelle umschließende Fläche, am zweckmäßigsten über eine Kugelfläche K mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, zu erstrecken und muß selbstverständlich für die Multipolstrahlung (16) ein vom Kugelradius r unabhängiges Ergebnis liefern. Für df ist $df = r^2\,d\omega = r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ zu setzen.

Beachtet man, daß $\mathfrak{r}\,[\mathfrak{E}\tilde{\mathfrak{H}}] = \tilde{\mathfrak{H}}\,[\mathfrak{r}\mathfrak{E}]$ und $(\tilde{\mathfrak{H}}\mathfrak{r}) = 0$ ist und berücksichtigt ferner die Relationen (8) und (15), so erhält man aus (16) und (17):

$$\begin{aligned}E &= -\frac{k}{8\pi c}\,|I_1+I_2|^2\,\mathfrak{Re}\,\frac{\tilde{\zeta}_n(kr)}{i}\,\frac{d\zeta_n(kr)}{dr}\int_K \frac{[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,F_n]\,[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n]}{r^{2n-2}}\,d\omega\,,\\ \mathfrak{J} &= -\frac{n(n+1)}{8\pi c^2}\,|I_1+I_2|^2\,\mathfrak{Re}\,\tilde{\zeta}_n(kr)\,\frac{d\zeta_n(kr)}{dr}\int_K \frac{\tilde{F}_n\,[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,F_n]}{r^{2n}}\,d\omega\,.\end{aligned}$$

Die scheinbare Abhängigkeit von r kann hier beseitigt werden, wenn man in den obigen Ausdrücken den Grenzübergang $r = \infty$ vollzieht[1]). Da die beiden Integrale in E und $\mathfrak{J}$ von r überhaupt nicht abhängen und für große r-Werte in erster Näherung $\zeta_n(kr) = i^{n+1}e^{-ikr}$ wird, ergibt sich schließlich

$$E = \frac{k^2}{8\pi c}\,|I_1+I_2|^2\int_K \frac{[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,F_n]\,[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n]}{r^{2n-2}}\,d\omega,\quad \mathfrak{J} = \frac{n(n+1)\,k}{8\pi c^2}\,|I_1+I_2|^2\,\mathfrak{Im}\int_K \frac{\tilde{F}_n\,[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,F_n]\,d\omega}{r^{2n}}\,. \tag{18}$$

Die hier auftretenden Kugelfunktionen-Integrale sind nun weiter zu behandeln. Das Integral in E läßt sich einfach ermitteln. Zunächst ergibt sich mit Hilfe von (14):

$$\int_K \frac{[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,F_n]\,[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n]}{r^{2n-2}}\,d\omega = \int_K \frac{\mathrm{grad}\,F_n\cdot\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n}{r^{2n-2}}\,d\omega - n^2\int_K \frac{F_n\tilde{F}_n}{r^{2n}}\,d\omega\,. \tag{19}$$

Um das erste hier rechts auftretende Integral zu berechnen, kann man den Gaußschen Satz auf eine Kugel vom Radius r_0 und den Vektor $F_n\,\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n$ anwenden. Da $\mathrm{div}\,(F_n\,\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n) = \mathrm{grad}\,F_n\cdot\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n$ ist und die Normalkomponente unseres Vektors an die Kugelfläche durch $F_n\,\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n = n\,\frac{F_n\tilde{F}_n}{r}$ gegeben wird, so erhält man:

$$\begin{aligned} n\int_K F_n\tilde{F}_n\,r\,d\omega\,\Big|_{r=r_0} &= \int_0^{r_0} r^2\,dr\int_K \mathrm{grad}\,F_n\,\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n\,d\omega\\ &= \int_0^{r_0} r^{2n}\,dr\cdot\int_K \frac{\mathrm{grad}\,F_n\cdot\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n}{r^{2n-2}}\,d\omega\\ &= \frac{r_0^{2n+1}}{2n+1}\int_K \frac{\mathrm{grad}\,F_n\cdot\mathrm{grad}\,\tilde{F}_n}{r^{2n-2}}\,d\omega\,.\end{aligned}$$

Das letzte Integral über die Kugel K hängt nämlich von r nicht ab und die Integrationen über r und K konnten daher unabhängig von-

1) Die Tatsache, daß die in Rede stehenden Ausdrücke für E und $\mathfrak{J}$ bei beliebigem r die Relationen (18) ergeben, kann auch direkt erschlossen werden. Es gilt nämlich $\zeta_n(\varrho)\,\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\,\psi_n(\varrho) = i$ (vgl. A. Rubinowicz, Ann. d. Phys. **62**, 716, 1920). Setzt man nun $\mathfrak{Im}\,\zeta_n(\varrho) = \chi_n(\varrho)$, so ist $\mathfrak{Im}\,\tilde{\zeta}_n(\varrho)\,\zeta_n'(\varrho) = \psi_n(\varrho)\,\chi_n'(\varrho) - \chi_n(\varrho)\,\psi_n'(\varrho) = -\mathfrak{Im}\,[\zeta_n(\varrho)\,\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\,\psi_n(\varrho)] = -1$ oder $\mathfrak{Im}\,\tilde{\zeta}_n(kr)\,\frac{d\zeta_n(kr)}{dr} = -k$. Da das Integral in E offenbar reell das Integral in $\mathfrak{J}$, wie aus (8) und den Orthogonalitätseigenschaften der Kugelfunktionen folgt, aber rein imaginär ist, so ergeben sich unmittelbar die Relationen (18).

einander ausgeführt werden. Man erhält somit:

$$\int\limits_K \frac{\operatorname{grad} F_n \cdot \operatorname{grad} \bar{F}_n}{r^{2n-2}} d\omega = n(2n+1) \int\limits_K \frac{F_n \bar{F}_n}{r^{2n}} d\omega$$

und daher ergibt sich für das in E auftretende Integral (19) der Ausdruck:

$$n(n+1) \int\limits_K \frac{F_n \bar{F}_n}{r^{2n}} d\omega. \tag{20}$$

Das Integral in $\mathfrak{J}$ kann leicht anschaulich gedeutet werden. Nach Schrödinger ist nämlich im Anfangszustande unseres Atoms das Impulsmoment in der Richtung der z-Achse durch

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \Re e \frac{h}{2\pi i} \int \bar{u}_n \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} d\tau \\ &= \Re e \frac{h}{2\pi i} \int \bar{u}_n \left(x \frac{\partial u_n}{\partial y} - y \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) d\tau \\ &= \Re e \frac{h}{2\pi i} \int \bar{u}_n [\mathfrak{r} \operatorname{grad} u_n]_z \, d\tau \end{aligned}$$

und mithin der entsprechende Vektor durch

$$\mathfrak{M} = \Re e \frac{h}{2\pi i} \int \bar{u}_n [\mathfrak{r} \operatorname{grad} u_n] \, d\tau$$

gegeben. Mit Rücksicht auf (6) läßt sich aber $\mathfrak{M}$ in der Form

$$\mathfrak{M} = \frac{h}{2\pi} \int\limits_0^\infty R_2 r^{2n+2} dr \cdot \Im m \int\limits_K \frac{\bar{F}_n [\mathfrak{r} \operatorname{grad} F_n]}{r^{2n}} d\omega \tag{21}$$

darstellen. Das in $\mathfrak{J}$ auftretende Integral über die Kugelfunktionen und damit auch die Richtung von $\mathfrak{J}$ wird also im wesentlichen durch den Vektor $\mathfrak{M}$ des Anfangszustandes bestimmt, wie man dies bei einem Übergange in den impulsmomentfreien Normalzustand erwartet.

§ 3. Erhaltung der Energie und des Impulsmomentes bei der Ausstrahlung.

Die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulsmomentes behalten für den Ausstrahlungsvorgang sicherlich ihre Geltung, sobald das Verhältnis der Mittelwerte der in der Zeiteinheit ausgestrahlten Beträge an Impulsmoment und Energie d. h. $\mathfrak{J}/E$ gleich ist dem Verhältnis der Differenzen der entsprechenden beiden Größen im Anfangs- und Endzustande des Atoms. Da für den Grundzustand des Atoms das Impulsmoment verschwindet, muß also

$$\frac{\mathfrak{J}}{E} = \frac{\mathfrak{M}}{h\nu} \tag{22}$$

gelten. Dies ist in der Tat der Fall; aus (18), (20) und (21) folgt

$$\frac{\mathfrak{J}}{E} = \frac{1}{\int\limits_0^\infty R_2^2 r^{2n+2} dr \int\limits_K \frac{F_n \bar{F}_n}{r^{2n}} d\omega} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{h\nu}$$

und da der erste Faktor rechts nichts anderes als das Quadrat des Normierungskoeffizienten für den Anfangszustand darstellt, also gleich 1 ist, so ist die letzte Relation mit (22) identisch. Damit ist das Erfülltsein der beiden in Rede stehenden Sätze für alle, somit auch für die bei Berücksichtigung der retardierten Potentiale auftretenden „verbotenen“ Übergänge gesichert[1]).

§ 4. Intensitäten der „verbotenen“ Lymanlinien.

Nach dem obigen Ergebnisse kann man wohl hoffen, daß der Ausdruck (18) die Intensitäten der verbotenen Wasserstofflinien, die im Grundniveau enden mit ungefähr der gleichen Genauigkeit wiedergibt, wie die Heisenberg-Schrödingerschen Ansätze dies für die regulären Wasserstofflinien leisten. Um nun E für die einzelnen Übergänge angeben zu können, müssen wir den Wert von $I_1 + I_2$ feststellen. Nach (12) und (15) ergibt sich zunächst:

$$I_1 + I_2 = \frac{eh}{ikm} \int\limits_0^\infty \left\{ R_1 R_2 \psi_{n-1}(kr_1) + \frac{1}{k} \Phi \psi_n(kr_1) \right\} r_1^n dr_1.$$

Da aber

$$\Phi = R_1 \frac{dR_2}{dr_1} - R_2 \frac{dR_1}{dr_1} = \frac{d}{dr_1}(R_1 R_2) - 2 R_2 \frac{dR_1}{dr_1}$$

ist, so tritt in $I_1 + I_2$ das Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{d}{dr_1}(R_1 R_2) \frac{\psi_n(kr_1)}{k} r_1^n dr_1$$

auf, das durch partielle Integration unter Verwendung von (15′) und mit Rücksicht darauf, daß an den Integrationsgrenzen $R_1 R_2 \psi_n(kr_1) \cdot r_1^n$ verschwindet in $-\int\limits_0^\infty R_1 R_2 \psi_{n-1}(kr_1) r_1^n dr_1$ übergeht. Es wird somit:

$$I_1 + I_2 = -\frac{2eh}{ik^2 m_0} \int\limits_0^\infty R_2 \frac{dR_1}{dr_1} \psi_n(kr_1) r_1^n dr_1$$

oder nach (6) und (6′) und der Definition der Funktion ψ_n:

---

1) Vgl. A. Rubinowicz, Sommerfeld-Festschrift (im Erscheinen).

$$I_1 + I_2 = \frac{e\,h}{i\,m_0\sqrt{2}\,(k a_0)^{3/2}}\beta^{n+1}\cdot l\int_0^\infty e^{-\alpha r_1} L_{n+l}^{2n+1}(\beta r_1) J_{n+1/2}(k r_1)\, r_1^{n+1/2}\, dr_1; \quad \alpha = \frac{1}{a_0}\frac{l+1}{l},\ \beta = \frac{2}{l a_0}. \tag{23}$$

Das Integral in (23) — es soll im folgenden mit A_{ln} bezeichnet werden, um seine Abhängigkeit von den Indizes l und n, soweit sie hier ausdrücklich auftreten, festzuhalten — kann leicht mit Hilfe der erzeugenden Funktion

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} L_{n+l}^{2n+1}(\beta r_1)\frac{t^{l-(n+1)}}{(n+l)!} = -\frac{e^{-\beta\frac{t}{1-t}r_1}}{(1-t)^{2n+2}} \tag{24}$$

der Polynome L_{n+l}^{2n+1} angegeben werden. Aus (24) folgt nämlich

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{ln}\frac{t^{l-(n+1)}}{(n+l)!} = \frac{-1}{(1-t)^{2n+2}}\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta\frac{t}{1-t}\right)r_1} J_{n+1/2}(k r_1)\, r_1^{n+1/2}\, dr_1,$$

woraus bei Anwendung der Gegenbauerschen Relation[1])

$$\int_0^\infty e^{-\gamma r_1} J_\nu(k r_1)\, r_1^\nu\, dr_1 = \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}}\frac{(2k)^\nu}{(k^2+\gamma^2)^{\nu+1/2}}$$

sich sofort

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{ln}\frac{t^{l-(n+1)}}{(n+l)!} = -\frac{n!}{\sqrt{\pi}}\frac{(2k)^{n+1/2}}{\left(k^2+\left(\alpha+\beta\frac{t}{1-t}\right)^2\right)^{n+1}}\frac{1}{(1-t)^{2(n+1)}} =$$

$$= -\frac{n!}{\sqrt{\pi}}\frac{(2k)^{n+1/2}}{(k^2+\alpha^2)^{n+1}}\sum_{\sigma=0}^{\infty}(-1)^\sigma\binom{-(n+1)}{\sigma}\left[\frac{1+i\frac{\alpha-\beta}{k}}{1+i\frac{\alpha}{k}}\right]^\sigma t^\sigma$$

$$\cdot\sum_{\tau=0}^{\infty}(-1)^\tau\binom{-(n+1)}{\tau}\left[\frac{1-i\frac{\alpha-\beta}{k}}{1-i\frac{\alpha}{k}}\right]^\tau\cdot t^\tau$$

ergibt. Daraus erhält man aber für A_{ln} den Ausdruck:

$$A_{ln} = -\frac{n!\,(n+l)!}{\sqrt{\pi}}\frac{(2k)^{n+1/2}}{(k^2+\alpha^2)^{n+1}}\sum_{\nu=0}^{\varrho}\binom{n+\nu}{n}\binom{n+\varrho-\nu}{n}\left[\frac{1+i\frac{\alpha-\beta}{k}}{1+i\frac{\alpha}{k}}\right]^\nu\left[\frac{1-i\frac{\alpha-\beta}{k}}{1-i\frac{\alpha}{k}}\right]^{\varrho-\nu}$$

in dem für $\varrho = l-(n+1)$ zu setzen ist. Beachtet man nun, daß $\frac{\alpha-\beta}{k} = \frac{1}{2\pi N a_0}\frac{l}{l+1}$ und $\frac{\alpha}{k} = \frac{1}{2\pi N a_0}\frac{l}{l-1}$ Zahlen sind (N ist hier die Rydbergsche Konstante für die Wellenzahl $N = 1{,}097\cdot 10^5\ \mathrm{cm}^{-1}$, $a_0 = 0{,}529\cdot 10^{-8}$ cm und daher $\frac{1}{2\pi N a_0} = 274$), denen gegenüber 1 vernachlässigt werden kann, und daß ferner

$$\sum_{\nu=0}^{\varrho}\binom{n+\nu}{n}\binom{n+\varrho-\nu}{n} = \binom{2n+1+\varrho}{2n+1}$$

ist, so erhält man in erster Näherung

$$A_{ln} = -\frac{n!}{(2n+1)!}\cdot\frac{[(n+l)!]^2}{(l-n-1)!}\left(\frac{l-1}{l+1}\right)^l\frac{(4\pi N a_0^2)^{n+1}}{\sqrt{2\pi k}}. \tag{25}$$

1) N. Nielsen, Handbuch der Theorie d. Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, p. 186.

Für $I_1 + I_2$ folgt dann aus (23) und (25):

$$I_1 + I_2 = \frac{ieh}{\pi^{3/2} m_0} \frac{(8\pi N a_0)^n}{N a_0^{1/2} l^{n-4}} \frac{n!}{(2n+1)!} \frac{[(l+n)!]^2}{(l-n-1)!} \frac{(l-1)^{l-2}}{(l+1)^{l+2}}. \tag{26}$$

Schließlich ergibt sich bei einem Übergang e aus einem bestimmten Anfangszustande für E aus (18), (20) und (26) mit Berücksichtigung der Normierung (6″) von u_n der Ausdruck:

$$E = \frac{8e^4}{m_0 a_0^3 c} \frac{(8\pi N a_0)^{2n}}{l^{2n}} n(n+1) \left(\frac{n!}{(2n+1)!}\right)^2 \frac{(l+n)!}{(l-n-1)!} \frac{(l-1)^{2l-2}}{(l+1)^{2l+2}}. \tag{27}$$

Ist im Anfangszustande $n = 0$, so sind nach (27) keine Übergänge in den Grundzustand möglich. Dies wird ebenso wie in der ursprünglichen Schrödingerschen Überlegung durch das Verschwinden des Integrales über die Kugelfunktionen in (18) bedingt. $n = 1$ entspricht den „erlaubten" Übergängen der gewöhnlichen Lymanserie. In diesem Falle ergibt (27)

$$E = \frac{2^8 \pi^2 e^4 N^2}{9 c a_0 m_0} \frac{1}{l} \frac{(l-1)^{2l-1}}{(l+1)^{2l+1}}$$

in Übereinstimmung mit der Paulischen[1]) Darstellung der Intensitäten in der Lymanserie und mit den Rechnungen von Y. Sugiura[2]). Für größere n-Werte ist die Abnahme der Gesamtintensität der betreffenden Serie in erster Näherung durch die entsprechende Potenz des Faktors $(8\pi N a_0)^2 = 2{,}18 \cdot 10^{-4}$ d. h. durch das Quadrat des 8π-fachen Verhältnisses vom Bahnradius des Grundzustandes zur Wellenlänge der Lymanseriengrenze bestimmt, also ungemein jäh. Charakteristisch für die „verbotenen" Linien wäre ferner der Zeemaneffekt, der sich durch seine anomale Aufspaltung und besondere Intensitäts- und Polarisationsverhältnisse auszeichnen würde, die sich in ihrer Abhängigkeit von ϑ mit Hilfe von (16) leicht angeben lassen. Schließlich sei noch erwähnt, daß sich die in Rede stehenden Linien wegen der extremen Kleinheit der Ausstrahlung durch eine überaus große Ausstrahlungsdauer d. h. Interferenzfähigkeit auszeichnen müßten[1]).

1) Vgl. E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **80**, 437, 1926.
2) Y. Sugiura, Journ. de phys. et le Radium, (6), **8**, 113, 1927.

1) Diese Eigenschaft „verbotener" Übergänge bietet prinzipiell die Möglichkeit durch Interferenzversuche eine direkte experimentelle Nachprüfung der Bowenschen Hypothese über den Ursprung der Nebuliumlinien zu erhalten.

(Eingegangen 4. Oktober 1928.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 90. VERSAMMLUNG DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE IN HAMBURG VOM 16.—22. SEPTEMBER 1928.

C. Ramsauer (Berlin), Über den Wirkungsquerschnitt neutraler Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen.

Der Hauptgrund, weswegen ich dieses Referat gern übernommen habe, ist folgender:

Die allgemein benutzten Zusammenfassungen dieses Gebietes (18—22)[1]) reichen nicht wesentlich über das Jahr 1925 hinaus und stellen entsprechend den damaligen experimentellen Ergebnissen die Querschnittsanomalien[2]) der Gasmoleküle bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten völlig oder doch im wesentlichen als eine Ausnahmeerscheinung der Edelgase dar, während es sich nach den neueren Untersuchungen tatsächlich um eine Allgemeinerscheinung handelt. Dieses falsche Gesamtbild, welches sich bereits bis zu einem gewissen Grade eingebürgert hat, soll vor allem durch das vorliegende Referat auch für Fernerstehende richtig gestellt werden.

Im übrigen verfolgt das Referat die ganz allgemeine Aufgabe, die historische Entwicklung und den augenblicklichen Stand der Wirkungsquerschnittsprobleme in experimenteller Beziehung darzustellen, während ein Eingehen auf die bisher vorliegenden theoretischen Ansätze nicht beabsichtigt ist. Bei der Darstellung selbst soll der Hauptwert nicht auf die Vollständigkeit in den Einzelheiten, sondern auf die Klarheit in den Grundzügen gelegt werden.

1) Die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.
2) Unter Anomalie in diesem Zusammenhange wollen wir jede Verkleinerung des wirksamen Molekülquerschnitts mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit verstehen, ohne daß der Querschnitt sich absolut genommen der Null zu nähern braucht.

Begriffe und Versuchsanordnungen.

Zunächst wird eine kurze Übersicht der in Betracht kommenden Begriffe und Versuchsanordnungen vorausgeschickt, soweit dies zum Verständnis der Versuchsergebnisse unmittelbar erforderlich ist.

Ein Elektronenstrahl von der Intensität J_0 werde durch eine Gasschicht von dem Drucke p und der Dicke x auf die Intensität J geschwächt. Es besteht dann die auch experimentell bewiesene Beziehung

$$J = J_0 \cdot e^{-c \cdot p \cdot x}.$$

c ist hierbei zunächst als eine Art Materialkonstante aufzufassen, besitzt aber nach Überlegungen, die bis auf R. Clausius zurückgehen und von P. Lenard in ihrer Wichtigkeit zuerst erkannt sind, eine tiefere Bedeutung. Diese Konstante ist nichts anderes als die Querschnittssumme aller Moleküle in 1 cm³ bei 1 mm Hg, soweit diese an der Schwächung des Elektronenstrahls beteiligt sind.

Was hierbei im einzelnen unter der „Schwächung des Elektronenstrahls" verstanden werden soll, ist Sache einer mehr oder minder willkürlichen und aufs engste mit der benutzten Versuchsanordnung zusammenhängenden Definition. Es sei schon hier bemerkt, daß die Unterschiede, welche in dieser Beziehung zwischen dem absorbierenden Querschnitt und dem gesamten Wirkungsquerschnitt bestehen, für dieses Gebiet der langsamen Elektronen nicht diejenige

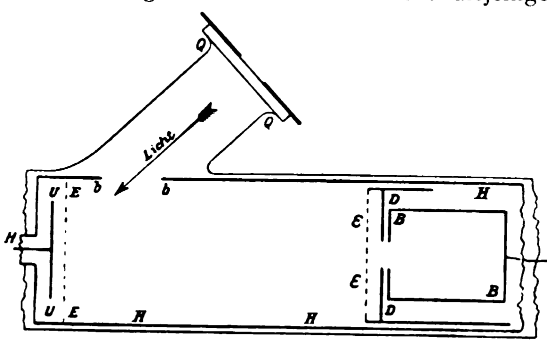
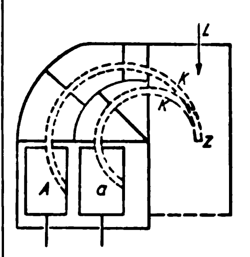


Fig. 1. Versuchsanordnung. P. Lenard 1903.

Bedeutung erlangt haben, welche anfangs vielleicht erwartet werden konnte. Eine Darstellung im einzelnen ist hier aber trotzdem erforderlich, weil sonst der Gang der historischen Entwicklung unverständlich bleiben würde.

P. Lenard, dem wir die Erschließung dieses ganzen Gebietes verdanken, führt im Zusammenhang mit der Anordnung Fig. 1 (1) den „absorbierenden Querschnitt" ein. Die an der Platte U ausgelösten und zwischen U und E beschleunigten Elektronen durchlaufen bis zu ihrer Auffangung im Käfig BB einen bestimmten Weg und zwar einmal im Vakuum (aufgefangene Menge J_0) und einmal im Gas vom Druck p (aufgefangene Menge J). Zur Ausscheidung eines Elektrons aus dem Strahl führt die „echte Absorption" und die „echte Reflexion", nicht aber die Geschwindigkeitsverminderung ohne Richtungsänderung und auch nicht die „Diffusion"; in letzterer Beziehung werden die aus dem eigentlichen, nach BB gelangenden Strahl abgelenkten Elektronen durch solche ersetzt, welche aus den äußeren Partien des ganzen, von U kommenden Gesamtstrahls in den Käfig BB hineingelenkt werden. Der mit dieser Apparatur gemessene Lenardsche absorbierende Querschnitt ist also derjenige Querschnitt der Gasmoleküle, welcher in 1 cm³ bei 1 mm Hg echt absorbierend oder echt reflektierend auf die Elektronen einwirkt.

C. Ramsauer stellt dieser Definition den „Wirkungsquerschnitt" gegenüber, welcher alle Wirkungen der Gasmoleküle auf das Elektron, nicht nur Absorption und Reflexion, sondern auch Geschwindigkeitsverlust ohne Richtungsänderung sowie Diffusion umfassen soll. Verwirklicht wird dieser Begriff durch die magnetische Methode (5, 6). In Fig. 2a wird der lichtelektrisch ausgelöste Elektronenstrahl durch ein senkrecht zur Zeichenebene stehendes Magnetfeld im Gase vom Druck p entweder auf dem kleinen Halbkreis nach a geführt (aufgefangene Menge J_0) oder auf dem großen Halbkreis nach A (aufgefangene Menge J); als Wegstrecke gilt die Differenz der beiden Halbkreise. Diese Anordnung ist für kleinste Geschwindigkeiten besonders geeignet, verbietet aber eine beliebige Beschleu-



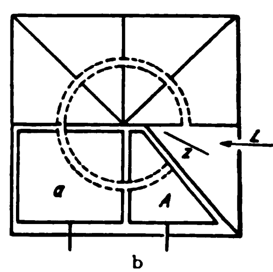


Fig. 2. Versuchsanordnungen. C. Ramsauer 1920 u. 1921.

nigung des Elektronenstrahls. In Fig. 2b ist diese Beschleunigung durch Aufladung von Z möglich. Gemessen wird hier im Gas vom Druck p die Menge, welche auf dem Halbkreis bis zum Käfig a gelangt (J_0) und die Menge, welche auf dem Dreiviertelkreis bis zum Käfig A gelangt (J); als Wegstrecke gilt die Differenz dieser beiden Strecken, also der Viertelkreis in a. Die Ausscheidung aus dem Strahl erfolgt hierbei auch durch Geschwindigkeitsverlust und durch Diffusion, da die Zugehörigkeit zum Strahl an eine bestimmte Geschwindigkeit und an eine

bestimmte Richtung gebunden ist. Der mit dieser Apparatur gemessene Ramsauersche Wirkungsquerschnitt ist also der Gesamtquerschnitt der Gasmoleküle in 1 cm^3 bei 1 mm Hg, der in irgendeiner Weise auf die Elektronen einwirkt[1]).

Die Entwicklung des Grundproblems.

Wir gehen jetzt zu den einzelnen Entwicklungsstufen des Grundproblems über.

1. P. Lenard (1903; 1) erhält mittels seiner Versuchsanordnung folgende Hauptergebnisse: (vgl. Fig. 3). Der absorbierende Querschnitt steigt bei allen Gasen mit abnehmender Elek-

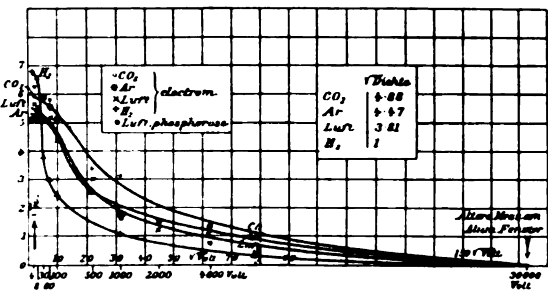


Fig. 3. Absorbierender Querschnitt. P. Lenard 1903.

tronengeschwindigkeit an. — Der absorbierende Querschnitt ist bei großen Geschwindigkeiten lediglich der Masse des Gasmoleküls proportional. — Der absorbierende Querschnitt wird bei kleinen Geschwindigkeiten zu einer individuellen Eigenschaft der betreffenden Gase. — Der absorbierende Querschnitt wächst bei den kleinsten untersuchten Geschwindigkeiten nicht über ein gewisses Maß hinaus, welches der Größenordnung nach dem gaskinetischen Querschnitt entspricht.

H. F. Mayer[1]) (1920; 3, 4) untersucht das Gebiet der kleinsten Geschwindigkeiten für die Gase H_2, CO_2, N_2, He nach einer der Lenardschen prinzipiell gleichartigen Methode und findet einen schließlich horizontal werdenden Verlauf (vgl. Fig. 4).

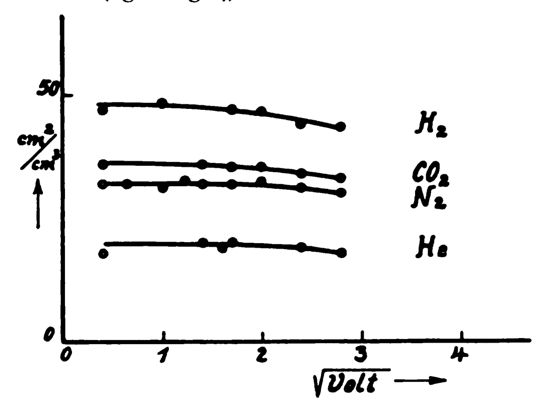


Fig. 4. Absorbierender Querschnitt. H. F. Meyer 1920.

Damit schien die gesamte Frage abgeschlossen zu sein. Es wäre höchstens noch von Interesse gewesen, die Grenzquerschnittswerte bei der Elektronengeschwindigkeit 0 für möglichst viele Gase zu messen und mit den sonstigen Eigenschaften der Gase, z. B. mit den gaskinetischen Querschnitten, zu vergleichen.

2. C. Ramsauer (1920; 5) stellt sich die Aufgabe, die Differenz zwischen dem gesamten Wirkungsquerschnitt und dem absorbierenden Querschnitt für kleinste Elektronengeschwindigkeiten zu untersuchen. Er findet nach der Methode Fig. 2a für H_2, N_2, He in der Nähe von 1 Volt für den Wirkungsquerschnitt fast die gleichen Werte, wie H. F. Mayer für den absorbierenden Querschnitt. Er schließt daraus auf das Fehlen der Diffusion und der Geschwindigkeitsverminderung in diesem Gebiet und sieht

1) Auf irgendwelche Einzelheiten kann in diesem Zusammenhang nicht eingegangen werden. In Wirklichkeit sind bei den beschriebenen Methoden noch je zwei weitere Messungen notwendig. Bei Lenard müssen noch die gesamten Elektronenmengen bestimmt werden, welche im Vakuum und welche im Gase *U* verlassen, da — auch abgesehen von Schwankungen der Lichtquelle — die lichtelektrische Wirkung im Vakuum und im Gase verschieden zu sein pflegt. Bei Ramsauer ist durch zwei Messungen im Vakuum festzustellen, wie stark der Strahl auf dem längeren Wege durch rein geometrische Beziehungen geschwächt wird. — Ferner wäre noch betr. des Wirkungsquerschnitts hervorzuheben, daß es sich hier um einen Grenzbegriff handelt, der nur bei unendlich schmalen Blenden erreicht werden könnte.

In begrifflicher Beziehung muß noch darauf hingewiesen werden, daß diese ganzen Vorgänge auch durch den Begriff der freien Weglänge, welche dem betreffenden Querschnitt umgekehrt proportional ist, dargestellt werden können. Der Querschnittsbegriff ist aber der einfachere, weil er sich prinzipiell auf ein Molekül bezieht, während der Begriff der freien Weglänge zur Definition zwei Moleküle verlangt und außerdem in diesem ganzen Zusammenhange noch besondere, hier nicht näher zu besprechende Komplikationen erfährt.

1) Rein zeitlich ist vor H. F. Mayer noch N. Åkesson zu nennen. Åkesson hat (1916, 2) bei Elektronenstrahlen, welche Gase von bestimmten Druck durchsetzen, Intensitätsschwankungen als Funktion der Elektronengeschwindigkeit gefunden, seine Versuche waren aber zu qualitativ und zu mehrdeutig, um seinen Befund wirklich zu beweisen und um einen Einfluß auf die weitere historische Entwicklung zu gewinnen. In der Beurteilung dieser frühen Åkessonschen Ergebnisse sind sich alle Kenner dieses Gebietes einig: „Jedoch fehlte gründliche Untersuchung und vor allem die Durchführung von Absorptionsmessungen, so daß die Deutung zweifelhaft bleiben mußte“ (Lenard u. Becker, 19, S. 189), „Wenn trotzdem seine Versuche an letzter Stelle genannt werden, so geschieht dies, weil die Deutung seiner Ergebnisse noch recht ungewiß erscheint ....“ (Franck u. Jordan, 20, S. 649/50).

die Übereinstimmung andererseits als eine Bestätigung der Mayerschen Werte an.

Ferner mißt Ramsauer den Wirkungsquerschnitt für Argon und entdeckt bei diesem Edelgas völlig neue, ganz unerwartete Erscheinungen: Der Wirkungsquerschnitt des Argons ist bei 1 Volt verglichen mit dem gaskinetischen Querschnitt außerordentlich klein und sinkt bei Verringerung der Elektronengeschwindigkeit noch weiter ab (vgl. Fig. 5).

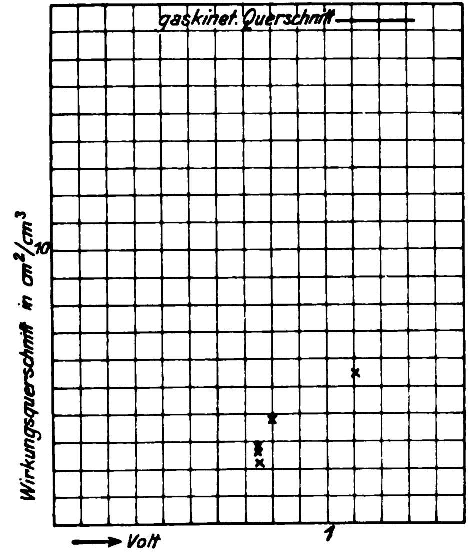


Fig. 5. Wirkungsquerschnitt des Argon. C. Ramsauer 1920.

Die Fortführung der Untersuchungen nach größeren Geschwindigkeiten hin war Ramsauer damals nicht möglich, da die benutzte Anordnung, Fig. 2a, keine Beschleunigung der Elektronen durch elektrisches Feld gestattet. (Die Variation der Geschwindigkeit in Fig. 5 war nur durch Änderung der erregenden Wellenlänge möglich.)

H. F. Mayer (1920; 4) untersuchte darauf mit seiner Anordnung ebenfalls Argon und erhielt die gleichen Ergebnisse für den absorbierenden Querschnitt[1]). Außerdem konnte er die Lücke zwischen dem Abfall der Kurve nach großen Geschwindigkeiten hin (Lenard) und dem Abfall der Kurve nach kleinen Geschwindigkeiten hin (Ramsauer) überbrücken. Er fand ein einziges Maximum bei etwa 12 Volt.

Ramsauer setzte dann (1920/21; 6) seine Untersuchungen mittels der Anordnung Fig. 2b, welche eine beliebige Variation der Elektronengeschwindigkeit auch für die magnetische Methode

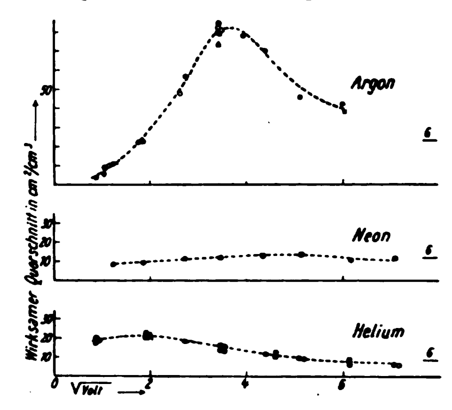


Fig. 6. Wirkungsquerschnitt. C. Ramsauer 1921.

gestattet, weiter fort und stellte zunächst den Kurvenverlauf für Ar, Ne, He und dann (1923; 7) den Kurvenverlauf für Kr, X fest. Diese Resultate sind in den Fig. 6 und 7 niedergelegt. Wie man sieht, zeigen alle Edelgase das gleiche Verhalten, wobei das Maximum und der Wiederabfall nach kleinen Geschwindigkeiten hin bei

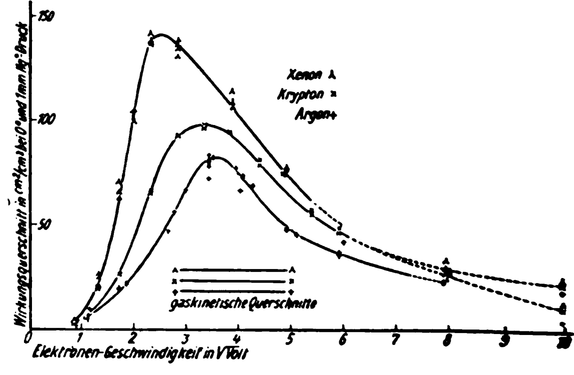


Fig 7. Wirkungsquerschnitt. C. Ramsauer 1923.

den schwereren Edelgasen sehr ausgeprägt, bei den beiden leichten Edelgasen dagegen merklich flacher ist.

Gleichzeitig wird durch einen Vergleich der Ramsauerschen A- und He-Werte mit den Mayerschen Kurven wahrscheinlich gemacht, daß in dem Bereich kleiner Elektronengeschwindigkeiten kein merklicher Unterschied zwischen dem Wirkungsquerschnitt und dem absorbieren-

1) Meine Priorität für diese Entdeckung ist einwandfrei festgestellt, da Herr H. F. Mayer, der im gleichen Institut arbeitete, in seiner einige Wochen früher eingegangenen Veröffentlichung ausdrücklich bemerkt: „Die große Durchlässigkeit des Argons für ganz langsame Strahlen (0,75—1,1 Volt) wurde zuerst von Herrn Ramsauer beobachtet". (Ann. d. Phys., **64**, 1921, 471, Anm. 1.) Ich kann aber auch eine selbständige Mitentdeckung durch Herrn Mayer nicht anerkennen, da dieser vor meiner Entdeckung des Effektes am Argon bei seinen eigenen Untersuchungen über H_2, N_2, CO_2 nicht einmal eine Andeutung von Querschnittsanomalien gefunden hat, wie sie nach der späteren Entwicklung tatsächlich, z. T. in ausgeprägtester Form, vorhanden sind.

den Querschnitt besteht, ein Ergebnis, welches sich auch weiterhin durchaus bestätigt hat. —

Damit schien die Entwicklung abermals einen gewissen Abschluß im folgenden Sinne erreicht zu haben: Auf der einen Seite stehen die Nichtedelgase mit ihrem horizontalen Endverlauf, auf der anderen Seite stehen die Edelgase mit einem Maximum und mehr oder minder starken Abfall nach kleinsten Geschwindigkeiten hin. Dieses Gesamtbild ist im wesentlichen in die zusammenfassenden Darstellungen (Nr. 18 bis 22) übergegangen und hat sich bis zu einem gewissen Grade eingebürgert, obgleich nach dem folgenden kein Zweifel an seiner Unrichtigkeit bestehen kann.

3. Es zeigt sich, erst andeutungsweise, dann immer klarer, daß der von H. F. Mayer gefundene horizontale Endverlauf der Nichtedelgase nicht den Tatsachen entspricht.

Schwer zu deuten erschienen zunächst schon die von N. Åkesson (1916; 2) gefundenen Erscheinungen; sie konnten aber der ganzen Versuchsmethode nach direkten quantitativen Versuchen gegenüber nicht als beweiskräftig angesehen werden und schienen von H. F. Mayer auf andere Ursachen zurückgeführt zu sein.

Dagegen ließen zuerst die Ergebnisse von R. B. Brode (1925; 8) ernste Zweifel an der Richtigkeit der Mayerschen Kurven entstehen. Brode benutzt eine stark vereinfachte magnetische Methodik, die zwar nicht als ganz einwandfrei betrachtet werden kann, die aber doch, wie aus

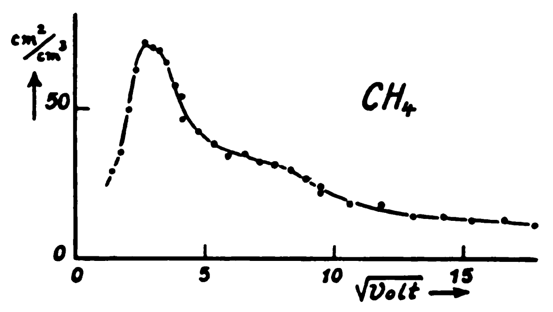


Fig. 8. Wirkungsquerschnitt.
R. B. Brode 1925.

seinen Messungen an Argon hervorgeht, den Gesamtverlauf richtig wiederzugeben vermag. Er findet zuerst für CH_4 ein Maximum und Wiederabfall nach kleinsten Geschwindigkeiten hin (vgl. Fig. 8). Dies war an sich höchst bemerkenswert, wäre aber insofern noch kein Widerspruch gegen die bisherige Gesamtauffassung gewesen, indem man nur die gefundenen Anomalien auch auf die edelgasähnlichen Gase hätte ausdehnen müssen. Brode fand dann aber weiter die in Fig. 9 wiedergegebenen Kurven für H_2 und N_2. Eine Vereinbarkeit dieser Kurven mit dem Mayerschen Horizontalverlauf erscheint kaum noch denkbar, selbst wenn man entgegen den bisherigen Erfahrungen auf den Unterschied zwischen absorbierendem Querschnitt und Wirkungsquerschnitt entscheidenden Wert legen wollte.

Dagegen stehen die Brodeschen Kurven, im Gegensatz zur Auffassung von Brode selbst, welcher die Ramsauerschen und Mayerschen Messungen nicht trennt, mit den Ramsauer-

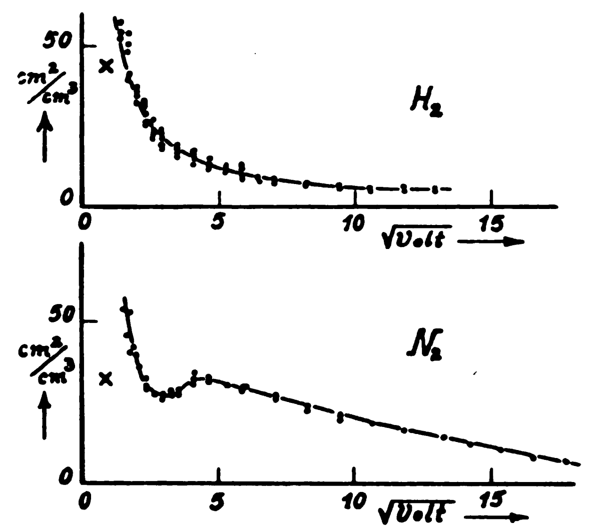


Fig. 9. Wirkungsquerschnitt.
Brode 1925 — · · · Ramsauer 1920 ×.

schen Einzelpunkten nicht im Widerspruch. Beide Meßergebnisse können nebeneinander bestehen und geben gemeinsam die Deutungsmöglichkeit, daß die Erreichung eines Maximums mit nachfolgendem starken Abstieg nach kleinen Geschwindigkeiten hin sich nicht auf die Edelgase beschränkt, sondern mindestens auch den Gasen H_2 und N_2 zukommt.

Entscheidend werden die Messungen von M. Rusch (1925; 9) an H_2, nach denen unterhalb 1 Volt ein wesentlicher Wiederabfall der Kurve eintritt, der weit unter die Mayerschen Werte führt, besonders aber die systematischen Untersuchungen von E. Brüche (1926/27; 10, 11). Brüche hat den Kurvenverlauf von H_2 und N_2 unter starker Variation der Bedingungen untersucht und die Querschnittskurven nach beiden Methoden quantitativ festgelegt, ohne dabei übrigens einen wesentlichen Unterschied zwischen dem absorbierenden Querschnitt und dem Wirkungsquerschnitt zu finden. Hier mögen seine ersten Resultate wiedergegeben werden, welche nach einer der Mayerschen im Prinzip gleichen Methode gewonnen sind (Fig. 10) und daher unmittelbar mit Mayers Worten verglichen werden können. Dieser Vergleich liefert den letzten

zwingenden Beweis für die Unrichtigkeit der Mayerschen Ergebnisse[1]).

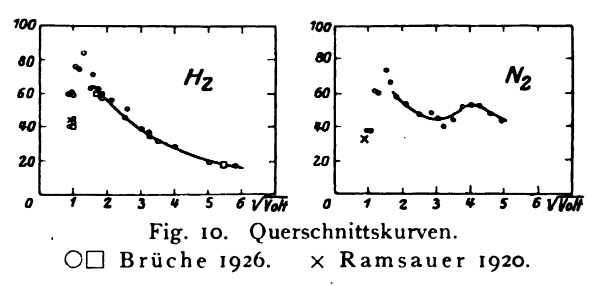


Fig. 10. Querschnittskurven.
○□ Brüche 1926. × Ramsauer 1920.

Damit haben wir jetzt ein richtiges sich auch später bestätigendes Gesamtbild gewonnen: Der eigentümliche, nicht horizontale Verlauf der Querschnittskurven bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten ist keine Sondererscheinung der Edelgasgruppen, sondern muß als eine allgemeine Erscheinung aufgefaßt werden. —

Weitere Fragen.

Es sei jetzt noch eine kurze Übersicht über die weiteren experimentellen Probleme dieses Gebietes gegeben, deren Lösung zum Teil schon wesentlich gefördert, zum Teil wenigstens angebahnt ist.

1. Wenn tatsächlich jedem Gase eine charakteristische Querschnittskurve bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten zukommt, so erscheint es sehr lohnend, diese Kurven für eine möglichst große Anzahl von Gasen festzustellen und mit den sonstigen physikalischen und chemischen Eigenschaften dieser Gase in Beziehung zu bringen. E. Brüche (1927; 12) hat diese Aufgabe erfolgreich in Angriff genommen, nachdem er zunächst die Methodik für eine schnelle und lückenlose Aufnahme des Kurvenverlaufes verbessert hatte. Sein Hauptergebnis lautet: Die Querschnittskurven der Gase lassen sich zu Gruppen zusammenfassen, denen ganz bestimmte physikalische Eigenschaften zukommen (Fig. 11).

Es öffnet sich so ein weites Feld für physikalisch-chemische Untersuchungen. Die Arbeit ist auf möglichst viele gas- und dampfförmige Verbindungen und namentlich Verbindungsreihen auszudehnen. In dieser Beziehung wird der nachfolgende Brüchesche Vortrag über den „Wirkungsquerschnitt und Molekelbau in der Pseudo-Edelgasreihe Ne — HF — H_2O — NH_3 — CH_4" ein schönes Beispiel geben[1]).



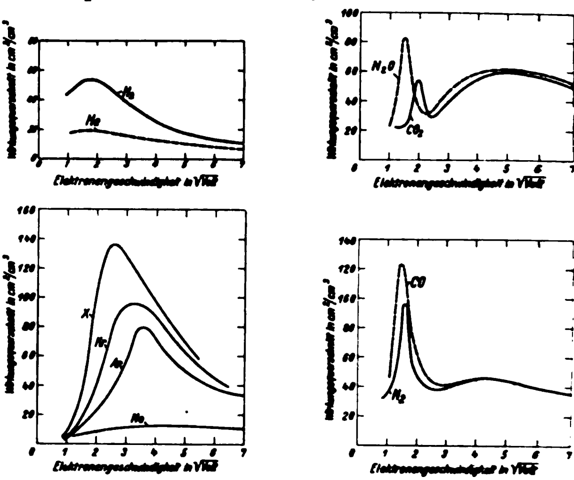


Fig. 11. Gruppeneinteilung der WQ-Kurven. E. Brüche 1927.

2. Die Untersuchung der Querschnittskurven ist in das besonders wichtige Gebiet unterhalb 1 Volt bis herab zu 0 Volt fortzusetzen. M. Rusch (1925; 9) hat das Verdienst als erster nach besonderer Methode hier vorgedrungen zu sein. Er findet für Ar und Kr ein Minimum bei 0,7 bzw. 1,1 Volt mit nachfolgendem Anstieg nach 0 Volt hin, für H_2 und He dagegen einen sich dauernd fortsetzenden Abfall (betr. Argon vgl. Fig. 12). Bei den außerordentlichen experimentellen Schwierigkeiten, welche das Arbeiten mit ganz langsamen Elektronen mit sich bringt,

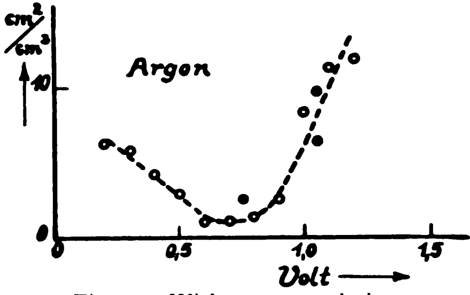


Fig. 12. Wirkungsquerschnitt
Rusch ○ ○ 1925. Ramsauer ● 1920.

erscheint die Wiederholung dieser Messungen mit anderen Versuchsanordnungen sehr erwünscht. Außerdem müßte die Untersuchung auch auf weitere Gase ausgedehnt werden.

3. Die Gesamtwirkung ist experimentell in ihre Teilwirkungen zu zerlegen. Gemessen ist bisher hauptsächlich die Gesamtwirkung, ohne daß man weiß, wie sich diese aus verschiedenen Einzelbeeinflussungen zusammensetzt. Man kann dabei formell bei der Ausführung der Versuche

1) Die Ramsauerschen Punkte schließen sich widerspruchsfrei an den Endverlauf der Brücheschen Kurven an; ihre scheinbare Übereinstimmung mit den Mayerschen Kurven, welche von Ramsauer ursprünglich als starkes Argument für die Richtigkeit dieser Kurven angesehen war, hat sich so als ein bloßer Zufall erwiesen.

1) Vgl. diese Zeitschr. **29**, 830, 1928.

ruhig an der Anschauung festhalten, daß der Wirkungsquerschnitt aus einer Summe von Teilquerschnitten besteht, muß sich aber darüber klar sein, daß diese Vorstellung sehr roh ist, und daß es sich in Wirklichkeit um Wahrscheinlichkeitsvorgänge handelt.

Nach dieser Richtung hin liegen bereits bemerkenswerte Versuche von E. Zachmann (1927; 13) über die Ablenkung in kleinen Winkeln und von R. Kollath über die Ablenkung in großen Winkeln vor. Zachmann hat hauptsächlich Argon untersucht und konnte ein Maximum der von ihm gemessenen Teilwirkung bei etwa 11 Volt feststellen. Kollath hat seine Arbeit auf eine große Reihe von Gasen ausgedehnt und das einheitliche Ergebnis erhalten, daß die Gesamtwirkung für den ersten Anstieg der Querschnittskurve bei den Edelgasen und für das erste Maximum bei den Kurven mit doppelten Maxima (alles gerechnet von der Elektronengeschwindigkeit 0 aus) im wesentlichen auf elastischen Reflexionen beruht, während der weitere Verlauf nach höheren Geschwindigkeiten hin auf andere Wirkungen zurückgeführt werden muß. Der nachfolgende Kollathsche Vortrag wird hierüber Näheres bringen[1]).

4. Die Untersuchung des Wirkungsquerschnitts ist auch auf positive Korpuskeln auszudehnen. Es liegen hier bereits folgende Ergebnisse vor.

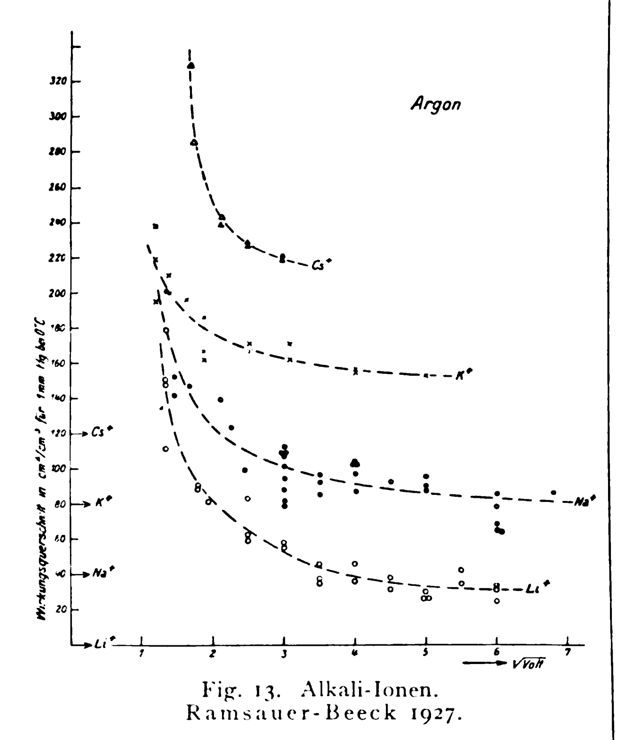


Fig. 13. Alkali-Ionen.
Ramsauer-Beeck 1927.

1) Vgl. diese Zeitschr. **29**, 834, 1928.

C. Ramsauer und O. Beeck (1927; 14) untersuchten Alkaliionen zwischen 1 und 30 Volt mit dem einheitlichen Ergebnis, daß die Wirkungsquerschnittskurven bei allen benutzten Gasen nach kleinerer Geschwindigkeit hin erst langsam, dann immer schneller und schneller ansteigen, ohne daß irgendwelche Anomalien wie bei den Elektronen auftreten (vgl. Fig. 13).

G. P. Thomson (1927; 15) untersuchte die Streuung von H^+-Teilchen (Protonen) und erhielt das höchst bemerkenswerte Resultat, daß sich auch hier in Ar und He Wirkungsmaxima zeigen, und daß diese Maxima der Größenordnung nach bei der gleichen Lineargeschwindigkeit liegen, bei welcher Ramsauer die betreffenden Maxima für Elektronen gefunden hatte (vgl. Fig. 14).

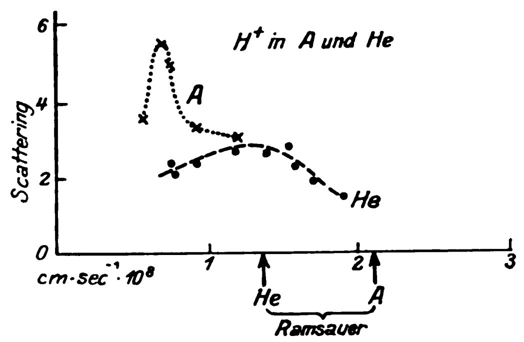


Fig. 14. Protonen.
G. P. Thomson 1927.

Wenn es sich allgemein bestätigen sollte, daß für diese ganzen Phänomene die Lineargeschwindigkeit maßgebend ist, was ja auch mit dem Fehlen aller Anomalien für geringe Voltgeschwindigkeiten bei den Ramsauer-Beeckschen Versuchen in Einklang steht, so wäre damit eine weitere Grundlage für die Deutung dieser ganzen Erscheinungen gegeben. Versuche nach dieser Richtung hin sind daher von größtem Interesse. —

Es drängt sich zum Schluß, trotz der absichtlichen Beschränkung dieses Referates auf das Experimentelle, naturgemäß die Frage nach der theoretischen Bedeutung dieser ganzen Erscheinungen auf, doch liegt die Sache insofern andersartig, wie es sonst in dieser hochtheoretischen Zeit der Fall zu sein pflegt, als theoretische Überlegungen für die Entdeckung der Effekte und für die weitere experimentelle Entwicklung ohne jeden Einfluß gewesen sind. Theorien in dem Sinne, daß ein eingehender Vergleich zwischen dem gesamten Versuchsmaterial einerseits und den berechneten Werten andererseits möglich wäre, bestehen zur Zeit noch nicht. Unter allen bisher vorliegenden Ansätzen scheinen dem Vortragenden zur Zeit die Lösungsversuche von H. Faxén und J. Holtsmark (1927/28 16, 17),

die das Problem auf breiter wellenmechanischer Grundlage angreifen, den meisten Erfolg zu versprechen. Von wesentlicher Bedeutung für Weiterführung der Theorien ist hierbei, wie schon bemerkt, die allgemeine Erschließung des Geschwindigkeitsgebietes unterhalb 1 Volt und die Vervollständigung der Protonenversuche.

Literaturübersicht[1]).

Originalarbeiten:
1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **12**, 714—744, 1903.
2) N. Åkesson, Lunds Univ. Arsskr. **12**, Nr. 11, 1916.
3) H. F. Mayer, Dissertation Heidelberg 1920.
4) H. F. Mayer, Ann. d. Phys. **64**, 451—480, 1921.
5) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **64**, 513—540, 1921.
6) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **66**, 546—558, 1921.
7) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **72**, 345—352, 1923.
8) R. B. Brode, Phys. Rev. **25**, 636, 1925.
9) M. Rusch, Physik. Zeitschr. **26**, 748—751, 1925.
10) E. Brüche, Ann. d. Phys. **81**, 537—571, 1926.
11) E. Brüche, Ann. d. Phys. **82**, 912—946, 1927.
12) E. Brüche, Ann. d. Phys. **83**, 1065—1128, 1927.
13) E. Zachmann, Ann. d. Phys. **84**, 20—60, 1927.
14) C. Ramsauer u. O. Beeck, Physik. Zeitschr. **28**, 858—864, 1927.
15) G. P. Thomson, Phil. Mag. **2**, 1076, 1926.
16) H. Faxén u. J. Holtsmark, Zeitschr. f. Phys. **45**, 307—324, 1927.
17) J. Holtsmark, Zeitschr. f. Phys. **48**, 231—243, 1928.

Zusammenfassungen:
18) C. Ramsauer, Jahrb. d. Rad. **19**, 345—354, 1923.
19) P. Lenard u. A. Becker, Handb. d. Experimentalphysik (Wien-Harms) Bd. 14, Kap. 5 C u. F.
20) F. Franck u. P. Jordan, Handb. d. Phys. (Geiger-Scheel) Bd. 23, Kap. 7.
20a) Vgl. auch: J. Franck u. P. Jordan, Struktur der Materie Bd. 3, Kap. 1.
21) W. Bothe, Handb. d. Phys. (Geiger-Scheel) Bd. 24, Kap. 1.
22) S. Valentiner, Landolt-Börnstein, Ergänzungsband. 1927. S. 74.

1) Entsprechend dem Zweck dieses Referats sind hier nur diejenigen Arbeiten wiedergegeben, die auf die Entwicklung der Wirkungsquerschnittsprobleme von wesentlichem Einfluß gewesen sind.

E. Brüche (Berlin), „Wirkungsquerschnitt und Molekelbau" in der Pseudo-Edelgasreihe: Ne—HF—H_2O—NH_3—CH_4.

Mit der Aufdeckung gewisser Zusammenhänge zwischen Wirkungsquerschnitt und Molekelbau[1]) ist der WQ-Forschung ein neuartiges Arbeitsgebiet eröffnet, durch das den WQ-Kurven auch vor jeder genauen theoretischen Deutung ein gewisser atomtheoretischer Nutzen zukommt. Untersuchungen auf diesem Gebiet versprechen nämlich einerseits Hinweise zur Aufklärung der WQ-Anomalien, anderseits solche über den Aufbau der Molekeln zu bringen.

1) In Abkürzung: WQ u. MB.

Ich habe mich daher nochmals mit einer experimentellen Untersuchung dieser Entwicklungsrichtung beschäftigt. Über das Problem und die Ergebnisse dieser Untersuchung mit dem Thema: WQ u. MB in der Pseudo-Edelgasreihe: Ne—HF—H_2O—NH_3—CH_4 möchte ich jetzt berichten. — Dazu ist ein einleitendes Eingehen auf den Stand der bisherigen Kenntnis notwendig, während ein anschließendes Skizzieren einiger auf der Basis dieser Kenntnis behandelbarer Fragestellungen eine gewisse Vorstellung von den Möglichkeiten dieses Arbeitsgebietes vermitteln möge.

1. Bisherige Kenntnis über das Thema: WQ u. MB[1]).

Die Zusammenhänge zwischen WQ u. MB zeigten sich in der Einteilungsmöglichkeit der untersuchten Gase in Gasgruppen mit besonderer Bedeutung. In jede solcher Gruppen waren nämlich Gase zusammengetreten mit gleichem Kurventyp, gewisser Verwandtschaft in den allgemeinen Eigenschaften und Ähnlich-

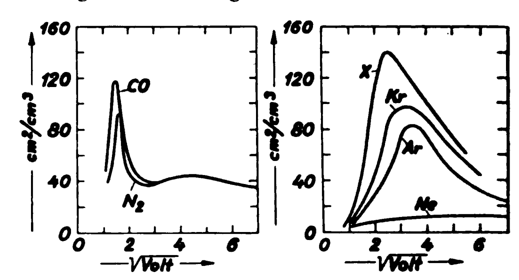


Fig. 1. Die beiden wichtigsten Gruppen der WQ-Kurven.

keiten im Aufbau ihrer Molekel. In Fig. 1 sind zwei dieser Gruppen graphisch dargestellt. Außerdem ist in Tab. I eine Zusammenstellung sämtlicher Gruppen gegeben. Die durch Figur und Tabelle wiedergegebene Kenntnis läßt sich im einzelnen in folgende Sätze zusammenfassen,

Tabelle I.
Die Wirkungsquerschnitts-Gruppen.

Gruppe	Außenelektr. Zahl	Gase
N_2	10	N_2, CO
CO_2	16	CO_2, N_2O
Ar	8	Ne, Ar, Kr, X
H_2	2	He, H_2

1) Vgl. bezügl. aller ins Einzelne gehenden Fragen die Hauptarbeit: E. Brüche, WQ u. MB. Ann. d. Phys. **83**, 1065, 1927.



Tabelle II.
Periodisches System.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	1	2	3											4	5	6	7	8
I	H																	He
II	Li	Be	B											C	N	O	F	Ne
III	Na	Mg	Al											Si	P	S	Cl	Ar
IV	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
V	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Ma	Ru				Cd					J	X
VI	Cs											Hg						

von denen der folgende den vorhergegangenen stets als Spezialfall enthält:

Satz: Sehr ähnlicher Gesamtaufbau der Molekeln bedingt ähnliche WQ-Kurven;

Satz: Ähnlicher Bau der Molekeln an der Außenschale bedingt gleichen WQ-Kurventyp;

Feststellung: Innerhalb einer Gruppe von Gasen gleichen Kurventyps herrscht Gleichzahligkeit der Außenelektronen.

Die beiden ersten Aussagen scheinen mir sichergestellt; doch ließen sie sich leicht durch Untersuchung folgender Reihen des periodischen Systems (vgl. Tab. II) nachprüfen bzw. stärker belegen: Li—Na—K—Rb—Cs; Zn—Cd—Hg[1]); O_2—S_2—Se_2; F_2—Cl_2—Br_2—J_2.

Die dritte Aussage dagegen ist nur eine Feststellung, welcher bisher kein Punkt des Versuchsmaterials widerspricht, und von der daher allgemeine Bedeutung vermutet wurde. Wegen dieser letzten Unklarheit ist es auch noch nicht möglich, aus der Ähnlichkeit der WQ-Kurven auf Ähnlichkeit des Molekelbaus zu schließen, sondern vorerst nur auf Gleichzahligkeit der Außenelektronen. Ein Beispiel: Wir dürften aus der Kurvenähnlichkeit von CH_4 mit den schweren Edelgasen nur dann auf Ähnlichkeit des Baues an der Außenschale schließen, wenn diese Gase nicht gerade sämtlich acht Außenelektronen hätten.

Nach dem geschilderten Stande der Kenntnis ist also noch die Frage nach der Bedeutung der Außenelektronenzahl offen, eine Frage, deren Klärung offensichtlich eine der nächsten Untersuchungen bzw. die nächste Untersuchung zur Aufgabe haben muß.

2. Einige neue Fragestellungen zum Thema: WQ u. MB[2]).

Betrachten wir nun kurz drei als Beispiele herausgegriffene experimentelle Fragestellungen, deren Bearbeitung auf der Grundlage der soeben geschilderten Kenntnis in Frage kommt, und wählen uns diejenige aus, welche am sichersten weiterführen muß[3]).

Tabelle III.
Fragestellungen zum Thema WQ u. MB.

1.

4	5	6
C	N	O

N ≡ N
HC ≡ N
HC ≡ CH

2.

Cl
↑
Cl←C→Cl
↓
Cl

H
↓
H→C←H
↑
H

3.

4	5	6	7	8
CH_4	NH_3	OH_2	FH	Ne
				Ar
				Kr
				X

1) Anm. bei der Korr. Durch die soeben erschienene Untersuchung von Jones (Phys. Rev. **32**, 459, 1928) scheint das Brodesche Ergebnis (Proc. Roy. Soc. **109**, 397, 1925), das im Gegensatz zu anderen Messungen stand, sichergestellt zu sein, nach welchem Zn—Cd—Hg ebenfalls eine Kurvengruppe und zwar mit hyperbolischem Charakter bilden.

2) Dieser Abschnitt 2 mußte beim Vortrag aus Zeitmangel ausgelassen werden; es wurde also von der Frage nach der Bedeutung der Außenelektronenzahl direkt zu der diese Frage beantwortenden Untersuchung der Hydridreihe übergegangen.

3) Bemerkt möge noch werden, daß bei dem heutigen Stande der Kenntnis sich natürlich keine scharfe Trennung zwischen Problemen, die für die WQ-Frage und solchen, die für die Molekelphysik wichtig sind, durchführen läßt. Das Sammeln von Erfahrungssätzen über den WQ und die Schlüsse über den Bau untersuchter Molekeln gehen durchaus Hand in Hand. (Es ist wie mit einem „aufgefundenen“ Instrument, dessen Zweck man erkennt, dessen Benutzungsweise man indessen nur ahnt. Man benutzt es, erzielt mehr oder minder gut den gewünschten Erfolg und lernt damit gleichzeitig das Instrument in seinen Eigenschaften kennen.)

Die in Tab. III zusammengestellten Beispiele sind dabei so ausgewählt, daß sie Probleme von möglichst verschiedenartiger Natur betreffen, um auf diese Weise die große Mannigfaltigkeit der neuen Fragestellungen anzudeuten.

1. Zunächst ist die Gruppe der „isosteren"[1]) Molekeln N_2—HCN—H_2C_2 (ganz entsprechend wäre: O_2—H_4C_2—H_6B_2?—H_2CO) angeschrieben, deren Kurvenfestlegung Aufschlüsse über den Einfluß des in den Molekelkomplex eintretenden H-Kerns und auch über Unsymmetrie des Aufbaues bringen kann[2]).

2. Die als zweites Beispiel angeführte Auswechselreihe von Tetrachlorkohlenstoff bis Methan CCl_4—$HCCl_3$—H_2CCl_2—H_3CCl—H_4C enthält symmetrische und nichtsymmetrische Stoffe und die beiden strukturverwandten Grenzstoffe. Wie wird sich das in den Kurven ausprägen?

3. Eine Entwicklungsreihe allgemeiner Natur beschließt die Beispiele; gerade eine derartige Reihe (die Reihe Ar—HCl—H_2S—PH_3—SiH_4 leistet Gleiches) ist, wie es sogleich näher ausgeführt werden wird, dasjenige Untersuchungsobjekt, welches bei dem vorhin geschilderten Stande der Kenntnis am geeignetsten ist. Sie muß nämlich die Entscheidung über die Bedeutung der Außenelektronenzahl bringen und damit zur Klärung grundlegender Fragen beitragen.

3. Die Hydridreihe, das jetzt geeignetste Untersuchungsobjekt zum Thema: WQ u. MB.

Um die Eigenschaften der Hydridreihe: CH_4—NH_3—OH_2—FH—Ne und ihre bei dem jetzigen Stande der Kenntnis besonders gute Eignung als Untersuchungsobjekt diskutieren zu können, ist sie in Fig. 2 in eine dem periodischen System nachgebildete Tabelle eingetragen. Bei Ne überlappt sich diese Reihe mit der Edelgasreihe Ne—Ar—Kr—X, mit der sie auch Gleichzahligkeit der Außenelektronen (acht an der Zahl) gemeinsam hat. In das jedem Gase durch die Tabelle zugeordnete Fach ist — soweit bekannt — die entsprechende WQ-Kurve eingezeichnet; daneben ist der Grimmsche Hydridverschiebungssatz[3]) angegeben. Er sagt für die uns interessierende Hydridreihe aus, daß in denjenigen pysikalischen Konstanten, die nicht mit dem Dipolmoment in Zusammenhang stehen, ein regelmäßiger Anstieg von Ne zu CH_4 stattfindet.

Nach diesen Erläuterungen können wir nun leicht formulieren, zu welchen Fragen uns die Festlegung der fehlenden WQ-Kurven Material bringen wird:

1. Ist die Zahl der Außenelektronen — alle diese Stoffe haben acht Außenelektronen — für den Kurventyp allein maßgebend? Das wäre sicherlich nicht der Fall, wenn z. B. die H_2O-Kurve nicht den Ar-Typ hätte.
2. Ist in der Reihe der Kurven von Ne bis CH_4 eine Entwicklung feststellbar in dem Sinne einer Vergrößerung der Absoluthöhe und einer verschärften Ausprägung des Maximums? Es würde das dem im Grimmschen Hydridverschiebungssatz dargestellten Gang in den physikalischen Eigenschaften entsprechen.
3. Ist die Kurvenähnlichkeit von Kr und CH_4 nur eine selbstverständliche Erscheinung der von Ne aus in beiden Reihen fortschreitenden Entwicklung oder bedeutet sie ein ähnliches Beeinflussungsfeld der Molekeln?

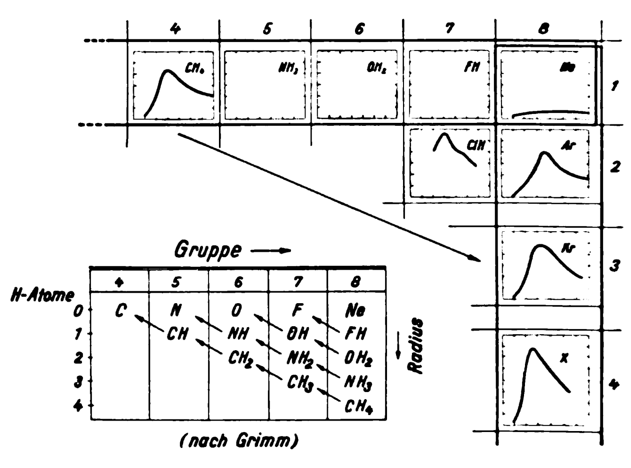


Fig. 2. Der Hydridverschiebungssatz als Thema einer Wirkungsquerschnitts-Untersuchung.

4. Die Ergebnisse aus der Untersuchung der Hydridreihe über das Thema WQ u. MB.

Die gestellte experimentelle Aufgabe ist durch Untersuchung der Dämpfe NH_3 und H_2O im wesentlichen gelöst worden. Es geschah das mit der schon früher benutzten magnetischen Apparatur, wobei naturgemäß in diesem Falle besondere Schwierigkeiten zu überwinden waren. Die Messungen mußten ohne jegliche Kühlung bei dauernder Durchströmung des Dampfes durch die Apparatur vorgenommen werden. Die Druckmessung erfolgte bei NH_3 mit dem Mc Leod-

1) Über alles in dieser Mitteilung Vorkommende aus atomchemischem Gebiet vgl. H. G. Grimm, Atombau und Chemie. Handb. d. Physik (Geiger-Scheel) **24**, 467, 1927 (besonders Abschn. 25—30), wo auch weitere Literatur verzeichnet ist.

2) Die Untersuchung von solchen Molekeln, in die H-Kerne aufgenommen sind, erscheint besonders interessant. Nimmt doch der H-Kern gegenüber allen sonstigen Molekelteilen eine Sonderstellung ein, da es das einzige elektronenlose Gebilde ist. Er kann sich als praktisch punktförmige positive Ladung anderen Atomen auf viel geringere Entfernungen nähern, als dies gewöhnliche Ionen mit Elektronenhüllen zu tun vermögen. Bei den Hydridreihen Ne—HF—H_2O—NH_3—CH_4 und Ar—HCl—H_2S—PH_3 sprechen bestimmte Daten auch durchaus dafür, daß diese weitgehende Annäherung erfolgt (vgl. Grimm, l. c. S. 483); man spricht daher oft von „Einbau der H-Kerne in die Elektronenhülle" und einer „Abschirmung der Wirkung nach außen".

3) H. G. Grimm, Zeitschr. f. Elektrochemie **31**, 474, 1925.

Manometer, während für H_2O das von mir früher für diesen Zweck gebaute Flächenmanometer Anwendung fand. Es sei betont, daß diese besonders schwierigen Messungen überhaupt erst dadurch möglich wurden, daß die Methode jetzt zeitlich schnell und meßtechnisch einfach benutzt werden kann. — Wegen der großen Schwierigkeiten ist

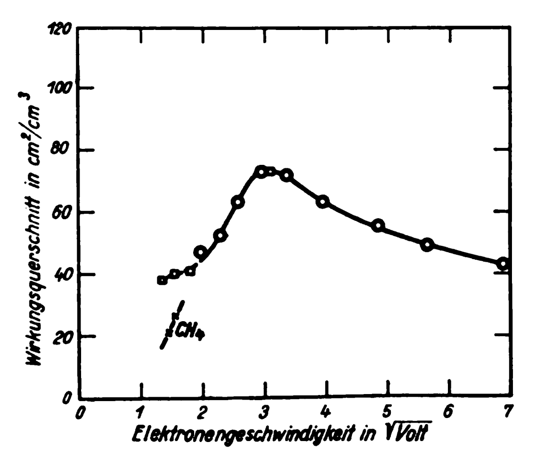


Fig. 3. Die Wirkungsquerschnittskurve von Ammoniakdampf.

den neuen Messungen nicht die gleiche Genauigkeit zuzusprechen, wie den bisher festgelegten Kurven normaler Gase, doch dürfte der Kurvencharakter zweifellos richtig sein.

Zunächst ist in Fig. 3 die Kurve von NH_3 dargestellt. Sie zeigt ähnlich der CH_4-Kurve

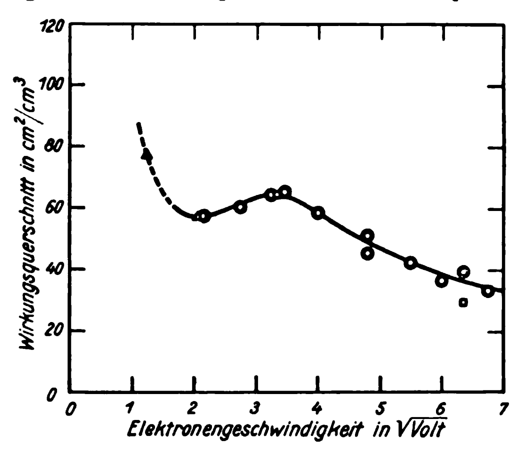


Fig. 4. Die Wirkungsquerschnittskurve von Wasserdampf.

ein ausgeprägtes Maximum, jedoch biegt sie bei Übergang zu kleinen Geschwindigkeiten deutlich in die Horizontale ab. Ein Irrtum ist, obwohl es sich aus Intensitätsmangel nicht mehr um quantitative Messungen in diesem Gebiet handelt, unmöglich, denn zwei unter denselben Bedingungen (Strömung usw.) gemessene CH_4-Punkte

(×) liegen genau auf der früher gefundenen absteigenden Kurve von CH_4 (———).

Noch krasser tritt die Änderung des Kurvencharakters bei der H_2O-Kurve hervor, die in Fig. 4 dargestellt ist. Sie zeigt ein Maximum nur noch als Andeutung, dagegen einen steilen Anstieg zu kleinen Geschwindigkeiten.

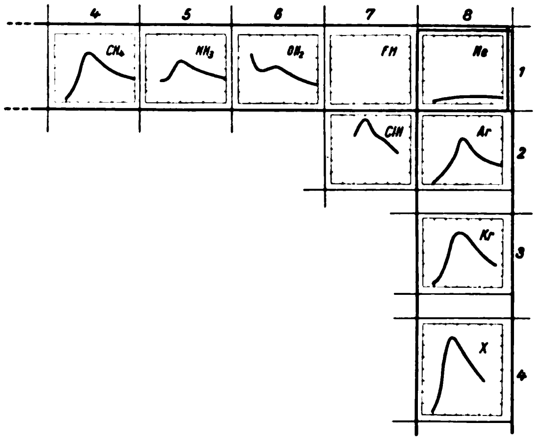


Fig. 5. Die Wirkungsquerschnittskurven der Edelgase und Pseudoedelgase.

In Fig. 5 sind nun die neuen Kurven in die freien Plätze eingefügt, die der in Fig. 3 dargestellte Ausschnitt des periodischen Systems in der Hydridreihe aufwies. Wir sehen nochmals anschaulich, daß von einer „Entwicklung" der Ne-Kurve zur CH_4-Kurve in einfacher Weise gar keine Rede ist, wenn auch in dem breiten Maximum aller Kurven eine große Verwandtschaft angedeutet zu sein scheint. Zum quantita-

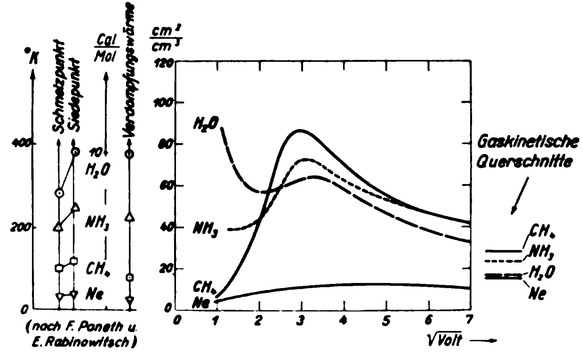


Fig. 6. Vergleich der Wirkungsquerschnittskurven in der Pseudoedelgasreihe.

tiven Vergleich sind schließlich die Kurven noch besonders in Fig. 6 übereinander gezeichnet.

Wenden wir uns nun unseren vorhin aufgestellten drei Fragen zu, deren Beantwortung wir von dieser Untersuchung erwarteten:

Antwort zu Frage 1:

Die Zahl der Außenelektronen ist offensichtlich nicht allein für den Kurventyp maßgebend;



es kommt demnach also — und das ist viel verständlicher und wertvoller — zumindest auf den Molekelbau an der Außenschale an. (Für HCl bedeutet es, daß die Zuordnung zur Ar-Gruppe wahrscheinlich nicht richtig ist.)

Antwort zu Frage 2:

Zur Diskussion des Grimmschen Hydridverschiebungssatzes wird es zweckmäßig sein, die Kurven nach zwei getrennten Geschwindigkeitsbereichen zu besprechen:

Im Bereich von rund $3\sqrt{\text{Volt}}$ ab bis zur Untersuchungsgrenze $7\sqrt{\text{Volt}}$ ist eine Ordnung der Kurvenhöhen, wie es der Verschiebungssatz bzw. die (mit eingezeichneten) gaskinetischen Querschnitte erwarten lassen, vorhanden. Sogar die Maxima passen sich dieser Ordnung in Höhen- und Geschwindigkeitslage noch recht gut an, so daß man bei Unkenntnis des bei kleineren Geschwindigkeiten liegenden Gebietes geneigt sein könnte, eine gewisse Kurvenähnlichkeit zu behaupten.

Im Bereich unter $3\sqrt{\text{Volt}}$ werden die Verhältnisse durchaus anders. Hier ist der Hydridverschiebungssatz garnicht erfüllt. Es findet vielmehr bei den im zuerst betrachteten Gebiet ähnlich verlaufenden Kurven eine selbständige Entwicklung zu besonderen Typen statt. Nur CH_4 fällt mit Ne ab, während NH_3 horizontal wird und H_2O sogar nach Durchlaufung eines

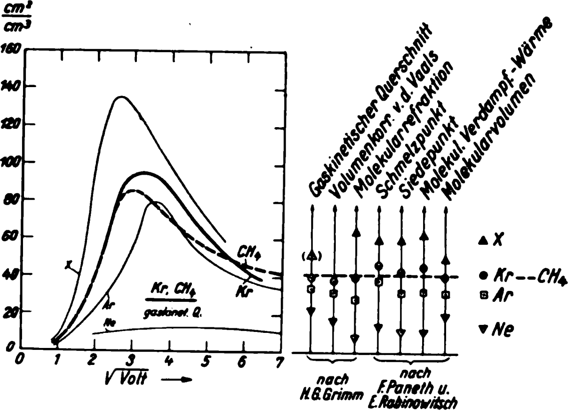


Fig. 7. Vergleich der Wirkungsquerschnittskurven und der physikalischen Daten von CH_4 und den Edelgasen: X, Kr, Ar, Ne.

Minimums dauernd zu steigen scheint. Sucht man in der Literatur nach Konstanten, welche dieser Endgruppierung: $Ne—CH_4—NH_3—H_2O$ entsprechen, so findet man ganz ähnliche Verhältnisse bezüglich aller derjenigen Größen, die durch die mit dem Einbau von H-Kernen bedingte asymmetrische Ladungsverteilung (Dipolmoment) verknüpft sind. Die neben die Kurvendarstellung eingetragenen Werte des Schmelzpunktes, Siedepunktes und der molekularen Verdampfungswärme am Siedepunkt mögen das erläutern.

Antwort zu Frage 3:

Damit ist auch die dritte Frage nach der Bedeutung beantwortbar, die der gleiche Kurventyp von CH_4 und der Ar-Reihe hat. Es bedeutet dies, da der Gleichzahligkeit der Außenelektronen keine besondere Bedeutung mehr zuzumessen ist, daß zwischen CH_4 und demjenigen Edelgas, das die ähnlichste Kurve mit CH_4 hat, eine weitgehende Ähnlichkeit des Aufbaues an der Außenschale bestehen muß. Die nähere Auswahl dieses Edelgases erleichtert Fig. 7, welche die besonders bei kleinen Geschwindigkeiten geradezu überraschende Übereinstimmung[1]) mit Kr erkennen läßt. Diese besonders ausgeprägte Kurvenübereinstimmung zwischen CH_4 und Kr ist durchaus nichts Alleinstehendes. Schon Rankine[2]) hat als erster auf diese Ähnlichkeit hingewiesen. Viele physikalische Daten sagen das gleiche wie die WQ-Kurven aus, wie es die neben dem Kurvenbild stehende Darstellung[3]) verdeutlicht.

Mit der durch die Untersuchung von NH_3 und H_2O möglich gewordenen Beantwortung obiger drei Fragen ist wieder ein kleiner Schritt vorwärts getan in das Gebiet: Wirkungsquerschnitt und Molekelbau.

Berlin-Reinickendorf, Forschungsinstitut der AEG.

1) Daß die Abweichungen bei größeren Geschwindigkeiten vollständig reell zu sein brauchen, ist nicht gesagt. Man bedenke, daß die Kr-Kurve 1921 von Ramsauer, die CH_4-Kurve 1927 vom Verfasser gemessen wurde.

2) A. O. Rankine, Nature **108**, 590, 1921.

3) Die Daten sind entnommen aus: F. Paneth u. E. Rabinowitsch, Berichte d. deutsch. Chem. Ges. **58**, 1138, 1925 und H. G. Grimm, Zeitschr. f. Elektrochemie, **31**, 474, 1925.

R. Kollath (Berlin), Über den Anteil der „Reflexion" an der Gesamtwirkung neutraler Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen.

Die Gesamtwirkung, die ein Elektron durch ein Gasmolekül erfahren kann, wird experimentell durch die Messung des Wirkungsquerschnittes erfaßt. Um nun zum Verständnis des Beeinflussungsvorganges zu gelangen, muß die Gesamtwirkung in Einzelwirkungen zerlegt werden[1]). Zu dieser experimentellen Aufgabe liefert die vorliegende Arbeit einen Beitrag, indem sie sich mit „Reflexion", „Geschwindigkeitsverlust" und „Absorption" beschäftigt[2]).

1) Vgl. Ramsauer, Ann. d. Phys. **83**, 1129, 1927.

2) Aus Gründen der kürzeren Darstellung wird in diesem Referat die alte Lenardsche Bezeichnungsweise im Gegensatz zur Hauptarbeit (Ann. d. Phys. **87**, 259, 1928) beibehalten.

1. **Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust:** Bei der Messung des Wirkungsquerschnittes wird die Gesamtzahl der beeinflußten Elektronen indirekt dadurch gemessen, daß man die Zahl der ungehindert durchgeflogenen feststellt und dann auf die Zahl der beeinflußten rückschließt. Bei der Messung der Reflexion muß direkt untersucht werden, was mit den beeinflußten Elektronen geschieht, ob sie nur Richtungsänderungen erleiden oder nur Geschwindigkeitsänderungen oder vielleicht beides zusammen usw.

Diese experimentelle Aufgabe ist recht kompliziert. Ich begnügte mich daher zunächst mit folgendem enger gefaßten Thema: Werden Elektronen durch ein Gasmolekül ohne Geschwindigkeitsverlust senkrecht abgelenkt? Wie hängt

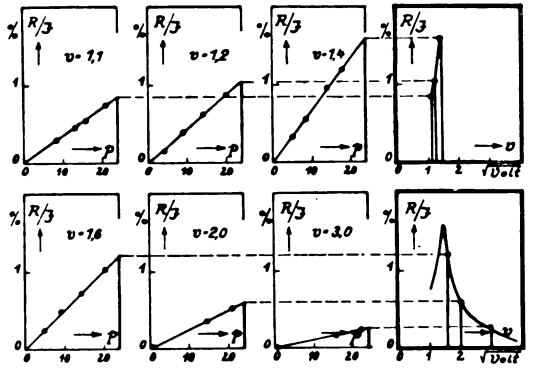


Fig. 1. Druck- und Geschwindigkeitsabhängigkeitsabhängigkeit der senkrechten Reflexion.

diese verlustfreie senkrechte Reflexion in verschiedenen Gasen von der Elektronengeschwindigkeit ab? Zeigen die erhaltenen Kurven Zusammenhänge mit den Wirkungsquerschnittskurven?

An Hand einer schematischen Zeichnung der Versuchsanordnung wird die Wirkungsweise der Apparatur und der Gang einer Messung auseinandergesetzt[1]).

Es wird gemessen, wieviel Elektronen R (immer bezogen auf gleiche in den Versuchsraum eintretende Gesamtmenge J) bei verschiedenen Drucken p senkrecht reflektiert werden, eine konstante Elektronengeschwindigkeit v vorausgesetzt. Die sechs einfach eingerahmten Bilder in Fig. 1 zeigen, daß der Quotient R/J zum Gasdruck proportional ist und von der Geschwindigkeit des Primärstrahls wesentlich abhängt. (Die bei jeder dieser Druckgeraden benutzte Geschwindigkeit ist in $\sqrt{\text{Volt}}$ im oberen Teil jedes Bildes eingetragen). Die doppelt eingerahmten Bilder rechts geben die Größe der senkrechten Reflexion, gemessen durch den mehr oder weniger steilen Anstieg der Druckgeraden, in Abhängigkeit von der zugehörigen Elektronengeschwindigkeit in $\sqrt{\text{Volt}}$. Durch Umrechnung auf einen Druck von 1 mm *Hg* und auf 1 cm Strahllänge läßt sich dann hieraus ein „Querschnitt der senkrechten Reflexion

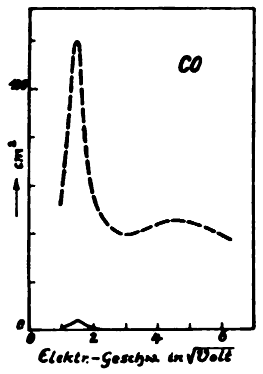


Fig. 2. Senkrechte Reflexion und Gesamtwirkung (Direkter Vergleich).

ohne Geschwindigkeitsverlust" ermitteln. Der direkte Vergleich einer so erhaltenen Kurve mit der zugehörigen Wirkungsquerschnittskurve (Fig. 2) ist wegen der sehr verschiedenen Ordinatenhöhen nicht möglich. Es wurden daher die für 10 Gase gemessenen Reflexionsquerschnitte in Fig. 3 in einem zwanzigmal größeren Maßstab gezeichnet als die Wirkungsquerschnitte[1]). Die Gase wurden dabei nach der Ähnlichkeit der Kurven in drei Gruppen eingeordnet.

Bei allen Gasen scheint es, als wenn der erste Anstieg der Wirkungsquerschnittskurven von 1 Volt

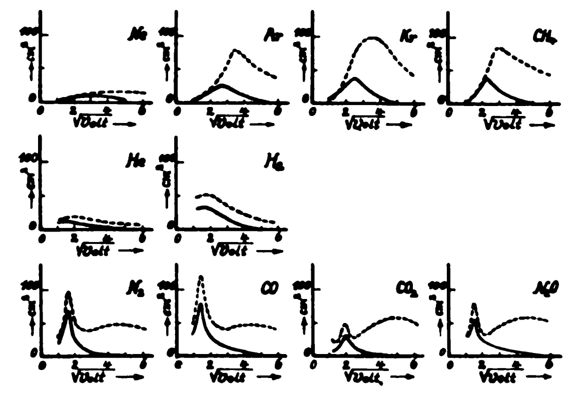


Fig. 3. Reflexions- und Wirkungsquerschnitt.

an im wesentlichen aus Reflexionen ohne Geschwindigkeitsverlust besteht. Im weiteren Verlauf verhalten sich die einzelnen Gruppen verschieden:

1) Der Vortrag erscheint hier in stark gekürzter Form, da eine ausführliche Arbeit über die senkrechte Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust in den Ann. d. Phys. bereits erschienen ist. Besonders über Definitionen und experimentelle Einzelheiten vgl. daher Ann. d. Phys. **87**, 259, 1928.

1) Zu diesen 10 Figg. ist zu bemerken, daß sich etwa die hier vorliegenden Höhen der Reflexionskurven ergeben würden, wenn die Reflexion für alle Winkel genau so groß wäre, wie für die senkrechte Richtung.



In der *Ar*-Gruppe ist das Maximum wohl nicht allein durch Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust deutbar, im anderen Fall müßte es schon in anderen Winkelrichtungen bei wesentlich höherer Geschwindigkeit liegen.

Bei der H_2-Gruppe kann der Verlauf der Wirkungsquerschnittskurve weitgehend durch Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust gedeutet werden, sogar das Maximum selbst.

Bei den vier übrigen Gasen kommt das erste spitze Maximum des Wirkungsquerschnittes wahrscheinlich nur durch Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust zustande, während beim zweiten Maximum wohl Einwirkungen anderer Art vorliegen.

2. Reflexion mit Geschwindigkeitsverlust einschließlich Absorption: Nachdem im Vorangegangenen festgestellt war, daß Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust bei Gasen mit zwei Maxima im Wirkungsquerschnitt wohl nur für die Deutung des ersten Maximums in Frage kommt, schienen weitere Untersuchungen besonders bei diesen Gasen lohnend. Mit derselben Versuchsanordnung war es möglich, zu messen, wie viele der senkrecht abgelenkten Elektronen Geschwindigkeitsverluste erlitten hatten. Das Ergebnis der Messungen zeigt Fig. 4 für Argon, Stickstoff und Kohlensäure. Die schon aus Fig. 3 bekannte ausgezogene Kurve gibt die Zahl der senkrecht ohne Geschwindigkeitsverlust reflektierten Elektronen, die dazu gezeichnete punktierte Kurve gibt die Gesamtreflexion (ohne und mit Geschwindigkeitsverlust) an, mit eingezeichnet sind zum Vergleich die Wirkungsquerschnittskurven. Das zweite Maximum der Wirkungsquerschnittskurven ist also auch nicht durch senkrechte Reflexion mit Geschwindigkeitsverlust deutbar. Ebenso hatten Versuche, das zweite Maximum durch Absorption zu erklären, kein positives Ergebnis.

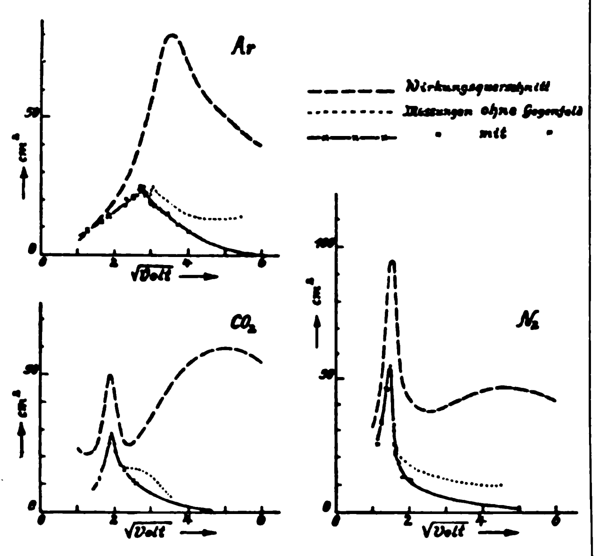


Fig. 4. Senkrechte Reflexion ohne und mit Geschwindigkeits-Verlust.

Wir erhalten also in der Hauptsache folgende Resultate: Bei allen Gasen tritt „senkrechte Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust" von Elektronen an Gasmolekülen auf. — Diese senkrechte Reflexion zeigt eine charakteristische Abhängigkeit von der Elektronengeschwindigkeit: nur ein Maximum in dem untersuchten Geschwindigkeitsbereich. — Dieses Maximum liegt bei Kurven mit zwei Wirkungsquerschnittsmaxima stets an der Stelle des ersten Wirkungsquerschnittsmaximums, so daß es nahe liegt, dieses erste Maximum allein durch Reflexion ohne Geschwindigkeitsverlust zu deuten. —

Die weiteren Versuche über die Geschwindigkeitsverluste in senkrechter Richtung und über „Absorption" reichen nicht aus, um das zweite Maximum verständlich zu machen[1]).

Berlin-Reinickendorf, Forschungsinstitut der AEG.

1) Damit soll natürlich nicht gesagt sein, daß die Deutung des zweiten Maximums durch Geschwindigkeitsverluste überhaupt nicht möglich sei; es geht daraus vielmehr hervor, daß bei Ablenkungen, die mit Geschwindigkeitsverlust verbunden sind, andere Richtungen vor der senkrechten wesentlich bevorzugt werden.

H. Behnken (Berlin), Über die Auslösung von Elektronen durch Röntgenstrahlen.

(Nach gemeinsamen Versuchen mit R. Jaeger.)

Die Untersuchung knüpft an eine Arbeit von O. Berg und P. Ellinger aus dem Jahre 1922 an. Diese untersuchten die Ionisationswirkung der an einer Reihe von Elementen durch Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen in Abhängigkeit von der Atomnummer. Sie bezogen diese auf die Ionisation durch die in einem bestimmten Luftvolumen ausgelösten Elektronen. Sie fanden im allgemeinen einen Anstieg der Emission mit wachsender Atomnummer nach komplizierten Kurven. Ein einfacher Zusammenhang zwischen der Atomnummer und der Emission ließ sich aus den Ergebnissen nicht entnehmen. Dies hat seinen Grund vermutlich in gewissen Komplikationen der Versuchsbedingungen, nämlich einmal in der Verwendung ungefilterter, also sehr inhomogener Röntgenstrahlen, ferner in der Tatsache, daß bei B. u. E. die Röntgenstrahlen die in Form von Platten benutzten Substanzen völlig zu durchdringen hatten und dadurch sowohl in bezug auf Intensität wie Qualität in sehr verschiedener Weise verändert wurden. Die hier beschriebenen Versuche vermeiden dies, indem die Emission lediglich auf der Vorderseite der

bestrahlten Substanzen gemessen wurde. Ferner wurden die Röntgenstrahlen durch Filterung homogenisiert. Die so gemessenen Emissionskurven zeigen zwar auch im allgemeinen einen Anstieg mit der Atomnummer. Im übrigen haben sie jedoch ein von den Berg-Ellingerschen Kurven abweichendes Aussehen. Stellt man, soweit dies aus den in der Literatur bislang vorhandenen Daten möglich ist, die Energiebilanz für die Emission auf, so gelangt man bei gewissen Vereinfachungen zu einer Formel folgender Art:

$$E = \left(\frac{\varrho}{\mu_\lambda}\right)_C \cdot \left(\frac{\mu_\lambda}{\varrho}\right)_N \cdot \left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{K,L\ldots}} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)\left(1 - \frac{f(N)}{100}\right)\right]\right\}.$$

Hier bedeutet E die Elektronenemission, $\left(\frac{\varrho}{\mu_\lambda}\right)_C$ den reziproken Massenabsorptionskoeffizienten des Kohlenstoffes für die Wellenlänge λ, $\left(\frac{\mu_\lambda}{\varrho}\right)_N$ den Massenabsorptionskoeffizienten des bestrahlten Körpers der Atomnummer N, $\lambda_{K,L\ldots}$ die Wellenlänge der auf λ folgenden Absorptionskante des Elementes der Atomnummer N, $\varkappa$ die Größe des Absorptionssprunges an dieser Kante, $f(N)$ den Prozentsatz an „innerer Absorption" der bei Elektronenauslösung aus der betreffenden zur Kante gehörigen Elektronenschale angeregten Fluoreszenzstrahlung. Die nach dieser Formel berechneten Emissionskurven zeigen mit den experimentellen Kurven weitgehende Ähnlichkeiten. Die noch bestehenden Abweichungen lassen sich wenigstens qualitativ aus den einstweilen unvermeidlichen Vernachlässigungen erklären.

Hamburg, im September 1928.

E. Rupp (Berlin), Versuche zur Elektronen-Beugung.

Die Versuche, eine Wellennatur des Elektrons nachzuweisen, schließen sich auf der Grundlage der de Broglieschen Wellenlängenbeziehung an die in der Röntgenspektroskopie ausgebildeten Methoden an. So haben zuerst Davisson und Germer das Laue- und das Bragg-Verfahren an Einkristallen für Elektronen angewendet. Das Debye-Scherrer-Verfahren an Vielkristallen ist von G. P. Thomson für große Elektronengeschwindigkeiten, von mir für kleine Elektronengeschwindigkeiten benutzt worden. Ich habe diese Versuche fortgesetzt mit der Abänderung, daß an Stelle der früher verwendeten photographischen Methode eine elektrische Auffangemethode in Anwendung kam. Dabei wurde auch die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Beugungsring gemessen und mit der Geschwindigkeitsverteilung im zentralen Streukegel verglichen. Von den Ergebnissen sei das eine herausgegriffen, daß Elektronen ohne Geschwindigkeitsverlust, also mit voller Primärgeschwindigkeit, im Beugungsring prozentual viel stärker vorhanden sind als im zentralen Streukegel. Es scheint danach, daß als gebeugte Elektronen nur solche Elektronen zählen, die beim Durchgang durch die Metallfolie nur eine einzige Wechselwirkung mit einem Netzebenenpaar erfahren haben. Alle Elektronen, die Wechselwirkungen mit verschiedenen Netzebenenpaaren erfahren haben, erleiden auch Geschwindigkeitsverluste und werden im allgemeinen nicht am Ort der Beugungsringe abgebildet; sie gehören in die Gruppe der gestreuten Elektronen.

Doch will ich bei der Kürze der Zeit meine Aufgabe nicht darin erblicken, auf diese Versuche näher einzugehen; vielmehr will ich über die Ausführung des elementaren Versuches zum Nachweis der Wellennatur des Elektrons berichten, über Elektronenbeugung an einem mechanisch geritzten Gitter.

Wegen der Kürze der zu erwartenden Wellenlänge wird man auch hier auf Methoden zurückgreifen, wie sie für Röntgenstrahlen ausgebildet sind.

Man wird sich an die Methode des streifenden Einfalls am Gitter von A. Compton anschließen und diese Methode für Elektronen abändern.

Ein Elektronenstrahl falle unter dem streifenden Winkel Θ auf ein optisches Gitter auf. Dann wird der reflektierte Strahl unter demselben Winkel das Gitter verlassen, und die zu erwartenden gebeugten Strahlen mögen mit dem reflektierten Strahl den Beugungswinkel α einschließen. Es gilt die Beziehung

$$n\lambda = \frac{d}{2}\alpha(\alpha + 2\Theta),$$

wenn d die Gitterkonstante des optischen Gitters, n die Ordnung des gebeugten Strahles und λ die Elektronenwellenlänge auf Grund der de Broglieschen Beziehung $\lambda = \frac{h}{mv}$.

Bei Anwendung dieser Gleichung ist d bekannt, α kann aus den Abständen $RB = a$ und der Länge l ($l = 38{,}5$ cm bei der verwendeten Anordnung) gemessen werden. Unbekannt sind λ und der streifende Winkel Θ.

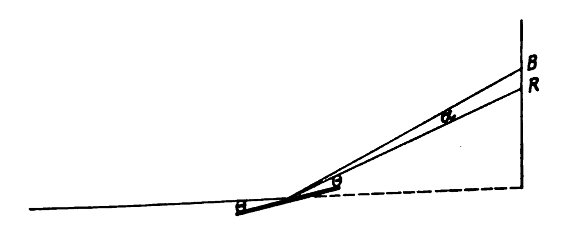
Zur Prüfung der Gültigkeit der de Broglieschen Beziehung kann man nun zwei Wege einschlagen. Man kann bei einem und demselben Winkel Θ und verschiedener Strahlgeschwindigkeit v, also verschiedenem λ der Elektronenwelle,

die Gültigkeit der de Broglieschen Beziehung voraussetzen und den Winkel Θ berechnen. Der so gewonnene Wert von Θ muß konstant sein, falls die de Brogliesche Beziehung richtig ist.

Ist aber außer der Beugung erster Ordnung auch der Beugungswinkel zweiter oder gar dritter Ordnung bekannt, dann kann eine Absolutbestimmung von λ durchgeführt werden, wobei, wie in der gewöhnlichen Optik, die Messung der Elektronenwellenlänge einzig und allein auf Längenmessungen zurückgeführt wird.

Bei dem von mir durchgeführten Gitterversuch konnten beide Methoden Anwendung finden.

Um Elektronenbeugung an einem optischen Gitter erfolgreich durchzuführen, erweisen sich



drei Bedingungen als ausschlaggebend. Das Gitter muß ein auf Metall geritztes Gitter sein, denn ein Glasgitter würde sich elektrisch aufladen. Das von mir verwendete Gitter war auf Spiegelmetall geritzt. Es hatte 1300 Teile/cm, also $d = 7{,}70 \times 10^{-4}$ cm.

Um eine gute Abbildung des Elektronenstrahls auf der photographischen Platte zu erhalten, erwies sich Ausblenden des Strahls bei der großen Strahllänge als nicht genügend. Es wurde daher das Verfahren von H. Busch in Anwendung gebracht, den Elektronenstrahl bei Durchtritt durch die erste Blende der Röhre durch ein inhomogenes Magnetfeld auf der photographischen Platte abzubilden. Falls die Magnetspule kurz ist im Verhältnis zur Röhrenlänge, erhält man, wie Busch gezeigt hat, eine scharfe Abbildung eines Elektronenstrahls nach einer Beziehung, die ganz der optischen Linsenformel entspricht.

Als dritte Bedingung zum Gelingen der Versuche war erforderlich, das optische Gitter in Zwischenpausen während der Aufnahme mit schnellen Elektronen zu beschießen. Vor Beginn des Versuchs wurde das Gitter mit Elektronen von 1500 oder 3000 Volt beschossen, dann lief drei bis vier Minuten lang die Aufnahme, darauf wurde das Gitter wieder zwei Minuten beschossen, worauf nach Abkühlen des Gitters die Aufnahme drei bis vier Minuten weiterging. Die ganze Aufnahme dauerte zehn bis fünfzehn Minuten.

Die Versuchsröhre. Die Elektronen lieferte ein mit Bariumoxyd bedeckter Wolframdraht. Ein Vorfeld von etwa 12 Volt zwischen der Kathode und einem zweiten Glühdraht liegt senkrecht zu dem Hauptfeld zwischen diesem Draht und den folgenden Blenden. Auf diese Weise wird erreicht, daß das Licht des Glühdrahtes die Aufnahme auf dem photographischen Film nicht stört. Die Blenden sind etwa 0,8 cm hoch und 0,1 bis 0,2 mm breit. Über der dritten Blende befindet sich die Magnetfeldspule, die die erste Blende auf dem photographischen Film abbildet. Das Gitter hinter der dritten Blende kann senkrecht zur Röhrenachse und in einem Winkel zur Röhrenachse bewegt werden. Dem Gitter gegenüber befindet sich ein Glühdraht zur Beschießung des Gitters. Damit während dieser Beschießung kein Licht des Glühdrahtes auf den Film eindringt, kann der Film mit einer Klappe abgedeckt werden, die durch einen Schliff betätigt wird. Der zweite Glühdraht an der Kathode, ein Platindraht, erlaubt die Justierung der Apparates mit Licht. Dazu wird der Filmhalter weggenommen und eine lichtelektrische Zelle hinter die Röhre gesetzt. Nach Einstellung der Blenden wird das Gitter folgendermaßen justiert:

Das Gitter wird senkrecht zur Röhrenachse in den Lichtstrahlengang hineinbewegt und die Lichtintensität dabei gemessen. So kann der Ort, wo die Gitterebene den Lichtstrahl erreicht, genau ermittelt werden. Nun wird vor der lichtelektrischen Zelle ein Spalt von 0,1 mm angebracht, das Gitter gedreht und die Lichtintensität gemessen als Funktion der Gitterdrehung. Auf diese Weise kann der streifende Einfallswinkel eingestellt werden. Die Einzelheiten der Justierung können hier nicht gebracht werden.

Die mit der Versuchsanordnung gewonnenen Aufnahmen lassen den reflektierten Strahl und die Beugungsbilder erster Ordnung erkennen, oft auch die Beugungsbilder zweiter Ordnung und in einigen Fällen auch noch die dritter Ordnung. Daß die Erscheinung Elektronen zukommt, wurde besonders geprüft. Die Aufnahmen stehen in voller Analogie zu Beugungsbildern von Röntgenstrahlen an demselben Gitter.

Auf die Auswertung einiger Aufnahmen sei kurz eingegangen in den folgenden Tabellen. Die oben skizzierte Relativmethode zeigt die erste Tabelle.

Aus den verschiedenen Strahlgeschwindigkeiten berechnet sich ein konstanter streifender Winkel Θ mit ± 5 Proz. mittlerem Fehler.

Recht günstig ist die absolute Auswertung der Aufnahme in Tabelle II in bezug auf Versuchsfehler. Sie konnte nur in wenigen Fällen durchgeführt werden, wo Beugungsbilder bis zur dritten Ordnung erhalten wurden.



Tabelle I.

	10^8	Nr.	a_1 mm	a_2 mm	a_1 10^3	a_2 10^3	Θ_1	Θ_2	
70	1,50	56	2.08	3.1	5.4	8,05	0,9	0.83	
		57	2.04	3,0	5.3	7,8	1,03	1.1	
		62	2.13	3.0	5.55	7,8	0.8	1,1	
150	1.00	65	1,60	2,3	4.16	6,05	1,14	1.17	$\Theta_m = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \pm 5$ Proz.
		66	1.55	2.4	4,03	6,25	1,22	1,03	
		69	1,58	2,4	4,12	6,25	1,15	1,03	
310	0,70	70	1,2	1,8	3.1	4,7	1,3	1,5	
		77	1,3	1,9	3,4	4,9	1,0	1.2	

Tabelle II.

V = 150 Volt						
d_1	1,30	a_1	3,38	Θ_1	2,15	$\Theta_m = 2{,}21 \cdot 10^{-8}$
d_2	2,05	a_2	5,34	Θ_2	2,20	$\lambda = 1{,}00$ Å $\pm 0{,}02$
$_3$	2,60	a_3	6,80	Θ_3	2,30	

Man erreicht hier das Ergebnis, daß die de Brogliesche Beziehung auf ± 2 Proz. gültig ist. Ein inneres Gitterpotential, wie es bei Kristallen als Beugungsgittern in Erscheinung tritt, macht sich hier offenbar nicht bemerkbar.

Der Versuch über Elektronenbeugung mit einem optischen Gitter liefert eine weitere Stütze über die Zwitternatur des Elektrons. Wie das Licht neben und parallel seinen Welleneigenschaften korpuskulare Eigenschaften aufweist, so zeigen die Elektronen neben und parallel ihren korpuskularen Eigenschaften Welleneigenschaften.

Berlin-Reinickendorf, Forschungsinstitut der AEG.

Hans Geiger und Walther Müller (Kiel),
Das Elektronenzählrohr.

§ 1. Wirkungsweise und Herstellung eines Zählrohrs.

In einem Metallrohr ist axial ein dünner Draht ausgespannt, dessen Oberfläche mit einer schlecht leitenden Schicht von gleichmäßiger Dicke überzogen ist. Infolge der isolierenden Wirkung dieser Schicht läßt sich die Spannung zwischen Draht und Rohr über das Funkenpotential hinaus steigern. Entsteht nun an beliebiger Stelle innerhalb des Rohres eine kleine Zahl von Ionen, so fließt dem Draht infolge der starken Stoßmultiplikation momentan eine erhebliche Elektrizitätsmenge zu. Bei einem blanken Draht würde ein solcher Stromstoß eine Dauerentladung auslösen; bei dem präparierten Drahte aber erfolgt für kurze Zeit eine Aufladung der Oberflächenschicht und damit ein Zusammenbrechen des elektrischen Feldes und ein Abreißen des Stromes. Da der Stromstoß mit einem Fadenelektrometer leicht nachgewiesen werden kann, ist die Möglichkeit gegeben, diese Anordnung, die wir als Zählrohr bezeichnen wollen, zum Nachweis einzelner Korpuskularstrahlen zu verwenden. Gegenüber dem Spitzenzähler, bei dem der Durchmesser der Eintrittsöffnung einige Millimeter nicht übersteigen kann, besitzt das Elektronenzählrohr den Vorteil, daß Flächen von 100 cm² und mehr ausgezählt werden können. Wenn es sich also um die Bestimmung einer extrem schwachen Strahlung eines radioaktiven Stoffes oder eines Röntgenrohres handelt, so übertrifft das Zählrohr an Empfindlichkeit sehr erheblich alle bisher bekannten Methoden. Dazu kommt, daß das Zählrohr ohne Schwierigkeiten in sehr verschiedenen Ausmaßen hergestellt werden kann und mit überraschender Sicherheit und Konstanz für lange Zeiten arbeitet.

Die Herstellung des Drahtes kann in verschiedener Weise erfolgen. Für einen ersten Versuch möchten wir folgendes Verfahren vorschlagen, das sicher zum Ziele führt: Ein 0,2 mm starker Stahldraht wird solange in Salpetersäure getaucht, bis er einen gleichmäßigen, deutlich sichtbaren schwarzen Überzug erhalten hat. Man befestige dann den Draht mit Hartgummistopfen axial in einem Messingrohr, evakuiere und fülle mit trockener Luft bis zu einem Druck von etwa 5 cm Hg. Unter diesen Bedingungen beträgt die erforderliche Spannung etwa 1200 Volt, und zwar legt man zweckmäßig den negativen Pol der Spannungsquelle an das Rohr. Den Draht verbindet man mit einem Fadenelektrometer und leitet ihn gleichzeitig über einen Widerstand von 100—1000 Megohm zur Erde ab. Auch geglühte oder lackierte Drähte können statt des säurebehandelten Drahtes benutzt werden.

Ein gutes Zählrohr zeigt bei Bestrahlung mit einem Radiumpräparat über einen Bereich von etwa 50 Volt eine von der Spannung unabhängige

1	2	3	4	5	6	7
Nr.	Länge cm	Innerer Durchm. cm	Wandstärke mm	Empfindlichkeit	Zahl der spontanen Ausschläge Zählrohr ohne Schutz	Zählrohr mit 20 cm Fe-Panzer
1.	4,2	1	0,07	300	12	3,8
2.	5	1	0,15	450	23	3,8
3.	17	3	1	5500	150	40

Ausschlagszahl. Wie viele Ausschläge zu erwarten sind, läßt sich nach den in § 2 gemachten Angaben berechnen. Die Ausschläge selbst sind auch an einem Elektrometer geringer Empfindlichkeit sehr groß und gleichmäßig. Fadenbewegungen irgendwelcher Art, die mit Ausschlägen verwechselt werden könnten, treten auch bei langen Beobachtungsreihen nicht auf, wenn der Aufbau sorgfältig vorgenommen wird.

§ 2. Empfindlichkeit des Zählrohrs.

Je nach den speziellen Versuchen, zu denen man das Zählrohr verwenden will, wird man seine Dimensionen verschieden wählen. Die obige Tabelle gibt in den Spalten 2 bis 4 Länge, Durchmesser und Wandstärke für drei Zählrohre, die bei den noch zu besprechenden Versuchen Verwendung gefunden haben. Spalte 5 zeigt die Empfindlichkeit, die durch die Zahl der Ausschläge definiert wurde, welche die γ-Strahlung von 1 mg Radium bei 1 m Entfernung pro Minute hervorruft. Man ersieht, daß durchschnittlich 20—30 Ausschläge pro cm^2 Oberfläche des Zählrohrs auftreten. Leider ist es nicht möglich, die Zahl der zu erwartenden Ausschläge mit genügender Sicherheit zu berechnen, um so festzustellen, inwieweit das Zählrohr quantitativ arbeitet. Immerhin scheint außer Zweifel zu sein, daß die Zahl der beobachteten Ausschläge der Zahl der das Zählrohr durchsetzenden Sekundärelektronen ziemlich nahe kommt, was um so überraschender ist, als bei dem geringen Gasdruck und bei der kurzen Laufstrecke im Rohr die Strahlen nur ganz wenige Ionenpaare im Gase erzeugen können. Es mag aber auch sein, daß bei den tiefen Drucken für die Auslösung des Stromstoßes weniger die Gasionisation als die an der Rohrwand ausgelöste Tertiärstrahlung verantwortlich ist. Wir hoffen durch Variation des Gasdrucks und des Wandmaterials diese Fragen demnächst klären zu können.

Für den praktischen Gebrauch eines Zählrohrs ist neben der in Spalte 5 gegebenen Empfindlichkeit die Größe des sog. natürlichen Effekts (Reststrahlung) von ausschlaggebender Bedeutung (Spalte 6 der Tabelle). Alle von uns bisher hergestellten Zählrohre zeigten im Laboratoriumsraum, wenn keine besonderen Schutzmaßnahmen getroffen waren, bis zu 4 spontane Ausschläge pro Minute und cm^2 der Rohroberfläche. Durch einen allseitigen Eisenpanzer von 20 cm Dicke wurde die Zahl der Spontanausschläge auf etwa ein Drittel, teilweise auch erheblich weiter herabgesetzt, ein Beweis dafür, daß für die Reststrahlung zu einem erheblichen Teil die Strahlung des umgebenden Mauerwerks, des Erdbodens und die Höhenstrahlung verantwortlich ist. Durch Einschaltung weiterer Eisenschichten wird auch die Reststrahlung noch mehr verkleinert. Inwieweit die bei den stärksten bisher benutzten Eisenpanzern noch vorhandene Strahlung einem nicht absorbierten Teil der Höhenstrahlung, einer Aktivität der Rohrwand oder des Eisenpanzers oder anderen Gründen zuzuschreiben ist, muß noch dahingestellt bleiben.

§ 3. Beispiele für die Anwendbarkeit des Zählrohrs.

Im folgenden werden einige einfache Versuche beschrieben, welche die Empfindlichkeit des Zählrohrs und seine Anwendbarkeit für verschiedene Strahlenarten erläutern sollen.

Kaliumstrahlung. Die Intensität der Kalium-β-Strahlung ist so gering, daß ihre Wirkung an einem gewöhnlichen Blattelektrometer auch bei großer Kaliumfläche kleiner bleibt als der natürliche Effekt. Bei der bekannten Hoffmannschen Apparatur[1]), die ja alle sonstigen elektrometrischen Strommeßmethoden an Empfindlichkeit weit übertrifft, betrug nach den Messungen von Biltz und Ziegert[2]) die Aktivität einer unbedeckten Kaliumchloridfläche von 12,5 cm^2 das Vierfache der natürlichen Reststrahlung. Dieses günstige Verhältnis von Kaliumaktivität zu Reststrahlung wurde dadurch erzielt, daß durch besondere Maßnahmen die α-Komponente der Reststrahlung praktisch ausgeschaltet wurde.

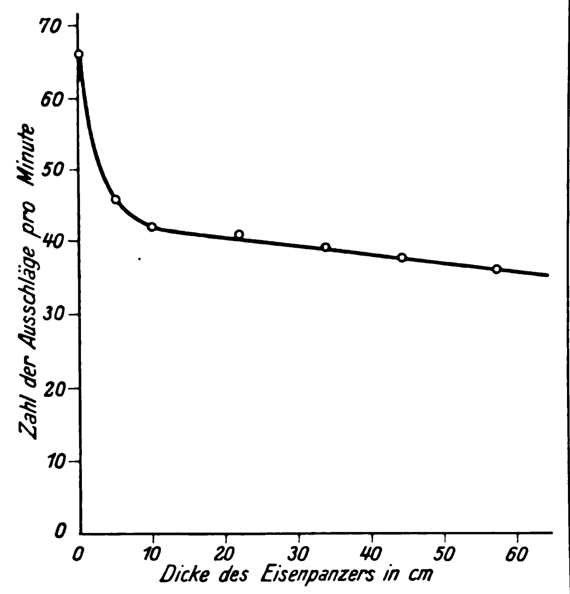
Bei Zählrohr Nr. 2 stieg die Ausschlagszahl von 3,8 auf 36,3 an, wenn das Rohr allseitig (15,7 cm^2) mit Kaliumchlorid umgeben wurde. Man sieht also, daß die Aktivität von Kalium relativ zur natürlichen Reststrahlung hier noch

1) G. Hoffmann, Ann. d. Phys. **80**, 779, 1926.
2) M. Biltz u. H. Ziegert, Physik. Zeitschr. **29**, 197, 1928.



größer ist als bei der Hoffmannschen Apparatur. Diese günstigen Verhältnisse haben beim Zählrohr ihren Grund darin, daß α- und β-Strahlen unabhängig von ihrer Ionisation abgezählt werden, während in einer Ionisierungskammer ein α-Teilchen etwa das Tausendfache zum Strome beiträgt als ein β-Teilchen. Eine weitere Verbesserung des Verhältnisses ließe sich durch Verwendung eines dünnwandigeren Rohres unter erhöhtem Panzerschutz erzielen.

Heßsche Höhenstrahlung. Zählrohr Nr. 3 wurde im Erdgeschoß des Instituts aufgebaut und



Absorption der Höhenstrahlung gemessen mit dem Elektronenzählrohr.

gegen Strahlung von unten und von den Seiten durch 20 cm Eisen abgeschirmt; nur von oben her konnte die Strahlung zunächst frei eindringen. Durch Aufbau von Eisenschichten von etwa 60 × 90 cm² Oberfläche wurde dann auch diese Strahlung stufenweise immer stärker abgeblendet. Die beistehende Figur zeigt die Abnahme der Ausschlagszahl mit der Schichtdicke; man erkennt den anfänglich steilen Abfall der γ-Strahlung des im Mauerwerk vorhandenen Radiums usw.; dann den langsamen Abfall, sobald die Heßsche Strahlung allein wirksam wird. In eine Diskussion der Kurve soll erst eingetreten werden, wenn der bei den größten Panzerdicken noch vorhandene Resteffekt geklärt ist.

Für die bei solchen Messungen erreichbare Genauigkeit ist allein die Zahl der abgezählten Teilchen bestimmend. Im vorliegenden Falle wurden für jeden Kurvenpunkt etwa 2000 Teilchen gezählt. Die Aufnahme der ganzen Kurve erforderte somit einen Zeitaufwand von 6—7 Stunden. Diese Zeit könnte durch Anwendung von photographischen oder automatischen Registriermethoden erheblich herabgesetzt werden, da sich ja durch Wahl eines entsprechend größeren Zählrohrs die minutliche Ausschlagszahl weitgehend steigern läßt. Gerade bei dem Höhenstrahlproblem spielt die Schnelligkeit, mit der die Messungen ausgeführt werden können, eine erhebliche Rolle.

Wir haben die Konstanz des Zählrohrs Nr. 3 über 14 Tage durch wiederholte Bestimmung der Ausschlagszahl bei stärkstem Eisenpanzer kontrolliert. Die Ausschlagszahl blieb innerhalb der zu erwartenden statistischen Schwankungen völlig unverändert.

Röntgenstrahlung. Hier haben wir uns einstweilen auf einige einfache Demonstrationsversuche beschränkt. Die Strahlung eines kleinen Modellröntgenrohrs, betrieben mit einer als Kinderspielzeug käuflichen Elektrisiermaschine, gab aus mehreren Metern Entfernung am Zählrohr Nr. 1 einen kräftigen Effekt. Bei Betrieb des Rohres mit einem kleinen Funkeninduktor, war die Strahlung noch aus 20 m Entfernung ohne weiteres nachweisbar. Man beachte dabei, daß das Zählrohr der Strahlung nur eine Fläche von 4 cm² darbot, daß also der Raumwinkel außerordentlich klein war. Wir glauben, daß sich das Zählrohr gerade deshalb, weil es kleinen Raumwinkel mit hoher Empfindlichkeit vereinigt, für viele Röntgen- und γ-Strahlprobleme besonders nützlich erweisen wird[1]).

1) Vgl. hierzu das vortreffliche Buch von F. Kohlrausch „Probleme der γ-Strahlung" Sammlung Vieweg 1927.

Kiel, Physikalisches Institut der Universität, September 1928.

Rudolf Thaller (Hamburg), Über das Dosieren von Kathodenstrahlen an Lenard-Hochleistungsröhren.

Wenn ich in Kürze über das Dosieren von Kathodenstrahlen bei Lenard-Hochleistungsröhren sprechen soll, so wird dies zunächst auf den Physiker, Chemiker und vielleicht auch auf den Elektrotechniker etwas befremdend wirken. In der Medizin z. B. verabreicht man dem Patienten irgendeine bestimmte Menge eines Medikamentes, meist gemessen mit der Waage, also eine bestimmte Dosis. Wie dann eine solche verabreichte Dosis dem Patienten bekommt, hat mit dem Wesen des Dosierens nichts zu tun. In der Röntgen- und Lichttherapie wird eine bestimmte Energiemenge auf die Hautoberfläche



oder auf tieferliegende Gewebe und Organe abgegeben. Die wirksam absorbierte Strahlenmenge soll dabei gemessen werden. Man spricht von einer biologischen und von einer physikalischen Dosis. Die physikalische Dosierung z. B. in der Röntgentiefentherapie kann nunmehr, nach langem Bemühen, eine wohl definierte Einheit zu finden, heute mit ziemlicher Genauigkeit durchgeführt werden.

Die Kathodenstrahlen wurden 1869 von Hittorf entdeckt und nachdem Heinrich Hertz in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts nachgewiesen hatte, daß dünne Metallblätter für Kathodenstrahlen stark durchlässig sind, gelang es P. Lenard 1892 durch ein Aluminiumfenster den Kathodenstrahlen den Weg in die freie Atmosphäre zu ermöglichen.

Lenard und seine Schule hat das ganze Gebiet der Kathodenstrahlen, also von den geringsten Geschwindigkeiten bis zu den höchsten, qualitativ und quantitativ weitgehend behandelt und erforscht.

Die dauernden Fortschritte in der Technik des Röhrenbaues, ich nenne nur Pauli, 1911, Eisenhuth, 1913 und Coolidge, 1925, haben es ermöglicht, heute Röhren herzustellen, welche in der Medizin und Technik verwendet werden können. Das Problem der Intensitäts- und Energiemessung für Hochleistungsröhren taucht daher neuerdings wieder auf, und es soll vorläufig dahingestellt bleiben, ob der Ausdruck „dosieren" hierfür der geeignete ist.

Wir unterscheiden nun nach Lenard beim Durchgang von Kathodenstrahlen durch Materie eine Energieumsetzung durch Absorption und eine Energieumsetzung durch Geschwindigkeitsverlust.

Aus einer von Lenard angegebenen Energieumsetzungstabelle (s. folgende Tabelle), welche aus „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten" von P. Lenard entnommen ist, geht hervor, daß bei ganz geringen Geschwindigkeiten die Absorption in den Vordergrund tritt, bei mittleren Geschwindigkeiten sich bereits der Geschwindigkeitsverlust bemerkbar macht, der bei höchsten Geschwindigkeiten bis über 40 Proz. betragen kann. Die umgesetzte Energie erscheint dann stets in anderer Energieform, und zwar wie bekannt in Form von Wärme, chemischer Energie, in Form von Röntgenstrahlen, als Lichtemission und als sekundäre Kathodenstrahlung.

Treten z. B. aus einer Lenard-Hochleistungsröhre die Kathodenstrahlen in die atmosphärische Luft, so werden reichliche Mengen Ozon gebildet, oder bestrahlen wir feingepulvertes Kochsalz, also kristallwasserfreies Natriumchlorid nur wenige Sekunden mit einer relativ starken Strahlenquelle, so verfärbt sich das weiße Natriumchlorid deutlich braun und das Freiwerden von Chlor kann ohne weiteres mit dem Geruchssinn festgestellt werden. (Leichtes Anhauchen des Präparates unmittelbar vor dem Riechen ermöglicht es, den Cl-Geruch auch bei verhältnismäßig schwacher Bestrahlung festzustellen.) Ein etwas längere Zeit bestrahltes Quantum Kochsalz in Wasser aufgelöst, zeigt deutlich alkalische Reaktion. Die Kathodenstrahlen haben also die Zerlegung der Chlornatriummoleküle in ihre Bestandteile verursacht.

Energieumsetzung durch Adsorption und durch Geschwindigkeitsverlust.

Anfangs-geschwindigkeit v	Bruchteile d. Gesamtenergie umgesetzt durch Absorption E_a/E	Geschwindigkeitsverlust E_v/E
0	1	0
,1	,99	,01
,2	,98	,02
,3	,96	,04
,4	,93	,07
,5	,90	,10
,6	,87	,13
,7	,83	,17
,8	,76	,24
,9	,70	,30
,95	,65	,35
,99	,57	,43
1	(0)	(1)

Es ist jedenfalls wichtig, die dem Versuchsobjekt zugeführten Kathodenstrahlen, also die Zahl der auf das Versuchsobjekt gelangten, wirksamen Elektronen zu wissen, ganz gleichgültig, ob die aus einer Röhre kommenden Kathodenstrahlen für medizinische Zwecke oder chemisch-physikalische Untersuchungen verwendet werden. Aber nicht nur die Zahl ist für die einzelnen, ausgelösten Effekte von Bedeutung, sondern auch die Geschwindigkeit, mit welcher die Elektronen auftreffen.

Es soll nun eine einfache für technische Zwecke verwendbare Apparatur beschrieben werden. Die Verwendung von Paraffinkondensatoren greift in der physikalischen Meßtechnik weit zurück. (Siehe Lenard, Wied. Ann. **64**, 288, 1898 und A. Becker, Ann. d. Phys. **13**, 394, 1904.) Auch die Verwendung des Kollodiums an Stelle einer sehr dünnen Paraffinschicht hat sich gut bewährt.

Da die Intensitäten der Kathodenstrahlen, wie sie aus modernen, technischen Lenard-Hochleitungsröhren austreten, ein Vielfaches der Intensitäten der Röhren früherer Herstellungszeit sind, so ist es naheliegend, daß bei Verwendung eines Paraffin- oder Kollodiumkon-

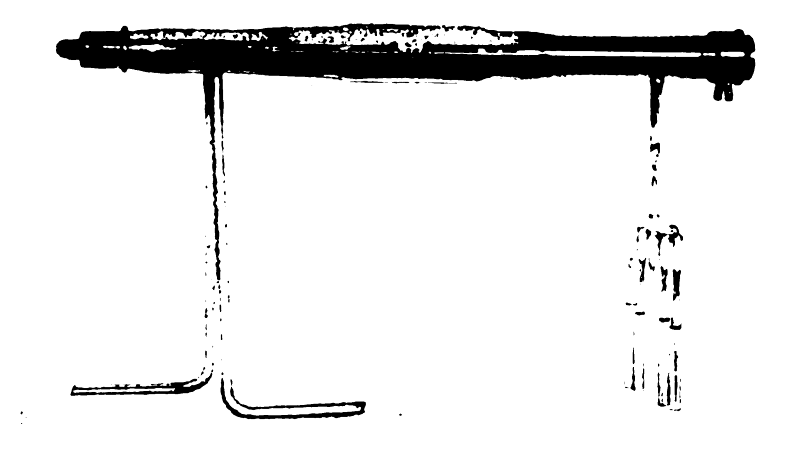


Fig. 1.

densators als Meßinstrumente nicht hochempfindliche Elektrometer und auch nicht hochempfindliche Galvanometer, sondern bereits technische Meßinstrumente, also Zeigerinstrumente in Betracht kommen.

Die im gegebenen Fall verwendete Versuchsanordnung bestand der Hauptsache nach aus einer technischen Lenard-Hochleistungsröhre mit zugehörigem Pumpaggregat, einer leistungsfähigen, einseitig geerdeten Hochspannungsanlage und einem entsprechend dimensioniertem Kondensator mit Mikroamperemeter.

Die Röhre selbst, Fig. 1, unterscheidet sich im Prinzip von der von Coolidge im Jahre 1925 gebauten äußerlich dadurch, daß die große Glaskugel, welche die Glühkathode und die Anode, bzw. das Schutzrohr mit dem am Ende angebrachten Lenard-Fenster in ihren Glashälsen trägt, durch ein zylindrisches, starkwandiges Hohlglas ersetzt ist. Der weitaus wichtigste und empfindlichste Teil der Röhre ist das Fenster selbst. Es gelingt aber heute ohne weiteres, sowohl vakuumdichte reine Nickelfolien, als auch solche, für jeweilige Zwecke geeignete, aus Legierungen hergestellte Folien zu erzeugen.

Auch das vakuumdichte Aufsetzen der zwischen 10 μ und 15 μ Dicke schwankenden Folien gelingt mit verschiedenen Loten ohne weiteres, und es ist auch seit einiger Zeit die vollkommene Verbindung der Folie mit dem siebartig ausgebildeten Träger gelungen, so daß ein ausgezeichneter Wärmekontakt zwischen Folie und Folienträger gewährleistet ist. Ein einfaches Verfahren ermöglicht es, den Träger auf die zuerst vorhandene Folie elektrolytisch in beliebiger Stärke niederzuschlagen. Die Verwendung von einer unter 1 μ dicken Schutzschicht aus Metall, z. B. Gold, Platin, Chrom usw., wird sich bei Bestrahlungen von Gasgemischen in vielen Fällen gut bewähren.

Fig. 2 zeigt uns den siebartig ausgebildeten Träger, welcher im gegebenen Falle mit der Nickelfolie auf elektrolytischem Wege verbunden wurde, so daß also gewissermaßen das Fenster mit dem Träger verwachsen ist. Der Träger des

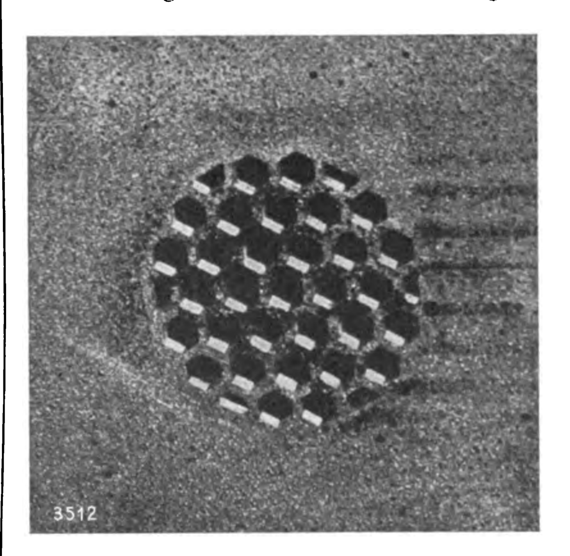


Fig. 2.

Fensters und der daran sitzende Metalltopf, in welchem das lange Schutzrohr befestigt ist, wird beim Betrieb der Röhre durch fließendes Wasser gekühlt. Bei hohen Belastungen ist es von großer Wichtigkeit, gegen das dünnwandige Fenster einen kräftigen, künstlichen Wind, also Preßluft oder ein anderes Gas zu blasen, da die immerhin

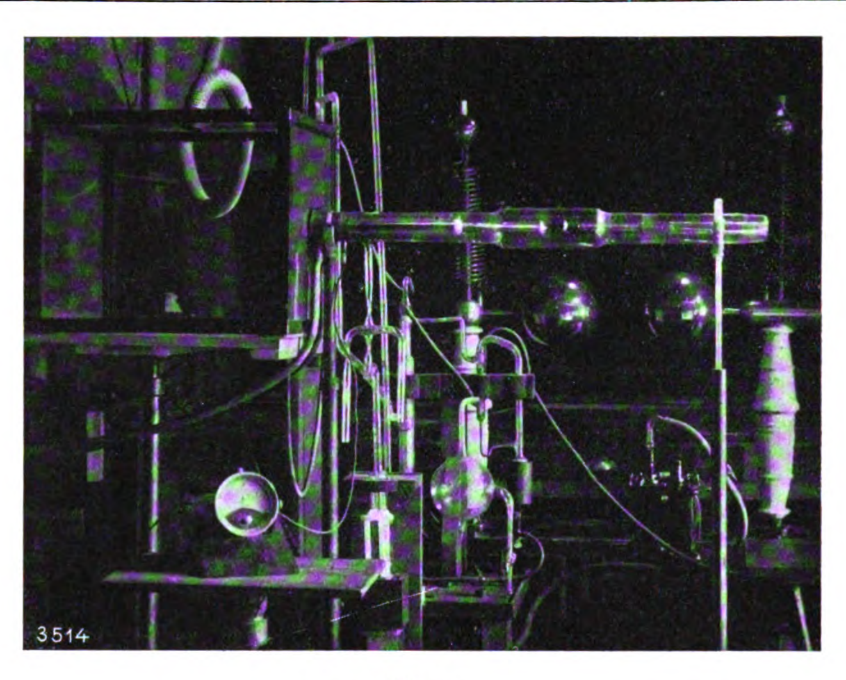


Fig. 3.

in der Mitte des Fensters sich ansammelnden Wärmemengen durch die sehr dünnwandige Folie schlecht abgeleitet werden können.

Fig. 3 zeigt uns die Röhre in Verbindung mit einem stets an der Röhre liegenden Pumpaggregat. Die Röhre dauernd an der Pumpe zu haben, ist für höhere Dauerleistungen fast unerläßlich. Es gelingt zwar ohne weiteres, Röhren so zu evakuieren, daß sie wie ein von der Pumpe abgezogenes Röntgenrohr, wie es etwa in der Tiefentherapie Verwendung findet, für kurzzeitige Belastungen in Betrieb genommen werden können. Doch wird die Röhre praktisch unbrauchbar, sobald nur geringe Spuren von Gasausbrüchen stattfinden, die Reichweite der Kathodenstrahlen geht sofort zurück und bei genügend großen oder mehrmaligen kleinen Gasausbrüchen kommt es leicht vor, daß die Elektronen auf dem Weg von Glühkathode bis zum Fenster so starke Streuung erleiden (Diffusion und Reflexion), daß sie an die Wand des Schutzrohres gelangen und nicht das Fenster selbst durchdringen. Statt eines Pumpaggregates kann natürlich auch, so, wie es Coolidge bereits getan hat, ein mit der Röhre verbundener mit Kokosnußkohle gefüllter Glasbeutel, welcher in flüssige Luft während des Betriebes getaucht wird, verwendet werden.

Ein aus Bleiglas zusammengebauter Kasten schützt vor den stets am Fensterträger und in der Luft, bzw. von dem bestrahlten Präparat ausgehenden Röntgenstrahlen. Ein Metallschlauch, welcher in die obere Wand des Bleischutzkastens mündet, ist mit einem Exhaustor in Verbindung, damit reichlich gebildete Ozonmengen abgeleitet werden können.

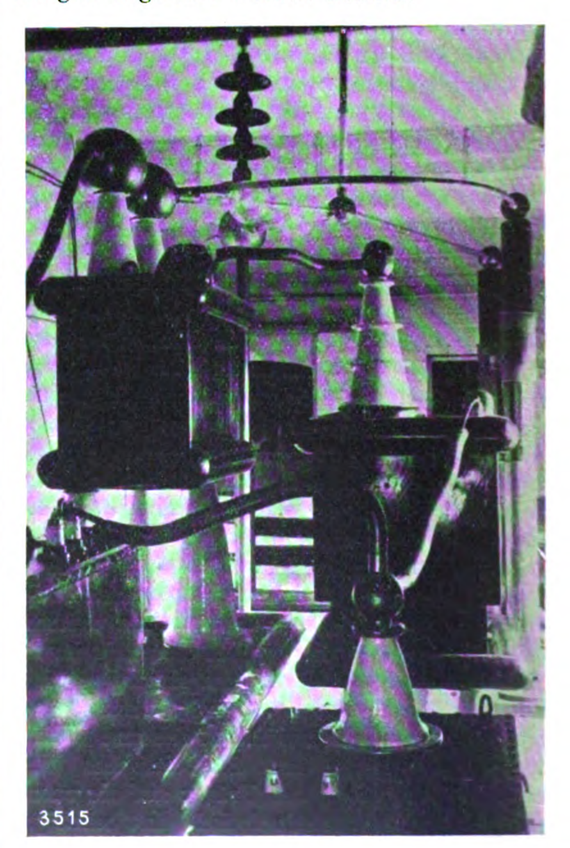


Fig. 4.

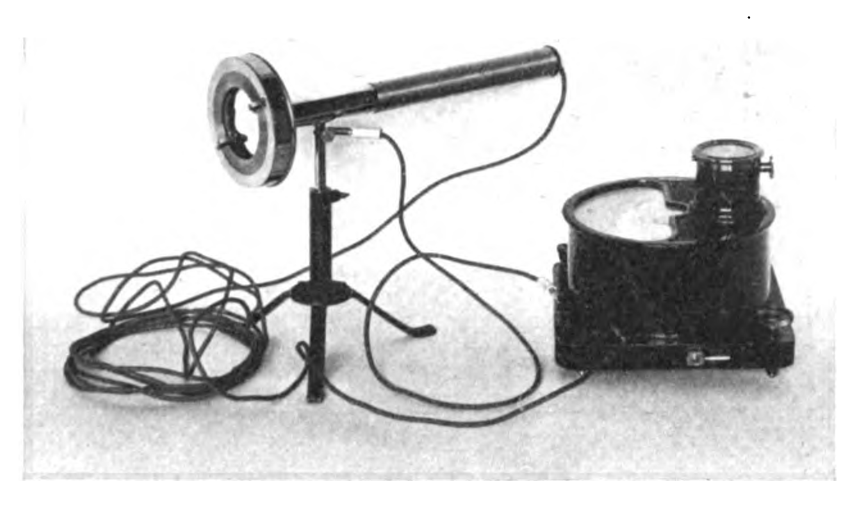


Fig. 5.

Die Röhre ist auf der positiven Seite, also auf der Fensterseite selbst geerdet, so daß beim Arbeiten in der Nähe des Fensters keine elektrischen Störungen und keine Gefährdung durch Hochspannung auftreten können.

Die Apparatur, welche der Röhre die nötige Energie zuführt, zeigt Fig. 4. Der eine Pol der gesamten Apparatur ist geerdet, sowie das Lenardfenster der Röhre, der andere Pol ist mit der Glühkathode der Röhre in leitender Verbindung. Das Aggregat selbst ist nach dem von Dessauer in die medizinische Hochspannungstechnik eingeführten Prinzip der Isolationsunterteilung ausgeführt.

Das im gegebenen Fall verwendete Transformatorenaggregat liefert Spannungen bis zu 350 kV gegen Erde. Bei einer Betriebsspannung von etwa 200 kV der Röhre ist die Reichweite der aus der Röhre tretenden Kathodenstrahlen in atmosphärischer Luft etwa 50—55 cm. Die Reichweite hängt einerseits von der Röhrenbetriebsspannung und andererseits von der Dicke des Fensters ab. (Siehe Coolidge, Journal of the Franklin Institute, 1926.)

Der technische Meßkondensator, Fig. 5, bestand aus einer hochglanzpolierten, in einem Schutzgehäuse durch Bernstein isolierten Metallscheibe, welche entweder mit einer etwa $^1/_{100}$ mm dicken Paraffinschicht oder einer entsprechenden Kollodiumhaut oder auch einer gleich dicken Glimmerschicht bedeckt ist. Die isolierende Paraffin-, Kollodium- oder Glimmerschicht ist mit einem durch Kathodenzerstäubung hergestellten, sehr dünnen, mit dem Gehäuse leitend verbundenen Metallbelag versehen. Der Durchmesser der Scheibe, welcher für die Messung in Betracht kommt, beträgt 9 cm. Wird die Röhre beispielsweise bei einer Spannung von 180 kV und einer Stromstärke von 2 Milliampere betrieben, der Kondensator in etwa 3 cm Entfernung von der Röhre aufgestellt, so ist der auf die isolierende Metallscheibe auftreffende Elektronenstrom von der Größenordnung 10^{-4} Amp. Ströme von dieser Größenordnung können mit normalen Mikroamperemetern ziemlich genau gemessen werden. Bei Bestrahlung irgendeines Präparates kann also unter Verwendung eines solchen Kondensators die auf das Präparat auftreffende Elektronenzahl etwa in der Weise bestimmt werden,

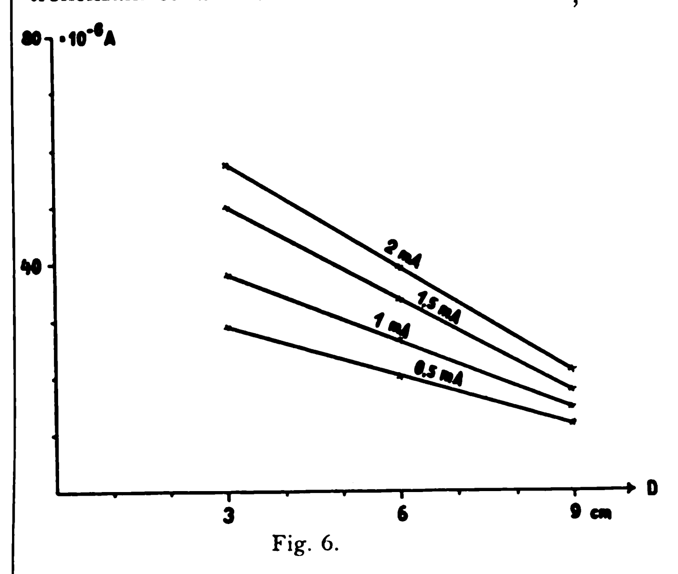


Fig. 6.

daß bei vollkommen gleichen Betriebsbedingungen der Röhre, Präparat und Kondensator vertauscht werden und das Präparat mit einer ganz dünnen Schutzhülle, welche dem Dielek-

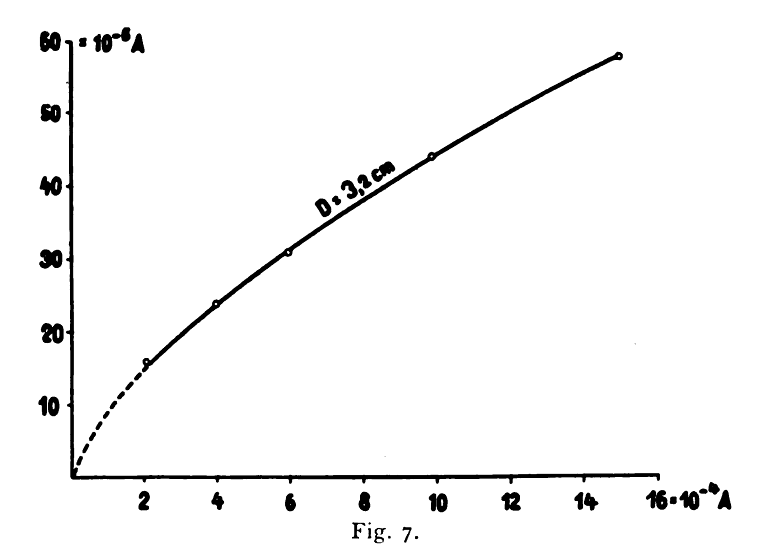


Fig. 7.

trikum des Kondensators an Absorptionskraft gleich kommt, bedeckt wird. Es kann aber auch in der Weise durchgeführt werden, daß gleichzeitig Präparat und Kondensator nebeneinander zur Bestrahlung kommen, daß also etwa der Kondensator halbmondförmig ausgebildet ist und daneben das zu bestrahlende Präparat aufgestellt oder gelegt wird.

Bei zunehmender Entfernung des Kondensators vom Lenard-Fenster nimmt die Strahlungsintensität innerhalb eines Bereiches von 3—10 cm linear ab. Diese lineare Abnahme der Intensität erklärt sich zum Teil dadurch, daß sowohl die Strahlenquelle als auch der Meßkondensator bei ihrer relativ geringen Entfernung große Ausdehnung besitzen, Rückdiffusion und Reflexion in Fensternähe dürfen hierbei nicht übergangen werden.

Fig. 6 zeigt 3 Kurven, welche die Abhängigkeit bei verschiedener Belastung der Röhre vom Abstand des Fensters wiedergibt. Aus der Kurve der Fig. 7 ist die Zunahme der mit dem Kondensator gemessenen Intensität in Abhängigkeit von der Röhrenstromstärke zu ersehen. Die Kurve nimmt keinen durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehenden geradlinigen Verlauf, sie ist vielmehr zuerst steiler ansteigend und später flacher werdend, jedoch stetig gekrümmt. Würde man für die Intensitäts- und Energiemessungen beispielsweise die Luftleitung verwenden, wie es bei Röntgenstrahlen allgemein üblich ist, so bekommt man allerdings ganz unvergleichlich höhere Sättigungsströme als bei der durch Röntgenstrahlen ionisierten Luft. Bringt man zwei parallel übereinander oder nebeneinander gestellte *Cu*-Platten von der Größe etwa 5 × 10 cm im Abstand von 4—5 cm in die Nähe des Fensters, so kann man bei einer Sättigungsspannung von etwa 8000 Volt Sättigungsstromstärken bis zu mehreren Milliampere erhalten. Diese Messungen würden zwar technisch leicht durchführbar sein, doch enthalten sie eine ganze Reihe bekannter Fehlerquellen, da weder die totale summarische, sekundäre Kathodenstrahlung zur Messung kommen kann und auch keine saubere Messung der differentialen Sekundärstrahlung durchführbar ist, ferner die Sekundärstrahlung der Kondensatorenplatten sehr störend wirkt und letzten Endes auch die auftretende, stets vorhandene Röntgenstrahlung eine ständige Fehlerquelle bedeutet.

Für technische Messungen scheint aber die Kondensatorenmeßmethode zurzeit wohl die einfachste und genaueste zu sein. In manchen Fällen wird sich auch die Verwendung einer Thermosäule in Verbindung mit einem gebräuchlichen Mikroamperemeter als gut brauchbar erweisen.

W. Schmitz (Bonn), Messungen der durch Elektronenstrahlen verursachten Ionisation der Luft.[1])

Die Luft wird durch genügend schnell bewegte Elektronen bekanntlich ionisiert.

Vergleicht man die gebildete Zahl der Ionen mit der Anzahl der Elektronen, die in den Luftraum eindringen, so erhält man die Zahl der pro Elektron gebildeten Ionen („n“).

Die Voltgeschwindigkeit der Elektronen (Φ) durch diese Zahl geteilt, ergibt die mittlere Voltgeschwindigkeit, die zur Bildung eines Ionenpaares verbraucht ist (Volt pro Ionenpaar).

1) Aus dem Bonner Röntgenforschungsinstitut (Vortrag der Hamburger Naturforscher-Tagung).

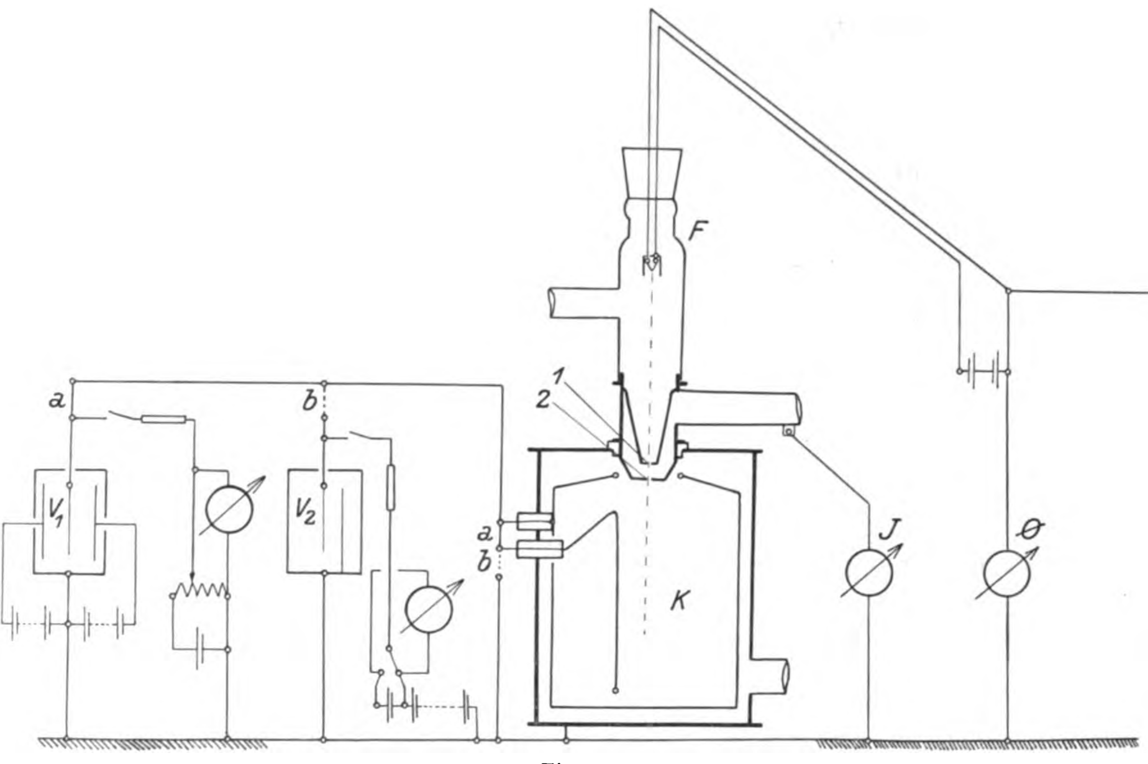


Fig. 1.

Aus dieser Definition ergeben sich die Teilprobleme der Messung:

1. Die Bestimmung der Elektronengeschwindigkeit.
2. Die Messung der Elektronenzahl.
3. Die Messung der gebildeten Ionenzahl.

Zur technischen Durchführung dieser Messungen wurde eine Apparatur benutzt, deren schematischer Aufbau in Fig. 1 dargestellt ist.

Die aus der Glühkathode „*F*" austretenden Elektronen werden auf ihrem Wege zu dem trichterförmigen Düsensystem (1, 2) bis zur vollen, zwischen Glühkathode und Düsen liegenden Spannung, beschleunigt, da in diesem Teil der Apparatur durch eine dauernd in Betrieb befindliche Hochvakuumpumpe stets Hochvakuum aufrecht erhalten wird.

Der Vorteil der Verwendung von Düsen ist nun der, daß die Elektronen hierdurch mit praktisch unverminderter Geschwindigkeit in den Ionisationsraum „*K*" eindringen können. Zwei Düsen wurden deshalb verwendet, damit selbst bei höherem Druck in der Ionisationskammer keine Ionen mehr in die Elektronenröhre zurückdiffundieren und die Glühkathode zerstören können. Eine zweite Hochvakuumpumpe saugt die eventuell noch durch die zweite Düse eindringenden Luftreste ab. Zur Verminderung des Einflusses etwa möglicher Ablenkungseffekte zwischen den beiden Düsen ist die erste Düse (etwa 1 mm Ø) entsprechend der im Hochvakuum herrschenden geringern Strömungsgeschwindigkeit erheblich größer gewählt als die zweite Düse (etwa 0,07 mm Ø).

Die Bestimmung der Elektronengeschwindigkeit, also der Spannung zwischen Düse und Glühkathode, erfolgte mit besonderer Sorgfalt. Zur Spannungsmessung diente ein Drehspulinstrument in Verbindung mit einem hochohmigen Drahtwiderstand bis 5000 Volt. Höhere Spannungen wurden mit einem statischen Voltmeter von Hartmann und Braun gemessen. Die Spannung lieferte ein Glühventilgleichrichter mit einem im Verhältnis zur Stromentnahme sehr großen Ausgleichblockkondensator.

Für die Ionisierung ist nur die Anzahl der durch die Düsen dringenden Elektronen maßgebend. Zu ihrer Messung werden die Schaltverbindungen „*a*" ausgeführt. Das Wulfsche Schneidenelektrometer „V_1" gestattet also die Ladespannung des Faradaykäfigs zu verfolgen und damit die in ihn in der Zeiteinheit eintretende Elektronenmenge zu bestimmen. Ein neben angeordnetes Präzisionsvoltmeter ermöglicht es, die Eichung des Elektrometers bei jeder Messung nachzukontrollieren.

Für die Messung der Elektronenmenge muß die Kammer auf Hochvakuum ausgepumpt werden. Theoretisch würde allerdings auch bei Druck und eintretender Ionisation der Überschuß

der negativen Ladung ein Maß für die Elektronenmenge sein. Jedoch bewirkt die durch die Aufladung entstehende Spannungsdifferenz gegen die geerdete Düse einen Ionenstrom, der die Ladung vermindert. Man würde also die Elektronenmenge bei Druck viel zu klein messen.

Ebenfalls elektrometrisch erfolgte die Messung der gebildeten Ionen. Entsprechend der größeren Zahl, also der größeren transportierten Elektrizitätsmenge, genügt ein weniger empfindliches Zweifadenelektrometer „V_2", daß nach Lösung der Schaltverbindungen „*a*" in der Schaltanordnung „*b*" an die Apparatur angeschlossen wird. Der Faradaykäfig kann jetzt durch einen Schalter mit einer Hilfsbatterie aufgeladen werden, während eine geerdete Hilfselektrode das zur Ionenbewegung erforderliche Feld gegen den Käfig bewirkt. Der durch den Ionenstrom in der Zeiteinheit verursachte Spannungsabfall der Elektrometerladung kann ebenfalls durch ein Voltmeter nachgeprüft werden. Die Vertauschung der sonst üblichen Anordnung Kammerwandung Elektrode hat für diese Untersuchung den Vorteil, daß die Kapazitätsverhältnisse für die Ionen und Elektronenmessung praktisch gleich sind, daß also die Kapazitätsmessung der Systeme nur noch als Korrekturfaktor in die Messung eingeht.

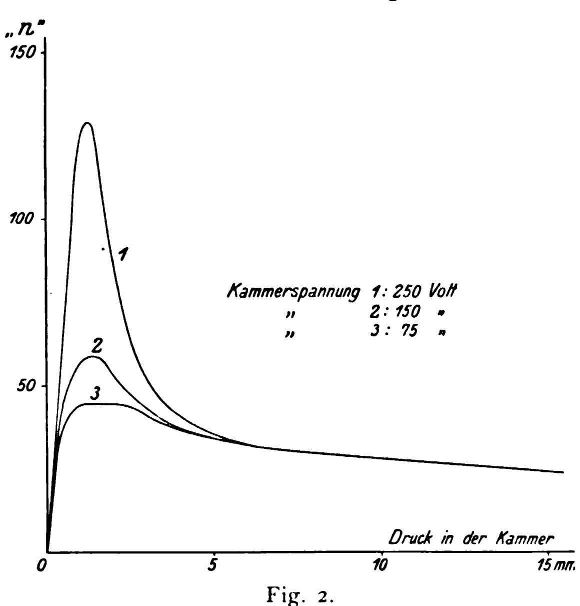


Fig. 2.

Bestimmt man nach diesen Gesichtspunkten die Zahl der pro Elektronen gebildeten Ionen, so zeigt sich, daß diese zunächst vom Druck in der Ionisationskammer und von der Kammeraufladung abhängig ist. Ein typisches Beispiel für Elektronen von 2000 Volt Geschwindigkeit zeigt Fig. 2.

Daß bei sehr niedrigem Druck nur wenig Ionen gebildet werden, erklärt sich durch die geringe Absorption der Elektronen, die in ihrer Bahn nicht ausgenutzt werden. Bei sehr hohen Drucken wird ein Teil der bei Hochvakuum durch die Düsen tretenden Elektronen zwischen den Düsen zerstreut, ihre Zahl also vermindert, so daß auch entsprechend weniger Ionen auftreten können. Auffallend ist jedoch die sehr starke Zunahme der gebildeten Ionen bei mittleren Drucken. Es zeigte sich, daß die Werte von der Kammeranordnung und von der Kammerspannung abhängen.

Es ist also anzunehmen, daß das elektrische Feld in der Kammer eine Vermehrung der gebildeten Ionen seinerseits bedingen kann, deren Energie in diesem Fall nicht aus dem stoßenden Elektron, sondern aus der Kammerspannung entnommen wird.

Verringert man also die Aufladespannung soweit, daß dieser Effekt ausgeschlossen ist, daß aber immer noch volle Absorption der Elektronenstrahlen eintritt, so erhält man schließlich eine Kurve, die über einen gewissen Bereich konstant verläuft. Nur diese Werte sind als richtig anzusehen, vorausgesetzt ist selbstverständlich, daß die Sättigungsspannung nicht unterschritten wird.

Teilt man die Elektronengeschwindigkeit durch die Zahl „*n*", so erhält man also die mittlere Voltenergie, die zur Bildung eines Ionenpaares verbraucht worden ist.

Im gemessenen Geschwindigkeitsintervall von 1000—10000 Volt scheint dieser Wert konstant

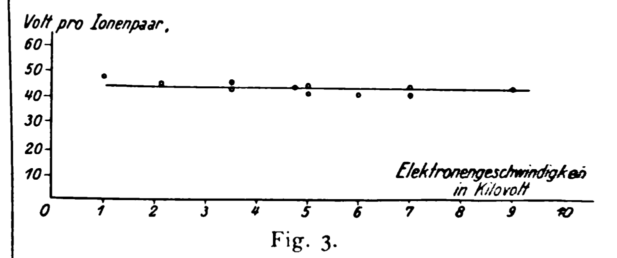


Fig. 3.

zu sein; ohne feinere Korrektur ist der Mittelwert 42 Volt, die Abweichungen sind in Fig. 3 zusammengestellt.

Die Messungen schließen sich den früheren Messungen von Johnson[1]) gut an, der im Geschwindigkeitsbereich bis 200 Volt etwa 40 Volt pro Ionenpaar erhalten hat. Eine Diskrepanz besteht gegen die Ergebnisse von G. Anslow[2]), die sich aber vermutlich durch die oben besprochenen Einflüsse der zusätzlichen Ionisation erklären lassen.

1) Johnson, Phys. Review **10**, 609, 1917.
2) G. Anslow, Phys. Review **25**, 484, 1925.

Über eine genauere Bestimmung des Absolutwertes auch bei anderen Spannungen und verschiedenen Gasen soll bei späterer Gelegenheit berichtet werden.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und Herrn Professor Grebe darf ich auch an dieser Stelle für die Ermöglichung und Unterstützung der Arbeit danken.

Victor F. Hess (Graz), Die mittlere Lebensdauer der Ionen in der Luft über dem Meere. (Nach neuen Messungen auf Helgoland, Sommer 1928.)

Nach E. Schweidler[1]) gilt in schwach ionisierter Luft, die Kondensationskerne enthält, also auch in der Atmosphäre nicht das gewöhnliche quadratische Gesetz der Wiedervereinigung der Ionen, sondern ein lineares Gesetz von der Form

$$\frac{dn}{dt} = q - \beta n = 0 .$$

Hierin bedeutet n die Zahl der leichten Ionen, q die Ionisierungsstärke und β eine Konstante, die nach Schweidler als Verschwindungskonstante der leichten Ionen bezeichnet wird. Bei Aufhören der Ionenerzeugung ($q = 0$) würde demnach in atmosphärischer Luft die Ionenzahl nach einem einfachen Exponentialgesetz $n_t = n_0 e^{-\beta t}$ mit der Zeit abnehmen; daher kann man den reziproken Wert der Verschwindungskonstante

$$\frac{1}{\beta} = \vartheta$$

als „mittlere Lebensdauer eines Ions" bezeichnen, in vollkommener Analogie mit dem Begriffe der mittleren Lebensdauer beim radioaktiven Zerfall.

Das Schweidlersche Gesetz wurde später unabhängig auch von J. Nolan und J. Enright[2]) sowie von A. D. Power[3]) aufgestellt und von diesen Forschern, sowie von Schweidler selbst Methoden zur Bestimmung der Verschwindungskonstante bzw. der mittleren Lebensdauer der leichten Ionen ausgearbeitet.

Für Versuche in freier Luft kommt wegen ihrer relativen Einfachheit in erster Linie Schweidlers „Methode II" in Betracht: sie beruht auf der experimentellen Ermittlung der Kurve der Stromcharakteristik bzw. derjenigen, welche die Abhängigkeit des Quotienten der Stromstärke i und der angelegten Spannung E in einem Zylinderkondensator von i wiedergibt. Daraus wird graphisch jene Spannung H ermittelt, bei welcher die beobachtete Stromstärke im Zylinderkondensator (Volumen V ccm, Kapazität C) gerade die Hälfte des Sättigungsstromes i_s beträgt. Nach Schweidler (l. c. 1924) ist dann die mittlere Lebensdauer der leichten Ionen dem Reziprokwert dieser „Halbwertspannung" H proportional:

$$\vartheta = \frac{V}{4\pi C (k_1 + k_2)} \cdot \frac{1}{H}$$

$(k_1 + k_2)$ bedeutet hierin die Summe der Beweglichkeiten des positiven und negativen leichten Ions, darf also als genügend genau bekannt angenommen werden. C und V sind Apparatkonstanten. Somit genügt die experimentell-graphische Ermittlung von H zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer ϑ.

Nach dieser Methode hat W. Schlenck[1]) in Innsbruck zuerst gearbeitet. Der Vortragende hat die Methode im Vorjahre weiter verbessert und für Messungen auf Reisen erst brauchbar gemacht[2]). Er machte nach ihr Bestimmungen in reiner Landluft (in Lans, Tirol) und auf der Insel Helgoland zu dem Zwecke, um etwaige Verschiedenheiten der Ionenvernichtung in Land- und Seeluft genauer zu studieren und womöglich zu einer befriedigenden Lösung des Problems der Ionisierungsbilanz über dem Meere zu gelangen.

Es handelte sich hierbei um folgende Frage: Sind die uns bekannten Ionisatoren der Atmosphäre quantitativ ausreichend, um den wirklich beobachteten Ionisationszustand der Luft hervorzurufen?

Während diese Bilanz über Land — soweit das spärliche Beobachtungsmaterial es zu beurteilen gestattet, ziemlich gut stimmt, schienen die ersten Versuche des Vortragenden auf Helgoland im Juni 1927 auf ernste Diskrepanzen hinzudeuten: die beobachteten Werte der mittleren Lebensdauer der leichten Ionen in Landluft betragen nach den Messungen von Schweidler (l. c.) und Hess (l. c.) in Salzburg und Tirol 30—60 Sek. Ein mittlerer Wert von 50 Sek., bei einer mittleren Ionisierungsstärke von 12 J über Land (J ist die übliche abkürzende Bezeichnung für „Ionenpaare pro ccm und sec") ergibt,

1) E. Schweidler, Wien. Sitz.-Ber. IIa **127**, 953, 1918, **128**, 947, 1919 u. **133**, 23, 1924.
2) J. Nolan u. J. Enright, Proc. Roy. Irish Acad. **36** A, 93, 1923.
3) A. D. Power, Journ. of Franklin Inst. **196**, 327, 1923.

1) W. Schlenck, Wien. Sitz.-Ber. IIa **133**, 29, 1924.
2) V. F. Hess, Physik. Zeitschr. **28**, 882, 1927, Wien. Sitz.-Ber. IIa, **136**, 603—643, 1927.

eingesetzt in die eingangs erwähnte Bilanzgleichung

$$\frac{q}{\beta} = q \cdot \vartheta = n$$

als zu erwartende Ionenzahl den Wert 600, welcher mit den allgemein über Festland gefundenen Ionenzahlen (600—700) recht gut übereinstimmt.

Über dem freien Meere dagegen, wo in landfernen Gebieten als einziger Ionisator die kosmische Ultragammastrahlung mit ihren Sekundärstrahlen etwa 2 J liefert, würden nach den im Helgoländer Hafen vom Vortragenden im Jahre 1927 gefundenen Werten von ϑ (Mittelwert 28 Sek., Höchstwert 66 Sek.) Ionenzahlen von höchstens $n = 200$ resultieren, also Zahlen die nur etwa ein Drittel der wirklich über See beobachteten Ziffern erreichen.

Da nun die für die Messungen im Vorjahre auf Helgoland verfügbaren Aufstellungsorte der Apparate (Oberland nahe der Südspitze und Hafengebiet) doch nicht genügend sicher vor Störungen durch Rauchgase von dem bewohnten Teile der Insel waren, wurden im Sommer 1928 die Messungen der mittleren Lebensdauer der leichten Ionen, abermals mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft auf einem vor Luftverunreinigungen sicheren Punkte, nämlich auf der Nordspitze der Insel Helgoland in erweitertem Maße wiederholt und durch gleichzeitige Messung aller übrigen für die Ionisierungsbilanz wichtigen Größen (Ionisation, Zahl der schweren und leichten Ionen, Zahl der Aitkenschen Kondensationskerne) ergänzt.

Es wurde auf der weit ins Meer hinausragenden Nordspitze Helgolands, in 50 Meter über dem Meere ein kleines Blockhaus errichtet, in welchem folgende Apparate zur Aufstellung gelangten: 1. Die Anordnung zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer der Ionen; diese war gegen die im Vorjahre gebrauchte Anordnung etwa dreimal so empfindlich gemacht worden, um bei der geringen natürlichen Ionisation innerhalb des Zylinders (5—6 J) dennoch die Zeitdauer einer Versuchsreihe auf 1—1$^1/_2$ Stunden beschränken zu können; 2. zwei Ebertsche Ionenaspiratoren mit Wulf-Elektrometern; 3. ein Apparat zur Messung der Zahl der schweren Ionen (Langevin-Ionen) eigener Konstruktion mit Kolhörster-Einschlingenelektrometer und 120 cm langem Zylinderkondensator; 4. zwei Kolhörstersche Strahlungsapparate und 5. ein Aitkenscher Kernzähler. Die Apparate 2, 3 und 4 wurden durch meinen Mitarbeiter Dr. Oskar Mathias bedient.

Von dem mit allen diesen Apparaten im August und September d. J. gewonnenen umfangreichen Beobachtungsmaterial, dessen eingehende Bearbeitung erst in den nächsten Monaten erfolgen kann, soll das Hauptergebnis schon an dieser Stelle mitgeteilt werden:

Die Lebensdauer der leichten Ionen beträgt, wenn die Luft aus Nordnordwest oder Nord, d. h. aus dem landfreien Polarbecken stammt, nach den neuen Messungen 200—300 Sek., ist also 4—6mal größer als in reiner Landluft. Für solch reine „Polarluft" ergibt sich auch ein außerordentlich kleiner Gehalt an Kondensationskernen, nämlich nur 500—1500 Kerne pro ccm, während in den Alpen, im Tal von Gastein (im Walde weit entfernt von menschlichen Ansiedlungen) immer noch 5000 und bisweilen bis zu 10 000 Kerne gezählt wurden.

Man ist wohl berechtigt, die oben gegebenen Werte für reine Seeluft, d. h. für landferne Gebiete der Weltmeere als ungefähr repräsentativ anzusehen. Setzt man in der Bilanzgleichung $\vartheta = 250$ Sek. $q = 2\,J$, so resultiert eine zu erwartende Ionenzahl $n = 500$, in bester Übereinstimmung mit den von der letzten dreijährigen Carnegie-Expedition gefundenen Mittelwerten ($n_+ = 600$ $n_- = 500$).

Die Ionisierungsbilanz über See ist damit im wesentlichen ins reine gebracht: man darf also annehmen, daß in landfernen Gebieten der Ozeane die Ultragammastrahlung (Höhenstrahlung) der einzige Ionisator der Atmosphäre ist. Je mehr man sich dem Festlande nähert, desto mehr treten die vom Festlande herübergewehten Mengen von Radiumemanation und deren Zerfallsprodukten als Ionisatoren hervor. Daß aber trotzdem die beobachteten Ionenzahlen gegen die Küste zu nicht merklich anwachsen, beruht darauf, daß die wachsende Zahl der Aitkenschen Kerne vom Lande her die mittlere Lebensdauer der leichten Ionen immer mehr herabsetzt. Bei Luftströmungen von rein festländischem Ursprung (Südwind) ist auch auf der Nordspitze von Helgoland die mittlere Lebensdauer der leichten Ionen nur ungefähr 30 Sek., während die Kernzahl den Wert 10 000 erreichen kann.

Zum Schlusse noch eine kurze Bemerkung über den Geltungsbereich des Schweidlerschen linearen Wiedervereinigungsgesetzes: der Vortragende hat bei im ganzen 100 Versuchsreihen stets feststellen können, daß bei Kernzahlen von 3000 und darüber das lineare Gesetz $q = \beta n$ sehr gut erfüllt ist. Bei Kernzahlen von 500—1000 (reine Polarluft) sind dagegen die Abweichungen vom Schweidlerschen Gesetz — wie ja auch erwartet werden muß — recht deutlich: die Kurve, welche die Abhängigkeit des Quotienten i/E von i darstellt, krümmt sich merklich und verläuft konkav zur Abszissenachse. In solcher

Luft gilt also das Schweidlersche lineare Gesetz nur mehr sehr näherungsweise und das quadratische Gesetz $q = \alpha \cdot n^2$ noch nicht genügend genau. Man muß sich also begnügen, für dieses Gebiet graphisch aus der Neigung der Tangente der i/E-Kurve zur Abszissenachse die Halbwertspannung und damit ϑ näherungsweise zu ermitteln.

Die ausführliche Veröffentlichung aller Beobachtungsergebnisse wird in der Zeitschrift für Physik erfolgen. — Es ist mir eine angenehme Pflicht, schon jetzt der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für die Ermöglichung der zweiten Expedition nach Helgoland besonders zu danken. Ferner danke ich der österreichischen Unterrichtsverwaltung und der Akademie der Wissenschaften in Wien für die bereitwillige Beistellung weiterer Mittel zur Ergänzung das erforderlichen Instrumentariums. Der Staatlichen Biologischen Anstalt auf Helgoland bin ich für wertvollen Beistand, besonders bei der Erbauung der luftelektrischen Station zu Dank verpflichtet.

Graz (Lehrkanzel für Experimentalphysik an der Universität), 15. September 1298.

F. Hund (Rostock), Molekelbau und chemische Bindung.

Gewisse Eigenschaften der Atome (Ionisierungsenergie, Aussehen des Spektrums) zeigen einen charakteristischen sprunghaften Gang mit der Atomnummer. Er fand eine Deutung in der Bohrschen Theorie durch die Abschätzung der Bindungsenergien der einzelnen Elektronenbahnen und durch die Hypothese, daß jede solche Bahn nur eine bestimmte Höchstzahl von Elektronen aufnehmen kann. Die schrittweise Vervollständigung eines Atoms durch Anlagerung von Elektronen kann symbolisch durch die Reihe

$$1\,s^2 \quad 2\,s^2 \quad 2\,p^6 \quad 3\,s^2 \quad 3\,p^6 \quad \ldots \qquad (1)$$

dargestellt werden; sie bedeutet, daß zuerst zwei Elektronen auf $1\,s$-Bahnen, dann zwei Elektronen auf $2s$-Bahnen, weiter sechs Elektronen auf $2p$-Bahnen usw. angelagert werden. Auf die exakte Bedeutung des Begriffs Elektronenbahn in der Quantenmechanik will ich jetzt nicht eingehen. Zusammen mit dem allmählich vervollkommneten Atommodell erlaubten die angedeuteten Betrachtungen eine Beschreibung und qualitative Deutung der Zustände aller Atome.

Auf die Frage, ob etwas Ähnliches für Molekeln möglich ist, kann man mit ja antworten. Die Methode ist folgende: Man untersucht zunächst die Zustände eines Zweizentrensystems (zwei feste Kerne in willkürlich wählbarem Abstand und mehrere Elektronen) oder eines Mehrzentrensystems mit ähnlichen Mitteln wie die Zustände der Atome; dann untersucht man, ob die Kerne in einem bestimmten Abstand von selbst im Gleichgewicht sind. Im folgenden gehe ich auf einige einfache Ergebnisse ein[1]).

Die Zustände des Zweizentrensystems (wir beschränken uns auf zwei Kerne) lassen sich durch Symbole der Art

$$1\,s\sigma^2 \quad 2\,s\sigma^2 \quad 2\,p\sigma^2 \quad 2\,p\pi^4 \quad 3\,s\sigma^2 \ldots \qquad (2)$$

beschreiben. Das angegebene Symbol bedeutet, daß bei Verringerung der Koppelung zwischen den Elektronen zwei Elektronen zu σ-Elektronen werden (Drehimpuls um die Kernverbindung ist Null) und bei Zusammenführen der Kerne zu $1\,s$-Elektronen werden, daß ferner zwei Elektronen bei der Entkoppelung ebenfalls σ-Elektronen und bei Zusammenführen der Kerne zu $2s$-Elektronen werden usw. Für nahe Zentren ist die energetische Reihenfolge der Bahnen die gleiche wie im Atom; eine einfache Überlegung zeigt, daß σ vor π kommt, wenn alle andern Quantenzahlen gleich sind. Wir erhalten dann die Reihenfolge (2). Bei weiter entfernten Zentren ergibt sich eine Bevorzugung gewisser σ-Bahnen vor den π-Bahnen; bei einem bestimmten Abstand wird die Reihenfolge etwa

$$1\,s\sigma^2 \quad 2\,p\sigma^2 \quad 3\,s\sigma^2 \quad 3\,p\sigma^2 \quad 2\,p\pi^4 \quad 3\,s\sigma^2 \ldots \qquad (3)$$

Fig. 1. Termschema des CN.

sein. Fig. 1 zeigt, wie man für verschiedene Kernabstände ein qualitatives Schema der tiefsten Kerne aufzeichnen kann.

Aus der energetischen Reihenfolge der Bahnen folgt sofort der Grundterm. Abgeschlossene Schalen geben $^1\Sigma$-Terme (Singulett-Terme mit dem resultierenden Drehimpuls Null um die Kernverbindung, bei Birge und Mulliken ^1S-Terme genannt); beim Ausbau einer Zweiergruppe (σ^2) erhalten wir die Terme $^2\Sigma$, $^1\Sigma$; beim Ausbau einer Vierer-π-Gruppe erhalten wir $^2\Pi$ (Drehimpuls 1 um die Kernverbindung),

1) Eine Arbeit über diesen Gegenstand erscheint demnächst in der Zeitschr. f. Phys. In einer eben erschienenen Arbeit von R. S. Mulliken (Phys. Rev. **32**, 186, 1928) findet sich schon ein Teil der Ergebnisse.

$^3\Sigma$, $^2\Pi$, $^1\Sigma$. Man sieht daran folgendes: Die Grundterme sind einfacher als bei Atomen. Während dort schon bei wenigen Elektronen im Ausbau der Sechsergruppen Quartettterme auftreten können, gibt es hier höchstens Triplett-Terme als Grundterme. Der $^1\Sigma$-Grundterm tritt häufiger auf als der ^1S-Term bei Atomen; bei gerader Elektronenzahl fast immer. Fast alle Molekeln mit gerader Elektronenzahl sind daher diamagnetisch.

Da im Zweizentrensystem bei bestimmten Zentrenabständen verschiedene Elektronenanordnungen ungefähr die gleiche Energie haben können, genügt zur Beschreibung der Molekelspektren die Betrachtung eines einzelnen Elektrons im allgemeinen nicht. Es tritt schon bei

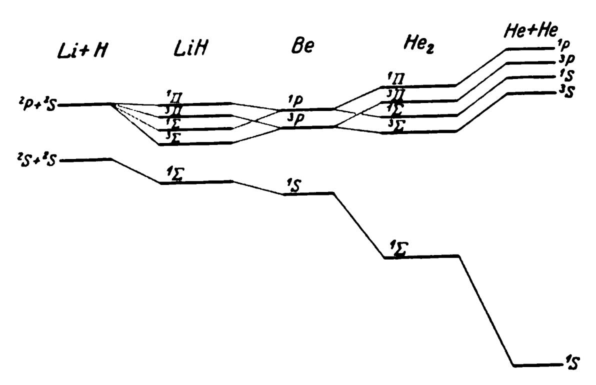


Fig. 2. Termschema für *LiH* und He_2.

geringer Elektronenzahl die Kompliziertheit der Elektronenterme auf, die wir bei Atomen erst in der Reihe *Sc* bis *Ni* vorfinden. Wir wundern uns nicht, daß es sehr schwer ist, Serien aufzufinden. Aus dem gleichen Grunde kann eine Molekel trotz verhältnismäßig hoher Ionisierungsenergie eine niedrige Anregungsenergie haben, also im Sichtbaren oder gar Ultraroten (mit Elektronensprung) absorbieren. Die Regel: Hohe Ionisierungsarbeit geht parallel mit hoher Anregungsarbeit, ist hier häufig verletzt. Beispiele sind O_2, F_2, Cl_2.

Wir kommen jetzt zu der Frage, welchen Zuständen des Zweizentrensystems Molekelterme entsprechen (also der Frage, die besonders von Heitler und London behandelt worden ist). Die Existenz eines Kerngleichgewichts hängt wesentlich davon ab, ob bei Zusammenführen der Zentren eines Zweizentrensystems genügend Energie gewonnen wird. Günstig sind dafür die Fälle, wo die getrennten Atome mäßig tiefe Energien der Grundzustände haben und das Zweizentrensystem mit nahen Zentren eine energetisch tiefliegende Elektronenanordnung hat. Einen typischen Fall erläutert schematisch Fig. 2. Das Zweizentrensystem, das zu *LiH* und He_2 gehört, ist erdalkaliähnlich, der Grundzustand hat tiefe Energie; von *Li* und *H* hat wenigstens *Li* keine tiefe Energie; dagegen haben getrennte *He*-Atome sehr tiefe Energie. Wir erwarten keine feste He_2-Molekel, die zu zwei normalen *He*-Atomen gehört; aber eine *Li H*-Molekel. Günstig für das Kerngleichgewicht sind die Fälle, wo im Zweizentrensystem die Elektronen nur in abgeschlossenen Zweier- oder Viererschalen sind, während die getrennten Gebilde unabgeschlossene Schalen haben (Lewis, London), darüber hinaus noch die Fälle, wo das Zweizentrensystem in der Elektronenanordnung Ähnlichkeit mit einem Edelgas hat (*HCl*).

Die Schwierigkeiten, die bei solchen sehr qualitativen Überlegungen auftreten, dürfen nicht verschwiegen werden. Wegen der geringen Unterschiede in der Bindung verschiedener Elektronenbahnen, die das Zweizentrensystem und erst recht das Mehrzentrensystem gegenüber dem Atom hat, sind alle Folgerungen unbestimmter, als etwa die Aussagen über die Zusammenhänge von Atom und Spektrum. Es ist ja auch aus der Chemie bekannt, wie unbefriedigend oft die chemische Begriffsbildung (Valenz) bei der Systematik der chemischen Verbindungen ist. Aber auch in einem Fall, wo der Valenzbegriff der Chemie Erfolge hat, bei den *C*-Verbindungen, ermöglicht die Betrachtung der Elektronenbahnen noch keine ganz befriedigende Deutung.

E. Fues (Stuttgart), Über Stoßübergangswahrscheinlichkeiten.

Die Intensitätsverhältnisse der Linien eines Multipletts sind erfahrungsgemäß in ziemlich weitem Umfang von den Anregungsbedingungen abhängig; nur in einem Teil der Fälle sind die idealen Intensitätsregeln (vgl. z. B. die Darstellung von H. Hönl, Ann. d. Phys. **79**, 273, 1926) erfüllt. Der nächstliegende Erklärungsgrund ist eine selektiv, d. h. nicht im Verhältnis ihrer Quantengewichte erfolgende Anregung der Ausgangszustände. Sie ist bei Stoßanregung mit wohldefinierter Stoßgeschwindigkeit zu erwarten und auch in völlig durchsichtiger Weise beobachtet (G. Hertz, Zeitschr. f. Phys. **22**, 18, 1924). Doch ist sie zunächst unverständlich, wenn die Multiplettaufspaltung so klein ist, daß sie gegenüber der endlich breiten Geschwindigkeitsverteilung der stoßenden Elektronen nicht in Betracht kommt. Durch die Arbeit des Referenten sollte festgestellt werden, ob eine selektive Anregung einzelner Multiplettniveaus als wellenmechanische Resonanzerscheinung auch dann zu

verstehen sei, wenn die anzuregenden Zustände energetisch beliebig benachbart sind.

Die Bornsche Stoßrechnung (Zeitschr. f. Phys. **38**, 803, 1926) erlaubt eine Durchrechnung der Stoßanregung, sie wurde in erster Näherung unter folgenden vereinfachenden Annahmen ausgeführt: Die gestoßenen Atome seien wasserstoffähnlich, jedoch mit einem spinnenden Elektron versehen (was überhaupt erst die Möglichkeit verschiedener Multiplettzustände schafft). Auch die stoßenden Elektronen besitzen Drall. Als Wechselwirkungsenergie beim Stoß komme nur die Coulombsche Abstoßung in Frage, der gegenüber die magnetische Wechselwirkung vernachlässigt wird. Trotzdem spielt der Drall der stoßenden Elektronen eine wesentliche Rolle, und zwar bei den (gar nicht seltenen) Stößen, bei welchen freies und gebundenes Elektron sich austauschen.

Zur Kennzeichnung der Multiplettzustände des Atoms mußte die Addition der beiden Impulsmomentvektoren (Bahnimpuls) und (Spin) zu einem resultierenden Gesamtimpuls wellenmechanisch formuliert werden. Dazu bieten sich zwei Wege: Entweder die Verwendung von Eigenfunktionen, die nur in den zwei diskreten Punkten des Spinfreiheitsgrads definiert sind (wie sie für ähnliche Probleme hauptsächlich von J. v. Neumann und E. Wigner, Zeitschr. f. Phys. **47**, 203 und **49**, 73, 1928, herangezogen wurden), oder die Darstellung aller beteiligten Vektoren durch ganz- und halbzahlige Kugelfunktionen im Anschluß an C. G. Darwin (Proc. Roy. Soc. **115**, 1, 1927). Letzteres führt, entsprechend der Bildung resultierender Vektoren, zur Aufstellung „erweiterter" Kugelfunktionen (von mehreren Argumentvektoren), welche mit den eigentlichen Kugelfunktionen dieselben Transformationseigenschaften gegenüber Operationen der Drehgruppe gemeinsam haben. Auf Grund dieses Verhaltens gelingt der Beweis eines Summensatzes für diese Funktionen, welcher schließlich zu folgender Beantwortung der Frage nach selektiver Stoßanregung führt:

Wenn ein Strom orientierter Elektronen gegen gerichtete Atome stoßen würde (also wenn jedesmal nur ein Strahl aus dem Stern-Gerlach-Versuch benützt würde), so wäre in der Tat selektive, noch von der gegenseitigen Orientierung abhängige Anregung zu erwarten. (In schwächerem Maß auch schon, wenn nur eine der beiden Stoßteilnehmerscharen orientiert wäre.) Dagegen muß die Stoßanregung der Zustände eines engen Multipletts bei regelloser Orientierung der Stoßpartner immer im Verhältnis ihrer Quantengewichte erfolgen.

Bei den vorliegenden Versuchen kann wohl nicht ohne Zwang eine gegenseitige Orientierung der Stoßteilnehmer angenommen werden, die Stoßanregung erfolgt also wohl nicht selektiv.

Trotzdem wäre es verfrüht, daraus unmittelbar auf die Gültigkeit der Intensitätsregeln in erster Näherung zu schließen und in den beobachteten Intensitätsanomalien lediglich einen Effekt zweiter Ordnung zu sehen. Für die ausgestrahlten Intensitäten sind nämlich nicht nur die Amplitudenbeträge der Schrödinger-Schwingungen des angeregten Zustands maßgebend, sondern — wegen der Interferenz der Ausstrahlungswahrscheinlichkeiten — auch deren Phasen. Diese ergeben sich aus dem Stoßprozeß in eindeutiger, von der Stoßgeschwindigkeit abhängiger Größe (vgl. die Arbeit von J. R. Oppenheimer, Zeitschr. f. Phys. **43**, 27, 1927). Es ist also wohl denkbar, daß noch ein Effekt erster Ordnung in den Intensitätsanomalien vorliegt, der durchaus von den Anregungsbedingungen abhängig sein kann.

BESPRECHUNGEN.

K. W. F. Kohlrausch, Radioaktivität. (Handbuch der Experimentalphysik, herausgegeben von W. Wien und F. Harms, Band XV.) 8⁰. XI u. 885 S. Mit 285 Abbildungen. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1928. Geb. RM. 81.—.

Die vorliegende Darstellung der Radioaktivität veranlaßt zu haben, wird man für lange Zeit den größten Verdiensten beizählen müssen, die wir den Herausgebern des Handbuches der Experimentalphysik zu danken haben — ein Dank, um so tiefer empfunden, da unser Meister W. Wien nun nicht mehr unter den Lebenden weilt. — Kohlrausch hat den umfangreichen Stoff in zehn Kapitel abgeteilt, von welchen die auf den einleitenden Überblick folgenden in zwei große Gruppen zerfallen: „die radioaktive Strahlung" und „das Zerfallsprodukt". Den Absichten des Handbuches entsprechend, hat die „radioaktive" Strahlung die weitaus eingehendere Behandlung erfahren; die Abschnitte über die γ-Strahlung (118 Seiten), β-Strahlung (225 Seiten) und die α-Strahlung (212 Seiten) nehmen zusammen mit dem Kapitel über die Rückstoßstrahlung (24 Seiten) und einem gedrängten Bericht über verschiedene zu Meßzwecken nicht benutzte Strahlungswirkungen (6 Seiten) drei Viertel des ganzen Werkes ein. Vor allem diese drei großen Abschnitte sind es auch, welche das Buch von sämtlichen bisherigen Darstellungen der Radioaktivität unterscheiden und ihm auf Jahre hinaus einen entscheidenden

Einfluß auf die experimentelle Forschung sichern dürften. Die große Klarheit, Objektivität und Genauigkeit der Darstellung ist schlechthin meisterhaft. Auf die jeweilige übersichtliche Formulierung der experimentellen Aufgaben eines Problemkomplexes folgt systematisch die Schilderung und kritische Bewertung von Apparatur und Methodik, die kritisch sichtende Aufzählung der stets auch in tabellarischer oder graphischer Form zusammengestellten Ergebnisse, endlich die sehr sorgfältige und immer bis zu den letzten möglichen Aussagen vordringende Diskussion der Ergebnisse an Hand der vorliegenden theoretischen Entwicklungen. Diese letzterwähnten Unterabschnitte sind zum größten Teile Originalleistungen des Verfassers, welche dem Theoretiker nicht weniger wertvoll sein werden wie dem Experimentator. In der Tat ist es die ausdrückliche Absicht des Verfassers, nicht nur den Experimentalphysiker darauf hinzuweisen, welche methodische Vervollkommnung, Verfeinerung und Erweiterung des Tatsachenmaterials in Zukunft unerläßlich ist, sondern auch noch den Theoretiker zu einer geeigneten Weiterführung seiner Betrachtungen anzuregen, die dem möglichen experimentellen Fortschritt Rechnung trägt. — Den bereits aufgezählten Kapiteln schließen sich an die „Gesetzmäßigkeiten der radioaktiven Umwandlung" (27 Seiten), die Meßmethoden der Radioaktivität (45 Seiten), endlich ein Bericht über die radioaktiven Substanzen (51 Seiten), den der Verfasser im Einverständnis mit den Autoren als Auszug aus den betreffenden Abschnitten des rühmlichst bekannten Werkes von St. Meyer und E. Schweidler geschrieben hat. Im Schlußkapitel „Der Atomkern" (70 Seiten) reiht sich an die Behandlung des statistischen Charakters des Zerfallsgesetzes (Schwankungsvorgänge) jene der Atomzertrümmerung; unter der Überschrift „empirische Gesetzmäßigkeiten der Kerneigenschaften" sind die Kernbausteine, die Zusammensetzung und Häufigkeit der Kernarten, sowie Beziehungen zwischen den radioaktiven Atomkernen zusammengestellt, den Beschluß macht eine Übersicht über die Kernstrukturtheorien. Von großem Vorteil für die praktische Benutzbarkeit des Buches ist ein Formelverzeichnis, sowie eine Übersicht über die 113 (!) Tabellen des Werkes, ferner das ausführliche Sach- und Namenregister; die Literatur ist bis Anfang 1928, nahezu lückenlos, berücksichtigt. — Es liegt in der Natur des Gegenstandes, daß jede Darstellung der Radioaktivität, namentlich wenn sie den stark methodisch beeinflußten Standpunkt des Experimentators besonders zu vertreten hat, dieses Gebiet heute noch sehr als in sich abgeschlossenes Sondergebiet der Physik erscheinen lassen muß. Das leise Widerstreben des Verfassers gegen die Quantenlehre, welches manchem Experimentalphysiker nicht unsympathisch sein wird, kann diesen unausweichlichen Eindruck vielleicht noch etwas verstärkt haben. So findet sich auch im Schlußkapitel nirgends näher angedeutet, wozu doch schon reichlich viel Erfahrungsmaterial zu Gebote stünde: daß Atomphysik und Kernphysik Zug um Zug wesensverwandte empirische Gesetzmäßigkeiten darbieten, was für die experimentellen wie die theoretischen Problemstellungen beider Gebiete in immer zunehmendem Maße Bedeutung gewinnt.

Wir wiederholen: Kohlrausch, Durchdringung der Probleme der „radioaktiven" Strahlung ist meisterlich. Die physikalische Literatur enthält unseres Erachtens kein Werk, das sich darin mit ihr messen kann. Die künftige Forschung wird sich dem Einfluß der neuen „Radioaktivität" nicht entziehen können. A. Smekal.

G. N. Lewis, Die Valenz und der Bau der Atome und Moleküle. (Die Wissenschaft, Bd. 77.) Übersetzt von G. Wagner und H. Wolff. VIII u. 220 S. Mit 27 Fig. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1927. RM. 12.—; geb. RM. 14.—.

Wenn man auch mit den Übersetzern dieses besonders persönlich geschriebenen Buches der Ansicht sein kann, daß dessen Hauptinhalt seit dem ersten Erscheinen in Amerika (1923) nicht als überholt zu gelten braucht, darf man doch lebhaft bedauern, daß die Übersetzung nicht wesentlich früher erschienen ist. Es bedarf keiner Begründung, warum diese vor einigen Jahren fast in jeder Beziehung durchaus aktuelle Schrift heute doch nicht mehr als eine völlig geeignete Einführung für einen Chemiker in die moderne Atomphysik bezeichnet werden kann. Der mehr physikalische Teil kann verständlicherweise auch durch die Anmerkungen der Übersetzer in dieser Hinsicht nur in sehr beschränktem Maße den beträchtlichen und tiefgehenden Fortschritten angepaßt werden, welche die Grundlage der Atom- und Molekültheorie, die Quantenlehre, seitdem erfahren hat. Doch besteht der Hauptinhalt des Buches nicht in der Erörterung der physikalischen Grundlagen, sondern in der bewußten Betonung, welche die den Chemiker eigentlich interessierenden Fragen findet. Was Lewis an Tatsachenmaterial bringt, bildet heute noch eine Fundgrube wichtiger Anregungen und enthält zahlreiche Aufgaben, deren Lösung von einer vollständigen physikalischen Theorie der chemischen Bindung verlangt wird. Der Wert des Buches im gegenwärtigen Zeitpunkt scheint wirklich in dieser eindringlichen Aufforderung zu liegen, welche von seiten des nach der klärenden Theorie ringenden Chemikers an den Physiker gestellt wird und welche auch heute noch unverminderte Aufmerksamkeit beansprucht, gerade nachdem das Problem der homöopolaren Bindung in ein neues Stadium der theoretischen Behandlung getreten ist. Der Wunsch wird rege, Lewis möge auch in der jetzigen Phase der Valenztheorie, angeregt durch Diskussionen im Kreise seines Laboratoriums, noch einmal „die Feder des Journalisten" ergreifen und dieses für Physiker und Chemiker zweifellos wieder ganz aktuelle Buch möge dann ohne Zwischenfrist dem deutschen Leser zugänglich werden. L. Ebert.

H. Lessheim u. R. Samuel, Die Valenzzahl und ihre Beziehungen zum Bau der Atome. (Fortschritte der Chemie, Physik und physikalischen Chemie, Bd. 19, Heft 3). 98 S. Mit 16 Abb. Berlin, Gebr. Borntraeger, 1927. RM. 6.40.

Das Ziel der Verfasser dieses Heftes ist die Frage zu klären, wieweit aus den Vorstellungen vom Atombau, wie sie sich aus der Deutung der spektroskopischen Gesetzmäßigkeiten entwickelt haben, auch das chemische Verhalten der Atome verstanden werden kann. Das Heft wendet sich sowohl an Physiker als an Chemiker, am besten geeignet ist es vielleicht für eine persönliche Zusammenarbeit von Interessenten aus beiden Gebieten, wo der Physiker bei der Lektüre der beiden ersten Teile (A. Das natürliche System der Elemente, B. Die Entwirrung der Spektren) dem Chemiker zuhilfe kommen kann, wenn

dieser letztere in die Versuchung kommt sich überreden zu lassen. Der leitende Gedanke der Verfasser ist ja, daß für das gesamte Verhalten eines Atoms eine ausgezeichnete Elektronenkonfiguration maßgebend ist und ein Urteil über den Wert dieser Ansicht muß zunächst auf eine Stellungnahme zu der Frage zurückgehen, wie stark der logische Zwang ist, mit dem diese ausgezeichneten Zustände aus den spektroskopischen Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden können. Nach der Besprechung der verschiedenen Arten der chemischen Bindung (Teil C) werden in Teil D die Anwendungen der spektroskopisch ermittelten ausgezeichneten Atomzustände auf das chemische Verhalten der Atome besprochen. Die Ionisierungsspannungen beleuchten die Energiebeträge, welche zur Abtrennung der äußersten Elektronen nötig sind. Die negativen Wertigkeiten werden kurz erwähnt, während die positiven genauer betrachtet werden, wobei die Metalle in den Übergangsreihen besondere Beachtung finden. Gerade hier ergeben sich offenbar enge Zusammenhänge zwischen den chemischen Eigenschaften der Atome und den Elektronenzahlen, wie sie in den ausgezeichneten Zuständen festgelegt bzw. gruppiert sind. Es braucht kaum gesagt zu werden, wie stark alle diese Fragen noch im Fluß sind. Die Schrift kann als anregende Einführung in einen der wichtigsten Teile der modernen Atomlehre, der Physiker wie Chemiker angeht, empfohlen werden. L. Ebert.

G. N. Lewis und M. Randall, Thermodynamik und die freie Energie chemischer Substanzen. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von O. Redlich. 8⁰. XX u. 598 S. Mit 64 Textabb. Wien, J. Springer. 1927. RM. 45.—; geb. RM. 46.80.

Das in Amerika schon 1922 erschienene Lehrbuch der Thermodynamik wird in einer Übersetzung vorgelegt, welche von Redlich durch Zusätze ergänzt wurde. Neu angefügt ist je ein Kapitel über die neuere Entwicklung der Theorie der starken Elektrolyte und über die Entropie bei tiefen Temperaturen. Seine Eigentümlichkeiten haben — wie aus der englisch geschriebenen neueren Fachliteratur hervorgeht — dem Original bereits weitverbreitete Anerkennung verschafft und dort die Einheitlichkeit der thermodynamischen Ausdrucksweise in beachtenswertem Ausmaß gefördert. Es wird interessant sein zu sehen, in welchem Maße sich die von Lewis benützte Form der thermodynamischen Behandlung bestimmter Aufgaben sich auch in den deutschsprechenden Ländern durchsetzt. Das Interesse an Auseinandersetzungen über Nomenklaturfragen ist heute in dem sachlich so gefestigten Gebiet abgeflaut, man bedarf einfach eines Systemes, das die sachliche Verständigung von Vertretern verschiedener Wissenszweige und Tätigkeitsgebiete, auch über die Sprachgrenzen hinaus, in kurzer, unmißverständlicher Weise gestattet. Es wird ein dauerndes Verdienst der Verfasser bleiben in diesem Buch von Grund auf den pädagogisch sorgfältigen und systematischen Versuch durchgeführt zu haben ein solches System festzulegen. Liegt auch naturgemäß das Schwergewicht der Darstellung in der Behandlung der physikalisch-chemischen Anwendungen, so muß doch auch dem Physiker die Kenntnisnahme der Lewis-Randallschen Thermodynamik dringend empfohlen werden, schon wegen der praktischen Bedeutung, den das Buch für die angelsächsische wissenschaftliche Literatur gewonnen hat. Der akademische Lehrer wird überdies originelle und lehrreiche Aufgaben finden.

L. Ebert.

T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. A. Duschek. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band 28. XI und 310 S. Mit 6 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1928. RM. 19.60; geb. RM. 21.—.

Es ist zu begrüßen, daß das ausgezeichnete Buch, über dessen Original im Band 26, S. 420 dieser Zeitschrift berichtet wurde, nun auch in deutscher Sprache erschienen ist. Doch sind, um Platz zu gewinnen, die ersten drei Kapitel des Originals, welche Funktionaldeterminanten, totale und partielle Differentialgleichungen behandelten, weggelassen; dafür bringt das Buch einen neuen Abschnitt über relativistische Mechanik, relativistische geometrische Optik, über Gravitationsgleichungen und die allgemeine Relativitätstheorie. Wie auch in der Einleitung des Buches besonders hervorgehoben ist, benützt der Verf. bei der Relativitätstheorie die Methode, von den klassischen Gesetzen auszugehen und diese so zu ändern, daß die geänderten Gesetze invariant sind gegenüber allen Transformationen einer quadratischen Differentialform und daß die Änderungen unter gewöhnlichen Verhältnissen vernachlässigt werden können. Diese letzten Kapitel finden sich überdies auch in der englischen Ausgabe von 1927. Die Tatsache, daß das Buch jetzt in drei Sprachen erschienen ist, spricht schon genug für seine Bedeutung.

Hilb.

E. G. Richardson, Sound, a physical textbook. Gr. 8⁰. VII und 286 S. Mit 98 Figuren London, Edward Arnold & Co. 1927. Geb. 15.— Schilling.

Inhalt: Schallgeschwindigkeit, Schwingungsgesetze, Schwingungen in festen Körpern, an Drähten, Stäben, Membranen und Platten. Akustik der Sprachlaute, schwingende Luftsäulen, tönende Flammen, Schallanalyse, Physiologische Akustik, technische Akustik.

Das Buch ist ein Leitfaden der Akustik, als Lehrbuch für das Studium an den amerikanischen Hochschulen und als Nachschlagebuch für den Praktiker gedacht, der mit Fragen der Schalltechnik zu tun hat. Ergebnisse durchgeführter Untersuchungen und der Hinweis auf die wichtigsten Veröffentlichungen der letzten 20 Jahre sind in den jeweiligen Abschnitten enthalten, sodaß das Studium des Buches eine gewisse Übersicht über den heutigen Stand der Forschung vermittelt.

In den einzelnen Kapiteln sind neben den allgemein in der Akustik angeführten Angaben die für das Eindringen in die Materie notwendigen mathematischen Entwickelungen enthalten. Wertvoll sind die Skizzen vieler Versuchsanordnungen, die für Laboratoriumsversuche von Nutzen sind und den Schalltechniker ganz allgemein interessieren.

Der Verfasser hat sich bemüht, für jeden Begriff ein bestimmtes Symbol festzulegen, soweit dies mög-

lich war. Aus Gründen der Folgerichtigkeit haben dabei einige Größen ihre bisherigen Symbole verloren.

Das Buch zeigt, mit welcher Systematik die amerikanische Wissenschaft auf dem Gebiete der Akustik arbeitet. Als Lehrbuch kann es eine verläßliche Grundlage schaffen und viel Anregungen geben.

Reiher.

E. Pertz, Die Bestimmung der Baustoffdämpfung nach dem Verdrehungsausschwingverfahren. (Sammlung Vieweg, Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik, Heft 91.) Gr. 8⁰. IV u. 62 S. Mit 42 Abb. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1928. RM. 3.60.

Während Becker und Föppl in ihrer Arbeit: Dauerversuche zur Bestimmung der Festigkeitseigenschaften, Beziehungen zwischen Baustoffdämpfung und Verformungsgeschwindigkeit (Forschungshefte a. d. Gebiete d. Ingenieurwesens, Heft 304), die Dämpfung von Baustoffen aus der Erwärmung des Probestabs bei Drehschwingungen ermittelten, wird sie hier durch das Ausschwingverfahren bestimmt, das besonders für Nichtmetalle geeignet ist und damit eine bisher vorhandene Lücke ausfüllt. Nach einer kritischen Besprechung der von anderen Forschern für Verdrehungsschwingversuche verwendeten Maschinen und erhaltenen Ergebnisse werden die benutzte Versuchsanordnung, ihre Eichung, damit ausgeführte Messungen und die Berechnung der Randdämpfung sowie die auf Grund besonderer Versuche zu ermittelnden und in Abzug zu bringenden äußeren Verluste beschrieben. Zum Schluß sind die Dämpfungskurven verschiedener Baustoffe (Baustahl, Kugellagerstahl, Stangenkupfer, Fichte und Rotbuche) zusammengestellt. Sie lassen, namentlich durch Betrachtung der verhältnismäßigen Dämpfung (Verhältnis der Dämpfung zur bezogenen Formänderungsarbeit) erkennen, wie verschieden sich die einzelnen Baustoffe verhalten. So zeigt Holz bereits bei schwachen Verformungen (im Gegensatz zu den Metallen) recht beträchtliche Dämpfung, die weiterhin nur noch wenig ansteigt. Von Interesse ist auch die Erhöhung der Dämpfungswerte des Kugellagerstahls auf das fünf- bis sechsfache nach Verformung. — Die Arbeit stellt einen wichtigen Fortschritt für die Bestimmung der Baustoffdämpfung dar.

Berndt.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Jena Dr. Walter Wessel für Physik, an der Bergakademie Clausthal Dr. Martin Rössiger für Geophysik

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Wien Dr. Adolf Smekal zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Halle, der a. o. Professor an der Universität Jena Dr. Georg Joos zum ord. Professor der theoretischen Physik ebenda, der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Franz Simon zum nichtbeamteten a. o. Professor der Physik daselbst, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin Dr. E. Biesalski zum a. o. Professor für analytische Chemie ebenda, Dr. F. J. M. Stratton zum Professor der Astrophysik an der Universität Cambridge (England), der Privatdozent für organische Chemie an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Paul Levy zum nichtbeamteten a. o. Professor daselbst, der Privatdozent an der Universität Groningen Dr. Albert Szenigyärgyi zum ord. Professor der Chemie an der Universität Szeged.

Berufen: Der Ingenieur am Zentrallaboratorium der Siemens & Halske A.G. in Berlin Karl Küpfmüller zum ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Danzig.

Ehrung: Dem ord. Professor für Schwachstromtechnik an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Heinrich Barkhausen wurde die Goldene Heinrich-Goetz-Medaille für seine Arbeiten über die Erregung von Schwingungen und über die Wirkungsweise der Verstärkerröhren verliehen.

Nobelpreise der Chemie: Für 1927 der ord. Professor an der Universität München Dr. Heinrich Wieland, für 1928 der ord. Professor an der Universität Göttingen Dr. Adolf Windaus.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Würzburg Dr. Ernst Wagner, der frühere Dozent für Physik an der Tierärztlichen Hochschule Hannover Dr. O. Haeseler, der Professor der Chemie an der Universität Cairo Dr. E. C. Grey, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Warschau Dr. Jan Zaroidzki.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye,** Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.60 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 23. Ausgegeben am 1. Dezember 1928. Nr. 771. Printed in Germany. **29. Jahrgang.**

INHALT:

Originalmitteilungen:

Vorträge und Diskussionen von der 90. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg vom 16.—22. September 1928:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 23 | 1. Dezember 1928 | Redaktionsschluß für Nr. 1 am 15. Dezember 1928. | 29. Jahrgang

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Verdampfung an der Kathode des *Hg*-Bogens.

Von J. v. Issendorff.

Inhalt.

Nachprüfung von Messungen der Verdampfung an der Kathode des Quecksilbervakuumbogens mittels einer Glasapparatur, die die verdampfte und die verspritzte Hg-Menge bei verschiedenen Oberflächentemperaturen getrennt zu messen gestattet. Es wurde eine starke Temperaturabhängigkeit und eine geringe Stromabhängigkeit der Verdampfung, also eine vorwiegende Beteiligung der gesamten Kathodenoberfläche gefunden. Für die Verdampfung im Brennfleck einschließlich dessen nächster Umgebung wurde ein positiver und ein negativer Grenzwert ermittelt, deren Diskussion einen verschwindend geringen Materialverlust der Kathode, vielleicht sogar einen Materialgewinn durch zuströmende Ionen wahrscheinlich macht. Für die Menge des verspritzten Hg wurde eine mehr als linear mit dem Strom ansteigende Abhängigkeit gefunden.

Ferner werden noch einige kritische Bemerkungen zur Energiebilanz der Hg-Bogenkathode gemacht, insbesondere hinsichtlich des Einflusses einer von Compton und van Voorhis vermuteten teilweisen Abstrahlung der Ionen-Eintrittsenergie und der elektrostatischen Verminderung der Elektronen-Austrittsarbeit. Die hiernach korrigierten Werte des Elektronenstrom-Anteiles im kathodischen Brennfleck, die sich aus der Seeligerschen Form der Kathodenbilanz ergeben, können die Theorie der thermischen Elektronen-Emission im Brennfleck noch nicht ernstlich gefährden.

In neuerer Zeit sind von verschiedenen Forschern Energiebilanzen für die Kathode des

Quecksilber-Vakuumbogens aufgestellt worden[1]). Das Gleichgewicht aller zu- bzw. abgeführten Energiebeträge sollte eine Bestätigung für die Richtigkeit von Annahmen bringen, die bei Ansetzung der einzelnen Beträge zu machen waren. Insbesondere wollte man ein Kriterium für die thermische Bogentheorie gewinnen, deren Grundlagen bekanntlich durch die Stoltschen Versuche[2]) ins Wanken geraten waren. Da einzelne Energiebeträge der Kathodenbilanz noch unbekannt waren, ergab sich, daß die thermische Theorie nur dann gestützt wurde, wenn die zugrunde liegenden Annahmen sich ziemlich stark den Extremwerten näherten, d. h. bei weitgehender Vernachlässigung

1. von Stoßverlusten der Ionen und Elektronen im Kathodenfall,
2. von einer Energieausstrahlung der Ionen bei der Neutralisation an der Kathodenoberfläche,
3. von einer neutralen Verdampfung im Kathodenfleck.

Sobald eine dieser Annahmen sich als unberechtigt erweisen sollte, was Compton und van Voorhis von 2. behaupten, war man gezwungen, die von Schottky gegebene Theorie der Verkleinerung der Elektronen-Austrittsarbeit[3]) heranzuziehen, deren Anwendung auf die Bogenkathode zuerst von Langmuir[4]) vorgeschlagen worden war.

Zweck der vorliegenden Arbeit war in erster Linie, die Berechtigung der unter 3. genannten, zuerst von Compton ausgesprochenen Annahme experimentell zu untersuchen[5]), die an sich gewagt schien, weil bereits zwei Messungen vorlagen, die eine beträchtliche Verdampfung an der *Hg*-Kathode ergeben hatten[6])[7]). Es war Proportionalität der in der Zeiteinheit verdampfenden *Hg*-Menge und des Bogenstroms gefunden worden, ein Ergebnis, das in gutem Einklang stand mit der Proportionalität der Fleckgröße und des Bogenstroms. Jedoch waren die absoluten Beträge sehr verschieden, Schaefer fand 36,7 mg/Amp. sec, Güntherschulze 7,2 mg/Amp. sec, ohne daß prinzipielle Fehler in den Versuchsanordnungen zu finden waren. Der Grund der Verschiedenheit konnte nur in dem Umstand vermutet werden, daß durch das Herumtanzen des Kathodenflecks Quecksilbertröpfchen herausgeschleudert werden, ein Effekt der an dem offen aufgestellten Kathodenbecher Schaefers stark zur Geltung kommen, aber auch bei dem von Güntherschulze benutzten Glasgleichrichter von gewissem Einfluß sein mußte.

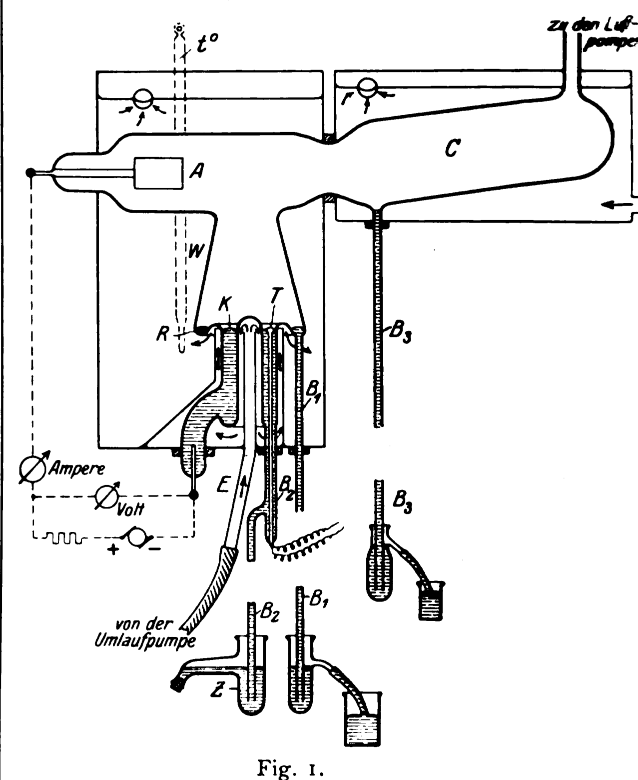


Fig. 1.

Das aus Glas hergestellte Versuchsgefäß (Fig. 1) erhielt daher zur Messung des Spritzquecksilbers eine, die Kathode *K* konzentrisch umgebende Rinne *R* [1]), in der sich das an der schwach konischen Wand *W* herabrinnende *Hg* sammeln mußte und mit Hilfe des barometrischen Abflußrohres B_1 gemessen werden konnte. Nur die annähernd vertikal aufsteigenden und auf die Kathodenoberfläche zurückfallenden Tröpfchen wurden hierbei nicht erfaßt, doch konnten diese vernachlässigt werden, weil die Wahrscheinlichkeit für eine solche Spritzrichtung bei der recht beträchtlichen Tröpfchengeschwindigkeit — es waren bereits Steighöhen von 20 cm bei 10 Amp. Bogenstrom beobachtet worden — nur auf höchstens 2 Proz. zu schätzen war. Auch die annähernd parallel zur Oberfläche fortfliegenden Tröpfchen wurden nicht vollständig erfaßt,

1) K. T. Compton, Phys. Rev. **21**, 266, 1923; Journ. Am. Inst. Electr. Eng. **46**, 1192, 1927; A. Güntherschulze, Zeitschr. f. Phys. **31**, 509, 1925; K. T. Compton und C. C. van Voorhis, Proc. Nat. Ac. Sc. **13**, 336, 1927; R. Seeliger, Physik. Zeitschr. **27**, 22, 1926; ETZ **49**, 853, 1928.
2) H. Stolt, Diss. Upsala 1925.
3) W. Schottky, Physik. Zeitschr. **15**, 872, 1914.
4) J. Langmuir, Gen. Elektr. Rev. **26**, 735, 1923; Science **58**, 290, 1923.
5) Die Untersuchung wurde im Gleichrichter-Laboratorium des Dynamowerks der Siemens-Schuckertwerke ausgeführt.
6) Benö Schaefer, Diss. Darmstadt 1910.
7) A. Güntherschulze, Zeitschr. f. Phys. **11**, 74, 1922.

1) Die Anregung zu dieser Ausführung verdanke ich Herrn Seeliger.

es wurde aber zur Gewinnung von Vergleichswerten darauf geachtet, daß die Kathodenoberfläche immer die gleiche Höhe, etwa 2 mm tiefer wie der Rand, beibehielt. Zu diesem Zweck wurde auch hier eine Barometerröhre B_2 angeschlossen, die in ein Zuflußgefäß Z mit vergrößerter *Hg*-Oberfläche mündete, so daß die Höhe der Spiegel sich nur langsam ändern konnte. Da ein Vorversuch ergeben hatte, daß die Erhitzung der Rohrwand durch die Entladung eine zusätzliche Verdampfung des daran haftenden Spritzquecksilbers bewirkt, so mußte das ganze Entladungsrohr mit Ausnahme der Einschmelzungen und des Kondensationsraumes C, für den ein besonderer Kühlbehälter angefertigt wurde, in ein Wasserbad gebracht werden. Beide Wasserbehälter wurden aus Weißblech gelötet, die Dichtungen bestanden aus Gummiringen, die mit kleinen Flanschen angedrückt wurden. Nur an der unzugänglichen Mündung des Kondensationsraumes wurde zwischen den beiden Wasserbehältern die Dichtung durch einige Lagen Isolierband, das mit dicker Schellacklösung bestrichen war, bewerkstelligt. Um möglichst zu verhindern, daß das Kathoden-*Hg* eine höhere Temperatur als das Wasserbad annahm, wurde die wärmeabgebende Wandfläche noch durch ein konzentrisches Innenrohr I vergrößert. Das durch eine Pumpe in Umlauf gesetzte Wasser wurde bei E dem Wasserbad zugeführt und dann durch Blechrohre so geleitet, daß es zunächst die vom Kathoden-*Hg* berührten Wände bestrich. Danach strömte es in dem Kasten, dessen Vorderseite aus einer eingekitteten Glasscheibe bestand, nach oben und floß durch ein Überlaufrohr über einen heizbaren Behälter zur Pumpe zurück. Durch ein in ein dünnes Glasrohr eingelegtes Thermoelement T, das z. T. in dem Barometerrohr B_2 verlief, konnte die Temperatur der ringförmigen Kathodenoberfläche in gleicher Entfernung von der inneren und äußeren Glaswand gemessen werden. Als Lötstelle diente ein *Hg*-Tropfen, der das kugelförmig erweiterte Ende von 2,5 mm Durchmesser des Glasröhrchens ausfüllte und der die auf etwa 0,1 mm Ø abgeätzten Enden eines Konstantan- und eines Eisendrahtes verband. Durch diese Ausführung war ein guter Wärmekontakt ohne nennenswerte Ableitungsverluste gewährleistet. Die Eichung erfolgte mittels stufenweiser Temperaturänderung des Wasserbades bei ausgeschalteter Entladung. Der an der Kathode gebildete *Hg*-Dampf konnte durch eine 3 cm weite Öffnung in den Raum C übergehen, dessen Wand immer um etwa 40° kälter gehalten wurde als die des Entladungsraumes, so daß kein nennenswerter Gegendruck das Ausströmen behinderte. Die Kondensation war am Eingang von C am lebhaftesten, am anderen Ende, wo eine Gaedesche Diffusionspumpe angeschlossen war, sehr schwach, ein Zeichen, daß der Kondensationsraum nicht zu knapp bemessen war[1]). Das Kondensat floß durch die Barometerröhre B_3 zum Meßgefäß ab.

Die Messungen wurden in der Weise durchgeführt, daß jeweils die Temperatur des Wasserbades und die Stromstärke der Entladung für eine gewisse Zeit sorgfältig konstant gehalten und das Kathodenquecksilber dauernd ergänzt wurde. Die Pumpe hielt während der Versuche ein Vakuum von etwa 10^{-5} mm *Hg*-Säule aufrecht. Die Dauer eines Versuches betrug meist 45 Min. bei 79° C und 120 Min. bei 59,5° C.

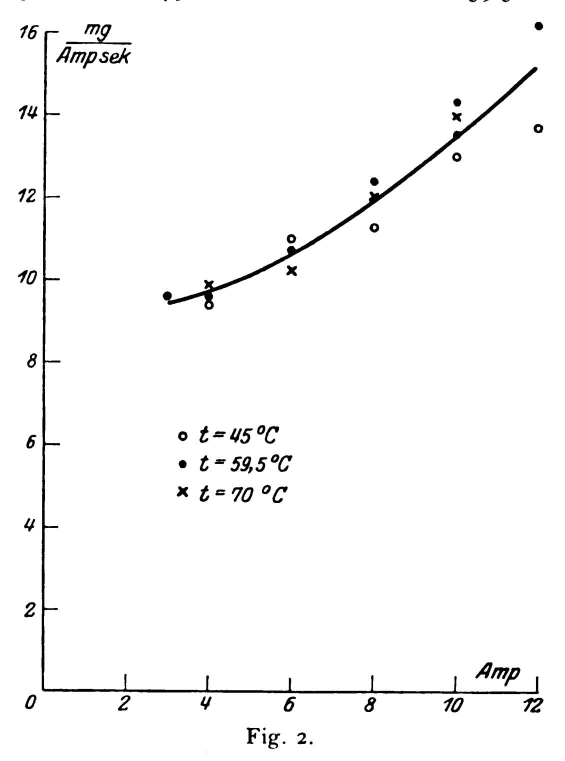


Fig. 2.

Am Ende jedes Versuches wurde das ausgetretene Spritz- und Kondens-Quecksilber gewogen, nachdem auch geprüft worden war, daß der Barometerstand sich nicht geändert hatte, der auf die Meßgenauigkeit von Einfluß sein mußte.

Auf Fig. 2 sind die in der Zeiteinheit übergegangenen Mengen von Spritzquecksilber, dividiert durch den jeweiligen Strom, über letzterem dargestellt. Bei dieser Form der Darstellung hätte man einen zur Abszissenachse parallelen Verlauf der Kurve erwarten müssen, falls Proportionalität der verspritzten Menge mit dem Strom bestünde. Offensichtlich besteht eine solche nicht, d. h. das Spritzen wird mit ansteigendem Strom intensiver. Das Versuchsgefäß erlaubte allerdings nur die Untersuchung eines schmalen

1) Abgesehen von dessen Eintrittsquerschnitt, vgl. weiter unten.

Strombereichs, so daß der Kurvenverlauf für höhere Ströme nicht festzustellen war. Man kann jedoch vermuten, daß der Anstieg der Kurve wieder geringer wird, namentlich von denjenigen Stromwerten ab, bei welchen sich der Kathodenfleck teilt. Da aber die fortgeschleuderte *Hg*-Menge noch von der Größe der Kathodenfläche und von der sonstigen konstruktiven Anordnung in hohem Maße abhängen muß, so ist den im vorliegenden Falle erhaltenen Absolutwerten zunächst nur orientierende Bedeutung beizumessen, die immerhin einen interessanten Vergleich mit den Verdampfungswerten zulassen.

Ein Einfluß der Temperatur des Wasserbades auf die Spritzintensität wurde nicht gefunden, die entsprechend bezeichneten Punkte streuen ohne erkennbare Gesetzmäßigkeit.

Andererseits war dagegen zu erwarten, daß die Temperatur auf die Menge des verdampfenden *Hg* einen erheblichen Einfluß haben würde. Zwar wurde die Kathodenoberfläche, die einen Ring von 7 mm Breite und 25 mm äußerem Durchmesser bildete, absichtlich klein gehalten, doch mußte auch das die Wand *W* bedeckende Spritz-*Hg* an der Verdampfung in beträchtlichem Maße teilnehmen. Es konnte nämlich keine Maßnahme zur Vermeidung dieser störenden Wirkung gefunden werden, die nicht zugleich andere, schwerer zu kontrollierende Störungen verursacht hätte. Dafür war hier mit Sicherheit anzunehmen, daß die Wand *W* bei allen Strombelastungen mit einer gleich großen Menge *Hg* bedeckt war, die sich durch Abfließen überschüssiger Mengen dauernd auf einem gewissen maximalen Betrag hielt. Tatsächlich zeigte sich auch kein merklicher Unterschied in der Dichte der Bedeckung. Wenn es also gelang, den ganzen Entladungsraum auf einer konstanten Temperatur zu halten, so mußte die im Kondensationsraum niedergeschlagene Menge sich aus einem konstanten, nur von dieser Temperatur abhängenden Betrag und aus einem variablen, nur durch die jeweilige Entladungsstromstärke bedingten Betrag zusammensetzen. Dieser Stromanteil rührte offenbar von der hier interessierenden Verdampfung im Ka- thodenfleck her.

Daher wurden auf Fig. 3 die gemessenen und auf die Zeiteinheit bezogenen Kondensatmengen über der Entladungsstromstärke aufgetragen, um durch Extrapolation auf den Strom *O* den Temperaturanteil ermitteln zu können, der wegen der fehlenden Ergänzung der Wandbedeckung nicht direkt zu erhalten war. Von den gewählten Badtemperaturen konnten natürlich nur diejenigen brauchbare Versuchsreihen ergeben, bei denen der entwickelte Dampf dicht genug war, um durch den Öffnungsquerschnitt des Kondensraumes entweichen zu können. Das war offensichtlich bei 59,5° C nicht und bei 70° teilweise nicht der Fall, wo eine schwache Kondensation an der Wand *W* und vor dem Eingang des Kondensraumes *C* festzustellen war. Erst bei höherer Temperatur konnte der gesamte Dampf abgeführt werden, so daß die bei 79° C aufgenommene Meßreihe allein in Betracht kommt. Hier würde die Extrapolation einen konstanten Temperaturanteil von 28,3 mg/sec und einen dem Strom annähernd proportionalen Anteil von 1,3 mg-Amp. sec ergeben.

Nun ist jedoch noch zu berücksichtigen, daß durch den Entladungsstrom sowohl die Kathodenoberfläche als auch die Wandbedeckung über die Badtemperatur hinaus erwärmt wurden. Mittels des Thermoelements konnte eine recht gute Proportionalität der mittleren Übertemperatur der Oberflächenschicht mit dem Entladungsstrom von nahezu $1 \frac{{}^0\mathrm{C}}{\mathrm{Amp.}}$ ermittelt werden, während die Rechnung für die Innenfläche der Wand *W* bei einem Gesamtspannungsabfall von 18,5 Volt, also einem Abfall in der Entladungsbahn allein von rund 7 Volt, ferner bei einer Oberfläche von 250 cm², einer Glasdicke von 0,2 cm und einem spezifischen Wärmeleitvermögen des Glases von $0{,}007 \frac{\mathrm{Watt}}{\mathrm{cm}^0\mathrm{C}}$ etwa $0{,}8 \frac{{}^0\mathrm{C}}{\mathrm{Amp.}}$ ergibt. Da jedoch die Entladung im Bereich der Wand *W* noch fast lichtlos war, d. h. einen geringeren Gradienten als in dem oberen, leuchtenden Teil aufweisen mußte, und an der Wand *W* in gewissen Fällen, wie erwähnt, auch Kondensation beobachtet wurde, dürfte der wahre Wert der Übertemperatur den errechneten noch unterschreiten. Es ist also zu vermuten, daß die zusätzlichen Verdampfungen an der Wand und an der Kathode wegen der Übertemperaturen trotz ungleich großer Oberflächen größenordnungsmäßig nicht sehr verschieden sein werden. Beide Effekte ändern aber die gemachte Voraussetzung dahingehend, daß der Temperaturanteil der Verdampfung nicht konstant bleibt, sondern mit dem Strom ansteigt. Infolgedessen ist der ermittelte Wert des Stromanteils der Verdampfung von 1,3 mg/Amp. sec bestimmt zu hoch angegeben.

Um auch einen unteren Grenzwert für die gesuchte Verdampfung im Brennfleck zu finden, wurde unter der extremen Annahme, daß die Wand *W* gleiche Temperatur wie die Kathode *K* habe und in gleicher Weise wie diese an der Dampfabgabe beteiligt ist, in einer Versuchsreihe die mittlere Temperatur der Kathodenoberfläche an Stelle der Badtemperatur konstant gehalten. Die auf diese Weise erhaltenen Kondensatwerte ergeben auf Fig. 3 die strichpunktierte Kurve, die einen Punkt mit der Versuchsreihe $t = 79^0$ const gemeinsam hat. Die mittlere Oberflächentemperatur der Kathode wurde jeweils nach Ein-

stellung des Spiegels auf eine solche Höhe gemessen, daß die Lötstelle des Thermoelementes eben von oben sichtbar war. Die kalte Lötstelle befand sich auf Raumtemperatur, die innerhalb des Bereiches von 25 bis 30° C konstant blieb. Die Addition von Raumtemperatur und Thermoelementanzeige betrug bei dieser letzten Versuchsreihe $t_K = 83{,}0^0$ C. Obgleich diese Temperaturbestimmung nur als roh angesehen werden muß, so dürfte sie doch im vorliegenden Fall aus-

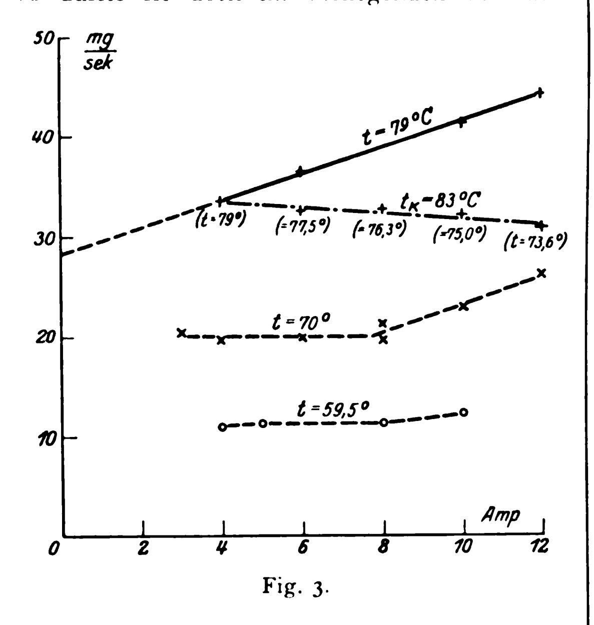


Fig. 3.

gereicht haben, da das Thermoelement auch im ausgetauchten Zustand der kugelförmigen Lötstelle nur wenige Grad mehr anzeigte, so daß die Temperaturübereinstimmung der Oberfläche bei den einzelnen Versuchen auf mindestens 0,5° genau war. Die Badtemperatur t mußte dementsprechend mit steigender Stromstärke gesenkt werden, wie auf Fig. 3 im einzelnen angegeben ist. Infolgedessen mußte auch der Temperaturanteil der Verdampfung wegen der unbekannten Mitwirkung der Wand W mit wachsendem Strom abnehmen und nur in dem vorausgesetzten Grenzfall konstant bleiben. Als Stromanteil würde sich dann in diesem Grenzfall aus der mittleren Kurvenneigung eine negative Verdampfung im Brennfleck von 0,3 mg/Amp. sec ergeben.

Das Ergebnis, daß die Verdampfung im Brennfleck des Quecksilberbogens weniger als + 1,3 mg/Amp. sec und mehr als — 0,3 mg/Amp. sec beträgt, legt nun zunächst die Frage nahe, ob die Verdampfung überhaupt negativ werden, d. h. ob Kondensation im Brennfleck stattfinden kann. Diese Frage muß bejaht werden, denn die *Hg*-Ionen treffen mit Absolutgeschwindigkeiten von etwa $3 \cdot 10^5$ cm/sec auf die Kathodenoberfläche auf, wenn sie den Kathodenfall ohne Stoßverluste passiert haben und erzeugen innerhalb des Brennflecks einen dynamischen Druck, der bis zur Größenordnung von 1 Atm. anwachsen kann, je nach ihrer noch unbekannten Beteiligung am gesamten Kathodenstrom. Einerseits werden also die auftretenden Ionen wegen ihres Eindringens in das flüssige *Hg* nicht selbst sofort wieder verdampfen können, andererseits behindern sie den Dampfaustritt im Brennfleck durch ihren dynamischen Druck. Trotzdem diese vermuteten Effekte vielleicht unvollkommen auftreten — namentlich am Rande des Brennflecks — so ist doch hiernach die Möglichkeit einer „negativen" Verdampfung im Brennfleck nicht von der Hand zu weisen.

Man findet in der Tat durch Schätzung im vorliegenden Falle, daß der wahre Wert der Verdampfung im Brennfleck näher der angegebenen unteren Grenze liegen muß; denn bei der Versuchsreihe $t = 79^0$ C sind durch die vorausgesetzte Temperaturkonstanz der Kathode K und der Wand W zwei beträchtliche Vernachlässigungen von anscheinend gleicher Größenordnung begangen worden, während bei der Versuchsreihe $t_K = 83^0$ C durch die vorausgesetzte Temperaturgleichheit von W und K nur eine dagegen geringer zu bewertende Abweichung vorliegt.

Es ergibt sich also die volle Berechtigung der von Compton gemachten Annahme, daß die Verdampfung im Brennfleck der Quecksilber-Entladung verschwindend klein ist und bei Aufstellung einer Energiebilanz in erster Annäherung vernachlässigt werden kann.

Bevor nun die erwähnten Meßresultate von Schaefer und Güntherschulze diskutiert werden können, ist noch die Frage zu beantworten: wieviel Quecksilber kann maximal an einer nach außen wärmeisolierten Kathode verdampfen? Auf Grund der in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Anschauungen läßt sich dieser Maximalwert jetzt angenähert berechnen, da der bei praktisch kalter, also nicht an der Verdampfung teilnehmenden *Hg*-Kathode durch Wärmeleitung vom Brennfleck an das flüssige *Hg* abgegebene Energiewert zu 2,68 Watt/Amp. einwandfrei gemessen worden ist[1]). Wird diese Energie ausschließlich zur Verdampfung von *Hg* bei schätzungsweise 120° C verbraucht, wo die Verdampfungswärme nach Nernst 305 Watt · sec/gr beträgt, so ergibt sich ein Höchstbetrag von 8,8 mg/Amp. · sec für die Verdampfung an der ganzen Kathodenoberfläche. Bei teilweiser Wärmeabführung durch Kathodenkühlung würde eine entsprechend geringere Menge verdampfen, jedenfalls wird aber, und das ist ein besonders wichtiges Ergebnis, der Dampf an der gesamten Kathoden-

1) A. Güntherschulze, Zeitschr. f. Phys. **11**, 74. 1922.



oberfläche und in verschwindend geringem Maße im Brennfleck erzeugt.

Bei einer gut wärmeisolierten Kathode, wie die in der Anordnung Schaefers benutzte, wird also eine *Hg*-Abnahme nur bis zu 8,8 mg/Amp.·sec durch Verdampfung, ein darüber hinausgehender Betrag aber durch mechanisches Herausschleudern von Tropfen verursacht worden sein, ein Vorgang, der durch die schnelle Bewegung des Brennfleckes, verbunden mit dessen dauerndem Eindringen in die Oberfläche leicht zu erklären ist. Schwierigkeiten macht nur die quantitative Erklärung des Schaeferschen Ergebnisses, da dessen Anteil an Spritzquecksilber von 36,7 — 8,8 = 27,9 mg/Amp.·sec trotz annähernd gleich großer Oberfläche noch so weit über die in Fig. 2 dargestellten Werte hinausgeht, daß wohl eine zusätzliche Erwärmung durch den Lichtbogen vermutet werden muß.

In der Anordnung von Güntherschulze dagegen war die Spritzwirkung von um so geringerem Einfluß, je tiefer die Quecksilberoberfläche in dem verhältnismäßig engen Kathodenansatzrohr sank. Aber auch die Verdampfung war dort behindert, so daß ein beträchtlicher Anteil der Kathodenwärme an die umgebende Luft übergehen mußte. So wird es verständlich, daß die gemessene *Hg*-Abnahme von 7,2 mg/Amp. sec trotz der übersehenen Spritzwirkung noch unter dem oben errechneten Höchstwert von 8,8 mg/Amp. sec blieb. Im übrigen steht die von Güntherschulze angegebene Verdampfungszahl in keinem merklichen Zusammenhang mit der Verdampfung im Brennfleck und ist für Kathodenbilanzen daher nicht verwertbar.

Natürlich ist auch mit dem vorliegenden Versuchsgefäß die Verdampfung (bzw. Kondensation) im Brennfleck nicht ohne weiteres zu ermitteln, auch dann nicht, wenn durch Verschmälern der ringförmigen Oberfläche die Übertemperatur derselben verringert und damit die Grenzlinien der Fig. 3 beliebig einander genähert werden könnten. Man würde immer nur die resultierende Verdampfung im Fleck einschließlich dessen nächster Umgebung erhalten; denn der Fleck bleibt bei seiner mehr zitternd als fortschreitend zu nennenden spontanen Bewegung relativ lange an ein und derselben Oberflächenstelle. Erst durch magnetisch erzwungenen Umlauf des Fleckes würde man bei fortwährender Steigerung der Umlaufgeschwindigkeit den Einfluß der Erhitzung benachbarter Oberflächenschichten soweit ausschalten können, daß die Aussicht besteht, die vermutete Kondensation im Fleck und mit ihr den Ionenanteil am Kathodenstrom im Brennfleck direkt zu bestimmen. Die an sich interessante Angabe, daß dem hier ermittelten Verdampfungsgrenzwert von — 0,3 mg/Amp.·sec ein Ionenstromanteil von 14,4 Proz. entsprechen würde, ist also wegen der vorhandenen störenden Einflüsse ohne Bedeutung.

Durch das Ergebnis, daß die Verdampfung im Brennfleck verschwindend gering ist, wäre an sich die thermische Bogentheorie genügend gestützt, wenn nicht von seiten Comptons und van Voorhis die Berechtigung der in der Einleitung genannten zweiten Vernachlässigung bestritten worden wäre[1]). Gestützt auf eine sorgfältige experimentelle Arbeit[2]), welche die direkte Bestimmung der Neutralisierungswärme von Ionen an Metallwänden zum Ziel hatte, deren Ergebnis aber als Differenz von beträchtlich größeren Werten und wegen der unzureichenden Kenntnis der Wärmekapazität der Sonde als recht unsicher angesehen werden muß, wurde behauptet, daß die Neutralisierung der Ionen bereits in einer Entfernung vom festen Metall erfolge, in der noch kein Wärmekontakt vorhanden ist. Infolgedessen würde die Neutralisierungsenergie ausgestrahlt und weniger als die Hälfte ihres Wertes vom Metall absorbiert. Von dem nach der bekannten Beziehung

$$\varphi_+ + \varphi_- = V_i + L \;{}^{3})$$

(V_i = Ionisierungspotential, L = Kondensationswärme, im Voltäquivalent ausgedrückt) für φ_+ errechneten Wert von 10,6 Volt (Argon, Molybdän) wurden dementsprechend nur etwa 1 Volt als Äquivalent der Eintrittswärme der Ionen gemessen.

Da es sich also um beträchtliche Energien handelt, die von einer Ionen absorbierenden Wand ausgestrahlt werden müßten, fragt man sich sofort, ob ein derartiger Effekt nicht sehr auffällig sein müßte. Merkwürdigerweise ist er aber noch nicht beobachtet worden[4]). Daß im photographisch wirksamen Frequenzbereich mit normalem Glasobjektiv keine merkliche Lichtemission festzustellen ist, sollen die Aufnahmen Fig. 4 a—e (Tafel III) zeigen. Hier ist eine schmale Zylindersonde in axialer Draufsicht photographiert, die von einem *Hg*-Bogen von 0,15 Amp. umspült ist (positive Säule). Die Sondenspannungen, bezogen auf das wahre Potential im Lichtbogen[5]), wurden wie angegeben variiert. Die entstehende positive Raumladungsschicht (Fig. 4 a—c) ist wegen ihrer Lichtlosigkeit, die negative Raumladungsschicht

1) Compton und van Voorhis, l. c.

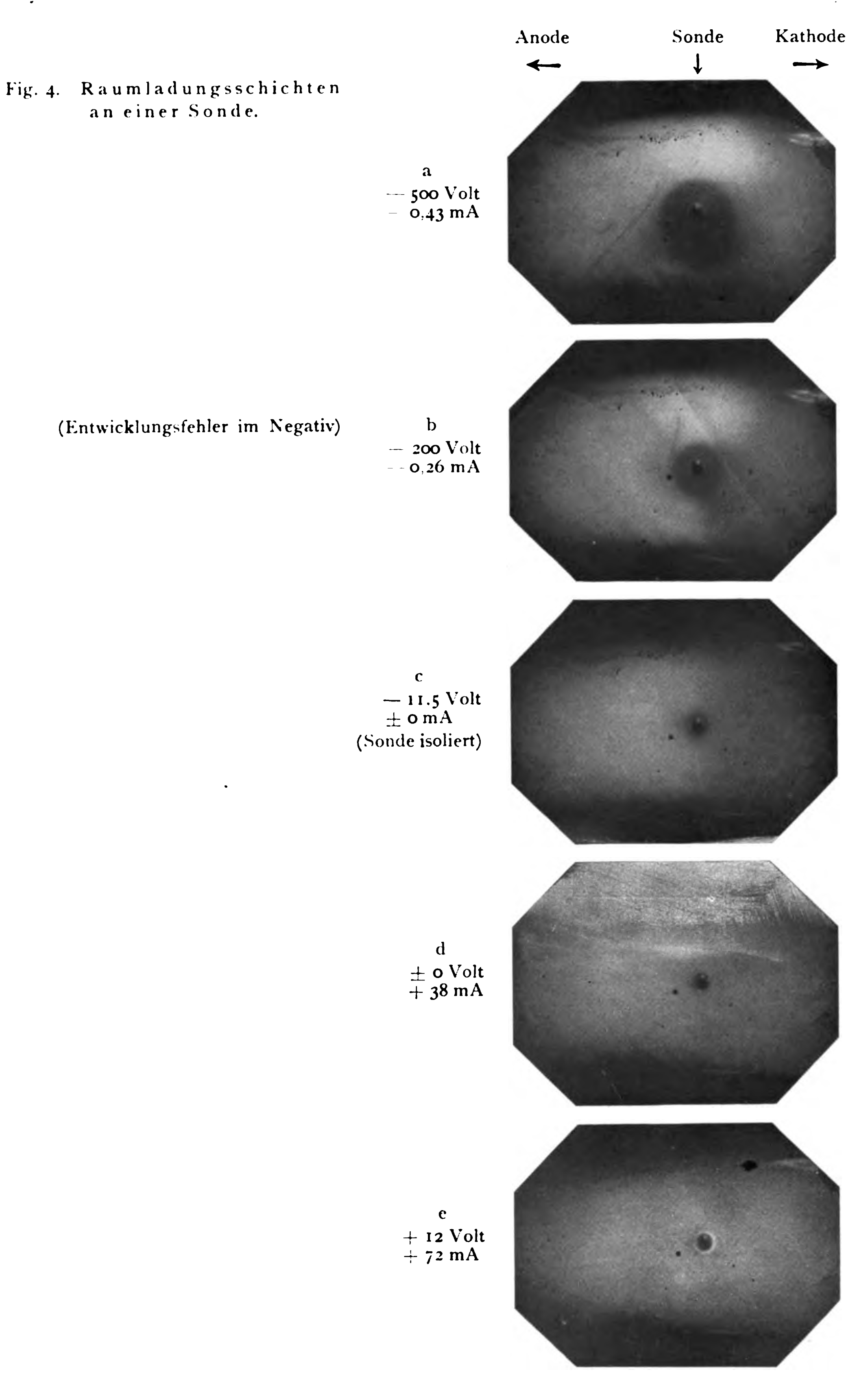
2) C. C. van Voorhis, Phys. Rev. **30**. 318. 1927.

3) W. Schottky, Ann. d. Phys. **62**, 143. 1920; W. Schottky u. J. v. Issendorff, Zeitschr. f. Phys. **26**, 85. 1924.

4) Dauvillier, Journ. de Phys. **7**, 369. 1926; F. M. Penning. Physica **8**. 13. 1928.

5) I. Langmuir and H. Mott-Smith jr., Gen. El. Rev. **27**. 449. 1924; J. v. Issendorff. Wiss. Ver. Siem. Konz. **4**. 124. 1925.

Fig. 4. Raumladungsschichten an einer Sonde.



φ_-	3.9	2.6	1.3	0 Volt	durch Feldeinfluß
f	0.69	0.75	0.81	0.87	bei 100 Proz. absorbiertem Anteil der Neutralisationsenergie
	0.63	0.69	0.76	0.83	bei 50 Proz. absorbiertem Anteil der Neutralisationsenergie
	0.54	0.59	0.66	0.74	bei 0 Proz. absorbiertem Anteil der Neutralisationsenergie

(Fig. 4 e) wegen ihrer gesteigerten Lichtemission deutlich zu erkennen. Die negative Sonde zeigt nur Lichtreflexe an der Stirnfläche, jedenfalls aber keinen Lichtsaum, welcher einen den Sonderquerschnitt ganz umschließenden Kreis bilden müßte. Es wäre sehr erwünscht, wenn analoge Aufnahmen auch noch mit Quarzoptik im Ultravioletten gemacht würden, zu deren Herstellung mir die Mittel fehlten.

Das derzeitige Fehlen eines optischen Nachweises der Neutralisationsstrahlung an der Oberfläche negativer Sonden kann natürlich nicht als Beweis angesehen werden, daß namentlich im kathodischen Brennfleck eine solche Strahlung unterbleibt. Immerhin liegen an der *Hg*-Kathode die Verhältnisse noch insofern für die Ausstrahlung ungünstig, als der Fleck nicht dauernd eine ebene, horizontale Fläche darstellt, sondern fortwährend in den *Hg*-Spiegel kleine Hohlräume einzudrücken sucht. Dadurch wird die freie Energieausstrahlung zugleich mit dem freien Raumwinkel verringert und die vom flüssigen *Hg* absorbierte größer als von Compton vorausgesetzt; d. h. die Neutralisationsenergie der Ionen kann infolgedessen mit mehr als 25 Proz. ihres Wertes zur Erwärmung der *Hg*-Kathode beitragen. Es fragt sich überhaupt, ob nicht die molekulare Rauhigkeit jeder Sondenoberfläche so groß ist, daß der freie Raumwinkel für die Ausstrahlung im Mittel beträchtlich kleiner als der Betrag 2π ist.

Endlich möchte ich noch auf einen offensichtlichen Fehler in der Kathodenbilanz aufmerksam machen, der bei einer unvollständigen Anwendung der Feldtheorie der Elektronenemission entsteht: Wenn die Elektronen-Austrittsarbeit durch starke Felder verringert wird, so ist nicht zu vergessen, daß sich gleichzeitig die Eintrittsenergie der Ionen um denselben Betrag erhöhen muß[1]), denn die Elektronen, die zur Neutralisation dienen sollen, sind jetzt gewissermaßen „billiger" geworden, der Vorgang wird einer räumlichen Rekombination immer ähnlicher. Wird $\varphi_- = 0$, so muß für *Hg*-Ionen $\varphi_+ = V_i + L = 11$ Volt werden. Den Einfluß dieser Umwertung erkennt man am besten, wenn man in der von R. Seeliger angestellten Berechnung[1]), die die bisher allgemeinste Fassung einer *Hg*-Kathodenbilanz darstellt, an Stelle der letzten kleinen Tabelle $\varphi_+ = 0$ (7,1), $f = 0{,}75$ (0,85) die obige Tabelle einsetzt.

In dieser bezeichnet f die Beteiligung der Elektronen am Stromtransport im Brennfleck, die aus Gründen der Trägerneubildung größer als 0,5 sein muß und unter Voraussetzung der anfangs genannten Vernachlässigungen 1. und 3. berechnet ist. Die Vernachlässigung 2. hat nur in der oberen Zeile volle Gültigkeit, während sie in der mittleren Zeile die halbe und in der unteren Zeile gar keine Berücksichtigung gefunden hat. Man erkennt hieraus, daß ein zwingender Grund zur Heranziehung der Langmuirschen Feldtheorie in diesem Falle nicht vorliegt; um so weniger, als ein Absorptionsanteil von nahezu 0 Proz. doch noch als zweifelhaft angesehen werden muß.

Da die Berechtigung der Vernachlässigung 3. in der vorliegenden Arbeit bewiesen worden ist, so bleibt noch die Frage nach der Gültigkeit der Vernachlässigung 1. offen. Diese läßt sich mit Rücksicht auf das oben gebrachte Rechnungsergebnis der Kathodenbilanz auch folgendermaßen formulieren: Beträgt der effektive Kathodenfall für die Ionen tatsächlich 10,3 Volt oder ist er geringer? Auf diese Frage, deren Beantwortung erst in Verbindung mit der Ionisierungsfunktion der emittierten Elektronen eine einigermaßen sichere Entscheidung für und wider die thermische Emissionstheorie aus der Kathodenbilanz geben würde, soll hier nicht näher eingegangen werden. Doch sei noch zum Schluß darauf hingewiesen, daß vielleicht aus folgender Überlegung ein Kriterium für die Art der Elektronenemission an der *Hg*-Kathode gewonnen werden kann. Die elektrostatische Elektronen-

1) Hier ist die häufig vertretene Anschauung zugrunde gelegt, daß die Neutralisation der Ionen bereits unmittelbar an der Kathodenoberfläche erfolgt. Sollten jedoch die Ionenladungen durch die äußersten Schichten des Kathodenmaterials hindurchzudringen vermögen, so wird die vorliegende energetische Betrachtung wesentlich komplizierter, worauf mich Herr Schottky freundlichst hinwies.

1) R. Seeliger, ETZ **49**, 853, 1928. Eine in dieser Arbeit durchgeführte Maximumdiskussion enthält einen Irrtum, den ich im Einverständnis mit Herrn Seeliger hier berichtigen möchte. Die Größe F (zur Kathode zurückkehrender Anteil der von den Elektronen im Kathodenfall erlangten Energie) muß > 0 sein, wenn $Z < 6{,}7$ Volt, um ein hohes f zu erhalten. Da die Bedingung für Z immer erfüllt ist, hätte für F nicht 0 sondern ein kleiner echter Bruch eingesetzt werden müssen. Der Einfluß dieser Änderung auf die kleineren f-Werte ist aber tatsächlich so gering, daß sich eine allgemeine Korrektur nicht lohnt.

befreiung im Brennfleck erfordert bei einer Stromdichte von über 1000 Amp./cm² sicher eine Feldstärke von mehr als 10^6 Volt/cm, also eine Schichtdicke des Kathodenfalls von weniger als 10^{-5} cm. Eine so kurze Beschleunigungsstrecke für die Ionen würde aber nicht ausreichen, um eine Gegendiffusion neutraler Dampfatome wirksam zu verhindern. Daher erschien auch die einige Jahre anerkannte Verdampfungszahl von 7,2 mg/Amp.·sec für den Fleck einigermaßen plausibel und einer Nachprüfung nicht wert. Das Ergebnis des hier mitgeteilten Versuches scheint aber schon eine wesentlich größere Beschleunigungsstrecke für die Ionen zu verlangen. Sollte nun ein exakter Versuch, etwa nach den gegebenen Richtlinien, tatsächlich eine Kondensation im Brennfleck ergeben, so würden dadurch ganz ernsthafte Schwierigkeiten für die Anwendbarkeit der Feldtheorie Langmuirs entstehen.

(Eingegangen 11. Oktober 1928.)

Über den Materialtransport im Eisenbogen.

Vorläufige Mitteilung.

Von H. Schmick und R. Seeliger.

In der vorstehenden Veröffentlichung[1]) hat Hr. v. Issendorff Versuchsergebnisse über die Verdampfung der Kathode des Quecksilberbogens mitgeteilt, die uns für die Theorie der Vorgänge an der Bogenkathode ganz allgemein von grundsätzlicher Bedeutung zu sein scheinen. Es sei daher gestattet, anschließend kurz über einige Messungen am Eisenbogen zu berichten, deren Ergebnisse in derselben Richtung liegen dürften. Sie bilden einen Teil einer umfangreicheren Untersuchung über den Materialtransport im Lichtbogen, mit der wir schon seit längerer Zeit beschäftigt sind.

In der Theorie des Mechanismus der Bogenkathode, wie sie von Compton, Güntherschulze und dem einen von uns in den letzten Jahren entwickelt worden ist, spielt bekanntlich die Aufstellung der Energiebilanz der Kathode die Hauptrolle. Eine der Annahmen, welche der Aufstellung dieser Energiebilanz implizite zugrunde liegen und die bisher ohne nähere Prüfung als richtig betrachtet werden konnte, war die, daß der Materialverlust der Kathode im wesentlichen nur durch neutrale Verdampfung aus dem Brennfleck erfolgt und jedenfalls eine mit der Stromstärke und der Zeit proportionale, für die Entladung charakteristische Größe ist; dieser Materialverlust, bezogen auf die Einheit der Zeit und der Stromstärke, konnte deshalb als eine Konstante in die theoretischen Betrachtungen eingeführt werden. Hr. v. Issendorff hat jedoch in seiner schönen Arbeit für den Quecksilberbogen nachgewiesen, daß jene Annahme nicht zutreffend ist und wir glauben nun aus unseren Untersuchungen am Eisenbogen in derselben Richtung weisende Schlüsse ziehen zu können. Mit Hilfe einer in langwierigen Vorversuchen ausgebildeten Anordnung konnten wir den Materialverlust der Kathode eines Eisenbogens quantitativ bestimmen, und zwar sowohl den Bruttoverlust (durch Wägung) wie den reinen Eisenverlust (durch Titration). Die Verluste sind natürlich abhängig von vielen Faktoren, insbesondere auch von der Art des Gases, in dem der Bogen brennt, sie sind aber — und dies ist hier von Interesse — nicht proportional der Stromstärke und sind vor allem abhängig von der Kühlung der Kathode. So z. B. ergab sich, daß unter sonst genau denselben Bedingungen die Kathode, welche die Form eines zylindrischen, oben in einer gleichmäßigen Schmelzkuppe abgerundeten Stabes hatte, mit zunehmender Stabdicke abnehmende Materialmengen verliert. Man kann diese Befunde wohl nur in demselben Sinn wie die Ergebnisse v. Issendorffs am Quecksilberbogen deuten, nämlich durch die Annahme, daß am Materialverlust der Kathode der Brennfleck jedenfalls nicht allein beteiligt ist, sondern daß die ganze mehr oder minder ausgedehnte Umgebung des Brennflecks dabei mitwirkt, wobei insbesondere mit zunehmender Dicke des Kathodenstabes die Abkühlung durch Wärmeleitung verstärkt wird. Ferner haben unsere Versuche gezeigt, daß es sich ebenso wie im Quecksilberbogen nicht nur um eine neutrale reguläre Verdampfung handelt, sondern um viel verwickeltere Vorgänge, wie z. B. um eine Ausschleuderung von Tröpfchen u. dgl. Das gesamte Versuchsmaterial, seine Diskussion im einzelnen und eine Darstellung der Meßmethodik wird nach Abschluß der noch im Gang befindlichen Arbeit in dieser Zeitschrift erfolgen.

(Eingegangen 11. Oktober 1928.)

1) Phys. Zeitschrift **29**, 857, 1928.

Die Druckverteilung an Körpern in ebener Potentialströmung.

Von Willy Prager.

(Aus dem aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Darmstadt.)

1. Problemstellung, Lösungsmöglichkeiten.

In eine die ganze Ebene erfüllende Potentialströmung (Parallelströmung oder Umlaufströmung) werde ein unendlich langer zylindrischer Körper gebracht, dessen Achse senkrecht zur Ebene der Strömung steht; es soll die Druckverteilung an diesem Körper ermittelt werden Vorausgesetzt wird die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung

$$p + \varrho/2 \cdot v^2 = p_0$$

an der ganzen Körperoberfläche, so daß die Druckverteilung aus der Geschwindigkeitsverteilung und dem Staudruck p_0 berechnet werden kann.

Kann man das Äußere des Körperquerschnitts auf das Äußere des Einheitskreises konform abbilden, derart, daß der unendlich ferne Punkt erhalten bleibt, so ist die gestellte Aufgabe gelöst, da man die Strömung um einen Kreiszylinder beherrscht. Ist jedoch der Körperquerschnitt nur empirisch (zeichnerisch) gegeben, so ist die quellenmäßige Darstellung der gesuchten Strömung am Platze, die zuerst von Rankine[1]) und in neuerer Zeit von Föttinger[2]) und v. Kármán[3]) mit Erfolg verwendet wurde. v. Kármán behandelt allerdings die räumliche Strömung um Rotationskörper, doch ist seine Methode auch im Fall der ebenen Strömung brauchbar. Der Einfachheit halber mögen die Verfahren an einem symmetrischen Profil erläutert werden, dessen Symmetrieachse die Richtung der ungestörten Parallelströmung hat. Föttinger wie v. Kármán stellen die gesuchte Strömung dar durch Überlagerung der Parallelströmung und einer Strömung, die durch eine Quellenbelegung der Symmetrieachse des Profils erzeugt wird. Föttinger bestimmt durch mechanische Quadratur mittels besonderer „Vektorintegratoren" das Geschwindigkeitspotential bzw. die Stromfunktion dieser Quellenbelegung. Das Ergebnis wird zur Verbesserung der zunächst geschätzten Quellenverteilung benutzt und das Verfahren solange wiederholt bis die gegebene Kontur hinreichend genau mit einer Stromlinie zusammenfällt. v. Kármán dagegen ordnet auf der Symmetrieachse des Körperquerschnitts mehrere Quellstrecken an, deren Ergiebigkeiten so bestimmt werden, daß die Stromlinie $\psi = 0$ durch eine entsprechende Anzahl passend gewählter Punkte der Querschnittsberandung hindurchgeht. An Stelle der Quellstrecken könnte man auch Einzelquellen verwenden, was gerade für die ebene Strömung zweckmäßiger ist. Dieser Methode stehen jedoch, wie v. Kármán selbst bemerkt hat, insofern Bedenken entgegen, als es unter Umständen nicht möglich ist, die Stromfunktion des Außengebietes bis an die Symmetrieachse heran analytisch fortzusetzen, ohne vorher auf Singularitäten zu stoßen, so daß man außer der Quellenbelegung der Symmetrieachse noch weitere Quellen oder Wirbel verwenden muß, deren Lage aber nicht bekannt ist. Mitunter müssen auch auf der Symmetrieachse selbst außer der stetigen Quellenverteilung noch Einzelquellen angeordnet werden, deren Lage ebenfalls zunächst unbekannt ist. Es scheint, daß den reellen Brennpunkten der Querschnittsberandung bei der analytischen Fortsetzung der Stromfunktion eine ähnliche Bedeutung zukommt, wie bei der von Herglotz[1]) behandelten Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Massen.

Wenn man sich auch der strengen Lösung dadurch weitgehend nähern kann, daß man die Stromlinie $\psi = 0$ durch hinreichend viele Punkte der Kontur hindurchzwingt, so ist doch ein Verfahren vorzuziehen, das unmittelbar auf einer strengen Lösung aufbaut. Die geschilderten Schwierigkeiten können vermieden werden, wenn man die Strömung darstellt durch Überlagerung der ungestörten Strömung und einer Strömung, die durch eine Wirbelbelegung der Querschnittsberandung erzeugt wird. Dies hat, wie sich zeigen wird, weiter den Vorteil, daß man unmittelbar die Geschwindigkeitsverteilung an der Körperoberfläche erhält, während die Quellenverteilung auf der Symmetrieachse keine physikalische Bedeutung besitzt.

2. Potentialtheoretische Grundlagen.

Die Stromfunktion eines Wirbels von der Zirkulation c ist:

$$\psi = \frac{c}{2\pi} \cdot \log 1/r,$$

wo r die Entfernung des Aufpunkts vom Wirbelsitz bedeutet. Die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y sind mit den ersten Ableitungen der Stromfunktion verknüpft durch:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

1) Rankine: „On plane water-lines in two dimensions" Phil. Trans. 1864.

2) Föttinger: „Die Entwicklung der Vektorintegratoren zur maschinellen Lösung von Potential- und Wirbelproblemen" Zeitschr. f. techn. Phys. 1928. Zusammenfassende Darstellung, dortselbst weitere Literaturangaben.

3) v. Kármán: „Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern" Abh. a. d. aerodyn. Inst. Aachen, Heft 6.

1) Herglotz: „Über die analytische Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Massen." Jablonowski-Preisschrift XLIV, Leipzig 1914.

Da sich die Stromfunktion eines Wirbels von dem logarithmischen Potential eines Massenpunktes mit der Masse c nur durch den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ unterscheidet, können bekannte Sätze der Potentialtheorie ohne weiteres übertragen werden. Für das folgende ist von Bedeutung die Unstetigkeit der Normalableitung der Stromfunktion an einer Wirbelschicht; es gelten die Beziehungen[1]) (Fig. 1):

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_a}{\partial n_s}-\frac{\partial \psi_i}{\partial n_s}\right)=\frac{w_a-w_i}{2}=\tfrac{1}{2}\mu_s$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_a}{\partial n_s}+\frac{\partial \psi_i}{\partial n_s}\right)=\frac{w_a+w_i}{2}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int \mu_t\cdot\frac{\partial(\log 1/r_{st})}{\partial n_s}\,dt$$

wo w_a und w_i die Tangentialkomponenten der Geschwindigkeiten an beiden Seiten der Wirbelschicht sind, und μ_s die auf die Längeneinheit be-

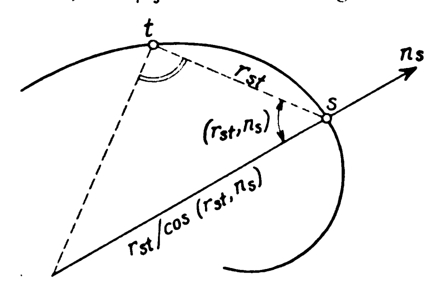


Fig. 1.

zogene Zirkulation an der Stelle s bedeutet; die Geschwindigkeiten w sollen dabei als positiv betrachtet werden, wenn sie einer Umströmung des Körpers entgegen dem Uhrzeigersinn entsprechen. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$w_a=\tfrac{1}{2}\mu_s-\frac{1}{2\pi}\int \mu_t\cdot\frac{\partial(\log 1/r_{st})}{\partial n_s}\cdot dt=$$

$$=\tfrac{1}{2}\mu_s+\frac{1}{2\pi}\int \mu_t\cdot\frac{\cos(r_{st},n_s)}{r_{st}}\cdot dt=$$

$$=\tfrac{1}{2}\mu_s+\frac{1}{2\pi}\int \mu_t\cdot K(s,t)\cdot dt\ldots \qquad (1)$$

Der reziproke Wert der Funktion $K(s,t)$ kann für gegebene Punkte s und t aus einer Zeichnung abgegriffen werden.

3. Ersatz der Körperoberfläche durch eine Wirbelschicht.

Wir wollen die Stromfunktion ψ der gesuchten Strömung darstellen in der Form:

$$\psi=\psi_0+\psi_1,$$

wo ψ_0 der ungestörten Strömung entspricht, also:

$$\psi_0=u\cdot y \quad \text{oder} \quad \psi_0=\frac{k}{2\pi}\cdot\log 1/r$$

1) Vgl. z. B. Sternberg: Potentialtheorie. Sammlg. Göschen Nr. 901, S. 129.

je nachdem ob die ungestörte Strömung eine Parallelströmung oder eine Umlaufströmung ist. Das Zusatzglied ψ_1 entspricht der Änderung der Strömung durch den Körper und wird bestimmt durch die Bedingungen:

a) ψ_1 ist im ganzen Außergebiet harmonisch,
b) ψ_1 nimmt auf der Querschnittsberandung die Werte $\psi_1=-\psi_0$ an, da dort ψ verschwinden soll,
c) im Unendlichen verschwindet ψ_1 wie $1/r$ bzw. geht gegen $\frac{c}{2\pi}\log 1/r$, je nachdem ob die Zirkulation um den Körper verschwindet oder den Wert c hat.

Durch Anwendung des Greenschen Satzes erhält man in bekannter Weise:

$$\psi_{1a}=\frac{1}{2\pi}\int \psi_{1s}\cdot\frac{\partial(\log 1/r_{sa})}{\partial n_s}\cdot ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\psi_1}{\partial n_s}\cdot\log\frac{1}{r_{sa}}\cdot ds\ldots \qquad (2)$$

wo r_{sa} von einem Punkt a im flüssigkeitserfüllten Gebiet ausgerechnet werden soll, und n_s die in dieses Gebiet weisende Normale der Querschnittsberandung ist. Die Integrale der rechten Seite sind nur über die Querschnittsberandung zu erstrecken, da die entsprechenden Integrale über die unendlich ferne Begrenzung der Flüssigkeit bei verschwindender Zirkulation gegen $1/r$ gehen und sich im Fall nicht verschwindender Zirkulation nur um Glieder von der Ordnung $1/r$ voneinander unterscheiden. Die Gleichung (2) zeigt, daß die Zusatzströmung erzeugt werden kann durch eine auf der Querschnittsberandung ausgebreitete Wirbelschicht der bezogenen Zirkulation $-\frac{\partial\psi_1}{\partial n_s}$ und eine Doppelwirbelschicht des bezogenen Momentes ψ_{1s}.

Ist weiter ψ_1' eine im Innern der Berandung harmonische Funktion, so gilt:

$$0=\frac{1}{2\pi}\int \psi_{1s}'\cdot\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{sa}}\right)}{\partial n_s'}\,ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\psi_1'}{\partial n_s'}\cdot\log\frac{1}{r_{sa}}\cdot ds\ldots \qquad (3)$$

wo n_s' die innere Normale der Berandung ist. Durch Addition von (2) und (3) erhält man mit $\frac{\partial}{\partial n_s}=-\frac{\partial}{\partial n_s'}$:

$$\psi_{1a}=\frac{1}{2\pi}\int(\psi_{1s}-\psi_{1s}')\cdot\frac{\partial(\log 1/r_{sa})}{\partial n_s}\,ds$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial(\psi_1-\psi_1')}{\partial n_s}\cdot\log\frac{1}{r_{sa}}\cdot ds\ldots \qquad (4)$$

Setzt man $\psi_1' = -\psi_0$, so verschwindet wegen der

Randbedingung (*b*) das erste Integral und es wird:

$$\psi_{1a} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial(\psi_1 + \psi_0)}{\partial n_s} \cdot \log 1/r_{sa} \cdot ds \ldots \quad (5)$$

d. h. die Zusatzströmung kann erzeugt werden durch eine Wirbelbelegung der Querschnittsberandung mit der bezogenen Zirkulation:

$$\mu_s = -\frac{\partial(\psi_1 + \psi_0)}{\partial n_s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n_s} = v_s. \text{ [1] [2]}$$

Damit $\psi_1' = -\psi_0$ eine harmonische Funktion des Innengebietes ist, muß die Achse der Umlaufströmung außerhalb des Körperquerschnitts liegen.

4. Aufstellung der Integralgleichung.

Die eingangs gestellte Aufgabe läuft auf die Lösung der ersten Randwertaufgabe für das Außengebiet des Körperquerschnitts hinaus. Zur Berechnung der Druckverteilung ist aber nur die Kenntnis der Geschwindigkeit $v(s) = -\frac{\partial \psi}{\partial n_s}$ nötig, die wir unmittelbar als Unbekannte einführen wollen. Denkt man sich die durch den Körper bedingte Zusatzströmung erzeugt durch eine Wirbelbelegung $v(s)$ der Querschnittsberandung, so ist nach (1):

$$v(s) = -\frac{\partial \psi}{\partial n_s} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial n_s} + {}^1/_2\, v(s) + \frac{1}{2\pi}\int v(t) \cdot K(s, t) \cdot dt$$

woraus sich für $v(s)$ die Integralgleichung ergibt:

$$v(s) - \int v(t) \cdot C(s, t) \cdot dt = -2 \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial n_s} = 2 v_0(s) \quad (6a)$$

mit $C(s, t) = \frac{\cos(r_{st}, n_s)}{\pi \cdot r_{st}}$.

Zur eindeutigen Festlegung der Lösung $v(s)$ bedarf es noch der Angabe der Zirkulation $Z = \int v(s) \cdot ds$ um den Körper. Der reinen Zirkulationsströmung entspricht die homogene Integralgleichung:

$$v(s) - \int v(t) \cdot C(s, t) \cdot dt = 0 \ldots \quad (6b)$$

Ein besonders einfaches Beispiel bietet der Kreiszylinder. Hier ist der Kern $C(s, t)$ gleich dem reziproken Wert des Kreisumfangs $2\pi\varrho$, also konstant für alle Punkte s und t. Soll die Zirkulation verschwinden, so geht die Integralgleichung (6a) wegen $\int v(t) \cdot C(s, t) \cdot dt = 0$ über in:

$$v(s) = 2 v_0(s),$$

was für den Fall eines Kreiszylinders in einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit u die bekannte Lösung liefert:

$$v(s) = 2u \cdot \sin(n_s, u).$$

Ist die ungestörte Strömung eine Umlaufströmung mit der Stromfunktion $\psi_0 = \frac{k}{2\pi} \log 1/r_a$ (Fig. 2), so kann die Strömung, die um den Kreiszylinder die Zirkulation $Z = -k$ hat, dadurch erhalten werden, daß im Punkte b ein zweiter entgegengesetzt gleicher Wirbel angeordnet wird. Die

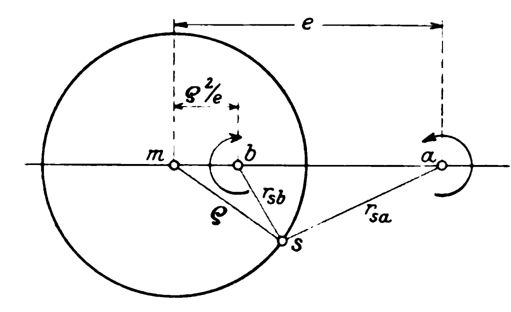


Fig. 2.

Stromlinien sind Kreise, unter denen sich auch der Querschnitt des gegebenen Kreiszylinders befindet. Man erhält für die Geschwindigkeit an der Zylinderoberfläche:

$$v(s) = -\frac{\partial \psi}{\partial n_s} = -\frac{k}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u_s}\left\{\log\frac{1}{r_{sa}} - \log\frac{1}{r_{sb}}\right\} =$$

$$= \frac{k}{2\pi}\left\{\frac{\cos(r_{sa}, n_s)}{r_{sa}} - \frac{\cos(r_{sb}, n_s)}{r_{sb}}\right\} \ldots \quad (7a)$$

während sich aus der Integralgleichung (6a) ergibt:

$$v(s) = -2\frac{\partial \psi_0}{\partial u_s} - \frac{k}{2\pi\varrho} =$$

$$= \frac{k}{2\pi}\left\{\frac{2\cos(r_{sa}, n_s)}{r_{sa}} - \frac{1}{\varrho}\right\} \ldots \quad (7b)$$

Nun ist:

$$r_{sb} = \frac{r_{sa} \cdot \varrho}{e}$$

und nach dem Kosinussatz:

$$\frac{\cos(r_{sa}, n_s)}{r_{sa}} = \frac{\varrho^2 + r_{sa}^2 - e^2}{2\varrho \cdot r_{sa}^2}$$

und

$$\frac{\cos(r_{sb}, n_s)}{r_{sb}} = \frac{\varrho^2 + r_{sb}^2 - \varrho^4/e^2}{2\varrho \cdot r_{sb}^2}$$

woraus die Übereinstimmung der beiden Gleichungen (7) folgt.

5. Die praktische Auflösung der Integralgleichung.

Es liegt der Gedanke nahe, die Integralgleichungen (6) dadurch in ein System linearer

1) Vgl. zu obiger Ableitung Korn: Lehrbuch d. Potentialtheorie. Berlin 1899. S. 180 ff.

2) Dieselbe Tatsache wird bei Prandtl, Tragflügeltheorie I. Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. Göttingen. Math. phys. Kl. 1918, bei etwas allgemeineren Voraussetzungen unter Verwendung der Eulerschen Gleichung bewiesen.

Gleichungen zu verwandeln, daß man das Integral $\int v(t)\cdot C(s,t)\cdot dt$ nach einer der bekannten Formeln zur numerischen Integration auswertet. Wie Nyström[1]) gezeigt hat, eignen sich hierzu besonders die von Tschebyscheff angegebenen Quadraturformeln. Ein Beispiel möge das Verfahren erläutern.

Der zirkulationsfrei umströmte Körperquerschnitt sei die Ellipse:

$$x = 2\cdot\cos p; \quad y = \sin p,$$

die ungestörte Strömung sei eine Parallelströmung, die in Richtung der x-Achse verläuft und die Geschwindigkeit u besitzt. Nach den Tschebyscheffschen Formeln wird nun ein Integral berechnet als arithmetisches Mittel der

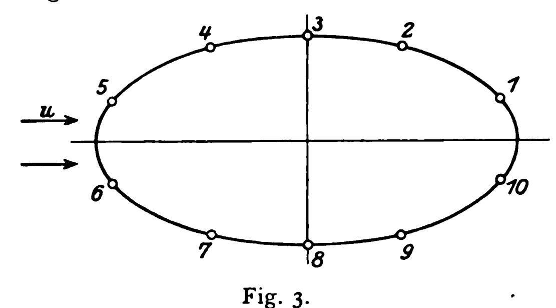


Fig. 3.

Integrandwerte für bestimmte Stellen multipliziert mit der Länge τ des Integrationsintervalls. So ist z. B. bei 5 Ordinaten der Integrand zu bestimmen an den Stellen:

$$t_1 = 0{,}08375\,\tau; \quad t_2 = 0{,}31273\,\tau;$$
$$t_3 = 0{,}50000\,\tau; \quad t_4 = 0{,}68727\,\tau;$$
$$t_5 = 0{,}91625\,\tau.$$

Wegen der Symmetrie wird bei der gestellten Aufgabe die Integration über die zu beiden Seiten der x-Achse liegenden Ellipsenhälften getrennt vorgenommen, so daß zur Bestimmung von $\int v(t)\cdot C(s,t)\cdot dt$ die Werte von $v(t)$ in zehn Ellipsenpunkten bekannt sein müßten. Infolge der doppelten Symmetrie ist aber (Fig. 3):

$$v_1 = v_5 = -v_6 = -v_{10}$$
$$v_2 = v_4 = -v_7 = -v_9$$
$$v_3 = -v_8,$$

wodurch sich die Anzahl der Unbekannten auf drei erniedrigt. Die Bogenlänge der Halbellipse ist $T = 4{,}844$ und daher ist angenähert:

$$\int v(t)\cdot C(s,t)\cdot dt = \frac{4{,}844}{5}\cdot[v_1\{C(s,1)+C(s,5)- C(s,6)-C(s,10)\} + v_2\{C(s,2)+C(s,4)- C(s,7)-C(s,9)\} + v_3\{C(s,3)-C(s,8)\}].$$

1) Nyström: „Über die praktische Auflösung von linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie". Soc. Scient. Fennica, Comm. Phys. Math. **4**, 15, 1928.

Die Punkte 1—10 wurden an einer mit 10 cm als Einheit gezeichneten Ellipse durch genäherte Rektifikation und Einstellung nach den obigen Verhältnissen gefunden. Aus der gleichen Zeichnung wurden die Strecken $1/K(s,t)$ abgegriffen und aus ihnen die Kernwerte $C(s,t)$ berechnet. Zur Kontrolle wurden diese Kernwerte auch analytisch bestimmt, wobei sich zeigte, daß die Zeichengenauigkeit ausreichend ist. Man erhält an Stelle der Integralgleichung (6a) das folgende Gleichungssystem:

$$1{,}0834\,v_1 + 0{,}1062\,v_2 + 0{,}0486\,v_3 = -1{,}2491\,u$$
$$0{,}0684\,v_1 + 1{,}1807\,v_2 + 0{,}1007\,v_3 = -1{,}9396\,u$$
$$0{,}0578\,v_1 + 0{,}1856\,v_2 + 1{,}1157\,v_3 = -2{,}0000\,u$$

Die Lösungen lassen sich bequem durch Iterationen finden zu:

$$v_1 = -0{,}942\,u; \quad v_2 = -1{,}460\,u;$$
$$v_3 = -1{,}501\,u.$$

Sollte durch Angabe der Geschwindigkeit in diesen drei Punkten die Druckverteilung noch nicht genügend genau festgelegt sein, so kann die Geschwindigkeit in weiteren Punkten berechnet werden aus:

$$v_s = 2v_{os} + \frac{4{,}844}{5}\cdot[v_1\{C(s,1)+C(s,5)- C(s,6)-C(s,10)\} + v_2\{C(s,2)+C(s,4)- C(s,7)-C(s,9)\} + v_3\{C(s,3)-C(s,8)\}].$$

Die strenge Lösung lautet für die betrachtete Ellipse[1]):

$$v_s = \frac{2u\cdot\sin p}{\sqrt{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos 2p}}$$

und es ist:

$$v_1 = -0{,}937\,u; \quad v_2 = -1{,}441\,u;$$
$$v_3 = -1{,}500\,u.$$

Mit Rücksicht auf die geringe Anzahl der eingeführten Unbekannten kann die Genauigkeit der Näherungslösung als befriedigend bezeichnet werden. Werden größere Ansprüche an die Genauigkeit gestellt, so müssen die Tschebyscheffschen Formeln für 7 oder 9 Ordinaten verwendet werden.

Bezüglich des Zeitaufwandes ist folgendes zu bemerken: Am umständlichsten ist die Bestimmung der Kernwerte $C(s,t)$; die Ermittlung der rechten Seiten $2v_{os}$ sowie die Auflösung der Gleichungen fällt dagegen kaum ins Gewicht. Da jedoch die Kernwerte nur von der Form des Körperquerschnitts abhängen, können sie

1) Witoszynski: La Mécanique des Profils d'Aviation, Paris 1924, S. 13.

zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung bei den verschiedensten Arten der ungestörten Strömung verwendet werden.

Zusammenfassung.

Die Druckverteilung an einem zylindrischen Körper, der sich in einer ebenen Potentialströmung befindet, kann nach der Bernoullischen Gleichung berechnet werden, wenn die Geschwindigkeiten an der Körperoberfläche bekannt sind. Die durch den Körper bedingte Störung der ursprünglichen Strömung kann erzeugt werden durch eine Wirbelschicht, die auf der Körperoberfläche ausgebreitet ist; die bezogene Zirkulation dieser Wirbelbelegung ist durch die Gesamtgeschwindigkeit an der betr. Stelle gegeben. Man wird so zu einer Integralgleichung zweiter Art geführt, für die eine Näherungslösung gegeben wird.

(Eingegangen 17. Oktober 1928.)

Über die Stromleitung in Hochohmwiderständen und festen Isolatoren.

Von Fritz Regler.

In seiner Arbeit „Bemerkung zur Theorie der Stromleitung in festen Isolatoren"[1]) hat Herr Seeliger die Auffassung vieler Forscher, daß die Stromleitung in festen Isolatoren dem Ohmschen Gesetz gehorcht und die Abweichungen von diesem Gesetz nur scheinbar sind und durch Polarisationsspannungen entstehen, einer kritischen Betrachtung unterzogen und ist zu dem Schlusse gelangt, daß sie über die Vorgänge im Innern des Isolators keine Aufklärung zu geben imstande ist.

Verfasser will nun in vorliegender Arbeit versuchen, eine Erklärung der Abhängigkeit des Leitvermögens der Hochohmwiderstände und festen Isolatoren von äußeren Einflüssen zu geben, wie er sie andeutungsweise schon in einer Arbeit über die Theorie des Kontaktdetektors[2]) gegeben hat, und auf Grund dieser Theorie die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes überprüfen. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise sei festgelegt, daß wir in Zukunft nur von Hochohmwiderständen sprechen wollen und unter diesem Namen auch die festen Isolatoren verstehen wollen, da ja auch sie keine idealen Nichtleiter sind.

Prinzipiell müssen wir zwischen Widerständen unterscheiden, bei denen das geringe Leitvermögen dadurch erhalten wird, daß metallische Leiter von entsprechender Länge und dünnem Querschnitt verwendet werden, und zwischen solchen, deren spezifisches Leitvermögen sehr gering ist, da bei beiden die Vorgänge verschieden sind.

Von den Vorgängen in metallischen Leitern. die ja wenigstens in groben Zügen als bekannt angesehen werden dürfen, wollen wir bei den folgenden Betrachtungen gänzlich absehen und uns nur mit Körpern befassen, die aus schlecht leitenden oder isolierenden Ionenkristallen aufgebaut sind, die wir Hochohmwiderstände nennen wollen. Genauere Messungen über das elektrische Verhalten dieser Körper sind uns durch eine Anzahl von Arbeiten auf diesem Gebiete bekannt geworden. Wir wollen die von einigen Forschern angegebenen Meßresultate zur Bestätigung unserer Theorie verwenden. Der Kürze wegen werden wir aus der großen Anzahl der auf diesem Gebiete gemachten Messungen nur einige herausgreifen, die uns qualitativ wichtig erscheinen.

Zu den merkwürdigsten Erscheinungen, die uns über Hochohmwiderstände bekannt sind, zählt wohl die, daß sie alle wenigstens hinsichtlich der Spannungs- und Temperaturabhängigkeit ein qualitativ ähnliches Verhalten zeigen, trotzdem wir wenigstens bei manchen genau wissen, daß die Stromleitung in ihnen durch Ionen erfolgt, während wir bei anderen wieder von der Stromleitung durch Elektronen oder durch Elektronen und Ionen überzeugt sein können. Wir müssen also Eigenschaften ausfindig machen, die allen Hochohmwiderständen eigen sind, um ihr Verhalten erklären zu können.

Um Irrtümer aufzuklären, sei hier gleich vorweggenommen, daß das Auftreten von Polarisationserscheinungen allein noch nicht als Beweis dafür gelten kann, daß die Stromleitung in einem Körper durch Ionen vor sich geht, obwohl das Auftreten von Gegenspannungen eine Leitung durch Ionen selbstverständlich nicht ausschließt. Um sich eine Aufklärung über den Leitungscharakter wenigstens einiger Substanzen verschaffen zu können, sei auf die Zusammenstellung in einer diesbezüglichen Arbeit von Smekal[3]) verwiesen. Smekal versucht in der eben zitierten Arbeit, den Mechanismus der Stromleitung in Ionenkristallen sowohl für den Fall der Ionenals auch der Elektronen- und gemischten Leitung aufzuklären. Nun scheint es aber dem Verfasser, daß die Leitfähigkeit von Substanzen, deren Bausteine Ionenkristalle sind, nicht allein von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Elektrizitätsträger bzw. von der Größe der Beweglichkeiten derselben abhängt, sondern auch in hohem

1) R. Seeliger, Physik. Zeitshr. **29**, 489, 1928.
2) F. Regler, Physik. Zeitschr. **29**, 429, 1928.
3) Smekal, Zeitschr. f. techn. Phys. **8**, 561 ff., 1927.



Maße von den Übergangswiderständen, die zwischen den einzelnen Kristallen bestehen. Durch diese Übergangswiderstände zwischen den einzelnen Mikrokristallen wird das Leitvermögen eines Hochohmwiderstandes sehr vermindert, so daß man einerseits den Einheitszellen eine relativ höhere Leitfähigkeit zuschreiben muß, als ihnen aus makroskopischen Messungen zukommen sollte, man aber andererseits die Änderung des Leitvermögens unter dem Einflusse äußerer Veränderungen nicht nur auf Vermehrung bzw. Verminderung der Zahl und Beweglichkeiten der Elektrizitätsträger, sondern auch auf Veränderungen der Übergangswiderstände zurückführen muß. Nach der Meinung des Verfassers ist die von Smekal ausgearbeitete Theorie der Stromleitung in Ionenkristallen qualitativ begründet, für quantitative Angaben über Zahl und Größe der Elektrizitätsträger, sowie über die Abhängigkeit derselben von äußeren Einflüssen müßten aber die Übergangswiderstände zwischen den einzelnen Kristallflächen Berücksichtigung finden. Die große Bedeutung der Übergangswiderstände an sich lose berührenden, blankpolierten Flächen ist uns durch die Arbeiten von Rottgardt[4]) und Waszik[5]) über den Johnson-Rahbek-Effekt bekanntgeworden. Nach diesen Arbeiten können durch Vergrößerung des Druckes der beiden Kontaktflächen aufeinander Leitfähigkeitsverbesserungen von der Größenordnung 10^8 erzielt werden. Es liegt nun der Gedanke nahe, qualitative Erwägungen darüber anzustellen, ob die Annahme einer Leitfähigkeitsverbesserung durch Erhöhung des Kontaktdruckes zur Erklärung der bisher experimentell bekannten Messungen an Hochohmwiderständen herangezogen werden kann.

Es ist klar, daß die Erhöhung der Leitfähigkeit durch Kontaktdruckerhöhung unabhängig von der Art des Elektrizitätsträgers sein muß. Dennoch kann es unter Umständen möglich sein, daß Vorgänge im Innern der Einheitskristalle die Leitfähigkeit derselben so verschlechtern können, daß die Leitfähigkeitsverbesserung infolge Verkleinerung der Übergangswiderstände durch die Vorgänge im Kristallinnern wieder aufgehoben oder gar übertroffen wird.

Sind diese Übergangswiderstände für die Größenordnung der Leitfähigkeit von ausschlaggebender oder merklicher Bedeutung, so müssen rein mechanische Veränderungen des zu untersuchenden Materials, sowie chemische Veränderungen der Oberflächen der Einheitskristalle eine wesentliche Veränderung der Leitfähigkeit bedingen, welche dann im Verein mit den von Smekal angenommenen Veränderungen als Leitfähigkeitsänderung nach außen in Erscheinung treten muß.

Die bisherigen Erfahrungen lassen auch tatsächlich, wenigstens für Ionenleiter, eine solche Leitfähigkeitszunahme bei Pressung der Materialien als wahrscheinlich erscheinen. Für den gemischten Leiter β — Ag_2S ist das sogar sicher[3]). Auch an NaCl wurde von A. Joffé und E. Zechnowitzer[3]), sowie von Seelen[3]) bei mechanischer Beanspruchung eine Erhöhung der Leitfähigkeit gefunden. Wenn auch nach Untersuchungen Smekals eine Erhöhung der leitungsfähigen Ionenzahl als erwiesen anzusehen ist, so ist es dennoch wahrscheinlich, daß auch die Verkleinerung der Übergangswiderstände bei der Deformierung einen beträchtlichen Anteil an der Vergrößerung des Leitvermögens hat.

Aber nicht nur Verformungen, sondern auch Verunreinigungen durch Fremdbeimengungen, hauptsächlich solcher, die mit der Grundsubstanz keine Mischkristalle bilden, und Korngrößenverminderung können wenigstens bei Ionenleitern eine Erhöhung der Leitfähigkeit bewirken. Sind solche Fremdbeimengungen in geringen Mengen, 0,1 bis 1 Proz., vorhanden, so können sie die Leitfähigkeit wesentlich erhöhen, ohne selbst an der Stromleitung teilzunehmen. Tubandt[3]) zeigt an $PbCl_2$ + 0,1 Proz. KCl, daß durch diese Beimengung das Leitvermögen auf das 47fache wächst, ohne daß das KCl an der Stromleitung teilnimmt. Aber auch in elektronenleitenden Substanzen können kleine Beimengungen eine Leitfähigkeitserhöhung bedingen, wie Königsberger[3]) an Lenard-Phosphoren zeigt. Auch an PbS kann man eine Leitfähigkeitserhöhung durch kleine Beimengungen von Ag_2S auf indirektem Wege wahrnehmen. Nach Strachan verbessern solche Beimengungen wesentlich die Detektorwirkung von PbS. Da aber nach Meinung des Verfassers eine Verbesserung der Detektorwirkung gleichzusetzen ist mit einer Erhöhung der Leitfähigkeit des Kristalles für jene Halbwellen des Stromes, unter deren Einfluß die Kristalle gedehnt werden, da die komprimierten Kristalle ihren Anteil an der Stromleitung kaum merklich erhöhen werden, so muß der Zusatz von Ag_2S die Leitfähigkeit des PbS erhöhen. PbS ist aber nach Ansicht von Joffé und Mitarbeitern[3]) ein reiner Elektronenleiter. Aus der Literatur ist zu ersehen, daß kleine Beimengungen die Leitfähigkeit der Ionenleiter immer, die der Elektronenleiter unter Umständen erhöhen. Die Ursache dieser Leitfähigkeitserhöhung liegt aber, nebst anderen Einflüssen auf die Zahl und Beweglichkeit der Elektrizitätsträger, wieder in der Verminderung der Über-

4) Rottgardt, Zeitschr. f. techn. Phys. **2**, 315, 1921.

5) Waszik, Zeitschr. f. techn. Phys. **5**, 29, 1924.

Einfluß verschiedener Gase auf den Widerstand von Karborundumstäben bei Stromdurchgang.

Stab	Widerstand in Ohm		Gas	Zunahme des Widerstands in Proz.	Glühzustand des Stabes
	Anlieferung	nach 30 Minuten bei 1.5 A			
1	188.5	4390	O_2	2330	Helle Gelbglut
2	223.3	405	Luft	81	Kirschrot
3	190.1	195	N_2	2.6	Beginn der dunklen Rotglut

gangswiderstände, die durch die Zwischenlagerung dieser Fremdkörper zwischen die Kristalle bedingt ist. Daß trotz der Verminderung der Übergangswiderstände die Leitfähigkeit mancher Elektronenleiter durch Fremdbeimengungen sinkt, dürfte seine Ursache darin haben, daß die Verminderung der Elektronenbeweglichkeit infolge der Fremdkörperbeimengungen eine Widerstandserhöhung bedingt, die so groß ist, daß sie die Leitfähigkeitserhöhung durch Verminderung der Übergangswiderstände aufhebt oder übertrifft. Bei Korngrößenverminderung, aber namentlich beim Übergang vom Einzelkristall zum Kristallkonglomerat, wurde, wie v. Hevesy[3]) bei $NaNO_3$ fand, eine Leitfähigkeitserhöhung um das 30—50fache gefunden. Ein Hauptgrund dieser Leitfähigkeitserhöhung kann aber wieder in den Übergangswiderständen gesucht werden, da bei Einkristallen jedenfalls ganz plane Flächen aufeinander zu liegen kommen, deren Übergangswiderstand ohne merklichen Druck sehr hoch ist, während bei Kristallkonglomeraten verschiedene Zwischenlagerungen, sowie Kanten und Spitzenkontakte, einen besseren Kontakt bedingen können. Für Elektronenleiter können diese Zwischenlagerungen wieder ein so hohes Bewegungshindernis bedeuten, daß das gesamte Leitvermögen gegenüber dem Einkristall sinkt.

Verlegen wir die Ursache der Variabilität des Leitvermögens in die Übergangsstellen der Kristalle, so muß auch eine Erhöhung der Übergangswiderstände, also z. B. eine Oxydation der Kristallflächen, eine Verschlechterung des Leitvermögens zur Folge haben, wie dies tatsächlich aus der Tabelle hervorgeht[6]). Die starke Widerstandserhöhung in O_2 läßt deutlich auf eine Oxydation der Oberflächen der Einheitskristalle und eine dadurch bewirkte Erhöhung der Übergangswiderstände schließen.

Am deutlichsten sichtbar wird die Verminderung der Übergangswiderstände bei der Leitfähigkeitserhöhung mit steigender Temperatur. Sind die Übergangswiderstände an und für sich nicht mehr sehr groß, wie bei einem vielkristallinen Aggregat, so muß auch der Temperaturkoeffizient kleiner werden als bei Einkristallen. Dies wurde aber tatsächlich laut Smekal gefunden[3]). Der negative Temperaturkoeffizient dieser Substanzen hat eben seine Hauptursache in der Verkleinerung der Übergangswiderstände bei der Vergrößerung des Druckes der Kristalle aufeinander, welch letzterer wieder durch die Dehnung der Kristalle unter dem Einfluß der Temperatur bedingt ist. Nach Alberti und Günther-Schulze[7]) beträgt der negative Temperaturkoeffizient von Hochohmwiderständen nicht ganz 1 Proz. pro Grad. In obengenannten Arbeiten (7, 8) sind auch Zahlenwerte über Temperaturkoeffizienten bestimmter Widerstandsmaterialien zu finden. Eine schöne Zusammenstellung des bezüglichen Formelmaterials finden wir in der Arbeit von Smekal[3]).

Unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes sind aber, wie auch Smekal[3]) annimmt, die Ionenkristalle Verformungen ausgesetzt. Diese Verformungen werden sich in Dehnungen sowie Kompressionen der Kristalle äußern. Die Erhöhung des Übergangswiderstandes zwischen den gepreßten Kristallen wird aber im Vergleich zur starken Erniedrigung desselben bei den gedehnten Kristallen nicht ins Gewicht fallen, so daß unter dem Einfluß eines Feldes die Leitfähigkeit von Substanzen, die aus Ionenkristallen aufgebaut sind, wesentlich erhöht werden wird. Solche Leitfähigkeitserhöhungen in Abhängigkeit von der Feldstärke werden aber bei allen Hochohmwiderständen und festen Isolatoren gefunden. Exakte Angaben über die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Feldstärke finden wir in den unter 3, 7 und 8 zitierten Arbeiten. Die Leitfähigkeitserhöhung mit der Erhöhung der Temperatur bzw. Feldstärke tritt sowohl bei Ionen- als auch bei Elektronen- und gemischtleitenden, aus Ionenkristallen aufgebauten Substanzen, auf.

Selbstverständlich werden zu der Leitfähigkeitserhöhung unter dem Einfluß von Temperatur und Spannung auch die von Smekal angenommenen Veränderungen ihren Teil beitragen.

Daß solche, durch hohe Übergangswiderstände getrennte Kristalle gegeneinander Kapa-

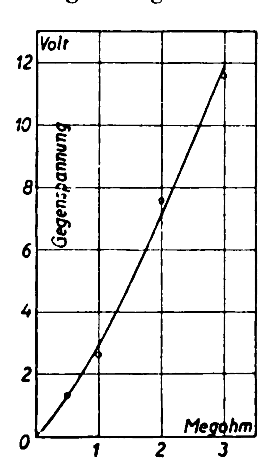
6) Entnommen einer Arbeit von Retzow. Zeitschr. f. techn. Phys. **6**, 41 ff., 1925.

7) Alberti und Günther-Schulze. Zeitschr. f. techn. Phys. **6**, 11 ff., 1925.



zität besitzen müssen, ist wohl klar. Es wurde auch tatsächlich von Alberti und Günther-Schulze[7]) an Silitwiderständen eine verteilte Eigenkapazität gefunden, die bei Frequenzen $\nu \geqq 214000$ einen phasenverschobenen Strom bedingt, der von gleicher Größenordnung wie der Wirkstrom ist.

Auch das Bestehenbleiben der Polarisationsspannung an Hochohmwiderständen läßt auf einen variablen Übergangswiderstand zwischen den Kristallen schließen, da die an die Enden des untersuchten Widerstandsstabes geführten Ladungen, gleichgültig, ob es sich dabei um Ionen- oder Elektronenleiter handelt, nach Abnehmen der angelegten Spannung infolge der dadurch wieder erhöhten Übergangswiderstände sich sehr schwer über den Widerstand ausgleichen können und daher eine gewisse Zeit bestehen bleiben. Sind die Übergangswiderstände sehr groß, so wird auch der Gesamtwiderstand der Substanz sehr groß sein und die Polarisationsspannung sehr schwer zurückgehen können. Tatsächlich wurde auch die Höhe der Polarisationsspannung als Funktion der Widerstandsgröße von Retzow[6]) gefunden. Die Figur zeigt diese Abhängigkeit.



Gegenspannung hochohmiger Widerstände in Abhängigkeit von der Größe des Widerstandes[7]).

Nach diesen kurzen Erörterungen ist wohl ohne weiteres klar, daß die Stromleitung in Hochohmwiderständen und festen Isolatoren dem für metallische Leiter aufgestellten Ohmschen Gesetz nicht gehorchen kann. Das Ohmsche Gesetz setzt ja bekanntlich Strom und Spannung in eine lineare Beziehung zueinander, das heißt aber, daß der Widerstand eine Materialkonstante ist und daher bei gleicher Temperatur spannungs- und stromunabhängig sein muß. Sowohl nach der Annahme von Smekal als auch nach der des Verfassers oder auch bei Zugrundelegung eines Zusammenwirkens beider Annahmen muß aber der Widerstand des Körpers spannungsabhängig sein, was zur Folge hat, daß für diese Körper das Ohmsche Gesetz nicht gelten kann. Da die Höhe der Polarisationsspannung aber vom Leitungsmechanismus stark beeinflußt wird, so ist es verständlich, daß gewisse Forscher die Meinung vertreten, die Polarisationsspannung an sich bedinge die Abweichung vom Ohmschen Gesetz, also die Abhängigkeit des Widerstandes von der Feldstärke, eine Ansicht die nach der vom Verfasser aufgestellten Hypothese nicht richtig erscheint.

Nach der vom Verfasser angenommenen Hypothese kann selbstverständlich kein linearer Spannungsabfall längs des Leiters stattfinden, sondern er wird sprungweise bei jedem Übergangswiderstand erfolgen und im Einheitskristall gleichmäßig fallen. Makroskopisch sind diese Sprünge natürlich nicht wahrnehmbar, so daß man für das mittlere Leitvermögen der Einheitszelle im allgemeinen zu niedrige Werte bekommt, als deren Folge falsche Schlüsse über die Anzahl und Beweglichkeiten der Elektrizitätsträger auftreten müssen. Auch für die Größe der Veränderung der Zahl und Größe der Beweglichkeiten der Ionen bzw. Elektronen in Hochohmwiderständen unter dem Einfluß äußerer Einwirkungen (Temperaturerhöhung, elektrische Felder usw.) wird man durch die Vernachlässigung der Übergangswiderstände zu hoch gegriffene Werte bekommen.

Aus unserer Annahme ist ersichtlich, daß die Spannungs- und Temperaturabhängigkeit der Hochohmwiderstände nicht für alle diese Substanzen gleich groß sein kann, da nebst den von Smekal[3]) angenommenen Variabilitäten auch noch die Größe der Übergangswiderstände im Normalzustand der Substanz von Bedeutung sein muß. Sind die Übergangswiderstände infolge starker Pressung oder kantiger Anlagerung der Kristalle von vornherein gering, so werden Temperatur- und Feldstärkeerhöhungen das Leitvermögen nicht wesentlich mehr verbessern können, da die Übergangswiderstände nicht mehr merklich verkleinert werden können. Sind sie aber sehr hoch, so wird auch der Temperatur- und Spannungskoeffizient relativ groß werden. Solche Verschiedenheiten des Spannungskoeffffizienten sind von Alberti und Günther-Schulze[7]) tatsächlich beobachtet worden. Gerade dieser Umstand, dem auch bei den Angaben der Leitfähigkeitserhöhung durch andere als Temperatur- und Spannungseinflüsse Rechnung getragen werden muß, kann als Stütze für die im vorhergehenden vertretene Hypothese gelten.

Zusammenfassung.

Verfasser versucht in knapper Darstellung eine Theorie über den Mechanismus der Strom-



leitung in Hochohmwiderständen und festen Isolatoren aufzustellen, und vergleicht die aus der Annahme folgenden Schlüsse mit der Erfahrung und zeigt die Übereinstimmung mit ihr. Die Ursache der Widerstandsänderung in Abhängigkeit von der Spannung ist unter anderem in den Größenveränderungen der Einheitszellen zu suchen, die diese unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes erleiden, da Verfasser einen großen Teil des Widerstandes in die Übergangsstellen zwischen den Mikrokristallen verlegt. Nach dieser Annahme hat für diese Substanzen das Ohmsche Gesetz keine Gültigkeit mehr. Es gelten vielmehr für diese Körper eigene, zum Teil schon experimentell gefundene Gesetze, die Verfasser in einer später erscheinenden Arbeit mittels seiner Hypothese zu erklären versuchen wird.

(Eingegangen 23. August 1928.)

Über Adsorption.

Von Marie-Therese Isselstein.

§ 1. Einleitung.

Die Beantwortung der Frage nach der Zahl der Molekülschichten, die sich bei der Adsorption niederschlagen, ist Gegenstand einer großen Reihe von Arbeiten gewesen.

Bei den Anilinfarbstoffen ist die Zahl der adsorbierten Schichten stets klein, bei Dämpfen dagegen vielfach sehr groß gefunden worden, während Gase weit über ihrem Kondensationspunkte die Oberfläche nur zum kleinsten Teil bedecken. Vielfach wurde als Adsorbens Kohle gewählt, zur Feststellung deren Oberfläche noch kein eindeutiges Verfahren besteht, oder es wurden Glasfäden usw. enggeschichtet als Adsorbens benutzt.

Gegen die letzteren Versuche läßt sich vielfach das Bedenken erheben, daß deren Oberflächen vielleicht nicht frei von Gasen waren, wodurch die Verhältnisse ganz unübersichtlich werden.

Die vorliegende Arbeit, welche den wesentlichen Inhalt meiner der philosophischen Fakultät der Universität Münster i. W. eingereichten Dissertation enthält, wurde unternommen, um die Adsorption von Dämpfen an wohldefinierten Glasoberflächen zu messen. Es wurden untersucht Schwefelkohlenstoff, Pentan und Chloroform.

§ 2. Herstellen des Glaspulvers und Bestimmen der Oberfläche desselben.

Zur Herstellung des Glaspulvers benutzte ich denselben Weg, wie ihn G. C. Schmidt und F. Durau[1]) beschritten haben. Das Glas wurde im Stahlmörser zerkleinert und durch ein Sieb mit der Maschenzahl 310 pro qcm gesiebt und so von den gröbsten Teilchen befreit. Dann wurden die Stahlsplitterchen mittels Magneten beseitigt und das Pulver durch ein Netz von der Maschenzahl 4900 pro qcm vom feinsten Glasstaub befreit. Darauf wurde es mit Salzsäure behandelt, um es von fremden Bestandteilen zu reinigen, und nach vielfachem Spülen und Schlemmen mit Aq. dest. bei 160° getrocknet. Das Spülen geschah sehr sorgfältig, da die Salzsäure nicht leicht zu entfernen ist. Um die Oberfläche einer bestimmten Menge dieses Pulvers festzustellen, verfuhr ich folgendermaßen:

Fr. Schelte[2]) hat gezeigt, daß bei der Sättigung 1 qcm Schottsches Bleiglas — dies war auch das zu meiner Untersuchung benutzte Glas — eine bestimmte Menge von Äthylviolett und Diamantfuchsin adsorbiert. Danach kann die Oberfläche berechnet werden durch Feststellung der vom Glaspulver adsorbierten Farbstoffmenge und Vergleichen des so gewonnenen Resultates mit den von Schelte für eine bestimmte Oberfläche bei Sättigung gefundenen Werten. Zur Messung der adsorbierten Menge benutzte ich das Krüsssche Polarisationskolorimeter. Sämtliche Gefäße, Meßzylinder usw., die für die Farbstofflösungen gebraucht wurden, wurden mit schwarzem Papier überzogen, um ein Altern der Lösungen im Lichte zu vermeiden.

Der Gang einer Bestimmung war folgender: In einem Erlenmeyerkölbchen wurden etwa 11 g Glaspulver abgewogen und mit 15 ccm Farbstofflösung einer bestimmten Konzentration übergossen. Die Vergleichslösung wurde auf $^1/_{640}$ verdünnt, da im Krüssschen Polarisationskolorimeter mit sehr verdünnten Lösungen zu arbeiten ist. Nach kurzem Schütteln — das Adsorptionsgleichgewicht stellte sich, wie durch einige Versuche geprüft wurde, fast unmittelbar ein — wurden aus dem Kölbchen 5 ccm abpipettiert und so verdünnt, daß sie die gleiche Konzentration wie die Vergleichslösung gehabt hätten, falls nichts adsorbiert worden wäre. Die Zylinder des Kolorimeters wurden nun mit den beiden Lösungen bis zur Marke 100 gefüllt und von der Vergleichslösung abgelassen, bis beide Gesichtsfelder gleiche Helligkeit zeigten. Es ergaben sich auf diese Weise folgende Werte für die Oberfläche:

Die Werte für die Oberflächen (siehe letzte Spalte in den Tabellen) stimmen genügend untereinander überein. Nimmt man das Mittel, so er-

1) G. C. Schmidt u. F. Durau, Zeitschr. f. phys. Chemie **108**, 128, 1923.

2) Friedrich Schelte, Zeitschr. f. phys. Chemie **114**, 394, 1925.



gibt sich die Oberfläche von 1 g Adsorbens zu 379,6 qcm.

Tabelle I. Äthylviolett.

Konzentration	Farbstoffmenge in 15 ccm Lösung in 10^{-4} g	Prozente der Adsorption	Adsorbierte Menge in 10^{-4} g	Berechnete Oberfläche pro g
1/2	67,5	8,86	5,9804	379,39
1/4	33,75	17,93	6,0513	391,25
1/8	16,875	34,81	5,8743	368,49
1/16	8,44	53,25	4,4943	353,46

Tabelle II. Diamantfuchsin.

Konzentration	Farbstoffmenge in 15 ccm Lösung in 10^{-4} g	Prozente der Adsorption	Adsorbierte Menge in 10^{-4} g	Berechnete Oberfläche pro g
1/2	57,0	7,13	4,0641	379,43
1/4	28,5	13,89	3,9585	379,83
1/8	14,25	29,24	4,1667	363,2
1/16	7,125	51,48	3,6679	395,7
1/32	3,5625	88,17	3,1411	442,31

§ 3. Methode und Apparatur zur Bestimmung der Adsorption.

Um das Pulver von fremden adsorbierten Gasen, vor allem Wasserdampf, zu befreien, wurde das gut getrocknete Pulver mit der zu adsorbierenden Substanz, z. B. CS_2, in flüssigem Zustand übergossen. Man kann jetzt mit Sicherheit annehmen, daß der Schwefelkohlenstoff die adsorbierten Stoffe löst und so eine enge Berührung der Oberfläche mit CS_2 stattfindet. Pumpt man jetzt aus, so verdampft der Schwefelkohlenstoff und es bleibt der Dampfdruck konstant, so lange noch Flüssigkeit vorhanden ist. Pumpt man noch weiter aus, so sinkt der Druck und es stellt sich ein Gleichgewicht ein zwischen dem Dampf in der Gasphase und der adsorbierten Menge. Wird jetzt das Adsorbens gewogen, so gibt die Gewichtszunahme die adsorbierte Menge an. Man wiederholt dies Verfahren bei verschiedenen Drucken und stellt so die Isotherme der Adsorption fest.

Da die Versuche mit Schwefelkohlenstoff, Pentan usw. ausgeführt werden sollten und diese Substanzen Gummi und Fett angreifen, so mußten diese Stoffe bei der Konstruktion des Apparates vermieden werden. Es kamen daher nur Quecksilberverschlüsse in Anwendung. Die Fig. 1 gibt den Apparat wieder.

Das Glaspulver befindet sich in einem Glasröhrchen A, das 3 cm lang ist und etwa einen Durchmesser von 1 cm hat. Es ist mit einem Glasschliff geschlossen. Der überfallende obere Schliff ist ausgezogen und in einen Haken umgebogen, der das Aufhängen ermöglicht. Das Adsorptionsgefäß wird in den etwa 30 cm hohen im Durchmesser 5 cm weiten Kolben K gebracht. Dieser ist von unten mit einem Gummikorken verschlossen, in dem in der Mitte ein Glasrohr als Führung für das Adsorptionsgefäß eingelassen ist. Außerdem ist der Korken dreifach durchbohrt. Durch eine Bohrung wird mittels Glasrohr, das mit dem Hahn H_2 versehen ist, Quecksilber zugeführt, um den Dampf von dem Gummi abzuschließen. Durch die beiden anderen sind Stahlnadeln geschoben, die durch Glasumhüllungen von dem Quecksilber isoliert sind. Die Enden der

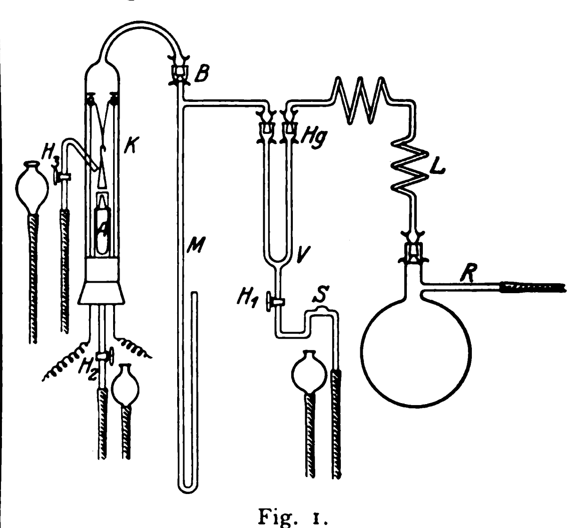


Fig. 1.

Stahldrähte bestehen aus Polklemmen; diese sind durch einen Silberdraht, auf dem der obere Schliff des Adsorptionsgefäßes hängt, verbunden. An die Stahlnadeln kann eine Spannung von 6 Volt angelegt werden, um den Silberdraht durchzuschmelzen. Der Kolben K, in dem sich das Adsorptionsgefäß befindet, ist durch ein mit dem Schliffe B versehenes Rohr mit dem Quecksilbermanometer M verbunden, dies steht in Verbindung mit der U-förmigen Röhre eines Quecksilberverschlusses V. Unten an V ist ein Hahn H_1 angebracht, um den Zufluß des Quecksilbers regeln zu können. Zwischen dem Hahn H_1 und dem Gummischlauch des Quecksilberreservoirs ist ein S-förmiger Bogen S eingeschaltet, der oben eine kuppelartige Erweiterung trägt, um etwaige, beim Heben und Senken des Reservoirs durch die Wände des Schlauches eingetretene Luft aufzufangen. Der rechte Schenkel des Quecksilberverschlusses führt zu einer Vorlegeflasche, um in möglichst gleichmäßigem Strom auspumpen zu können. Vorlegeflasche und Verschluß sind, um die Elastizität des Apparates zu erhöhen, durch zwei im rechten Winkel zuein-

ander angeordneten Glasfedern, Schlangenrohre, deren eine L eine Kapillare ist, miteinander verbunden. Die Flasche ist durch ein Ansatzrohr mit einem zweiten Manometer und über mehrere Trockenflaschen mit der Pumpe verbunden. Zwischen den Flaschen und der Pumpe ist ein Dreiwegehahn angebracht und ein Rückschlagventil, um bei plötzlichem Versagen der Pumpe ein Eindringen von Wasser in den Apparat zu verhüten. Der Apparat wurde teilweise an einem stabilen Brett befestigt, das am Tisch festgeschraubt wurde, zum Teil von Stativen getragen, die durch Zwingen gehalten wurden. Das verwandte Quecksilber wurde nach den üblichen Methoden gereinigt und getrocknet. Erwähnt möge noch werden, daß die Schliffe B und Hg nicht eingefettet waren; während sich das Gleichgewicht einstellte, befand sich über den Hähnen H_1 und H_3 Quecksilber, so daß der Dampf nicht mit Fett in Berührung kam.

Bei den Adsorptionsversuchen handelte es sich nun darum, das Adsorptionsgefäß nach beendigter Adsorption innerhalb des Systems zu schließen. Zu diesem Zwecke wurde der Silberfaden, welcher den Schliff des Adsorptionsgefäßes trug, galvanisch durchgeschmolzen. Wie schon erwähnt, geschah die Stromzuführung durch den Gummistopfen.

Der Herstellung des Adsorptionsgefäßes A wurde besondere Sorgfalt zugewandt. Die Schliffe wurden mit feinstem Schmirgelpulver nachgeschliffen und die Gefäße dann auf ihre Brauchbarkeit, also ihre Luftdichtigkeit, geprüft. Zu diesem Zwecke verfuhr ich folgendermaßen: Nachdem der obere Schliff am Silberdraht aufgehängt und das Adsorptionsgefäß in die Führung des Gummistopfens gebracht war, wurde der Apparat ausgepumpt, die Pumpe abgestellt und der Silberdraht galvanisch durchschmolzen. Es zeigte sich nach mehreren Versuchen, daß es zweckmäßig war, den oberen Schliff mit einem kleinen Gewicht zu beschweren; er fiel dann fester auf den unteren Schliff, das Rohr so schließend. Jetzt wurde der Hahn H_3 geöffnet und Quecksilber auf den Schliff fallen gelassen. Wurde nun im System Atmosphärendruck hergestellt und war das Gefäß nicht dicht, so wurde das Quecksilber durch den Luftdruck ins Innere gepreßt. Die tauglichen Röhrchen wurden ausgesondert und noch einmal geprüft. Zu diesem Zwecke wurden sie mit Glaspulver gefüllt und noch einmal in der eben beschriebenen Weise untersucht. Es stellte sich heraus, daß sie durchweg dicht blieben, wenn nach Einfüllen des Pulvers der Schliff mit größter Sorgfalt mittels Federn und Pinseln von eventuellem Glasstaub befreit worden war. Jetzt wurden die Röhrchen zum drittenmal auf ihre Dichtigkeit geprüft, nachdem das Glaspulver im Adsorptionsgefäß mit Schwefelkohlenstoff übergossen war. Dabei zeigte sich, daß, wenn ausgepumpt wurde und das CS_2 siedete, letzteres Glasteilchen mit sich riß, wodurch natürlich ein luftdichtes Schließen durchweg vereitelt wurde. Nach vielen vergeblichen Versuchen zeigte sich folgende Anordnung zweckmäßig: Der Schliff des Röhrchens wurde sorgfältigst gereinigt, dann Schwefelkohlenstoff eingefüllt. Mittels eines feinen Trichters wurde das Glaspulver aufgefüllt. Hierdurch wurde bewirkt, daß keine Luftbläschen im Gefäß waren, die beim Auspumpen ein Stoßen hervorriefen und so zu Verunreinigungen des Schliffs führten. Dann wurde nochmals eine sorgfältige Reinigung des Schliffes vorgenommen, das Gefäß durch ein festzusammengerolltes Platinnetz, das aber keineswegs die Verdampfung behinderte, geschlossen und eingestellt. Bei den auf diese Weise durchgeführten Vorversuchen zeigte es sich, daß die Gefäße immer dicht blieben.

Jetzt konnte zu den eigentlichen Adsorptionsversuchen übergegangen werden. Das Gefäß wurde auf die oben beschriebene Art gefüllt, mit Platinnetz geschlossen und mit dem Gummikorken in K eingeführt. Selbstverständlich mußte hierbei immer der Schliff B losgenommen werden. Dann wurde der Hahn H_2 geöffnet und Quecksilber aufgefüllt, das einmal den Gummikorken vor der Einwirkung des Dampfes bewahrte, dann aber auch ermöglichte festzustellen, ob der Korken, der nicht eingefettet wurde, fest schloß. Das Auspumpen mußte äußerst vorsichtig und langsam vorgenommen werden. Es wird bis zu einem bestimmten Druck unterhalb der Dampftension ausgepumpt und die Pumpe dann so reguliert, daß der Druck der gleiche bleibt, die verdampfende Flüssigkeit also gerade gleich der abgesaugten Menge ist.

Dies Abdampfen erstreckte sich meist über mehrere Tage, wobei dauernd Ablesungen gemacht wurden, um festzustellen, daß der Druck sich nicht veränderte. War die Flüssigkeit verdampft, so fiel der Druck. Die Pumpe wurde abgestellt, der Quecksilberverschluß V geschlossen durch Öffnen von H_1 und in mehrstündiger Beobachtung der Druck festgestellt. Es zeigte sich dabei, daß anfangs stets noch ein Steigen des Druckes eintrat. Das ließ sich daraus erklären, daß in den feinen Zwischenräumen zwischen den Glasteilchen noch Flüssigkeit sich befand, die langsam verdampfte. Ich ließ das Gefäß zwischen 12—48 Stunden in Dampf stehen, änderte sich in dieser Zeit der Druck nicht, so konnte ich annehmen, daß Gleichgewicht eingetreten war. Jetzt wurde das Gefäß geschlossen und Atmosphärendruck hergestellt; das Gefäß wurde darauf herausgenommen und gewogen. Dann wurde es mehrere Stunden im Trockenofen auf 100^0 erhitzt, um die

adsorbierten Dämpfe zu vertreiben. Nach dem Erkalten im Exsikkator wurde es wieder gewogen. Die Differenz der Wägung gibt die adsorbierte Menge an. Die Glasmenge im Gefäß ergibt sich aus Differenzwägung gegen das leere Röhrchen.

Gegen die Versuche läßt sich der Einwand erheben, daß neben der eigentlichen Adsorption noch eine Kondensation in den kapillaren Zwischenräumen stattfindet. Die Kondensation erfolgt bekanntlich nach dem Gesetz von Lord Kelvin, nach welchem in einer Kapillare der Dampfdruck über einem konkaven Flüssigkeitsmeniskus kleiner ist als der Sättigungsdruck über der ebenen Oberfläche. Meine Versuche haben aber keinen Anhaltspunkt dafür gegeben, daß zu der eigentlichen Adsorption noch eine Kondensation hinzukommt, indem meine Adsorptionsisothermen nichts von dem zusätzlichen Anstieg aufweisen, der beim Eintritt der Kondensation zu erwarten wäre und in anderen Fällen, wo auch sonstige Anhaltspunkte für Kondensationserscheinungen vorhanden sind, stark hervortritt. Auch F. Goldmann und M. Polanyi[1]) haben bei der Untersuchung der Adsorption von Dämpfen an Kohle keinen Anhaltspunkt für die Kondensation gefunden. Ich kann daher annehmen, daß dieser Faktor meine Ergebnisse nicht wesentlich beeinflußt hat.

Die Versuche wurden ausgeführt mit Schwefelkohlenstoff, Chloroform und Pentan.

Das Chloroform wurde mit konzentrierter Schwefelsäure geschüttelt und dann überdestilliert. Das Pentan war ein reinstes Kahlbaumpräparat.

Die Versuche wurden in einem Kellerraum ausgeführt, in dem die Temperatur sehr gut konstant zu halten war auf 19°.

Aus der Arbeit von Felix Durau[2]) ergibt sich, daß Luft und Wasserstoff von Glasoberflächen nicht adsorbiert werden. Es werden also bei den Wägungen festgestellt die Gewichte von:

1. Gefäß + Glaspulver + CS_2 adsorb. + + toter Raum$_{CS_2}$;

2. Gefäß + Glaspulver + Luft adsorb. + + toter Raum$_{Luft}$;

$$CS_2 \text{ adsorb.} = \text{Differenz } (1 - 2) + T.R._{Luft} - T.R._{CS_2}.$$

Der tote Raum in den Adsorptionsgefäßen wurde folgendermaßen bestimmt:

Das Volumen der Gefäße wurde sehr sorgfältig durch Auswiegen mit Quecksilber bestimmt. Aus dem Gewicht der bei jedem einzelnen Versuch gebrauchten Menge Glaspulver und dem spezifischen Gewicht des Glases wurde das Volumen der Glasmenge ermittelt. Die Differenz gab den toten Raum.

Das spezifische Gewicht des Glases wurde in mehreren, gut miteinander übereinstimmenden Messungen als 3,865 erhalten.

Es wurden noch Kontrollversuche mit Wasserstoff bei Atmosphärendruck gemacht, der nach F. Durau nicht adsorbiert wird. Zu diesem Zwecke wurde das Adsorptionsgefäß in den Kolben K eingeführt. Durch das Quecksilber-Zuleitungsrohr wurde, nachdem ausgepumpt und zur Pumpe hin abgeschlossen war, Wasserstoff einströmen gelassen. Der Wasserstoff wurde aus dem Entwicklungsgefäß über Phosphorpentoxyd geleitet, durch glühendes Kupfer vom Sauerstoff befreit und schließlich durch konzentrierte Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet. Hatte sich nach dem Einleiten im Apparat wieder Atmosphärendruck eingestellt, so wurde der Hahn H_3 geschlossen und wieder ausgepumpt. Das wurde 15 mal wiederholt. Dann wurde das Gefäß bei Atmosphärendruck geschlossen und gewogen. Darauf wurde es im Exsikkator abgekühlt und wieder gewogen.

Für die Wägungen gilt nun folgende Überlegung:

Es wird gewogen:

1. Gefäß + Glaspulver + H ads. + tot. Raum$_H$.

2. Gefäß + Glaspulver + L ads. + tot. Raum$_L$.

Da H adsorbiert = 0 und L ads. = Luft adsorbiert = 0 ist, gibt die Differenz $TR_H - TR_L$. Es ergibt sich eine negative Differenz.

Die in vier Versuchen gefundenen Werte für $TR_H - TR_L$ stimmen befriedigend mit den aus dem toten Raum berechneten überein, so daß obige Berechnungsart der Korrektur gerechtfertigt ist.

Bei der Berechnung der Anzahl der Molekülschichten wurden folgende Zahlen zugrunde gelegt:

Loschmidtsche Zahl: $6,09 \cdot 10^{23}$.

Fläche des Adsorbens pro g = 379,6 qcm.

Molekulargewicht des Schwefelkohlenstoffs: 76,125; spezifisches Gewicht 1,265.

Molekulargewicht des Chloroforms: 119,393; spezifisches Gewicht 1,493.

Molekulargewicht des Pentans: 72,096; spezifisches Gewicht 0,621.

Wenn A die adsorbierte Menge ist, M das Molekulargewicht des Dampfes, g die Anzahl Gramm Glaspulver im Rohr, so ist die einem Molekül zur Verfügung stehende Fläche:

$$\frac{g \cdot 379,625 \cdot M}{6,09 \cdot 10^{23} \cdot A}.$$

1) F. Goldmann und M. Polanyi, Zeitschr. f. phys. Chemie **132**, 346, 1928.

2) F. Durau, Zeitschr. f. Phys. **37**, 6, 1926.

Nimmt man als Molekülform einen Würfel mit der Kante x an, so ist die Grundfläche eines Moleküls zu berechnen als:

$$x^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{M}{6{,}09 \cdot 10^{23} \cdot s}\right)^2}$$

wo s das spezifische Gewicht des Dampfes ist. Aus dieser Zahl und der tatsächlich einem Molekül zur Verfügung stehenden Fläche läßt sich die Schichtenzahl berechnen.

§ 4. Messungen und Resultate.

Die Messungen mit CS_2 sind in Tabelle III übersichtlich zusammengestellt. Die Werte ergaben eine stetige Kurve (siehe Fig. 2).

Tabelle III.

Schwefelkohlenstoff.

Dampftension bei 19°: 287 mm.

Druck in mm	Schichtenzahl	Druck in mm	Schichtenzahl
270	29,6	201	9,0
259	25,5	186	8,8
254	25,0	161	7,2
250	24,4	138	6,4
224	16,7	102	5,9

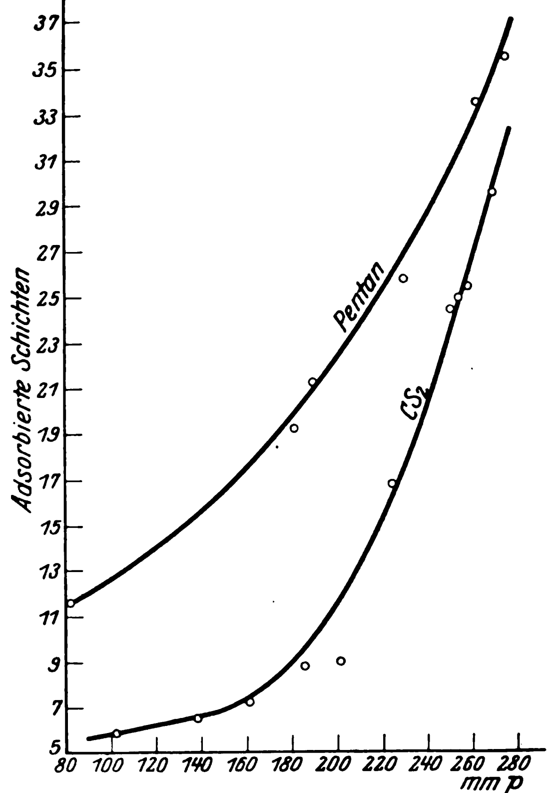


Fig. 2.

Leider ließen sich die adsorbierten Mengen bei den niederen Drucken nicht mit Sicherheit bestimmen, da die adsorbierten Mengen sehr klein waren und deswegen Wägefehler von zu großem Einfluß waren.

Tabelle IV gibt die Resultate für Chloroform und Pentan an.

Tabelle IV.

Pentan Dampftension bei 20° = 420,2 mm		Chloroform Dampftension bei 20° = 158,4 mm	
Druck in mm	Anzahl der Schichten	Druck in mm	Anzahl der Schichten
276	35,5	90	28,1
262	33,5	91	27,1
230	25,6	86	26,0
189	21,6	84	24,9
181	19,2	54	16,8
80	12,5		

Die Kurve für Pentan ist in Fig. 2 gegeben. Fig. 3 gibt die Kurve für Chloroform an.

Messungen über die Anzahl von Schichten, die sich bei der Adsorption niederschlagen, sind bereits von einer großen Anzahl von Forschern ausgeführt worden. Ich erwähne hier nur die,

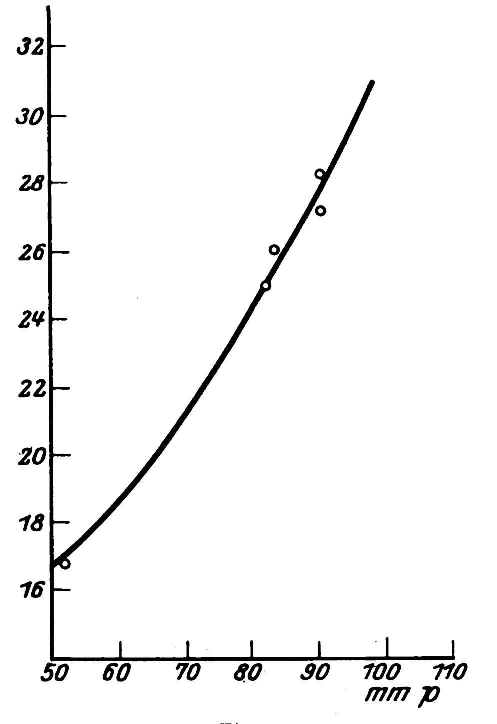


Fig. 3.

welche im Zusammenhang mit meiner Arbeit stehen

F. Durau[1]) hat die Adsorption von Stickstoff, Wasserstoff, Luft und Kohlendioxyd an Glas und Silber untersucht. Im allgemeinen wurde sehr wenig adsorbiert. N_2, H_2 und trockene Luft bei gewöhnlicher Temperatur an Glas überhaupt nicht. N_2 und H_2 an Silber zu 18 bis zu 5,7 Proz. im Vergleich zu einer monomolekularen Schicht. Iredale[2]) hat die Adsorption von einer mit organischen Dämpfen gesättigten Luftatmosphäre an Quecksilber untersucht und dabei eine unimolekulare Schicht gefunden. Viel größere Schichtenzahl (bis zu 55 Schichten) hat Langmuir[3]) bei der Adsorption von Wasserdampf an Glas und Glimmer ermittelt. Eine noch größere Schichtenzahl (bis 88 Schichten) fanden McHaffic und Sam Lenher[4]) bei Wasserdampf an Glas, die aber bei steigender Temperatur und sinkendem Druck schnell abnahmen.

Man erkennt aus diesen Angaben, daß die Stoffe weit oberhalb ihres Kondensationspunktes nur wenig von der Oberfläche aufgenommen werden — es bildet sich nicht einmal eine monomolekulare Schicht aus —; mit Annäherung an den Kondensationspunkt nimmt die Zahl der Schichten zu. Die monomolekulare Schicht scheint in der Kurve, welche die Beziehung zwischen Adsorption, Temperatur und Druck wiedergibt, kein ausgezeichneter Punkt zu sein[5]).

Langmuir erklärt das Bestehen der großen Anzahl von Adsorptionsschichten auf Glas aus Quellungserscheinungen, so daß hier nicht wahre Adsorption, Oberflächenverdichtung, sondern eine Art Chemosorption vorläge. Ich halte diese Erklärung für anfechtbar, denn nach den Untersuchungen von F. Durau[1]) verhält sich, in bezug auf die Adsorption, das Glas wie das Silber. Ebenso verhält sich nach Kwade (noch nicht veröffentlicht) das Silber bei der Adsorption von Farbstoffen wie Glas; beim Silber aber eine Quellungsschicht anzunehmen, erscheint mir sehr gewagt. Die Hypothese von Langmuir[2]) soll noch geprüft werden durch Messung der Adsorption von organischen Dämpfen an verschiedenen anderen Adsorbentien. Dabei sollen auch die Versuche auf verschiedene Temperaturen ausgedehnt werden.

1) F. Durau, loc. cit.
2) Iredale, Phil. Mag. **45**, 1088, 1923; **48**, 178, 1924; **49**, 603, 1925.
3) Langmuir, Proc. Farad. Soc. 1922, p. 607; Phys. Rev. 1915, p. 679.
4) Mc Haffic and S. Lenher, Journal of the Chem. Soc. **127**, 1559, 1925; S. Lenher, Journ. of the Chem. Soc. 1926, p. 1785.
5) S. Lenher gibt z. B. folgende Tabelle für die Änderung der Zahl der Schichten mit der Temperatur:

Glas-Wasserdampf.

T⁰abs.	p mm	Zahl der ads. Schichten	T⁰abs.	p mm	Zahl der ads. Schichten
293,0	16,90	88,5	308,0	30,65	5,9
298,0	22,73	51,8	311,0	31,44	2,7
302,0	27,54	22,5	314,0	31,77	1,4
305,0	29,71	10,5	317,0	32,40	0,6

Da hier gleichzeitig der Druck sich ändert, so sind die Kurven nicht sehr übersichtlich. Immerhin erkennt man, daß sich keineswegs innerhalb eines großen Bereichs der Temperatur und des Druckes eine monomolekulare Schicht ausbildet.

Zusammenfassung:

1. Es wird die Adsorption von Schwefelkohlenstoff, Pentan und Chloroform an Glaspulver untersucht.

2. Zu diesem Zweck wird die Oberfläche des Glaspulvers nach dem von G. C. Schmidt und F. Durau[3]) und Fr. Schelte[4]) angewandten Verfahren ermittelt.

3. Die adsorbierten Dampfschichten ergeben eine Bedeckung bis zu 35 Molekularschichten, deren Zahl mit abnehmendem Druck fällt.

4. Die Ergebnisse werden mit den Resultaten mehrerer Forscher verglichen und gezeigt, daß die Größe der Adsorption bei Gasen in Zusammenhang steht mit ihrer Kondensationsfähigkeit.

Zum Schlusse sei mir gestattet, Herrn Geheim. Regierungsrat Prof. Dr. G. C. Schmidt für die Anregung zu dieser Arbeit und für die reiche Unterstützung bei ihrer Ausführung meinen tiefempfundenen Dank auszusprechen. Ebenso danke ich der Gesellschaft zur Förderung der Westfälischen Wilhelms-Universität für Bewilligung von Mitteln.

1) F. Durau, loc. cit.
2) Langmuir, loc. cit.
3) loc. cit.
4) loc. cit.

Münster i. W., Physikal. Institut, Sept. 1928.

(Eingegangen 18. September 1928.)

Über den Einfluß der Temperatur auf die Zusammensetzung der Atmosphäre in den obersten Schichten.

Von Helge-Petersen.

1.

Daß die Vermischung der einzelnen Gase der Atmosphäre durch Konvektion auf die untersten Schichten beschränkt ist, führt bekanntlich dazu, daß die Atmosphäre in den größten Höhen, wo Diffusionsgleichgewicht herrscht, praktisch nur aus den leichten Gasen, Wasserstoff und Helium, bestehen kann. Verschiedene Berechnungen zeigen übereinstimmend[1]), daß wir ein wenig unter 100 km noch sowohl Sauerstoff als Stickstoff haben, während der Stickstoff ein wenig über 100 km weit überwiegend ist, aber schon zwischen 100 km und 200 km ist die Dichte durch den Gehalt von *He* und H_2 bestimmt, und über 300 km haben wir die Wasserstoff-Atmosphäre.

Bis jetzt ist das Nordlichtspektrum das einzige erreichbare direkte Zeugnis über die Zusammensetzung der Atmosphäre in den genannten Höhen; die Auskunft aber, die wir dadurch gewonnen haben, ist nur schwer verträglich mit den obigen theoretischen Resultaten, insofern als das Spektrum nur Linien von N_2 und $O_2(O)$ enthält und keine Spur von *He* oder H_2 zeigt. Vegard[2]) schließt daraus, daß *He* und H_2 gar nicht vorhanden sind in den Nordlichthöhen, daß also die genannten theoretischen Erwägungen, die sonst allgemein als recht wahrscheinlich angenommen zu werden scheinen, doch nicht zutreffen mögen.

Was nun H_2 anbelangt, läßt sich ungezwungen annehmen, daß der gewiß recht unsicher nachgewiesene Gehalt an der Erdoberfläche durch chemische Prozesse verbraucht wird und so „verschwindet“. Doch soll auch daran erinnert werden, daß eine Temperatur von nur ca. 300° C in den obersten Schichten genügt um die H_2-Atmosphäre durch die thermischen Bewegungen der Moleküle innerhalb 10^6 Jahren in den Weltraum zu zerstreuen[3]); eine solche Temperatur scheint nach späteren Untersuchungen gar nicht als ganz unwahrscheinlich betrachtet werden zu dürfen.

Mit Rücksicht auf *He* liegen die Verhältnisse etwas anders. Als inaktives Gas kann *He* nicht als durch chemische Verbindung verschwunden gedacht werden, und die Temperatur, die nötig wäre, um *He* durch die thermischen Bewegungen zu zerstreuen — innerhalb z. B. 10^6 Jahren — müßte zu ca. 900° C angenommen werden. Außerdem geht ja eine stetige Ausströmung von *He* aus dem Erdinnern vor sich, deren Betrag — wie aus den nachfolgenden Teilen ersichtlich ist — in geologischen Zeiträumen gar nicht verschwindend ist, gegenüber der gesamten *He*-Menge der Atmosphäre; ein Umstand, der die Abwesenheit des Heliums in den großen Höhen noch unverständlicher macht.

Setzen wir den Partialdruck des Heliums gleich 4×10^{-6} Atmosphären oder 4 Dynen pro cm^2, so wird die *He*-Menge der ganzen Atmosphäre gleich $c \cdot 0{,}2 \times 4\pi R^2\,m^3$ (R = der Erdradius) unter Normalumständen, oder $10^{14}\,m^3$, wenn Diffusionsgleichgewicht vorausgesetzt wird. Nach Moore[1]) strömt jährlich innerhalb der *He*-Felder in U.S.A. mehr als 500×10^6 feet³ oder ca. $14 \times 10^6\,m^3$ *He* von der Erde heraus; diese Ausströmung würde durch 10^7 Jahren fortgesetzt die gegenwärtige Menge der Atmosphäre ausmachen. Da nun die über die ganze Erdoberfläche ausströmende *He*-Menge wahrscheinlich bedeutend größer ist — so wird bloß in Kanada *He* in der gleichen Menge wie in U.S.A. technisch gewonnen — und da überdies die Ausströmung in den früheren geologischen Perioden für als ergiebiger anzunehmen ist, wäre anscheinend ein größerer Gehalt von *He* in der Atmosphäre zu erwarten, wenn keine Abströmung vor sich ginge.

2.

Bei den bis jetzt vorgenommenen Berechnungen der Zusammensetzung der Atmosphäre in den verschiedenen Höhen ist die Annahme immer zugrunde gelegt worden, daß das Diffusionsgleichgewicht oberhalb einer gewissen Höhe, bis zu welcher die Mischung der Winde reicht, vorhanden ist. Sehen wir bei dieser Untersuchung von der Temperaturvariation mit der Höhe ab, wird bekanntlich das allgemeine Exponentialgesetz

$$\nu = \nu_0 e^{-\frac{g \varrho_0}{p_0} z} \qquad (1)$$

als Resultat erhalten für die Zahl der Moleküle in cm^3 in der Höhe z (über der Grenze der Mischungsschicht). Dieses Gesetz läßt sich als Resultat eines Diffusionsprozesses z. B. auf folgende Weise herleiten. Die thermischen Bewegungen der Moleküle verursachen einen Massentransport durch 1 cm^2, welcher derselbe nach allen Richtungen ist. Die Mitwirkung der Gravitation macht aber den Transport pro Sekunde größer nach unten als nach oben, und zwar um

$$\nu\left[\tfrac{1}{2}gt - \left(-\tfrac{1}{2}gt\right)\right] = \nu g t,$$

1) Siehe z. B.: Chapman and Milne: Quart. J. o. R. S. 1920, S. 357.

2) Handb. d. Radiologie VI.

3) Jeans, Dyn. Theory of gases.

1) Nature 1923, Vol. 111.

wenn t die durchschnittliche Zeit zwischen zwei Zusammenstößen der Moleküle bezeichnet. Im Gleichgewicht wird sich daher ein solcher Gradient der Moleküldichte einstellen, daß die Diffusion einen Massentransport nach oben verursacht, der eben gleich $\nu g t$ ist. Wir haben also

$$-D\frac{d\nu}{dz} = \nu g t, \tag{2}$$

wo D der Diffusionskoeffizient ist. Wenn nur eine Gasart vorhanden ist, wird der Prozeß Selbstdiffusion und wir können nach Meyers Formel[1])

$$D = \tfrac{1}{3}\lambda \bar{c}_1$$

setzen (λ = die mittlere Weglänge, $\bar{c}_1$ = die mittlere Geschwindigkeit); weiter haben wir

$$\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,\nu\sigma^2} \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,\nu\sigma^2\bar{c}_1^2}$$

(σ = der Molekül-Diameter), wodurch (2) zu

$$\frac{d\nu}{dz} = -\frac{3g}{\bar{c}_1^2}\nu \tag{3}$$

wird, und weiter bei Integration

$$\nu = \nu_0 e^{-\frac{3g}{c_1^2}z}. \tag{4}$$

Wird in Gl. (4) der Exponent im Zähler und Nenner mit $N\cdot m$ multipliziert (N = Zahl der Moleküle in cm^3 unter Normalbedingungen, m = Masse eines Moleküls), werden wir eben Gl. (1) bekommen, wenn $\bar{c}_1$ 0^0 C entsprechend vorausgesetzt wird.

3.

Wir werden nun annehmen, daß eine stetige Zufuhr von unten gleich a Mol/$cm^2\cdot$sec vor sich geht, und daß diese Moleküle durch die übrige Atmosphäre diffundieren und an der oberen Grenze in den Weltenraum zerstreut werden. Im Gleichgewicht muß dann die Zahl der Moleküle, die nach oben diffundieren $\left(-D\frac{d\nu}{dz}\right)$ die Summe derjenigen gleich werden, die herabfallen ($\nu g t$, siehe oben) $+ a$. Wir haben also

$$-D\cdot\frac{d\nu}{dz} = \nu g t + a \tag{5}$$

oder nach Einsetzen für D und t, usw.

$$\nu = \nu_0 e^{-\frac{3g + 3a\pi\sqrt{2}\sigma^2 c_1}{c_1^2}\cdot z} \tag{6}$$

Eine Vergleichung der Gl. (4) mit Gl. (6) zeigt natürlicherweise, daß die Durchströmung von a Mol/$cm^2\cdot$sec eine schnellere Abnahme von ν mit der Höhe bewirkt, genau so als ob das Gas schwerer gewesen wäre. Einsetzung von Zahlenwerten in (6) zeigt indessen, daß das zweite Glied im Exponenten gegenüber $3g$ ganz zu vernachlässigen ist, wenn für a der oben geschätzte Wert angenommen wird.

1) Jeans, l. c.

4.

In Wirklichkeit haben wir aber keine Selbstdiffusion. Die He-Moleküle machen nur einen äußerst geringfügigen Bruchteil der sämtlichen Moleküle aus, und die übrigen Moleküle, N_2 und O_2, werden daher die Diffusionsgeschwindigkeit der He-Moleküle herabsetzen. Dem wird dadurch Rechnung getragen, daß für D der Ausdruck des Diffusionskoeffizienten zweier Gasarten eingesetzt wird, für deren Moleküldichten, ν_1 und ν_2, man $\frac{\nu_1}{\nu_2} = 0$ setzen darf.

Nach Meyers Formel[1]) lautet dieser Ausdruck

$$D = \frac{1}{3}\,\frac{\bar{c}_1^2}{\pi\sigma^2\nu\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}}$$

und dementsprechend für t

$$t = \frac{1}{\pi\sigma^2\nu\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}}.$$

Hier ist nun ν die ganze Zahl von Molekülen im cm^3 und läßt sich somit durch die gewöhnliche Exponentialfunktion ausdrücken, indem wir setzen

$$\nu = n_0 e^{-kz} = n_0 e^{-\frac{3g}{c_1^2}\cdot z}; \tag{7}$$

$\bar{c}_2$ soll der dem Stickstoff entsprechende Wert beigemessen werden, und n_0 ist die „Loschmidtsche Zahl". Durch Einfügung in die Ausdrücke für D und t und nachheriges Einsetzen in Gl. (5) bekommen wir die endliche Differentialgleichung

$$\frac{d\nu}{dz} + \nu\frac{3g}{\bar{c}_1^2} = -\frac{a}{M}\cdot n_0 e^{-kz}, \tag{8}$$

wo

$$M = \frac{\bar{c}_1^2}{3\pi\sigma^2\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}}.$$

Integration und Einsetzen für M und k gibt

$$\nu = \nu_0 e^{-\frac{3g}{c_1^2}\cdot z} - \frac{a n_0 \pi\sigma^2\bar{c}_2^2\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}}{(\bar{c}_1^2 - \bar{c}_2^2)g}\left|e^{-\frac{3g}{c_1^2}\cdot z} - e^{-\frac{3g}{c_2^2}\cdot z}\right|,$$

oder, nach Anwendung der Relation

$$\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2^2} = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\nu = \nu_0 e^{-\frac{3g}{c_1^2}\cdot z} - \frac{a n_0 \pi\sigma^2\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}}{\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right)g}\left|e^{-\frac{3g}{c_1^2}\cdot z} - e^{-\frac{3g}{c_2^2}\cdot z}\right|. \tag{9}$$

Diese Gleichung gibt die Moleküldichte als Funktion der Höhe, indem ν_0 die Dichte am Erdboden ist.

1) Jeans: l. c.

In Gl. (9) gibt nun das erste Glied die Anzahl von Molekülen an, wie sie ohne Durchströmung wäre ($a = 0$), und wir sehen so (da die Differenz der exponenten Glieder in der Klammer immer positiv ist), daß die Durchströmung eine Verminderung der Moleküldichte in jeder Höhe über $z = 0$ bewirkt, was natürlich auch zu erwarten war. Um dieses noch deutlicher zu machen, suchen wir das Verhältnis $\frac{\nu}{\nu_{a=0}}$, indem

$$\nu_{a=0} = \nu_0 \cdot e^{-\frac{3g}{\bar{c}_1^2} \cdot z};$$

wir bekommen

$$\frac{\nu}{\nu_{a=0}} = 1 - a \cdot K \cdot \frac{n_0}{\nu_0}\left[1 - e^{-3g\left(\frac{1}{\bar{c}_2^2} - \frac{1}{\bar{c}_1^2}\right) \cdot z}\right], \quad (10)$$

wo

$$K = \frac{\pi\sigma^2 \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}}{\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) g}. \quad (10a)$$

Aus Gl. (10) ist nun ersichtlich, daß gewisse Werte von a und ν_0 (nämlich solche, die der Ungleichheit

$$\frac{a \cdot K \cdot n_0}{\nu_0} > 1$$

genügen) negative Werte ergeben für ν in solchen Höhen (z-Werten), die das letzte Glied der Gl. (10) > 1 machen.

Daß Gl. (10) unter gewissen Umständen ein solches Resultat geben kann, kommt daher, daß die Voraussetzung der Aufstellung der Differentialgleichung (8) die Annahme des stationären Zustandes war, und daß nicht beliebige Werte von a und ν_0 ohne weiteres dieser Annahme entsprechen, wie aus folgenden Überlegungen klar wird. Bei jeder Strömung einer Substanz gegen einen Widerstand sind die Zahlen, die die Werte der Stromstärke, des Widerstandes und der Dichte der strömenden Substanz in einem gegebenen Punkte bedeuten, nicht gegenseitig unabhängig; jedem Werte der Stromstärke wird ein gewisser Wert der Dichte entsprechen; soll die Stromstärke größer werden, wird während der Vergrößerung dem Wege entlang Substanz abgesetzt, bis der Gradient, und damit auch die Dichte im einzelnen Punkte, den der neuen Stromstärke entsprechenden Wert hat; und umgekehrt bei einer Verminderung der Stromstärke. Für die *He*-Strömung werden wir nun annehmen, daß die Atome in einer gewissen Höhe, $z = l$, in den Weltraum entweichen; die Dichte hier kann folglich $\nu = 0$ gesetzt werden, und für diese Höhe gibt dann (10)

$$0 = 1 - \frac{aKn_0}{\nu_0}\left[1 - e^{-3g\left(\frac{1}{\bar{c}_2^2} - \frac{1}{\bar{c}_1^2}\right) l}\right]. \quad (11)$$

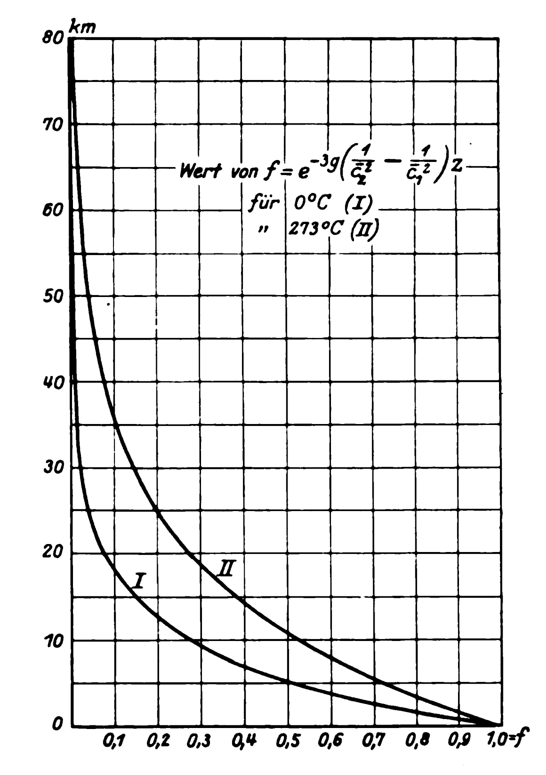
Hier entspricht a der Stromstärke, $K \cdot n_0$ dem Widerstande, und ν_0 ist die Dichte an der unteren Grenze. Die Werte von a und ν_0 müssen dieser Gleichung genügen, um dem stationären Zustande zu entsprechen. Wenn die **beobachteten** Werte von a und ν_0 dies nicht zulassen, mag angenommen werden, daß der Zustand kein stationärer ist, sondern vielmehr derjenige eines Anwachsens oder einer Abnahme des *He*-Gehaltes in der Atmosphäre.

Da das letzte Glied in der Klammer gegenüber eins bedeutungslos wird für Höhen größer als ca. 100 km (siehe unten), kann die Bedingung (11) $\frac{aKn_0}{\nu_0} = 1$ geschrieben werden, und der Gehalt von *He* in der Atmosphäre mag als zunehmend oder abnehmend betrachtet werden, je nachdem

$$\left.\begin{array}{l} \frac{aKn_0}{\nu_0} > 1 \\ \text{oder} \quad \frac{aKn_0}{\nu_0} < 1 \end{array}\right\} \quad (12)$$

5.

Für die numerische Berechnung soll die Atmosphäre als aus Helium und einem „Reste" be-



stehend betrachtet werden; und dem Reste sollen die Eigenschaften des Stickstoffs beigemessen werden. Das letzte Glied der Klammer ist für die Temperaturen 0° C und 273° C berechnet und in der Fig. als Funktion der Höhe abgebildet. Man sieht, daß das Glied — wie schon erwähnt —

gegenüber eins verschwindet für Höhen über 100 km, und bei den Temperaturen, ca. 0^0 C, die für die Atmosphäre als Gesamtheit angenommen werden darf; bei 0^0 C, z. B., ist der Wert schon 4×10^{-4} in 60 km Höhe. In den Höhen größer als 100 km ist das Verhältnis $\frac{\nu}{\nu_0}$ daher als konstant zu betrachten, und zwar

$$\frac{\nu}{\nu_{a=0}} = 1 - \frac{aKn_0}{\nu_0}.$$

Für die Berechnung von K werden wir folgende Werte benutzen: $\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2} = 1{,}3 \times 10^5$; der Abstand der Zentren zweier sich berührender Moleküle, bzw. *He* und N_2, $\sigma = 3{,}0 \times 10^{-8}$; $\frac{m_2}{m_1} = 7$; so bekommen wir (siehe Gl. (10a))

$$K = \frac{\pi \times 9 \times 10^{-16} \times 1{,}3 \times 10^5}{6 \times 10^3} = 6{,}1 \times 10^{-14}.$$

$\frac{n_0}{\nu_0}$ wird allgemein gleich $0{,}25 \times 10^6$ gesetzt. Es darf jedoch vielleicht fraglich sein, ob dieser Wert ein Ausdruck für den durchschnittlichen *He*-Gehalt in der Atmosphäre an der Erdoberfläche ist. Selbst ein *He*-Gehalt in den aus der Erde strömenden Gasen von 1 promille, was recht allgemein vorkommt (in den *He*-Feldern in U.S.A. ist der Gehalt 1—2 procent) ist noch 10—100 mal so groß, und wird daher vielleicht die Gehalt-Messungen beeinflussen können, so daß der durchschnittliche Gehalt — die Oberfläche der Ozeane einbegriffen — wesentlich kleiner sein muß[1]).

Für die aus der Erde strömende *He*-Menge werden wir das doppelte des Betrages, der nach der Schätzung von Moore (siehe Seite 879) in U.S.A. ausströmt, ca. $0{,}5$ m³/sec, annehmen, diese Menge, 1 m³/sec, wird wahrscheinlich von Nordamerika allein geleistet, da in Kanada ungefähr dieselbe Menge wie in U.S.A. technisch gewonnen wird, und sie entspricht daher zweifellos nur einer unteren Grenze. Durch Division mit der Erdoberfläche, 5×10^{18} cm², bekommen wir für a

$$a = c \cdot \frac{3 \times 10^{25}}{5 \times 10^{18}} = 0{,}6 \times 10^7 \frac{\text{mol}}{\text{cm}^2/\text{sec}}$$

und endlich

$$\frac{aKn_0}{\nu_0} = 0{,}6 \times 10^7 \times 6{,}1 \times 10^{-14} \times 0{,}25 \times 10^6 = 0{,}1$$

und also

$$\frac{\nu}{\nu_{a=0}} = 0{,}9.$$

1) Evans (Nature, **77**, 535, 1908) findet nur $1-2 \times 10^{-6}$ für $\frac{n_0}{\nu_0}$ statt der obengenannten 4×10^{-6} nach Ramsay.

Hier ist nun zu beachten, daß die Werte von a und ν_0 recht unsicher sind; es sind aber keine besseren zur Hand. Doch muß bemerkt werden, daß nur relativ kleinere Änderungen, und zwar in durchaus wahrscheinlichen Richtungen, namentlich gegen größere Werte von a und $\frac{n_0}{\nu_0}$, bewirken werden, daß die Gleichung

$$\frac{aKn_0}{\nu_0} = 1$$

sehr nahe erfüllt ist, dem stationären Zustande entsprechend, der an und für sich der wahrscheinlichste ist. Und in diesem Fall sehen wir aus Gl. (10), daß der Gehalt an Helium in der Atmosphäre weit schneller mit der Höhe abnehmen wird, wenn ein Zustand stationärer Strömung vorhanden ist, als wenn der gewöhnlich angenommene Zustand des statischen Diffusionsgleichgewichtes herrscht.

Wir können das obenstehende auf folgende Weise resümieren. Wenn wir voraussetzen, daß der *He*-Gehalt der Atmosphäre dadurch bestimmt ist, daß *He* aus der Erde strömt, durch die Atmosphäre diffundiert und in einer gewissen Höhe in den Weltenraum entweicht wegen der thermischen Bewegungen der Moleküle, dann wird die Dichte des *He* schneller mit der Höhe abnehmen als im statischen Diffusionsgleichgewicht. Die numerische Berechnung stößt auf die Schwierigkeit, daß die betreffenden Größen — a und ν_0 — nur recht unsicher bekannt sind; sie zeigt indessen, daß diejenigen Werte dieser Größen, die nach den Beobachtungen für einigermaßen wahrscheinlich zu halten sind, solcher Größenordnung sind, daß sie dem stationären Strömungszustande entsprechen können, indem der Bruch $\frac{aKn_0}{\nu_0}$ nahe gleich eins wird.

In diesem Zusammenhang muß daran erinnert werden, daß die Unsicherheit, mit welcher der Molekül-Durchmesser und der Ausdruck für den Diffusionskoeffizienten behaftet sind, auch den Bruch beeinflussen wird, so daß es in Wirklichkeit unmöglich ist zu beurteilen, wie nahe der Zustand dem stationären ist. Aber der Umstand, daß der Bruch recht nahe gleich eins wird in Verbindung mit dem Fehlen der *He*-Linien im Spektrum des Nordlichtes macht es naheliegend den beschriebenen stationären Strömungszustand als Ursache des Fehlens von *He* in den obersten Schichten der Atmosphäre anzunehmen.

6.

Eine notwendige Annahme für diesen Vorgang ist, daß die *He*-Atome in einer gewissen

Höhe in demselben Verhältnisse entweichen, in dem sie aus der Erdoberfläche herausströmen. Man darf annehmen, daß das einzelne Atom entweicht, wenn seine kinetische Energie größer ist als das Potential der Erde in dem Punkte, und wenn zugleich die Wahrscheinlichkeit für Zusammenstoß hinlänglich klein ist. Jeans[1]) nimmt an, daß diese letzte Bedingung als erfüllt zu betrachten ist bei einer Dichte von 30000 Mol-cm^3 (für H_2), was einer mittleren freien Weglänge von 100000 km entspricht. Für *He* wird diese freie Wegelänge einer Dichte von ca. 50000 Atom-cm^3 entsprechen.

Bei der auf Seite 881/882 angeführten Angabe über die Temperatur, die nötig ist, um eine *He*-Atmosphäre innerhalb eines gewissen Zeitraumes zu zerstreuen, ist natürlich statistisches Gleichgewicht vorausgesetzt; also hat in jedem Augenblick nur ein gewisser, der Temperatur entsprechender Bruchteil der gesamten, vorhandenen Atome eine Energie, gleich oder größer als die oben definierte. Nun ist es aber denkbar, daß es möglich wäre sich eine Zerstreuung vorzustellen, die nicht an eine bestimmte, nach der kinetischen Gastheorie definierbaren Temperatur geknüpft ist. In Wirklichkeit ist es ja schwierig diesen Temperaturbegriff festzuhalten für Atmosphärenschichten, in denen die mittlere freie Weglänge gleich 100000 km oder ca. 16 Erdradien, und die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen 5×10^4 sec oder ca. 16 Stunden ist. Wenn wir uns als Quelle der Erwärmung eine von der Sonne ausgehende Korpuskularstrahlung vorstellen, wie sie der Birkeland-Störmerschen Nordlicht-Theorie entspricht[2]), dann wird bei der genannten, sehr kleinen Moleküldichte praktisch genommen jedes Molekül, das hinlängliche Geschwindigkeit in einer Richtung von der Erde hinweg empfängt, in den Weltraum ohne Zusammenstöße hinausfliegen. Erst in den größeren Tiefen mit der größeren Moleküldichte wird ein „erwärmtes" Molekül Gelegenheit haben, durch schiefe Zusammenstöße seine Geschwindigkeit auf andere Moleküle zu verteilen, in dem Bestreben, das statistische Gleichgewicht herzustellen. Aber selbst hier wird ein „erwärmtes" Molekül (oder ein von ihm zentral getroffenes), wenn seine Geschwindigkeit bedeutend über dem Grenzwerte, ca. 10^6 cm/sec (siehe unten), gewesen ist, was gewiß nicht unwahrscheinlich scheint, einige Chance haben in den Weltraum zu fliegen, bevor das statistische Gleichgewicht eingestellt ist, und es wird somit möglich, daß ein größerer Bruchteil der zugeführten Energie zum Zerstreuen der Moleküle angewandt wird, als wenn die Energie erst im statistischen Gleichgewicht über sämtliche Moleküle verteilt wäre. Oder, anders gesagt, es ist möglich sich vorzustellen, daß die genannte Erwärmungsquelle imstande ist, die Moleküle zu zerstreuen ohne die gesamte Luftmenge bis an die nach der kinetischen Lufttheorie notwendige, relativ sehr hohe Temperatur zu erwärmen.

1) l. c.

2) Helge-Petersen: Physik. Zeitschr. **28**, 510, 1927.

Ein solcher Prozeß läßt sich am leichtesten denken, wenn die Korpuskularstrahlung aus der Sonne atomistischer Natur gedacht wird, das einzelne Partikel mag elektrisch geladen sein oder nicht. Eine solche Strahlung ist ja mehrmals als Ursache der magnetischen Störungen (die „Gewitter") angenommen worden; die gegenwärtige Auffassung — insofern es möglich ist, von einer Auffassung zu sprechen — scheint mit der Anwesenheit von sowohl positiv als negativ geladenen Partikeln in der Strahlung zu arbeiten. Wenn ferner ungeladene Partikeln für mögliche Bestandteile der Strahlung gehalten werden — eine doch nicht ganz zu verneinende Eventualität (z. B. α-Partikeln, die Elektronen eingefangen haben) — so muß beachtet werden, daß der Niederschlag einer solchen Strahlung nicht auf die polaren Gegenden beschränkt ist, vielmehr ist eine Verteilung über die Erde zu erwarten, die der allgemeinen Sonnenstrahlung entspricht.

Die Energie E, die das einzelne Molekül braucht, um in den Weltraum zu fliegen, ist

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{M}{R} m = R g m$$

(M = die Masse der Erde).

Da die Masse eines *He*-Atoms gleich $6{,}6 \times 10^{-24}$ g ist, wird

$$E = 4{,}2 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

und

$$v = \sqrt{2gR} = 1{,}1 \times 10^6 \text{ cm/sec}.$$

(Die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle eines Gases, das innerhalb 10^6 Jahren zerstreut wird, ist $2{,}66 \times 10^5$ cm/sec, und entspricht für *He* einer Temperatur von ca. 900^0 C.) Wenn die Zuströmung des *He* aus der Erde gleich 1 m^3/sec (siehe oben) ist, wird für die Zerstreuung dieser Menge eine Energiezufuhr von

$$E_1 = 4{,}2 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^{25} = 1{,}3 \times 10^{14} \text{ erg/sec},$$

oder jährlich

$$E_2 = 1{,}3 \times 10^{14} \times 3 \times 10^7 = 4 \times 10^{21} \text{ erg/Jahr}$$

nötig sein.

Zum Vergleich sei angeführt, daß Birkeland[1]) gefunden hat, daß die magnetischen

1) Birkeland: The norwegian aurora polaris exped. 1902—1903.

Störungskräfte eines starken, magnetischen Gewitters einer Korpuskularströmung sehr schneller β-Strahlen einem Effekt von ca. 4×10^{18} erg/sec entsprechen mögen. Die Energie, die der Atmosphäre durch die wegfliegenden *He*-Atome jährlich entzogen wird, macht so nur einen geringfügigen Teil der Energie aus, die in demselben Zeitraume in Korpuskularstrahlungen verschiedener Gattungen durch die obersten Schichten der Atmosphäre passiert oder in derselben absorbiert wird — von der Möglichkeit der ungeladenen Strahlung ganz abgesehen, deren eventuelle Anwesenheit nachzuweisen wir vorläufig ganz außerstande sind.

Zusammenfassung.

Die allgemeine Annahme, daß das Mischungsverhältnis der einzelnen Bestandteile der Atmosphäre in den höheren Schichten durch Diffusionsgleichgewicht bestimmt ist, führt zu der Folgerung, daß die Atmosphäre in den Höhen über ca. 200 km fast ausschließlich aus *He* bestehen muß (von Wasserstoff wird im allgemeinen abgesehen), in schroffem Widerspruch mit den Ergebnissen der Erforschung des Nordlichtes, dessen Spektrum keine *He*-Linien enthält. Weiter scheint die totale Menge von *He* in der Atmosphäre der aus der Erdoberfläche strömenden Menge gegenüber ziemlich klein, wenn sie nach derselben Annahme, auf der Grundlage des an der Erdoberfläche gefundenen Partialdruckes berechnet wird. Die Möglichkeit, daß das *He* in den Weltraum durch die thermischen Bewegungen der Moleküle zerstreut werde, ist bisher verworfen worden, weil die Temperatur der Stratosphäre nach den Beobachtungen viel zu niedrig ist, in guter Übereinstimmung mit verschiedenen theoretischen Überlegungen. Da aber neuere Untersuchungen für ein nochmaliges Ansteigen der Temperatur mit der Höhe sprechen, wird berechnet, welche Dichte von *He* zu erwarten ist, wenn der Zustand ein stationäres Strömungsgleichgewicht, statt eines „statischen" Diffusionsgleichgewichtes, ist. Es zeigt sich, daß die Dichte schneller mit der Höhe abfallen muß, und wenn der Zustand wirklich ein stationärer ist, wird die Dichte des *He* in den Nordlichthöhen verschwindend. Inwiefern dieser Zustand in der Atmosphäre auch verwirklicht ist, läßt sich jedoch nicht genau beurteilen, teils wegen der Unsicherheit der kinetischen Gastheorie (die Molekülgröße, der Ausdruck für den Diffusionskoeffizient) und teils wegen der Ungenauigkeit in der Bestimmung des *He*-Gehaltes der Atmosphäre und der Schätzung der *He*-Ausströmung aus der Erde. Die für die genannten Größen allgemein benutzten Zahlenwerte geben jedoch einen Zustand an, der dem stationären so nahe liegt, daß die Annahme des stationären Strömungszustandes als Ursache des *He*-Mangels in den großen Höhen jedenfalls für eine sehr wahrscheinliche gehalten werden muß.

Endlich wird die Möglichkeit einer Zerstreuung der *He*-Moleküle gezeigt durch das Anprallen der mehrfach angenommenen Korpuskularstrahlung aus der Sonne an den einzelnen *He*-Molekülen der Atmosphäre, ohne eine Erwärmung der betreffenden Schichten der Atmosphäre bis zu der hohen Temperatur — nach der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes — die der kinetischen Gastheorie zufolge nötig wäre. Es wird die Energie berechnet, die mit den zerstreuten Molekülen der Atmosphäre entzogen wird, und sie wird ganz unbedeutend gefunden gegenüber der Energie, die in den Korpuskularströmungen — nach deren magnetischen Wirkungen zu beurteilen — durch die Atmosphäre passiert.

Kopenhagen, Dänisches Meteorol. Institut, Juni 1928.

(Eingegangen 17. Oktober 1928.)

Das Physikalische Institut der Technischen Hochschule zu Breslau.

Von E. Waetzmann.

1. Entstehungsgeschichte.

Zum Wintersemester 1928/29 wird das neue Physikalische Institut der hiesigen T. H. in Betrieb genommen. Der Physikunterricht für die Studierenden der T. H. wurde bis zum 1. Oktober 1926 ausschließlich an der hiesigen Universität erteilt. Die große Experimentalvorlesung wurde gemeinsam für sämtliche Studierenden der Universität und der T. H. durch den Direktor des Universitätsinstituts abgehalten. Dort fand auch das Anfängerpraktikum für die Studierenden der T. H. statt. Nachdem die Hochschulen die Berechtigung zur Ausbildung von Kandidaten des höheren Lehramts math.-naturw. Richtung erhalten hatten und nachdem vor allem eine besondere Fachrichtung Physik in den Studienplan der Hochschulen aufgenommen war, wurde die Frage eines eigenen Instituts akut. Hier sollten in erster Linie Physiker für die Technik ausgebildet werden. Deshalb war zunächst beabsichtigt, im Rahmen eines großen Erweiterungsbaues der hiesigen T. H., zu dem der Grundstein am 1. 12. 1925 gelegt wurde, ein kleines Spezialinstitut für technische Physik zu errichten. Große Experimentalvorlesung und Anfängerpraktikum sollten an der Universität verbleiben, während

an der Hochschule Spezialvorlesungen und Übungen für technische Physiker stattfinden sollten. Demgemäß waren in dem Plan des Erweiterungsbaues nur recht bescheidene Pläne für die Physik vorgesehen.

Gelegentlich der Berufung des Schreibers dieser Zeilen an die T. H. wurde durch den Herrn Minister der Wunsch der Hochschule, den Gesamtunterricht in der Physik für die Studierenden der T. H. selbst zu übernehmen, erfüllt. Bedingung hierfür war, daß das Institut in dem genehmigten Erweiterungsbau unterzubringen sei und daß es keinerlei besondere bauliche Kosten verursachen dürfe. Um einen genügend großen, einigermaßen zusammenhängenden Block von Räumen für die Physik frei zu machen, mußte daher die Hochschule in anderen Beziehungen manches Opfer bringen und manchen langgehegten Wunsch zurückstellen, wofür auch an dieser Stelle allen beteiligten Herren gedankt sei. Besonders gilt dieser Dank dem damaligen Rektor, Herrn Schmeidler, der den Interessen der Physik jede nur mögliche Förderung zuteil werden ließ. Einige noch nicht vergebene Kellerräume, ein Fahrradstand, ein großer Musiksaal, ein Zeichensaal, einige Bureauräume und sonstige Einzelzimmer wurden zur Physik geschlagen, wobei die Beliebtheit des Sammlers dieser Räume nicht durchweg in dem gleichen Maße wuchs, wie die Zahl und die Größe der gesammelten Räume. Die Schwierigkeiten, ein physikalisches Institut gemeinsam mit anderen Instituten, Hörsälen, Verwaltungsräumen usw. in einem einzigen Bau unterzubringen, sind bekannt. Abgesehen von der schwierigen Frage des Abschlusses des Instituts, die in dem vorliegenden Falle in einigermaßen befriedigender Weise gelöst worden ist, müssen zahlreiche Wünsche der Physik, z. B. bezüglich der Kabelführung, den Belangen des Gesamtbaues geopfert werden. Diese Schwierigkeiten waren um so größer, als das Institut nachträglich in einen fertigen und bereits in der Ausführung begriffenen Bauplan einzugliedern war. Nur leichte, nicht tragende Wände konnten noch versetzt werden. Ferner wurde der Anbau eines kleinen Treppenhauses genehmigt, um besondere Zugänge und damit auch Notausgänge für den großen Hörsaal und für das Anfängerpraktikum zu schaffen. Der Leiter des Erweiterungsbaues, Herr Regierungsbaurat Dr. Ing. Müller, hat sich in dankenswerter Weise bemüht, gemeinsam mit dem Schreiber dieses Artikels die zweckmäßigste Unterteilung der Räume im Rahmen der geschilderten Möglichkeiten vorzunehmen. Einer der leitenden Gedanken hierbei war, diejenigen Räume und Einrichtungen (großer Hörsaal, Maschinen-, Schalt- und Akkumulatorenanlage, Werkstatt), deren nachträgliche Vergrößerung mit großen Kosten verknüpft sein würde, von vornherein möglichst großzügig anzulegen. Eine etwa notwendig werdende Erweiterung des Instituts würde sich deshalb verhältnismäßig leicht und billig durch Hinzunahme benachbarter Einzelzimmer oder durch Ausbau des schönen Dachgeschosses bewerkstelligen lassen. Wenn es trotz der geschilderten Schwierigkeiten und trotz der schweren Zeitverhältnisse gelungen ist, ein neues Institut zu schaffen, das modernen Anforderungen entspricht, so dankt die Hochschule hierfür dem Herrn Kultusminister sowie dem Herrn Finanzminister.

In der Übergangszeit vom Wintersemester 1926/27 bis jetzt nahmen die Studierenden der T. H. noch an der Experimentalvorlesung und an dem Anfängerpraktikum der Universität teil. Daneben wurde zur Entlastung der Universität ein Praktikum für Fortgeschrittene in einer zu diesem Zweck errichteten Holzbaracke von 120 m^2 Grundfläche abgehalten. In dieser Holzbaracke, in der noch eine provisorische Werkstatt mit einem Mechaniker untergebracht war, arbeiteten durchschnittlich 15 Herren, von denen einige Arbeiten druckfertig vorliegen. Für die apparative Einrichtung war von dem Herrn Minister eine Summe von 6000 RM. und ein Vorschuß auf die apparative Einrichtung des Instituts von 8000 RM. bewilligt worden. Außerdem hatte die Gesellschaft von Freunden der T. H. Breslau, der auch an dieser Stelle namens der Hochschule herzlichst gedankt sei, nicht unerhebliche Mittel zur Verfügung gestellt.

2. Lageplan.

Der Erweiterungsbau besteht aus einem nach der Oder zu gelegenen Hauptgebäude mit zwei Seitenflügeln, die sich an den Altbau anlehnen. In dem kleineren, östlichen Flügel und in den daran anschließenden Räumen der Hauptfront ist das Physikalische Institut untergebracht, Im Untergeschoß (Fig. 1) liegen die Werkstatt. der Maschinen- und der Akkumulatorenraum. Darunter befinden sich einige bescheidene Kellerräume. Das darüber liegende erste Obergeschoß gehört nicht zur Physik. Im zweiten Obergeschoß (Fig. 2) liegen an dem Haupteingang Schreibzimmer und Amtszimmer des Direktors, an das sich das Laboratorium des Direktors anschließt. Es folgen in der Hauptfront die Räume für das Anfängerpraktikum, Dunkelkammer, Akkumulatorenladeraum und Hauptverteilertafel, während in dem Flügel die Räume für das Praktikum für Fortgeschrittene liegen. Im dritten Obergeschoß (Fig. 3) liegen ein weiteres Arbeits- bzw. Assistentenzimmer, kleiner und großer

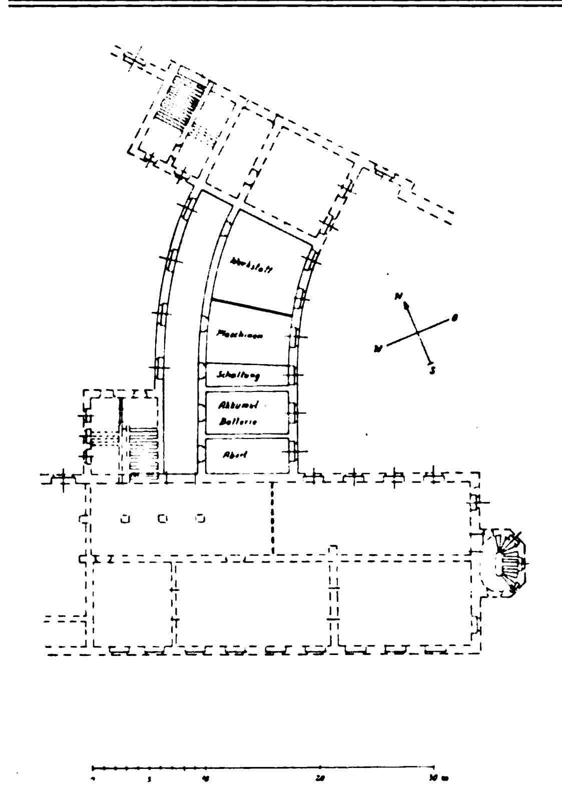


Fig. 1. Grundriß des Untergeschosses.

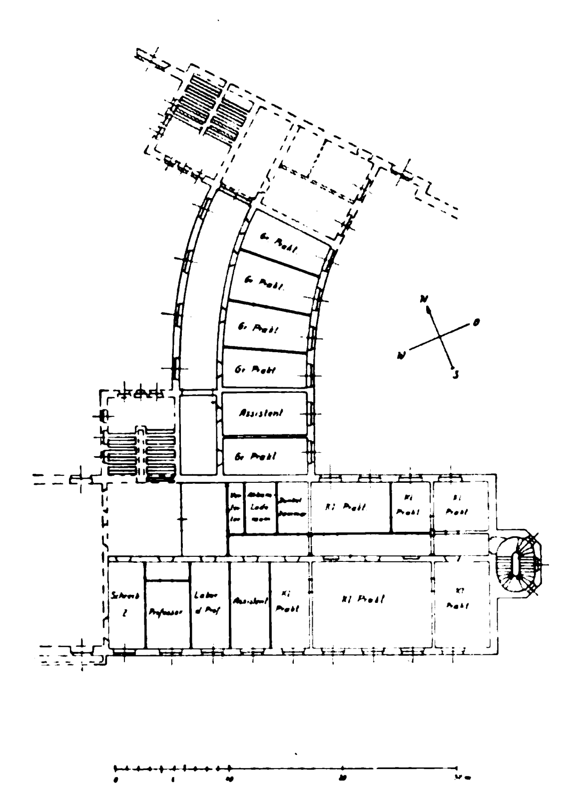


Fig. 2. Grundriß des zweiten Obergeschosses.

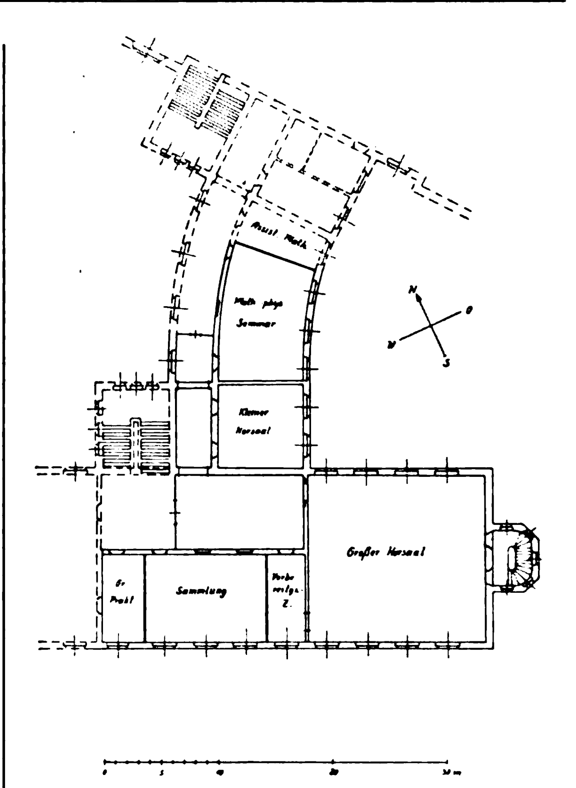


Fig. 3. Grundriß des dritten Obergeschosses.

Hörsaal mit Vorbereitungszimmer und Sammlungsraum. An den kleinen Hörsaal schließt sich das Mathematisch-physikalische Seminar an, in dem die Handbüchereien der Lehrstühle für Mathematik, Mechanik und Physik untergebracht sind. In den Korridoren sind Apparateschränke für das große Praktikum aufgestellt, so daß der Sammlungsraum im wesentlichen für die Vorlesungsapparate frei ist. Daneben sind in dem Korridor des zweiten Obergeschosses 24 Garderobenschränke für die Großpraktikanten untergebracht; die Hauptgarderobe nebst Toilettenraum liegt in dem Treppenhause, das den Zugang zum großen Hörsaal und zum kleinen Praktikum bildet. Ein Korridor des dritten Obergeschosses kann bei Bedarf für Zwecke des kleinen Praktikums nutzbar gemacht werden.

Der große Hörsaal, der mit moderner Lüftungsanlage versehen ist, enthält bei einer Breite von 14,7 m und einer Tiefe von 15,6 m 262 Sitzplätze, der kleine Hörsaal 45 Sitzplätze. Das Anfängerpraktikum hat etwa 35 Arbeitsplätze für je zwei Personen. Im großen Praktikum (Diplom- und Doktorarbeiten) lassen sich etwa zwölf Herren bequem unterbringen. Leider war es Raummangels wegen nicht möglich, ein besonderes Zwischenpraktikum einzurichten, das den Übergang vom kleinen zum großen Praktikum vermittelt.

3. Stromversorgung.

Die gesamte elektrische Einrichtung des Instituts wurde von der Siemens u. Halske A.-G. ausgeführt. Die Akkumulatoren wurden von der Akkumulatorenfabrik A.-G. Berlin geliefert.

A. Stromquellen.

1. Gleichstrom 220 V aus dem Netz der Hochschule; Maximalstrom 400 A, also Maximalleistung etwa 80 kW. Wird zum Antrieb der Motoren sämtlicher Umformer benutzt, für die Projektionsapparate und für gröbere Experimentierzwecke.

2. Batterie I. 36 Zellen; maximale Entladestromstärke 128 A, Kapazität 384 Ah bei dreistündiger Entladung; unterteilt in acht Gruppen zu 2, 2, 4, 6, 10, 12, 12, 24 V. Wird im wesentlichen für Meßzwecke verwendet.

3. Batterie II. 60 Zellen; maximale Entladestormstärke 108 A, Kapazität 324 Ah bei dreistündiger Entladung. Die letzten 20 Zellen der Batterie sind Schaltzellen zur Konstanthaltung der Spannung. Die Spannung wird normalerweise durch automatische Zellenschalter auf 110 V gehalten, kann aber durch Handsteuerung auf jede beliebige Zwischenstufe zwischen 80 und 120 V eingestellt werden. Wird im wesentlichen für gröbere Experimentierzwecke benutzt.

4. Gleichstrom-Gleichstrom-Lade-Umformer, bestehend aus Gleichstrom-Nebenschluß-Antriebsmotor zum Anschluß an 220 V, etwa 15 kW mechanische Leistungsabgabe; direkt gekuppelt mit Gleichstrom-Nebenschluß-Generator; Spannung des Generators normalerweise regulierbar zwischen 115 und 160 V, erforderlichenfalls herabregulierbar bis 24 V; Leistung 12,5 kW gleich etwa 109 A bei 115 V; Erregung umschaltbar von 110 auf 220 V; Erregerleistung 0,6 kW. Dient zur Ladung der beiden Batterien, kann aber auch für sich für Experimentierzwecke über Verteilertafel (siehe unter B) benutzt werden und kann bei starker Stromentnahme aus der 110 V-Batterie dieser Batterie parallel geschaltet werden.

5. Gleichstrom-Drehstrom-Umformer, bestehend aus Gleichstrom-Nebenschluß-Antriebsmotor zum Anschluß an 220 V, 13 kW mechanische Leistungsabgabe; Drehzahl durch Nebenschlußregelung veränderlich zwischen 1200 und 1800 U/Min; gekuppelt mit einem Drehstromgenerator mit sechs Klemmen, $3 \times 220/127$ V, Periodenzahl pro Sekunde regelbar von 40 bis 60 Perioden; Leistung 13 kVA bei $\cos \varphi = 1$ und 1500 U/Min Erregerspannung 110 V, Erregerleistung 0,6 kW.

6. Gleichstrom-Einphasen-Wechselstrom-Mittelfrequenz-Umformer, bestehend aus Gleichstrom-Nebenschluß-Antriebsmotor zum Anschluß an 220 V; mechanische Leistungsabgabe 10 kW bei 3000 U/Min; Drehzahl kann durch Nebenschlußregelung zwischen 1300 und 3600 Umdrehungen geändert werden; zur Frequenzmessung dienen zwei am Motor angebrachte Schleifringe; gekuppelt mit Einphasen-Wechselstrom-Mittelfrequenz-Generator mit zwei parallel bzw. in Reihe zu schaltenden Wickelungen für je 110 V; Leistung 7 kVA Periodenzahl regelbar von etwa 430 bis 1200. Erregerspannung 110 V, Erregerleistung 0,5 kW.

7. Gleichstrom-Gleichstrom-Hochspannungs-Umformer, bestehend aus einem Gleichstrom-Nebenschluß-Antriebsmotor zum Anschluß an 220 V, Leistung 10 kW; gekuppelt mit zwei Gleichstrom-Hochspannungs-Generatoren und mit einer Erregermaschine; Leistung der Generatoren je 5000 V bei 0,6 A. Geringste abnehmbare Spannung etwa 400 V. Die Generatoren können parallel oder in Reihe geschaltet benutzt werden. Erregerspannung durch die Erregermaschine maximal 220 V, Erregerleistung 1,2 kW.

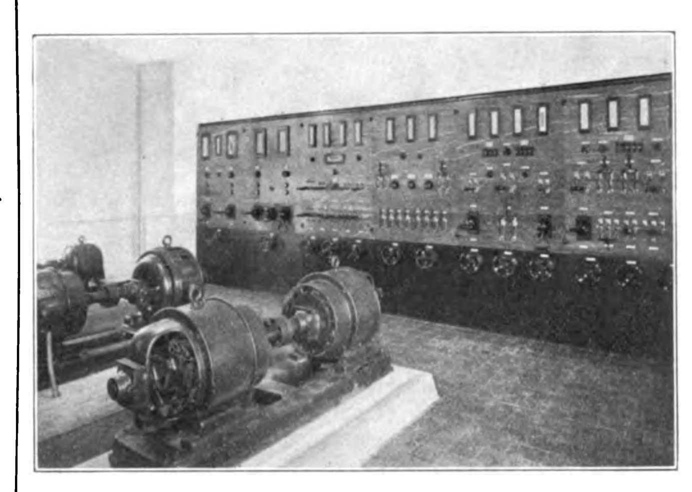


Fig. 4. Blick auf die Schalttafeln des Maschinenraumes.

Zur Veranschaulichung der Schaltanlage im Maschinenraum diene Fig. 4.

B. Stromverteilung und Abnahmetafeln.

Die Leitungen von den Stromquellen nach der Hauptverteilertafel und zu den Abnahmetafeln sind in Panzerkabeln verlegt. Mit Rücksicht auf Belange des Gesamtbaues mußte eine etwas eigenartige Kabelführung gewählt werden.

1. Die Hauptverteilertafel befindet sich im zweiten Obergeschoß. Es ist ein Kreuzschienenverteiler, bestehend aus vier Feldern mit 23 rückseitig, wagerecht angeordneten Primärschienen und 80 vorderseitig, senkrecht angeordneten Sekundärschienen. Die Primärschienen sind folgendermaßen verwendet: zwei für die Netzspannung von 220 V; zwei für die Batterie II

(110 V); neun für die unterteilte Batterie I (72 V) und zwar, bezogen auf die erste Schiene, in den Unterabteilungen 2, 4, 8, 14, 24, 36, 48, 72 V; zwei für den Ladeumformer; zwei für

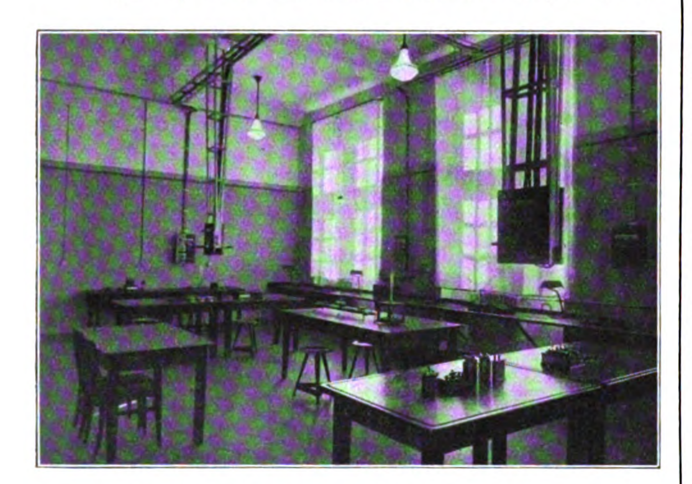


Fig. 5. Blick in den Elektrizitätsraum des Anfängerpraktikums.

den Mittelfrequenzumformer; vier für den Drehstromumformer und zwei als Reserve. Die von den Sekundärschienen abgehenden (wählbaren) Leitungen sind durch einpolige Schalter abschaltbar und normalerweise für je 60 A abgesichert.

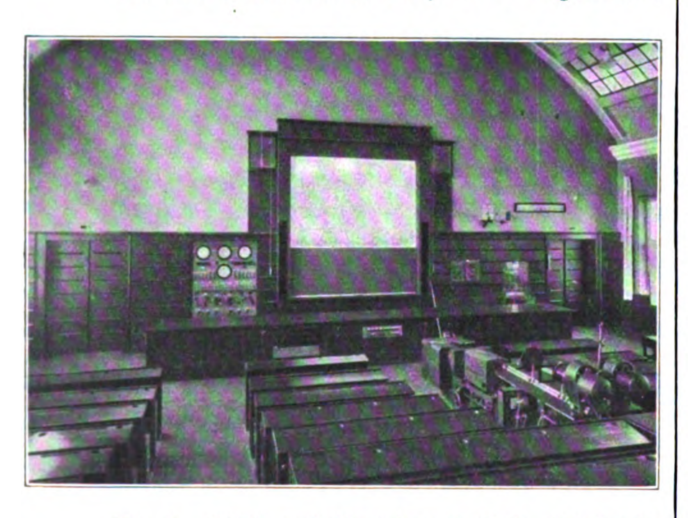


Fig. 6. Blick auf Experimentiertisch, Schalttafel und Projektionseinrichtung des großen Hörsaals.

Hinter der Tafel sind noch 2 × 2 Schienen für die im allgemeinen festliegende Verteilung der 220 V-Netzspannung der 110 V-Batterie-Spannung angeordnet.

2. An Abnahmetafeln in den Arbeitsräumen sind drei verschiedene Typen vorhanden. Die kleinste Type (14 Stück) ist hauptsächlich für das Anfängerpraktikum vorgesehen. Sie enthält je zwei Klemmenpaare mit zugehörigen zweipoligen Schaltern und Sicherungen. An dem einen Klemmenpaar liegen 110 V, an dem anderen ein wählbares Leitungspaar, im allgemeinen für 25 A abgesichert. An das letztgenannte Klemmenpaar können also nach Belieben von dem Hauptverteiler her die verschiedensten Stromquellen angeschlossen werden. Normalerweise liegt an ihm die unterteilte Batterie I.

Fig. 5 zeigt den Elektrizitätsraum des Kleinen Praktikums. An den von der Decke herunterhängenden Gerüsten sind je zwei Abnahmetafeln angebracht.

Die mittlere Type (7 Stück) hat noch ein zweites Paar wählbarer Leitungen. Außerdem haben einige dieser Tafeln Erregerleitungsanschlüsse zur Regelung von Spannung und Drehzahl der Generatoren.

Die dritte Type (3 Stück) besitzt Klemmenpaare (mit zweipoligen Schaltern und Sicherungen) für 220 V, 110 V und für die Mittelfrequenzmaschine; zwei Klemmenpaare für wählbare Leitungen, ferner Erregerleitungsanschlüsse wie die mittlere Type. Normalerweise sind die Leitungen für je 60 A abgesichert.

3. Der Experimentierschalttafel im großen Hörsaal (Fig. 6) sind die Netzspannung von 220 V, Batterie II (110 V) und die Mittelfrequenzmaschine direkt zugeführt, abschaltbar durch zweipolige Schalter, gesichert für 60 A Außerdem sind vier wählbare Leitungen (zwei Paar) vorhanden, abschaltbar durch zwei zweipolige Schalter, gesichert für 60 A. Hier kann also über die Verteilertafel (s. erste Nummer dieses Abschnitts) jede beliebige Stromquelle angelegt werden. Die einzelnen Stromquellen sind direkt zu den Abnahmestellen am Hörsaaltisch geführt, können aber auch über einen von zwei Universalreglern (U.-R.) für maximal 30 A benutzt werden, die sowohl als Spannungsteiler wie als Vorschaltwiderstände geschaltet werden können. Jeder der beiden U.-R. besitzt einen Umschalter mit je drei Schaltstellungen, durch den er wahlweise auf eine der genannten fünf Stromquellen umgeschaltet werden kann; die sechste Schaltstellung dient zur Parallelschaltung der beiden U. R.

Ferner sind die letzten 12 Schaltzellen der 110 V-Batterie direkt an die Schalttafel herangeführt und enden hier in zwei parallel liegenden Kurbelschaltern, so daß in zwei Leitungspaaren 24 V in Stufen von je 2 V zur Verfügung stehen; die Leitungen sind für 25 A abgesichert.

Auf der Schalttafel liegen noch 5 Klemmen, die mit der Erregerleiter-Verteilertafel (s. nächste Nummer dieses Abschnitts) verbunden sind, so daß die Generatoren auch vom großen Hörsaal aus geregelt werden können.

Zur Strom- bzw. Spannungsmessung sind vorhanden: Ein Drehspulstrommesser mit den Meßbereichen 0—30 und 0—75 A und ein Drehspul-Spannungsmesser mit den Meßbereichen 0—25 und 0—120 V; beide Instrumente für Gleichstrom. Ferner für Wechselstrom ein Dreheisen-Strommesser mit den Meßbereichen 1—5, 4—20 und 10—50 A und ein Dreheisen-Spannungsmesser mit dem Meßbereich 5—260 V. Die Meßinstrumente können außer zur Messung der direkten bzw. durch den Universalregler geregelten Ströme und Spannungen, mit Hilfe besonderer an den Abnahmetafeln am Hörsaaltisch angebrachten Klemmen auch zur Messung von Strömen und Spannungen irgendwelcher Stromkreise auf dem Experimentiertisch benutzt werden.

Zur Abnahme der Ströme dienen drei am Experimentiertisch befestigte Abnahmetafeln, zu denen die genannten Ströme entweder direkt oder über die Universalregler geführt sind. Einander entsprechende Klemmen der drei Abnahmetafeln sind parallel geschaltet. Eine Abnahmetafel ähnlicher Ausführungsform, die den Tafeln am Experimentiertisch parallel liegt, befindet sich im Vorbereitungszimmer.

An der Schalttafel im kleinen Hörsaal liegen die Netzspannung von 220 V und vier wählbare Leitungen (2 Paar) mit Sicherungen für maximal 60 A und zwei zweipoligen Hebelschaltern; ferner ein Universalregler für maximal 30 A, der mittels eines Umschalters mit drei Schaltstufen auf die genannten Leitungen geschaltet werden kann. Die Ströme können von einer am Experimentiertisch angebrachten Klemmentafel entweder direkt oder über den U. R. entnommen werden. Auf dieser Klemmentafel sind auch die Erregerleitungsklemmen für die Regelung der Generatoren untergebracht.

Die vier Meßinstrumente können, wie im großen Hörsaal, außer zur direkten Messung der Ströme und Spannungen an der Experimentierschalttafel auch zur Messung von Strömen und Spannungen in irgendwelchen Stromkreisen auf dem Experimentiertisch benutzt werden.

4. Die zu den Abnahmetafeln führenden Erregerleitungen endigen andererseits auf einer Erregerleiter-Verteilertafel, die hinter der Hauptverteilertafel liegt. Dort endigen auch die von dem Ladeumformer, dem Drehstromumformer und dem Mittelfrequenzumformer kommenden Leitungen zur Regelung der Spannung und der Drehzahl der Generatoren. Mit Hilfe der aus den einzelnen Räumen kommenden Leitungen kann in einfacher Weise eine Leitungsverbindung zwischen den einzelnen Zimmern hergestellt werden.

5. Für die Hochspannung sind vier Abnahmestellen mit gesonderter Kabelzuführung vorhanden. Eine davon ist in den Experimentiertisch des großen Hörsaals eingebaut und durch Handrad zu betätigen; ihre Klemmtafel ist durch eine herausnehmbare Platte abgedeckt. Die übrigen, im Laboratorium des Direktors bzw. im großen Praktikum liegenden Abnahmestellen sind an der Wand dicht unter der Decke angebracht und durch Schaltstangen zu betätigen. Über besondere Schalttafeln werden durch Handräder mit Hilfe von Relais zwei Motoren ferngesteuert, die auf die Wellen der Erregerregler für das Feld der Hochspannungsgeneratoren arbeiten und damit die Spannung zu regeln gestatten.

6. Zur Ladung der transportablen Akkumulatorenbatterien ist in dem hinter der Verteilertafel liegenden Laderaum eine besondere Schalttafel mit Meßinstrumenten angebracht. Der Strom wird der 24-V-Stufe der unterteilten Batterie I entnommen und ist mittels Plattenwiderstandes regelbar.

4. Sonstige technische Einrichtungen.

A. Projektionsapparate.

I. Großer Hörsaal:

1. Episkop der Fa. Carl Zeiss, Jena; Objektiv: Epiotar 1 : 4,5; Brennweite 30 cm; Apparat auf besonders niedrigem, fahr- und hochkurbelbarem Untergestell; die Neigung des Projektionsstrahles gegen die Horizontale beträgt etwa 8^0; infolge der niedrigen Lage des Projektionsobjektivs mußte ein besonders großer Umkehrspiegel von 205 × 305 mm vorgesehen werden; Lichtquelle: handregulierte Spiegelbogenlampe für 35 A, umschaltbar auf 110 und 220 V Gleichstrom; kreisförmiges Bildfeld 220 mm Ø.

2. Einrichtung zur Projektion von Diapositiven und für physikalische Versuche. Auf einem fahrbaren, besonders niedrig gehaltenen, auskurbelbaren Untergestell ist eine Tischplatte mit zwei parallel laufenden Dreikantschienen von 1,30 m Länge angebracht. Am Ende jeder Schiene ist eine Bogenlampe montiert, deren eine durch Trieb in der Höhe verstellbar ist, so daß auch Gegenstände von beliebiger Achsenhöhe projiziert werden können. Die Tischplatte ist bis zu 10^0 gegen die Horizontale neigbar. Zur Projektion von Diapositiven werden ein Kondensor mit auswechselbaren Linsen von 12 cm Ø und zwei achromatische Projektionsobjektive von 30 bzw. 40 cm Brennweite benutzt. Ferner ist eine Einrichtung zur Projektion durchsichtiger, horizontalliegender Objekte vorhanden. Lichtquellen: zwei handregulierte Bogenlampen für 10 A, umschaltbar auf 110 und 220 V. Die gesamte Einrichtung ist nach Angaben von seiten des Instituts von der Fa. Carl Zeiss, Jena, geliefert.

3. Ein Kinematograph der Zeiß-Ikon-A.-G., Dresden, Fabrikat Hahn-Goerz, für offenen Aufbau. Antrieb durch Motor mit Stillstands- und Rücklaufeinrichtung; Lichtquelle: 1000 W-Lampe für 220 V mit Hilfsspiegel und dreifachem Kondensor. Die Helligkeit ist vollkommen ausreichend.

II. Kleiner Hörsaal:

1. Ein Epidiaskop der Fa. E. Leitz, Wetzlar, mit zwei bzw. einer Lampe für je 500 W für episkopische bzw. diaskopische Projektion. Objektiv für diaskopische Projektion 25 cm Brennweite, für episkopische 40 cm Brennweite; Bildfeld bei Episkopie 180 × 180 mm.

Im kleinen Hörsaal ist die Projektionseinrichtung an der Seite untergebracht. Im großen Hörsaal mußten aber die Projektionseinrichtungen wegen der großen Breite des Saales in der Mitte angeordnet werden. Projiziert wird auf die Mitte der hinter dem Experimentiertisch liegenden Wand, vor der sich die Tafeln befinden, die bei Nichtgebrauch ganz herabgelassen werden können, so daß sie hinter einer Holzverkleidung verschwinden. Durch die unter I, 1 und 2 angegebenen Maßnahmen ist vermieden, daß die Projektionseinrichtungen die freie Sicht irgendwie behindern.

Im großen Hörsaal sind Gas und vier wählbare Leitungen (zwei Paar) zur Stromzuführung an den Projektionstisch herangeführt, so daß alle am Experimentiertisch verfügbaren Ströme auch an den Projektionsapparaten zur Verfügung stehen. Die Bedienungsschalttafel enthält drei Umschalter für die Bogenlampen zur Umschaltung auf 110 bzw. 220 V, einen Stufenschalter für den Vorwiderstand der Episkopbogenlampe zur Regelung der Stromstärke und einen Serienschalter nebst Verdunkelungswiderstand für zwei über dem Experimentiertisch hängende Lampen.

Der Kinoapparat steht gegenüber der Projektionsfläche an der Rückwand des Hörsaales. Die Bedienungsschalttafel enthält neben dem Schalter für den Betriebsstrom Schalter für die beiden hintersten Deckenlampen des Hörsaales und für eine Notbeleuchtung.

B. Druckluftanlage.

Sie besteht aus einer Kompressionspumpe für einen maximalen Überdruck von 3,6 Atm., mit Antriebsmotor und einem Druckkessel von 1000 Liter Inhalt. Der Druck in dem Leitungsnetz wird mit Hilfe eines automatischen Schalters, der den Antriebsmotor des Kompressors betätigt, konstant gehalten und kann auf jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 3,6 Atm. eingestellt werden. Entnahmestellen befinden sich in der Schmiede, in der Werkstatt, im großen und kleinen Hörsaal, in einem Zimmer des Kleinen Praktikums und in fünf Arbeitsräumen.

C. Werkstatt.

Sie ist mit folgenden Werkzeugmaschinen ausgestattet:

1. Eine Leit- und Zugspindeldrehbank der Ludwig Loewe A.-G., Berlin. Type DL. 414 RV (3 A III v); Hauptantrieb durch Stufenscheibe; Vorschub und Leitspindelantrieb durch Vorschubräderkasten bzw. Wechselräder; Spitzenhöhe 185 mm; Drehlänge 1400 mm; mit besonders genauer Leitspindel, Genauigkeit 0,01 mm auf 300 mm Länge.

2. Eine Präzisionspatronendrehbank von Karl Auerbach u. Sohn, Radebeul-Dresden. Type SAD 4, für Kraft- und Fußbetrieb; Spitzenhöhe 155 mm, Drehlänge 860 mm.

3. Eine Horizontalstoßmaschine der Ludwig Loewe A.-G., Berlin, mit Zahnstangenantrieb, Type 26 A I, Hublänge 450 mm.

4. Eine Säulenbohrmaschine, Bohrleistung 23 mm.

5. Eine Tischbohrmaschine, Bohrleistung 10 mm.

6. Eine Schleifmaschine mit zwei Schmirgelscheiben von je 20 cm Durchmesser.

Die Werkzeugmaschinen mit Ausnahme der unter 5. genannten, die einen eigenen Motor besitzt, werden über Transmissionen und Deckenvorgelege durch einen elektrischen Motor von 4 kW mechanischer Leistungsabgabe betrieben.

Im Kellergeschoß unter der Werkstatt ist eine Schmiede untergebracht.

D. Telephon.

Das Institut besitzt ein eigenes Haustelephon mit zehn Sprechstellen. Vier dieser Sprechstellen haben über die Zentrale der T. H. Anschluß an die übrigen Institute sowie direkten Anschluß an das Stadtnetz.

5. Kosten der maschinellen und apparativen Einrichtung.

Es standen 230 000 RM. zur Verfügung. Diese Summe verteilt sich ungefähr wie folgt:

Gesamte elektrische Einrichtung	112 000	RM.
Bauliche Montage	7 000	„
Werkstatt	10 000	„
Vorlesungsapparate	22 000	„
Apparate für das Kleine Praktikum	24 000	„
Apparate für das Große Praktikum und für wissenschaftliche Arbeiten	55 000	„
	230 000	RM.

Die Projektionseinrichtungen wurden aus einem anderen Fonds („Innere Einrichtung") bezahlt.

Die in dem ersten Abschnitt dieses Artikels erwähnten 6000 RM. sowie die von der Gesellschaft von Freunden der T. H. zur Verfügung gestellten Mittel wurden in der Hauptsache zur Beschaffung von Apparaten für wissenschaftliche Arbeiten verwendet.

Der Oberassistent, Herr Dr. J. Friese, hat sich bei der maschinellen und apparativen Einrichtung des Instituts große Verdienste erworben, wofür ihm auch an dieser Stelle herzlich gedankt sei.

Bei der Inbetriebnahme des eigenen Instituts gedenkt die Hochschule dankbar der langjährigen Gastfreundschaft, die sie von seiten der Universität genossen hat. Die äußere Trennung bedeutet keine innere. Das wird schon dadurch dokumentiert, daß der Direktor des Hochschulinstituts zum Honorarprofessor an der Universität ernannt wurde, daß die Studierenden der Physik der T. H. an Spezialvorlesungen der Universität teilnehmen und daß das physikalische Kolloquium von Universität und Hochschule gemeinsam abgehalten wird.

Breslau, Physikal. Inst. d. Technischen Hochschule, 10. Oktober 1928.

(Eingegangen 11. Oktober 1928.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 90. VERSAMMLUNG DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE IN HAMBURG VOM 16.—22. SEPTEMBER 1928.

W. Bothe (Berlin), Anregung von Röntgenspektren durch α-Strahlen. (Nach gemeinsamen Versuchen mit H. Fränz.)

Die in der üblichen Weise gemessene Ionisation durch α- und Elektronenstrahlen stellt ein sehr zusammengesetztes Phänomen dar, weil sie fast ausschließlich die äußeren Atomelektronen betrifft, für welche eine verwickelte Mannigfaltigkeit von Übergängen möglich ist; hinzu kommen Sekundäreffekte verschiedener Art. Viel einfachere Verhältnisse liegen vor, wenn man die Ionisation der inneren Elektronenschalen, welche nur einen winzigen Bruchteil der Gesamtionisation ausmacht, getrennt beobachtet. Hierzu kann die charakteristische Röntgenstrahlung herangezogen werden, deren Intensität ein direktes Maß für die Ionisierungsstärke liefert, denn beispielsweise zeigt jedes emittierte Quant der K-Serie eine Ionisation in der K-Schale an. Allerdings braucht nicht umgekehrt jede K-Ionisation ein K-Quant zu liefern, da „innere Absorption" der Strahlung eintreten kann. Da diese aber, soweit bisher bekannt, unabhängig von der Art der Anregung ist, so muß für ein gegebenes Element die Strahlungsintensität jedenfalls proportional der Ionisation sein.

Für Kathodenstrahlen ist vielfach die Anregung der Röntgenserien untersucht worden. Für α-Strahlen lag bisher nur die Feststellung vor, daß in einigen Elementen die charakteristischen Röntgenstrahlen erregt werden können. Die zu messenden Intensitäten sind in diesem Falle äußerst gering, daher kann die Identifizierung der Strahlung nur an Hand der Absorptionskurve erfolgen.

Bei den vorliegenden Versuchen bedienten wir uns einer Anordnung, welche bereits bei Untersuchungen über Atomzertrümmerung benutzt worden war (Fig. 1). Die α-Strahlen eines reinen

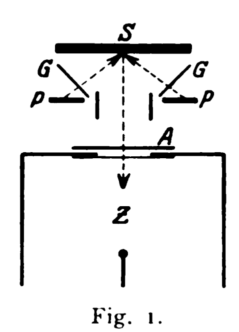


Fig. 1.

Poloniumpräparates PP von einigen 0,1 mg Ra-Äquivalent fielen im Vakuum auf eine dicke Schicht der Versuchssubstanz S. Die von S ausgehenden Sekundärstrahlen wurden mittels eines mit Argon gefüllten Spitzenzählers Z registriert. Unter den angewandten Bedingungen machten die durch Atomzertrümmerung etwa entstehenden H-Strahlen nur einen verschwindenden Bruchteil der gemessenen Sekundärintensität aus. In den primären Strahlengang konnten zur Variation der α-Reichweite Glimmerfolien GG von abgestufter Dicke gebracht werden. Zur Aufnahme der Ab-

sorptionskurven dienten Aluminiumfolien *A*, welche in den sekundären Strahlengang geschaltet wurden.

Da die Empfindlichkeit des Argonzählers für Röntgenstrahlen in komplizierter Weise von deren Wellenlänge abhängt, konnte nur bei gewissen Elementen die *K*-Strahlung, bei anderen wiederum nur die *L*-Strahlung nachgewiesen werden. *K*-Strahlung wurde gefunden bei *Mg*, *Al*, *S*, *Ca*, *Cr*, *Fe*, *Zn*, *L*-Strahlung bei *Se*, *Mo*, *Pd*, *Ag*, *Sb*, *Sn*, *Ta*, *Ir*, *Au*, *Bi*, *M*-Strahlung bei *Bi*. Einige der Absorptionskurven wurden bereits an anderer Stelle wiedergegeben[1]). Die beobachteten Absorptionskurven stimmten mit den theoretisch zu erwartenden so weit überein, daß außer den charakteristischen Strahlungen keine andere Strahlung von vergleichbarer Härte und Intensität vorhanden sein kann, insbesondere keine Bremsstrahlung. Dies ist auch wegen der großen Masse des α-Teilchens nicht anders zu erwarten.

Die Abhängigkeit der Röntgenintensität von der Reichweite der α-Strahlen wurde untersucht für die *K*-Strahlung von *Al*, *Ca* und *Fe* und die *L*-Strahlung von *Ta*. Die Resultate wurden korrigiert für die Absorption der Röntgenstrahlen in der Substanz selbst; diese Korrektion hatte keinen großen Einfluß auf die Form der Abhängigkeit. In allen Fällen ergab sich ein rascher Intensitätsabfall mit abnehmender α-Reichweite (Fig. 2;

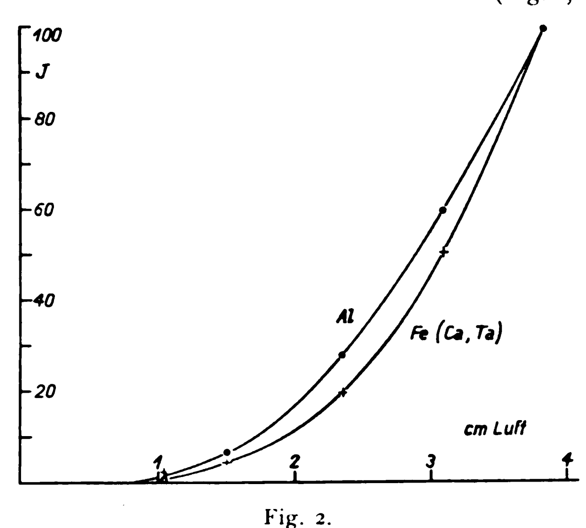


Fig. 2.

die maximale Intensität ist = 100 gesetzt). Während aber die Kurven für *CaK*, *FeK* und selbst *TaL* innerhalb der Meßfehlergrenze zusammenfallen, liegt die *AlK*-Kurve deutlich getrennt von diesen.

Von der so gemessenen „totalen Ionisation" *J* kann man zu der „differentialen Ionisation" *i*, d. h. der Ionisation pro Einheit der α-Bahnlänge übergehen. Hierzu hat man die Kurve Fig. 2 umzuzeichnen, indem man als Abszissen statt der Luftreichweiten die wahren Reichweiten in der betreffenden Substanz wählt; diese Kurve ist dann zu differenzieren. Man kann auch die differentiale Ionisation direkt messen, indem man eine sehr dünne Substanzfolie benutzt, dieses Verfahren

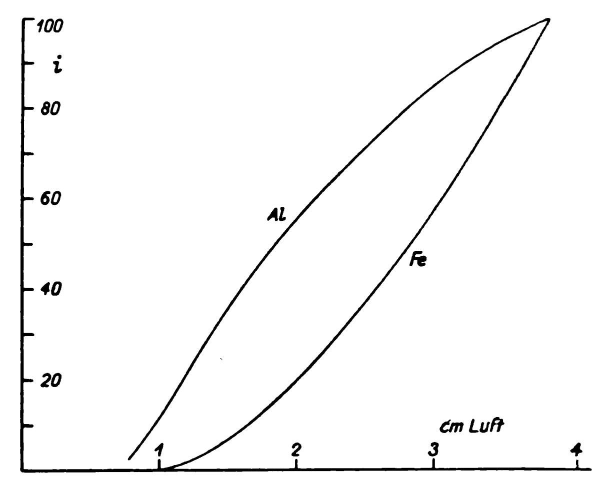


Fig. 3.

wurde nur beim *Al* angewandt, bei den übrigen Substanzen waren die Intensitäten zu klein. Die Genauigkeit der Differentialkurven ist naturgemäß geringer als die der Totalkurven. Für *Ca*, *Fe* und *Ta* zeigt auch die differentiale Ionisation ganz ähnlichen Verlauf, während das abweichende Verhalten des *Al* hier noch stärker hervortritt als bei der totalen Ionisation (Fig. 3).

Man würde für die differentiale Ionisation der inneren Elektronenschalen einen ähnlichen Verlauf erwarten wie für die gewöhnliche Ionisation („Braggsche Kurve"), aber mit dem Unterschied, daß entsprechend der größeren Ionisierungsarbeit das Maximum der Ionisation bei größerer Reichweite liegen sollte. Offenbar ist nun in allen hier untersuchten Fällen die maximale Reichweite der benutzten α-Strahlen nicht ausreichend, um bis zum Maximum der differentialen Ionisation vorzudringen, die erhaltenen Kurvenstücke liegen alle auf dem aufsteigenden Teil der Braggschen Kurve; nur beim *Al*, dem Element mit der kleinsten Ionisierungsarbeit, deutet sich das Umbiegen der Kurve zum Maximum an.

Eine bestimmte untere Grenzreichweite für die Anregung ist aus unseren Messungen nicht zu erschließen; aber es läßt sich sagen, daß Ionisation noch weit unterhalb derjenigen Grenze erfolgt, welche die klassische Thomsonsche Theorie der Ionisation liefert[1]), denn diese Grenze würde für

1) W. Bothe u. H. Fränz, Zeitschr. f. Phys. **49**, 1, 1928.

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. **23**, 449, 1912.



Al bei 1,6 cm, bei den übrigen Elementen sogar außerhalb der ursprünglichen Reichweite der Poloniumstrahlen liegen. Andererseits sollte nach der Wellenmechanik der Stoßvorgänge[1]) die Ionisation bereits bei außerordentlich kleinen Reichweiten einsetzen (nämlich bei Geschwindigkeiten von einigen 10^7 cm/sec). Dies scheint jedenfalls unseren Messungen nicht zu widersprechen, obwohl diese wegen Intensitätsmangels nicht bis zu sehr kleinen Reichweiten ausgedehnt werden konnten. Es scheint keine grundsätzlichen Schwierigkeiten zu bieten, die in Frage stehenden Anregungsfunktionen im einzelnen wellenmechanisch zu berechnen und mit den Meßergebnissen zu vergleichen.

Was die Ausbeute an Röntgenstrahlen betrifft, so steigt diese ebenso wie die Ionisation mit abnehmender Ionisierungsarbeit, also abnehmender Ordnungszahl regelmäßig an.

1) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **38**, 803, 1926.

J. Brentano (München), Intensitätsmessungen von an Kristallpulvern gestreuten Röntgenstrahlen.

Messungen der Intensität der von Kristallen gestreuten Röntgenstrahlen werden einerseits bei der Erforschung des Atombaues, anderseits bei der Bestimmung von Kristallstrukturen herangezogen. Es ergibt sich dabei eine gewisse Schwierigkeit dadurch, daß bei der Interpretation der Intensitäten eine Reihe von Faktoren auftreten, von denen einige nur ungenau bekannt sind.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Zerlegung des Problems in der Weise angestrebt, daß zunächst Messungen bei kleinen Ablenkungswinkeln, bei denen einige Faktoren im Intensitätsausdruck bestimmte Werte annehmen, gemacht werden. Die Effekte der räumlichen Ladungsverteilung des Atoms und der Wärmebewegung treten hierbei zurück und es ergeben sich Vereinfachungen bei der Prüfung einiger allgemeiner Annahmen über das Streuvermögen der Atome. Die Messungen müssen hierbei an Kristallen gemacht werden, die aus hinreichend kleinen regelmäßigen Einheiten bestehen, um Extinktionseffekte vernachlässigen zu können. Diese nehmen mit abnehmendem Ablenkungswinkel rasch zu und sind im allgemeinen nur vernachlässigbar, wenn die Kristalleinheiten die Größenordnung 10^{-6} cm nicht überschreiten.

Es wird eine Methodik angegeben, welche gestattet quantitative Messungen der von feinen Kristallpulvern gestreuten Strahlung zu machen, welcher eine vom Verfasser früher angegebene fokussierende Bedingung zugrunde liegt. Es ergeben sich dabei gewisse Vereinfachungen im Vergleich mit der Auswertung der Reflexionen, die an einer einzelnen Kristallfläche gemessen sind. Bei absoluten Messungen hat die Korrektion für Absorption einen konstanten Wert für alle Reflexionen, bei relativen Messungen braucht sie nicht berücksichtigt zu werden.

Nach dieser Methode werden vergleichende Messungen an grobem Goldpulver und an kleinen Goldteilchen gemacht, welche der Bedingung verschwindender Extinktion genügen. Es zeigt sich daß obwohl die bekannte Verbreiterung der Goldreflektionslinien und die Duktilität des Goldes an und für sich kleine Kristalleinheiten erwarten lassen, die Extinktion in den groben Goldpulverteilchen doch einen beträchtlichen Wert hat. Es weist dies darauf hin, daß bei Messungen an gröberen Pulvern oder an einzelnen Kristallen der Berücksichtigung der Extinktion besondere Aufmerksamkeit zu schenken ist. Es werden ferner Messungen an Aluminium, Silber und Gold mitgeteilt und es wird gefunden, daß die gestreute Intensität bei den schweren Atomen nahezu proportional mit der effektiven Ladung F, nicht mit ihrem Quadrat wächst.

H. Beutler (Berlin-Dahlem), Resonanz bei Stößen zweiter Art. (Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.)

Bei der Einstrahlung der Linie 2537 in ein Gemisch von Natrium und Quecksilberdampf bei 300° erscheint das Spektrum des Natriums in Emission als „sensibilisierte Fluoreszenz"[1]), dessen Intensitätsverteilung anormal ist; maximale Intensität zeigt die Linie ($7S$—$2P$), deren Anregungsspannung ($1S$—$7S$) der Energie des angeregten Quecksilbers (2^3P_1—1^1S_0) am nächsten liegt[2]). Bei Zusatz von Stickstoff geht das Quecksilber in den metastabilen Zustand 2^3P_0 über und liefert nun ein *Na*-Spektrum mit maximaler Intensität bei $5S$—$2P$. Die Umlagerung des 2^3P_1 in 2^3P_0-Quecksilber wird somit meßbar nach einer Methode, die direkt deren Konzentrationsverhältnis in der Intensitätsbeziehung der beiden *Na*-Linien $7S:5S$ bestimmt.

1) J. Franck u. P. Jordan, Anregung von Quantensprüngen, Springer 216, 1926; P. Pringsheim, Fluoreszenz u. Phosphoreszenz, Springer, 136, 1928.
2) H. Beutler u. B. Josephy, Naturw. **15**, 540, 1927.



Setzen wir Wasserstoff dem Gemenge Na + Hg zu, so wird nur eine allgemeine Abschwächung des Na-Spektrums ohne Veränderung der relativen Linienintensitäten beobachtet. Die Dissoziation des Wasserstoffes wird also direkt vom 2^3P_1-Quecksilber bewirkt, das mit 112 Kcal. die zu 100 Kcal. nötige Trennungsarbeit übertrifft. Der Übergang von 2^3P_1- in 2^3P_0-Hg könnte sehr schnell verlaufen, da seiner Energie der Übergang des Wasserstoffs von A_0^1 in A_0^5 (Sprung um 4 Rotationsquanten) benachbart ist. Dieser Prozeß scheint aber nur sehr selten aufzutreten. Aus der gleichmäßigen Schwächung der Na-Serienglieder bis herab zu 100 Kcal. des Ausgangsterms ergibt sich, daß bei den geringeren Energien keine wesentlich erhöhte Wahrscheinlichkeit für die Dissoziation liegt. Das „Kontinuum" der Spaltung in zwei Atome, das sich den Schwingungstermen anschließt, verläuft somit flach ohne ausgesprochenes Maximum nahe der Seriengrenze. Der Stoßquerschnitt des H_2 für angeregtes Quecksilber beträgt etwa den zehnfachen des gaskinetischen.

Bei Stickstoff wird eine sehr starke Umlagerung des Quecksilbers in den metastabilen Zustand gefunden, die bei 0,08 mm schon die Hälfte der angeregten Hg-Atome erfaßt. Die Wirkung reicht also über den 20fachen gastheoretischen Querschnitt. Bei Erhöhung des Na-Dampfdruckes und festgehaltenem N_2-Druck werden mehr Hg-Atome schon im 2^3P_1-Zustand getroffen, die 7 S-Linie also relativ zu 5 S verstärkt; eine proportionale Vermehrung des N_2-Druckes bewirkt wieder Gleichheit beider Zustände des Natriums. Aus dieser Beziehung kann auf den Wirkungsquerschnitt des Na für den Übergang 1 S—7 S geschlossen werden, der sich zu dem etwa 400 fachen gaskinetischen ergibt.

Der hohe Wirkungsquerschnitt des Stickstoffs wird verständlich aus der Lage seines ersten Schwingungsquants bei 0,287 Volt, das bei Mitwirkung einiger thermisch angeregter Rotationen durch 0,218 Volt Energieabgabe des Hg erreichbar ist. Damit steht die geringe Auslöschung der Resonanzfluoreszenz bei 20°C [1]) und deren Wiedererscheinen bei 750° in Einklang[2]). Das Kohlenoxyd hat bei 0,265 Volt den ersten Schwingungsterm; es wirkt demgemäß stärker als Stickstoff auf das Quecksilber, lagert mit etwa 60 fachem Querschnitt ins metastabile um. Infolge des Dipolmoments kann das Schwingungsquant ausgestrahlt werden (bei 4 μ), die Resonanzfluoreszenz wird also viel stärker ausgelöscht; (0,4 mm CO oder 20 mm N_2 reduzieren auf die Hälfte[1]). Auch die metastabilen Hg-Atome werden durch CO zerstört.

1) H. A. Stuart, Zeitschr. f. Phys. **32**, 262, 1925.
2) G. Cario und J. Franck, Zeitschr. f. Phys. **37**, 619, 1926; O. Oldenberg, Zeitschr. f. Phys. **49**, 609, 1928.

Edelgase können bei Umlagerungen von Thermen des Na oder Hg die Anregungsenergie lediglich als Translationsenergie aufnehmen. Es tritt eine Intensitätsverflachung im Na-Spektrum bei 7 S auf, wenn Nachbarterme mit Energiedifferenzen von etwa 0,03 Volt sich bei Stößen innerhalb $< 10^{-8}$ sec „umsetzen" können; Quecksilber stellt 10^{-7} sec die Energie 0,218 Volt zur Verfügung. Die Beobachtung ergibt, daß die Übergänge im Na- gegen die im Hg-Schema mit wachsendem Atomgewicht des stoßenden Edelgases immer mehr zurücktreten. Da das Verhältnis der Stoßzahlen der einzelnen Edelgase auf Na und Hg immer gleich bleibt (bei He, Ne, A, Kr), muß eine von dem Atomgewicht abhängige Struktur des Wechselwirkungsfeldes der Atome angenommen werden, derart, daß zwischen Hg und He ein schwächeres Feld besteht als zwischen Hg und Kr.

Aus der Wirkung der Edelgase läßt sich der Effekt abschätzen, den Na und Hg selbst im Versuche als Termumlagerung verursachen; er bleibt sehr gering. Bei Vermehrung des Hg-Druckes macht sich die Rückwirkung der Resonanz von den Na-Termen zum Hg bemerkbar, das deren Energie aufnimmt. Setzen wir die Natriumserie allgemein an

$$J_{Na} = R_1 J_1 + R_2 J_2 + R_3 J_3 + \cdots$$

wobei die Intensität jeder Linie durch das normale Auftreten J_n (stat. Gewicht, Übergangswahrscheinlichkeit) und den Resonanzfaktor der Anregung R_n gegeben ist. Bei höherem Hg-Druck wirkt jeder Na-Term mit dem gleichen Faktor R_n auf Hg zurück; es wird also jedes Glied durch sein R_n dividiert und die normale Intensität des Na-Spektrums wird ausgestrahlt. Da dieser Effekt bei 0,2 mm/Hg deutlich ist, ergibt sich auch aus der „Rückwirkung" der 600 fache Wirkungsquerschnitt.

Die Auswahlregeln für Termübergänge, die für Strahlung streng und Elektronenstöße qualitativ gelten, werden bei Atomstößen durchbrochen[1]). So wird das Na aus 1 S nach 7 S gebracht, der N_2 ohne Dipolmoment erhält ein Schwingungsquant, H_2 wird in zwei normale Atome dissoziiert. Nur das Verbot von Übergängen, das durch den verschiedenen Charakter zweier Zustände (symmetrisch-antisymmetrisch) gegeben wird, scheint auch bei Stößen Geltung zu behalten[2]).

1) J. J. Placinteanu, Zeitschr. f. Phys., **39**, 276, 1926.
2) R. W. Wood u. F. W. Loomis, Phil. Mag. **6** (7), 231, 1928; H. Beutler, Zeitschr. f. Phys. **50**, 581, 1928.

Rausch von Traubenberg (Prag), Über das optische Verhalten der Wasserstoffatome in sehr starken elektrischen Feldern.

Gemeinsam mit Herrn R. Gebauer wurden weitere Versuche über die zeitliche Anpassung der *H*-Atome bei plötzlichen elektrischen Feldänderungen angestellt, bei denen nunmehr statt der Lo Surdo- die Starksche Anordnung mit getrenntem Felde angewandt wurde[1]). Auch bei dieser Anordnung zeigte sich eine zeitliche Anpassung der Atome an den Feldzustand, indem außer dem Aufspaltungsbild der ruhenden Intensität ein zweites, offenbar von der bewegten Intensität herrührendes Aufspaltungsbild auftrat. Es wurden Felder bis 420000 Volt/cm erhalten. Infolgedessen konnte außer dem Starkeffekt erster Ordnung auch derjenige zweiter Ordnung beobachtet und ausgemessen werden. Dieser Effekt war bereits von Epstein nach der Bohrschen Theorie berechnet worden und die von Takamine und Kokubu gefundenen Rotverschiebungen waren von Sommerfeld als Starkeffekt zweiter Ordnung gedeutet worden. Weitere Beobachtungen wurden von Kiuti Kinti und von Foster angestellt. Ersterer erreichte Feldstärken bis zu 290600 Volt/cm.

Wie die Berechnungen von Gregor Wentzel und Ivar Waller zeigen, ergibt der Starkeffekt zweiter Ordnung nach der Schrödingerschen Theorie etwas größere Werte wie die Epsteinschen. Durch diesen Umstand gewinnt der Effekt erhöhte Bedeutung. Während nun die früheren Messungen zu stark streuten, um aus ihnen quantitativ genaue Rückschlüsse ziehen zu können, war es bei unseren Experimenten dank der Starkschen Anordnung möglich, sowohl eine genaue Proportionalität zwischen Rotverschiebung und Quadrat der Feldstärke nachzuweisen, als auch die Theorien quantitativ zu prüfen. Es ergab sich, daß für die Mittelkomponente von $H\gamma$ die Schrödingersche Theorie bestätigt wird, während die Werte nach Epstein wesentlich unter unsere Meßpunkte fallen. Doch zeigen die höheren Komponenten von $H\gamma$ erhebliche Abweichungen nach oben auch in bezug auf die Schrödingersche Theorie.

Die von uns erreichten sehr großen Feldstärken eröffnen uns u. a. die Möglichkeit auch die Hyperfeinstruktur mancher Komponenten infolge zweifacher Übergangsmöglichkeiten zu beobachten. Wir beabsichtigen außer $H\gamma$ auch die andern Serienlinien des Wasserstoffs genauer zu untersuchen und auszumessen.

1) Rausch von Traubenberg, Die Naturwissenschaften **33**, p. 655, 1928.

H. O. Kneser (Marburg), Über die Natur des aktiven Stickstoffs.

Das Auftreten von aktivem Stickstoff ist fast immer mit Emission einiger Banden des Stickstoffspektrums, dem Nachleuchten (Nl.), verbunden. Aus der Zeitfunktion, nach welcher das Nl. abklingt, müssen also wesentliche Schlüsse auf den Entaktivierungsmechanismus und damit auf die Natur des aktiven Stickstoffs gezogen werden können. Ich habe daher von neuem[1]) die Abklingung photometrisch untersucht, und zwar am elektrodenlos angeregten, nicht strömenden Gase und unter weitgehender Variierung der Versuchsbedingungen.

Die Nl. Intensität (J) wurde vermittelst Lummerwürfels mit einer konstanten, durch Graugläser meßbar geschwächten Lichtquelle verglichen, und der Zeitraum zwischen je zwei bekannten Nl. Intensitätswerten durch Messung mit der Stoppuhr bestimmt; über mehrere Einzelmessungen, für deren jede das Nl. von neuem erregt werden mußte, wurde gemittelt. Die so erhaltenen Werte ergeben sehr genaue und reproduzierbare Abklingungskurven.

Zu erwarten ist folgendes: Unter Zugrundelegung der Atomauffassung (Aktiver Stickstoff = atomarer Stickstoff; Entaktivierung durch Rekombination der Atome im Dreierstoß mit einem

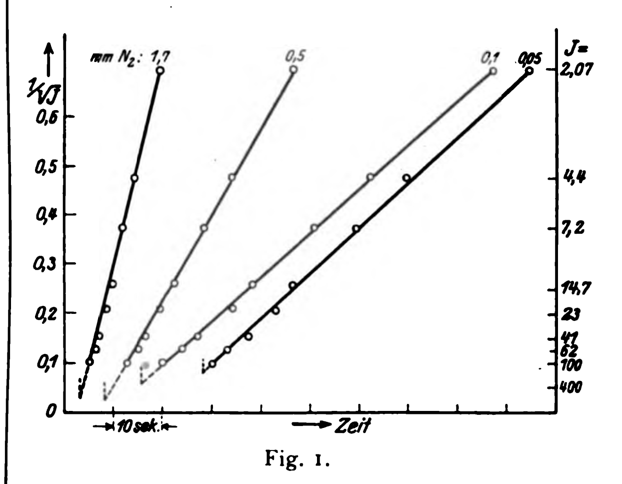


Fig. 1.

neutralen Molekül; Dissoziationswärme in Strahlung (Nl.) umgesetzt) muß $\frac{1}{\sqrt{J}}$ lineare Funktion der Zeit sein, allerdings nur, wenn keine Entaktivierung durch Stöße an die Gefäßwandung erfolgt. Nach der Molekülauffassung (Aktiver Stickstoff = metastabile Stickstoffmoleküle von

1) Mit anderen Methoden sind bereits früher Abklingungsmessungen angestellt worden von E. von Angerer, R. Rudy, A. König, K. F. Bonhoeffer und G. Kaminsky, E. J. B. Willey.



abnorm großer Lebensdauer) andererseits sollte $\log J$ linear von der Zeit abhängen, auch bei beliebiger Wandentaktivierung.

Das Letztere habe ich in keinem Falle beobachtet. Die Molekülauffassung ist also mit diesen Versuchen nicht vereinbar.

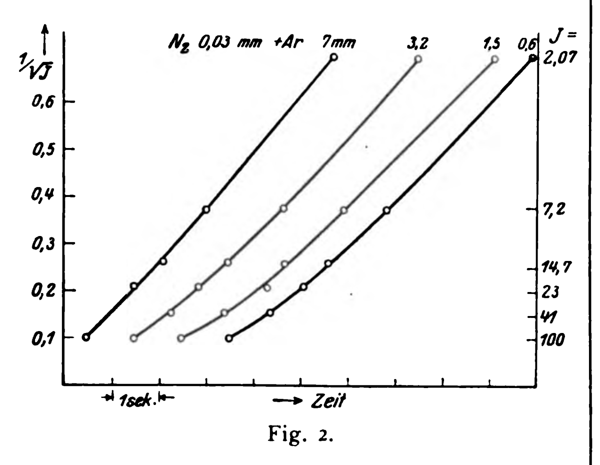


Fig. 2.

Mit der Atomauffassung sind sie jedoch in guter Übereinstimmung. Bei großer Nl. Dauer (etwa 2 Min.), d. h. verschwindender Wandentaktivierung, sind die Kurven, die $\frac{1}{\sqrt{J}}$ als Funktion der Zeit darstellen, stets innerhalb der Meßfehlergrenzen geradlinig (Fig. 1). Läßt sich dagegen mit gleich starker Anregung nur kurzdauerndes

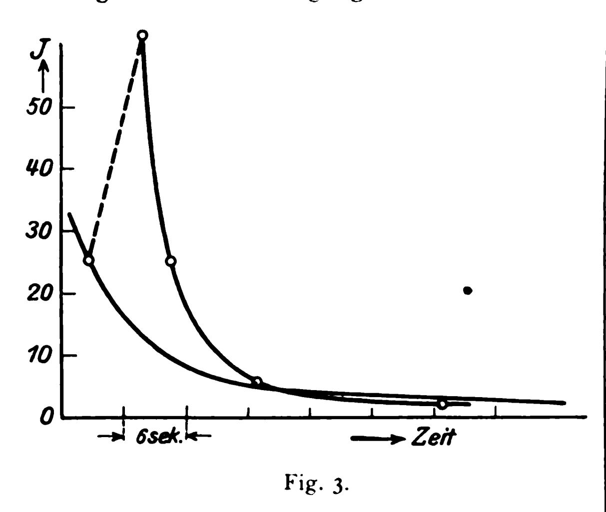


Fig. 3.

Nl. erzielen, so sind sie gekrümmt, wie es die unter Berücksichtigung der Wandentaktivierung durchgeführte Rechnung erwarten läßt. Steigert man jedoch den Gasdruck (evtl. durch Fremdgaszusatz), wodurch die Zahl der Wandstöße herabgesetzt wird, so nähern sich die Kurven wieder geraden Linien (vgl. Fig. 2).

Da man, wie erwähnt, annehmen muß, daß die Entaktivierung im Dreierstoß zweier Atome mit einem neutralen Molekül stattfindet, so ist Verstärkung des Nl. bei Zufuhr von nichtaktivem Stickstoff zu erwarten. Diese tritt tatsächlich ein, wenn durch Öffnen eines Hahnes nichtangeregter Stickstoff dem nachleuchtenden zugesetzt wird (Fig. 3). Die im Moment der Gaszufuhr ausgestrahlte Intensität wird erst etwa 8 sec später wieder erreicht. (Konzentrationsunterschiede sollten sich, wie eine Überschlagsrechnung lehrt, nach etwa 0,6 sec ausgeglichen haben.)[1] Auch Argonzusatz bewirkt Aufhellung in merklich demselben Maße.

In jüngster Zeit haben Cario und Kaplan eine neue Auffassung von der Natur des aktiven Stickstoffs vorgeschlagen, die in einer Kombination der Atom- und Molekülauffassung besteht; außer metastabilen Molekülen sollen auch metastabile Atome an der Entaktivierung, die in zwei aufeinanderfolgenden Prozessen vor sich geht, beteiligt sein. Mit den mitgeteilten Experimenten scheint diese Hypothese nur unter Zuhilfenahme einer weiteren speziellen Annahme über die Herkunft der metastabilen Atome verträglich zu sein.

1) Bezüglich der näheren Erörterung dieses Effekts muß auf die ausführliche Mitteilung in den Annalen der Physik (**87**, 717, 1928) verwiesen werden.

W. H. Keesom und J. N. van den Ende (Leiden), Die spezifische Wärme des Bleies bei Temperaturen des flüssigen Heliums.

Die ersten Messungen bezüglich der spezifischen Wärme des Bleies bei den Temperaturen des flüssigen Heliums wurden im J. 1926 gemacht vom erstgenannten Verf. mit Dr. D. H. Andrews[1]. Aus verschiedenen Gründen ließen aber die Sicherheit und die Genauigkeit der erhaltenen Resultate zu wünschen übrig. Eine Wiederholung und Fortsetzung der Messungen wurden damals gleich angekündigt. Diese haben nun stattgefunden. Obgleich der endgültige Bericht über diese neuen Messungen noch verschoben werden muß, liegt den Verf. daran, schon jetzt vorläufig darüber eine Mitteilung zu machen.

Die Methode war die Nernst-Eucken sche, in der Ausführung wie sie schon im J. 1913 im Leidener Institut angenommen wurde[2]. Dabei sind Heizdraht und Thermometerdraht in einem Kern aus Kupfer eingebaut, der im Block der Substanz, dessen spezifische Wärme gemessen werden

1) Comm. Leiden Nr. 185a.
2) Comm. Leiden Nr. 143.



soll, fest eingeschraubt wird. Die Wärmekapazität jenes Kernes wird gesondert gemessen.

Die Verbesserungen gegen die 1926er Messungen waren folgende:

1. Die Wärmeisolation des Blockes wurde verbessert.

2. Während damals derselbe Konstantandraht zum Heizen und zur Temperaturmessung vor und nach der Heizung diente, waren dazu jetzt zwei gesonderte Konstantandrähte vorgesehen, so daß auch der Temperaturgang während und gleich nach der Heizung beobachtet werden konnte.

3. Das Thermometer war jetzt nicht wie damals fest eingebettet, sondern frei in einer Heliumatmosphäre aufgehängt. Dabei ergab sich der Wärmeaustausch als weitaus genügend schnell. Der Vorteil ist, daß der Draht sich frei kontrahieren oder ausdehnen kann und keine unerwünschte Spannungen erleidet.

Der Thermometerdraht wurde in flüssigem Helium und in flüssigem Wasserstoff geeicht, für das zwischenliegende Gebiet wurde graphisch interpoliert[1]).

Die Ergebnisse waren nun sehr regelmäßig. Die bei den Temperaturen des flüssigen Wasserstoffs gemessenen Werte stimmen gut mit den im J. 1914 von Keesom und Kamerlingh Onnes (l. c.) erhaltenen Werten, sowie mit dem Ergebnis der bis 10^0 K. fortgeführten Messungen Simons[2]), und schließen sich der Debyeschen Kurve mit $\Theta = 88$ an. Letzteres gilt jedenfalls annähernd, auch für die Werte von 6,5 bis 3^0 K., in welchem Gebiet das T^3-Gesetz gilt. Die in diesem Gebiet im J. 1926 gefundenen größeren Abweichungen wurden jetzt nicht wieder gefunden.

Nachtrag (November 1928).

Die bei den angeführten Experimenten erhaltene Kurve der spezifischen Wärme zeigte eine merkwürdige Abweichung bei etwa 7^0 K. In Abwartung einer Kalibrierung des verwendeten Konstantanthermometers im Gebiet zwischen flüssigem Wasserstoff und flüssigem Helium sind inzwischen Messungen der spezifischen Wärme des Wismuts ausgeführt worden, wobei dasselbe Konstantanthermometer verwendet wurde. Dabei haben sich bei 7^0 K. ganz analoge Abweichungen ergeben als bei Blei. Wir erachten es als wahrscheinlich, daß diese durch das Verhalten des Thermometers bedingt sind, und müssen für das zwischen flüssigem Wasserstoff und flüssigem Helium liegende Temperaturgebiet weitere Untersuchungen abwarten.

1) Eine Kalibrierung im letztgenannten Gebiet ist vorgesehen.

2) F. Simon, Zeitschr. f. physik. Chem. **110**, 572, 1924.

Walther Meißner (Berlin), Messungen mit Hilfe von flüssigem Helium III. Widerstand von Metallen. Supraleitfähigkeit von Tantal. Beiträge zur Erklärung der Supraleitfähigkeit. Spezifische Wärme des gasförmigen Heliums.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

(Zum Teil nach Messungen mit B. Voigt und U. Adelsberger.)

Nach der Überführung der Heliumverflüssigungsanlage in das neu erbaute Kältelaboratorium der Reichsanstalt[1]) sind im letzten halben Jahr wieder eine Reihe von Untersuchungen mit Hilfe von flüssigem Helium angestellt worden, über die ich Ihnen einen vorläufigen kurzen Bericht geben möchte.

Die Messungen beziehen sich erstens auf den elektrischen Widerstand von Metallen, zweitens auf das Wesen der Supraleitfähigkeit und drittens auf die spezifische Wärme des gasförmigen Heliums.

Auf den Widerstand hin wurden neu untersucht: Aluminium, eine Reihe verschiedener Eisensorten, Beryllium, Kobalt, Molybdän, Rhodium, Palladium, Tantal, Wolfram, Iridium, Antimon, Neusilber und Kohle. Da die früheren Messungen[2]) gezeigt hatten, daß auf den Ein-

Tabelle I.

Widerstand von Kupfer.

Metall Atom-Nr.		*Cu* I (29)	*Cu* II
Herkunft		Schott *Cu* 1 Gr.-Goe.	Johnsen *Cu* 2 Gr.-Goe.
Bemerkungen		Kristall. getemp.	Kristall. getemp.
Länge Dicke		16 mm 2 mm Φ	19 mm 1,5 mm Φ
He-Druck	T	r	r
	273,20	1	1
	82,20	0,148	
	81,63		0,144
mm *Hg*	20,42	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$7,8 \cdot 10^{-4}$
764	4,20		$2,9 \cdot 10^{-4}$
756	4,18	$3,4 \cdot 10^{-4}$	
46	2,42	$3,8 \cdot 10^{-4}$	
17	1,97		$2,8 \cdot 10^{-4}$
1,9	1,32	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$
R_0 in Ω bei	273,2	$7,35 \cdot 10^{-5}$	$1,60 \cdot 10^{-4}$

1) W. Meißner, diese Zeitschr. **29**, 610, 1928. Z. d. V. D. I., **72**, 1069, 1928.

2) W. Meißner, diese Zeitschr. **26**, 689, 1925. Zeitschr. f. Phys. **38**, 647, 1926.

tritt der Supraleitfähigkeit, die besonders interessiert, weder die größte Reinheit noch der Kristallzustand einen maßgebenden Einfluß hat, wurden mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Beschaffung sehr reiner Metalle auch unreinere Proben in Drahtform verwendet. Tabelle I zeigt Ihnen zunächst die Ergebnisse für zwei schon von Grüneisen und Goens[1]) bis — 252° geprüfte Kupferkristalle, deren Untersuchung schon etwas weiter zurückliegt[2]). Es ist der auf den Wert 1 bei 0° C bezogene Widerstand *r* für verschiedene Temperaturen eingetragen. Beide Kristalle sind sehr rein, wie die Kleinheit des bei 1,3° abs. übrigbleibenden Restwiderstandes zeigt. Trotzdem werden sie nicht supraleitend. Tabelle II gibt die Messungen an Aluminium wieder. Am reinsten ist die schon von Grüneisen und Goens untersuchte Probe, die aber auch nicht supraleitend wird. Tabelle III und IV beziehen sich auf Eisenproben. Den kleinsten Restwiderstand hat das schon von Grüneisen und Goens[1]) untersuchte Elektrolyteisen *Fe* III von Griesheim-Elektron. Die mir von Herrn Dr. Kreussler und der Firma Siemens & Halske in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellten Eisenproben *Fe* V bis *Fe* IX weisen einen geringeren Reinheitsgrad auf als das von Holborn[3]) untersuchte Kahlbaumsche Nitrateisen *Fe* II. Bei

Tabelle II.

Widerstand von Aluminium.

Metall Atom-Nr.		*Al* I (13)	*Al* II	*Al* III
Herkunft		Amer.	Amer.	*Al* 1 Gr. u. Goe.
Behandlung		—	2,5^h 300°C	2,5^h 300°C
Länge Dicke		52 mm 1,5×1,1 mm	53 mm 1,7×1,0 mm	52 mm 2,2 mm Φ
He-Druck	*T*	*r*	*r*	*r*
	273,20	1	1	1
	83,41		0,1230	
	81,74	0,1279		
	77,74			0,1008
mm *Hg*	20,44	0,0210	0,0160	0,0075
768	4,21	0,0197	0,0148	0,0065
48	2,38	0,0198	0,0149	
2,2	1,35	0,0198	0,0150	
1,9	1,32			0,0067
R_0 in Ω bei	273,20	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$1,16 \cdot 10^{-3}$	$3,56 \cdot 10^{-4}$

Reduktion nach der Mathiesen-Nernstschen Regel vom additiven Verhalten des Restwiderstandes lassen sich die verschiedenen Eisensorten

Tabelle III.

Widerstand von Eisen.

Metall Atom-Nr.		*Fe* II (26)	*Fe* II*	*Fe* III	*Fe* IV
Herkunft		*Fe* 2 Holb. Nitrat-E.	*Fe* 2 Holb. Kahlb.	*Fe* 1 Gr. u. Goe. Griesheim	Heraeus Elektrol.
Behandlung		—	getemp.	getemp.	gereckt große Kristalle
Länge Dicke		57 mm 0,2 mm Φ	57 mm 0,2 mm Φ	30 mm 1,0 mm Φ	53 mm 1,0 mm Φ
He-Druck	*T*	*r*	*r*	*r*	*r*
	273,20	1	1	1	1
	83,91	0,1002	0,0952		
	78,25				0,0756
	78,21			0,0741	
	20,39			$0,0076_1$	$0,0089_2$
mm *Hg*	20,38	0,0151	0,0112		
768	4,22			$0,0062_0$	$0,0081_8$
763	4,21	0,0141	0,0102		
443	3,71	0,0141			
17,4	1,98			$0,0061_8$	$0,0081_9$
1,6	1,30	0,0141	0,0103		
R_0 in Ω bei	273,2	0,160	0,156	$3,48 \cdot 10^{-3}$	$6,07 \cdot 10^{-3}$

1) E. Grüneisen u. E. Goens, Zeitschr. f. Phys. **44**, 615, 1927.
2) Zeitschr. f. Instrumentenkde. **48**, 201, 1928.
3) L. Holborn, Ann. d. Phys. **59**, 145, 1919.

Tabelle IV.
Widerstand von Eisen.

Metall Atom-Nr.		*Fe* V (26)	*Fe* VI	*Fe* VII	*Fe* VIII	*Fe* IX
Herkunft		Kreussler	Kreussler	S. u. H. 5 × elektr.	S. u. H. 5 × elektr.	S. u. H. 5 × elektr.
Behandlung		—	3^h 300°	—	3^h 300°	3^h 300° geätzt.
Länge Dicke		54 mm 0,1 mm *Φ*	54 mm 0,1 mm *Φ*	54 mm 0,3 mm *Φ*	54 mm 0,3 mm *Φ*	55 mm 0,3 mm *Φ*
He-Druck	T	*r*	*r*	*r*	*r*	*r*
	273,20	1	1	1	1	1
	90,47			0,1734	0,1496	
	81,74			0,1482	0,1240	0,1220
	77,75	0,0850	0,0822			
	20,44			0,0670	0,0436	0,0414
mm *Hg*	20,42	0,0181	0,0163			
772	4,23		0,0154	0,0644	0,0420	0,0390
768	4,22	0,0164				
443	3,71		0,0151	0,0643	0,0419	0,0390
2,6	1,38		0,0150	0,0643	0,0419	0,0390
2,3	1,35	0,0163				
R_0 in Ω bei	273,2	0,679	0,753	0,0733	0,123	0,176

Tabelle V.
Widerstand von Beryllium, Kobalt, Molybdän, Rhodium und Palladium.

Metall Atom-Nr.		*Be* II (4)	*Co* I (27)	*Mo* I (42)	*Rh* I (45)	*Pd* I (46)
Herkunft		S. & H.	?	*Mo* 1 Holb.	*Rh* II Holb.	Heraeus 1921
Behandlung		—	$2,5^h$ 600°	$2,5^h$ 500°	$2,5^h$ 500°	$2,5^h$ 500°
Länge Dicke		7,4 mm 1,8 × 1,5 mm	50 mm 2,5 × 0,5 mm	52 mm 0,1 mm *Φ*	53 mm 0,9 × 0,1 mm	22 mm 0,6 mm *Φ*
He-Druck	*T*	*r*	*r*	*r*	*r*	*r*
	273,20	1	1	1	1	1
	81,74	$0,322_9$				
	78,24		0,4426			
	77,74			0,2245	0,4420	0,1916
	20,44	0,3075	0,3771			
mm *Hg*	20,42			0,1307	0,3533	0,0303
774	4,22	0,3075	0,3680	0,1318	0,3420	0,0247
48	2,38	0,3075				
2,2	1,35	0,3077	0,3632			
1,8	1,32					
1,4	1,28			0,1335	0,3380	0,0245
R_0 in Ω bei	273,2	$2,25 \cdot 10^{-4}$	$4,15 \cdot 10^{-3}$	0,366	0,127	$7,80 \cdot 10^{-3}$

nicht genau auf ein und dasselbe Idealeisen zurückführen. Schon zwischen getempertem und nicht getempertem, sonst gleichem Material sind in dieser Beziehung Unterschiede vorhanden.

Tabelle V zeigt Messungsergebnisse für Beryllium, das mir von der Firma Siemens & Halske in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt wurde, für Kobalt, Molybdän, Rhodium und



Tabelle VI.

Widerstand von Tantal, Wolfram, Iridium und Antimon.

Metall Atom-Nr.		*Ta* I (73)	*W* I (74)	*Ir* I (77)	*Sb* I (51)
Herkunft		Glühlampe	Osramlampe	*Ir* I Holb.	Kahlb.
Behandlung		geglüht	geglüht	$2{,}5^h$ 500^0	—
Länge Dicke		51 mm 0,045 mm Φ	51 mm 0,03 mm Φ	29 mm 0,8 × 0,5 mm	35 mm 2 × 2 mm
He-Druck	T	r	r	r	r
	273,20	1	1	1	1
	78,24	0,2278	0,1478		
	77,74	0,2257		0,1905	
	20,44	0,0399	0,0317		
mm *Hg*	20,42	0,0399		0,0536	
882	4,4	0,0354			
774	4,22	$< 5 \cdot 10^{-8}$	0,0307	0,0480	0,0243
1,8	1,31		0,0307		0,0239
1,6	1,29	$< 5 \cdot 10^{-8}$		0,0478	
R_0 in Ω bei	273,20	3,62	2,60	$6{,}37 \cdot 10^{-3}$	$6{,}56 \cdot 10^{-3}$

Palladium. Keines dieser Metalle wird, wie man sieht, supraleitend. Am reinsten ist von ihnen Palladium. Tabelle VI gibt Messungen an Tantal,

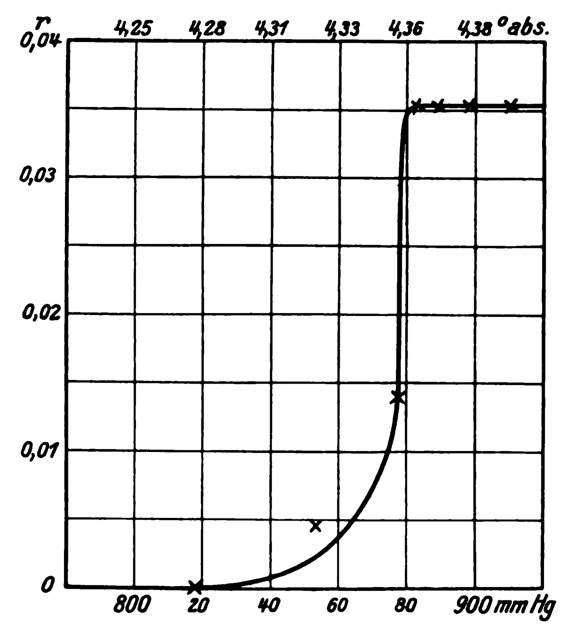


Fig. 1. Supraleitfähigkeit von Tantal.

Wolfram, Iridium und Antimon wieder. Die drei letzten Metalle zeigen nichts besonderes.

An Tantal aber ist das interessante Ergebnis zu verzeichnen, daß es supraleitend wird. Wie Sie sehen, wurde festgestellt, daß der Widerstand bei $4{,}2^0$ abs. schon kleiner als 5×10^{-8} von dem bei 0^0 C ist, während bei $4{,}4^0$ ein großer Restwiderstand von 3,5 Proz. vorhanden ist. Fig. 1 zeigt die Art des Abfalls des Widerstandes, der demnach innerhalb $0{,}1^0$ erfolgt. Die eingetragenen Punkte sind Mittelwerte der Beobachtungspunkte, die noch etwas verstreut liegen, weshalb die Ab-

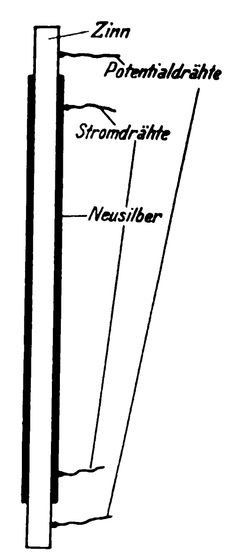


Fig. 2. Supraleitung im Inneren von Zinn.

fallskurve noch genauer bestimmt werden soll. Tabelle VII zeigt die Stellung von Tantal im periodischen System gegenüber den andern Supraleitern. Man sieht, daß auch Tantal wieder in derselben Gegend liegt wie die andern fünf Supraleiter Blei, Quecksilber, Zinn, Thallium und In-



Tabelle VII.

Auszug aus dem Periodischen System der Elemente.

Periode	I. Gruppe	II. Gruppe	III. Gruppe	IV. Gruppe	V. Gruppe	VI. Gruppe
IV	37 *Rb* 85,5	38 *Sr* 87,6	39 *Y* 89,0	40 *Zr* 91,2	41 *Nb* 93,5	42 *Mo* 96,0
	47 *Ag* 107,88	48 *Cd* 112,4	49 *In* $3^0,4$ 114,8	50 *Sn* $3^0,7$ 118,7	51 *Sb* 121,8	52 *Te* 127,5
V	55 *Cs* 132,8	56 *Ba* 137,4	57 *La* 138,9	58 *Ce* 140,2	59 *Pr* 140,9 60 *Nd* 144,3	61 *Il* ? 62 150
	67 *Ho* 163,5 68 *Er* 167,7	69 *Tu* 169,4	70 *Yb* 173,5 71 *Cp* 175,0	72 *Hf* 178,6	73 *Ta* 181,5 $4^0,4$	74 *W* 184,0
	79 *Au* 197,2	80 *Hg* $4^0,2$ 200,6	81 *Tl* $2^0,5$ 204,4	82 *Pb* $7^0,3$ 207,2	83 *Bi* 209,0	84 *Po* (210)
VI	87 --	88 *Ra* 226,0	89 *Ac* (230)	90 *Th* 232,1	91 *Pa* (234)	92 *U* 238,2

dium. Ein Prinzip für die Reihenfolge der eingetragenen Sprungpunkte ist auch jetzt nicht ersichtlich. Die Auffindung desselben wird um so leichter sein, je mehr Supraleiter bekannt sind, weshalb die Fahndung nach ihnen fortgesetzt werden wird.

Tabelle VIII.

Widerstand von Neusilber und Kohle.

Metall		Neus. I.	Neus. II.	Kohle I.
Herkunft		Cochius	Cochius	aus Glühlpe.
Behandlung		Rohr	Rohr	gebrannt
Länge Dicke		53 mm 1,55/1,30	52 mm 0,73/0,50	44 mm 0,2 Φ
He-Druck	*T*	*r*	*r*	*r*
	273,20	1	1	1
	78,24			1,145
	77,79	0,9209	0,9278	
	20,44			1,163
mm *Hg*	20,39	0,9049	0,9154	
774,4	4,22			1,182
764	4,21	0,8991	0,9154	
1,9	1,32	0,8983	0,9149	1,193
R_0 bei	273,20	$2,10 \cdot 10^{-2}$	$6,32 \cdot 10^{-2}$	46,7

Tabelle VIII zeigt, daß der Widerstand von Neusilber bei $1,3^0$ abs. noch fast $90^0/_0$ von dem bei 0^0 C ist, so daß sich Neusilber ähnlich wie Konstantan und Manganin verhält. Der Widerstand von Kohle nimmt bis zu den tiefsten Temperaturen zu. — Ich habe noch hervorzuheben, daß die Messungen zwischen 0^0 C und -252^0 zum großen Teil durch Herrn Dr. Voigt ausgeführt wurden.

Ich komme nun zu den Messungen über das Wesen der Supraleitfähigkeit. Es war m. E. noch nicht einmal sicher, ob die Supraleitfähigkeit ein Volumeffekt oder ein Oberflächeneffekt ist; es schien nicht ausgeschlossen, wenn auch unwahrscheinlich, daß der supraleitende Strom von Elektronen in der Grenzschicht Metall-Isolator geführt wird. Deshalb wurde folgender Versuch angestellt (Fig. 2): In dünne, rein geätzte und mit Stickstoff gespülte Neusilberröhrchen von 0,5 bzw. 1,3 mm Innendurchmesser wurde Zinn hineingesaugt, so daß eine innige Verbindung zwischen Neusilber und Zinn eintrat, wie besondere Untersuchungen zeigten. Das Neusilberröhrchen wurde an den Enden eines Stückes entfernt, und die Potentialdrähte wurden direkt an das Zinn angelötet. Der Widerstand des Neusilberröhrchens war nach den vorher ermittelten Werten groß gegen den des Zinns, besonders in flüssigem Helium. Zur Kontrolle wurde auch ein Zinnstückchen ohne Neusilberrohr aus gleichem Material untersucht, sowie ein mit Zinn gefülltes Röhrchen, das bis auf halben Querschnitt abgefeilt war, so daß das Zinn wieder zum Teil freie Oberfläche hatte. Tabelle IX zeigt die Resultate. Alle vier Proben wurden supraleitend. Die Lage des Sprungpunktes wurde

Tabelle IX.
Widerstand von Zinn in Neusilber.

Metall Atom-Nr.		*Sn* II (50)	*Sn* IV	*Sn* V	*Sn* VI
Herkunft		Kahlb.	Kahlb.	Kahlb.	Kahlb.
Behandlung		in Neus.-rohr	in Neus.-rohr	ohne Hülle	wie *Sn* IV, aber halb abgefeilt
Länge Dicke		55 mm 1,55 × 1,30 mm	56 mm 0,73 × 0,50 mm	52 mm 0,69 mm Φ	52 mm —
He-Druck	*T*	*r*	*r*	*r*	*r*
	273,20	1	1	1	1
	77,79	0,2641	0,2785	0,2245	0.2766
mm *Hg*	20,39	0,0505	0,0501	0,0346	—
764	4,21	0,0270	0,0238	0,0006	0,0385
361	3,53		Sprung		
1,9	1,32	$< 4 \cdot 10^{-7}$	$< 1 \cdot 10^{-7}$	$< 4 \cdot 10^{-7}$	$< 3 \cdot 10^{-7}$
R_0 in Ω bei	273,20	$3,37 \cdot 10^{-3}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$	$1,60 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-2}$

nur an einem Röhrchen, *Sn* IV, festgestellt. Der Abfall erfolgt bei etwas tieferer Temperatur als bei reinem Zinn, was vielleicht auf Verunreinigung durch das Neusilber zurückzuführen ist. Auch der Restwiderstand des gefüllten Röhrchens ist nämlich sehr hoch. Es macht hiernach keinen Unterschied, ob die Oberfläche des Supraleiters an einen Isolator oder einen Leiter grenzt, und man wird mit größerer Sicherheit als früher behaupten können, daß die Supraleitfähigkeit kein Oberflächen-, sondern ein Volumeffekt ist. Dies schließt natürlich nicht aus, daß der supraleitende Strom ungleichmäßig über den Querschnitt des Leiters verteilt ist, oder auch in der äußersten Schicht des Leiters fließt. Was der Versuch zeigt, ist, daß für den supraleitenden Strom nicht eine Grenzfläche Leiter-Isolator notwendig ist.

Ein weiterer Versuch bezog sich darauf, ob der supraleitende Strom durch quantenmäßig bedingte Ketten von Elektronen zustande kommt,

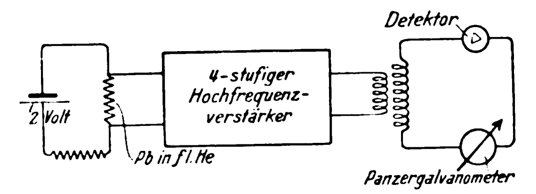


Fig. 3. Meßanordnung mit Verstärker.

die von einem Atom zum andern in den Quantenbahnen der äußersten Elektronenschale übergehen. Wie Kretschmann betont hat, muß eine einzelne solche Elektronenkette einen Strom mit sich führen, der von der Größenordnung $0,3 \times 10^{-3}$ Ampere ist. Kleinere Ströme in Supraleitern wären hiernach nicht ohne vorübergehendes Abreißen des Stromes möglich. Schon früher[1]) hatte ich ohne Erfolg den Versuch ge-

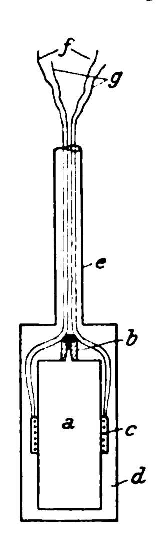


Fig. 4. Vakuumkalorimeter 1.

a Stahlgefäß mit *He*
b Verschlußvorrichtung
c Heizwicklung in Schwefel
d Äußere Kapsel
e Neusilberrohr zum Evakuieren
f Stromdrähte
g Potentialdrähte

macht, derartige Stromunterbrechungen, die im Galvanometer wegen ihrer Häufigkeit nicht bemerkbar sind, mit Hilfe von Elektronenrohrverstärkern nachzuweisen. Nunmehr habe ich den

1) Zeitschr. f. Instrumentenkde. **47**, 234, 1027.



Versuch mit verfeinerten Hilfsmitteln zusammen mit Herrn Dr. **Adelsberger** wiederholt. Fig. 3 zeigt die Meßanordnung: Von den Enden des Bleidrahtes im flüssigen Helium führen Leitungen zu einem vierstufigen Hochfrequenzverstärker (Loewe-Röhren), mit dem ein Detektorkreis mit Panzergalvanometer gekoppelt ist. Die Kopplung konnte variiert werden, um für alle Frequenzen möglichst hohe Empfindlichkeit zu er-

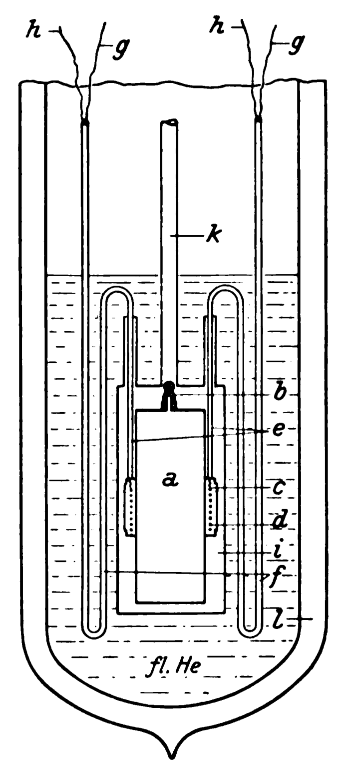


Fig. 5. Vakuumkalorimeter 2.

a Stahlgefäß mit *He*
b Verschlußvorrichtung
c Kammer für Heizwicklung
d Heizwicklung aus Konstantan
e Neusilberröhrchen 0,7/0,64 mm
f Neusilberröhrchen 1,2/1 mm
g Stromdrähte
h Potentialdrähte
i Äußere Kapsel
k Neusilberrohr zum Evakuieren von *i*
l Gefäß mit fl. *He*

halten. Bei höheren Frequenzen, also schnell folgenden Stromschwankungen wird die Kapazität und Selbstinduktion der Zuleitungen und Vorschaltwiderstände ungünstig wirken. Es wurden aber in dieser Hinsicht möglichst günstige Verhältnisse geschaffen. Trotzdem war auch bei dieser Wiederholung des Versuchs nichts von Spannungsschwankungen zu bemerken: Der Ausschlag des Galvanometers im Detektorkreis blieb derselbe, ob starker Strom, ganz schwacher Strom (1×10^{-6} Ampere) oder gar kein Strom durch den Supraleiter floß. Danach halte ich es für wahrscheinlich, daß auch der supraleitende Strom von unregelmäßig verteilten Elektronen getragen wird, und daß das Verschwinden des Widerstandes darauf beruht, daß die Energie der Elektronen nicht mehr an die Atome abgegeben werden kann, daß sie also sozusagen elastisch reflektiert werden.

Zum Schluß möchte ich Ihnen noch kurze Angaben über die Messungen betreffs der spezifischen Wärme des gasförmigen Heliums machen. Solche Messungen hatte ich schon 1926 mit dem in Fig. 4 dargestellten einfachen Vakuumkalorimeter gemacht: Eine mit Helium derartig gefüllte Stahlkapsel, daß in ihr bei 4^0 abs. etwa 3/4 Atm. Druck herrscht, hängt im Vakuum an den Zuleitungen zu einer Wicklung aus Konstantan, die zur Heizung und Temperaturmessung dient. Die Wicklung ist zur besseren Wärmeübertragung in Schwefel eingebettet, was sich gut bewährte. Aber zwei Mängel traten auf: Um die Stahlkapsel abzukühlen, mußte man etwas Helium in den Zwischenraum hineinlassen, und es gelang nicht, das Vakuum dann schnell genug so hoch zu bringen, daß die thermische Isolierung hohen Ansprüchen genügte. Erhebliche Korrektionen wegen Wärmeabgabe nach außen waren nötig. Ferner änderte der Konstantandraht im

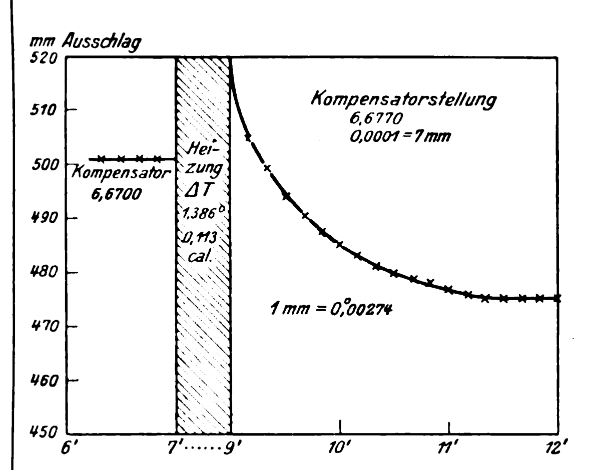


Fig. 6. Beispiel einer kalorimetrischen Messung.

Schwefel unregelmäßig Größe und Temperaturkoeffizient. Deshalb hatte ich zu den Messungen nicht genügendes Zutrauen. Nunmehr habe ich Messungen mit einem weitgehend verbesserten Kalorimeter angestellt, das in Fig. 5 dargestellt ist: Der Konstantandraht befindet sich jetzt in einer mit Helium von ca. 1/10 mm *Hg*-Druck gefüllten Kammer, von der aus dünne Neusilberröhrchen zur äußeren Kapsel und weiter aus der ganzen Apparatur herausführen. Durch diese Röhrchen laufen die Zuführungsdrähte. Die Röhrchen sind so gebogen, daß sie durch das flüssige Helium gekühlt werden. Will man die

Stahlkapsel abkühlen, so läßt man durch die Röhrchen Helium strömen. Es handelt sich also um eine Modifikation der Methode von Simon und Lange[1]), bei der sie Wasserstoff im Kalorimeter kondensierten zur Abkühlung desselben. Eine Kondensation von Helium ist hier aber ganz unzulässig, da die Messung der kleinen spezifischen Wärme durch die Verdampfungswärme etwa rückbleibenden flüssigen Heliums unmöglich gemacht würde. Nach dem Abkühlen des Kalorimeters wird die Kammer bis auf einen genügend kleinen Druck wieder ausgepumpt.

Dieses neue Kalorimeter hat nun eine ausgezeichnete thermische Isolation, wie Sie aus dem in Fig. 6 dargestellten Beispiel einer Meßreihe ersehen können. Es ist als Abszisse die Zeit, als Ordinate der Galvanometer-Ausschlag bei der Messung des Konstantanwiderstandes mit dem Kompensationsapparat aufgetragen. Dabei betrug die Einstellung des Kompensators vor der Heizung 6,6700, nach der Heizung 6,6770, und es ist 0,0001 = 7 mm, sowie 1 mm = 0,0027°. Vor der Heizung ist der Galvanometer-Ausschlag konstant. Nach der Heizung sinkt er zunächst um etwa 40 mm = 0,1°, weil der Temperaturausgleich im Kalorimeter noch nicht völlig erfolgt war. Dann aber ist der Ausschlag wieder nahezu konstant, so daß fast gar keine Korrektionen wegen Temperaturganges anzubringen sind und die kalorimetrische Messung an sich eine Genauigkeit von 1 Promille zulassen würde. Eine sehr viel größere Unsicherheit kommt aber vorläufig durch die Bestimmung des Temperaturkoeffizienten des Konstantans hinein.

Die bisherigen Meßreihen ergaben für die Molwärme des Heliums bei konstantem Volumen und bei 0,75 Atm. Druck, wobei die Dichte etwa 1/10 von der des flüssigen Heliums ist, den Wert 1,94 bei 5,5° abs., also 65% von dem klassischen Normalwert 2,98 der Molwärme. Dabei wurde die Wärmekapazität des Gefäßes ohne Helium gesondert bestimmt. Sie beträgt aber nur wenige Prozent von der des Inhalts. Die Genauigkeit möchte ich vorläufig wegen der Unsicherheit im Wert des Temperaturkoeffizienten des Konstantans auf höchstens einige Prozent schätzen.

Die Unterschreitung des klassischen Wertes ist natürlich auf Quanteneffekte zurückzuführen. Kleinere Abweichungen vom Normalwert hatten schon Scheel und Heuse[2]) sowie Eucken[3]) aus ihren Messungen über die spezifische Wärme bei konstantem Druck bei 93° abs. bzw. 18° abs. gefolgert. Für eine Prüfung der Theorieen der Gasentartung, die sich ja nur auf ideale Gase beziehen und sehr viel kleinere Abweichungen vom Normalwert ergeben, reichen die von mir durchgeführten Messungen noch nicht aus[1]). Dazu müssen sie zum mindesten auf kleinere Drucke und tiefere Temperaturen ausgedehnt werden. Dies wird, nachdem die Mess-Methode nunmehr einwandfrei arbeitet, wie ich hoffe, in nicht zu langer Zeit durchführbar sein.

1) F. Lange und F. Simon, Zeitschr. f. Phys. **15**, 312, 1923.
2) K. Scheel und W. Heuse, Ann. d. Phys. **40**, 492, 1913.
3) A. Eucken, Berl. Ber. 1914, 682.

1) Vgl. W. Meißner, Zeitschr. f. Phys. **36**, 325, 1926.

R. Hase (Hannover), Das Wärmespektrum des festen und flüssigen Eisens.

Unsere Kenntnis über das Energiespektrum hoch erhitzter Metalle ist noch sehr gering und beschränkt sich eigentlich auf einige physikalisch hochwertige Elemente, wie Platin und Wolfram. Hier sind zu nennen die Arbeiten von Rubens, Paschen, Lummer-Pringsheim und Coblentz. Die sonst vorliegenden reichhaltigen Messungen über die Strahlung fester und flüssiger Metalle bei höheren Temperaturen beziehen sich fast ausschließlich auf Gesamtstrahlung oder im optischen Gebiet gemessene Teilstrahlungen. Und doch verspricht gerade die Untersuchung der spektralen Energieverteilung eines strahlenden Metalles physikalisch außerordentlich interessante Aufschlüsse und liefert uns erst ein quantitatives Bild dessen, was man mit der Gesamtstrahlung rein qualitativ erfaßt. Hinzu kommt, daß auch die Technik in steigendem Maße Interesse an diesen Fragen gewinnt, einmal aus wärmewirtschaftlichen Gründen und ferner, weil hier eins der wichtigsten, in manchen Fällen sogar das einzige Mittel gegeben ist zur praktischen Temperaturmessung.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war, zunächst bei dem Eisen als dem technisch bei weitem wichtigsten Metall beginnend, die relativen Energiekurven bei verschiedenen Temperaturen zu messen und an diejenige des schwarzen Körpers anzuschließen. Die Untersuchungen wurden einerseits im Laboratorium an elektrisch geglühten Eisenbändern in Edelgas-Atmosphäre ausgeführt, andererseits am flüssigen Eisen direkt am Kupolofen einer größeren Gießerei. Die besonders schwierigen Nebenumstände, unter denen die letzteren Messungen auszuführen waren, erforderten die Ausbildung eines besonderen Spektrometers, dessen eingehende Beschreibung an anderer Stelle folgen wird.

Als Ergebnis zeigt Fig. 1 die als Mittelwerte aus



einer großen Anzahl von Beobachtungsreihen erhaltenen Kurven zunächst an Eisenstreifen, welche aus Walzblechtafeln geschnitten waren, ihre natürliche schwarze Oberflächenfarbe besaßen und zwischen den Sekundärklammern eines Tammannofens in einem Strom von Argon geglüht wurden. Der Vergleich mit den kurz vor und nach der Messung aufgenommenen schwarzen Körperkurven zeigt eine große Ähnlichkeit in der Lage der Maxima, sowie ein Zusammenrücken der Kurve nach dem sichtbaren Gebiet zu. Während die Gesamtstrahlung von Eisen und schwarzem Körper bei 1100⁰ noch starke Unterschiede zeigt, sind sie bei 1300⁰, dem höchsten vor dem Durchschmelzen noch erreichbaren Wert, annähernd gleich. Dies bestätigt die aus der praktischen Erfahrung bekannte Tatsache, daß die Strahlung der Metalle mit zunehmender Temperatur immer schwärzer wird.

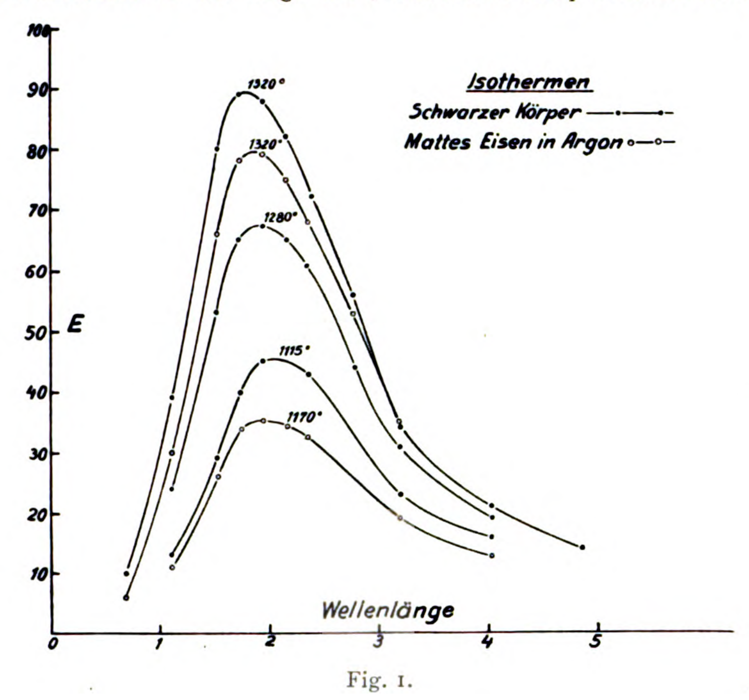


Fig. 1.

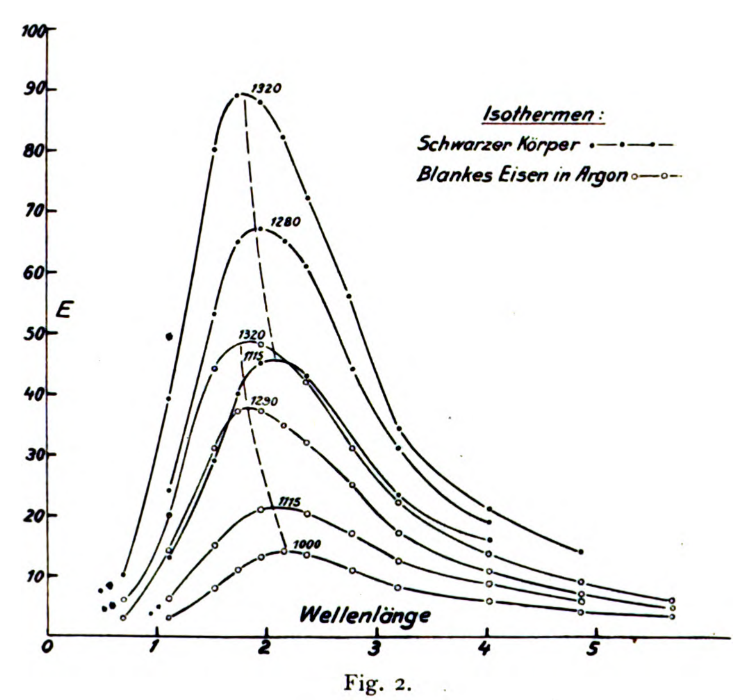


Fig. 2.

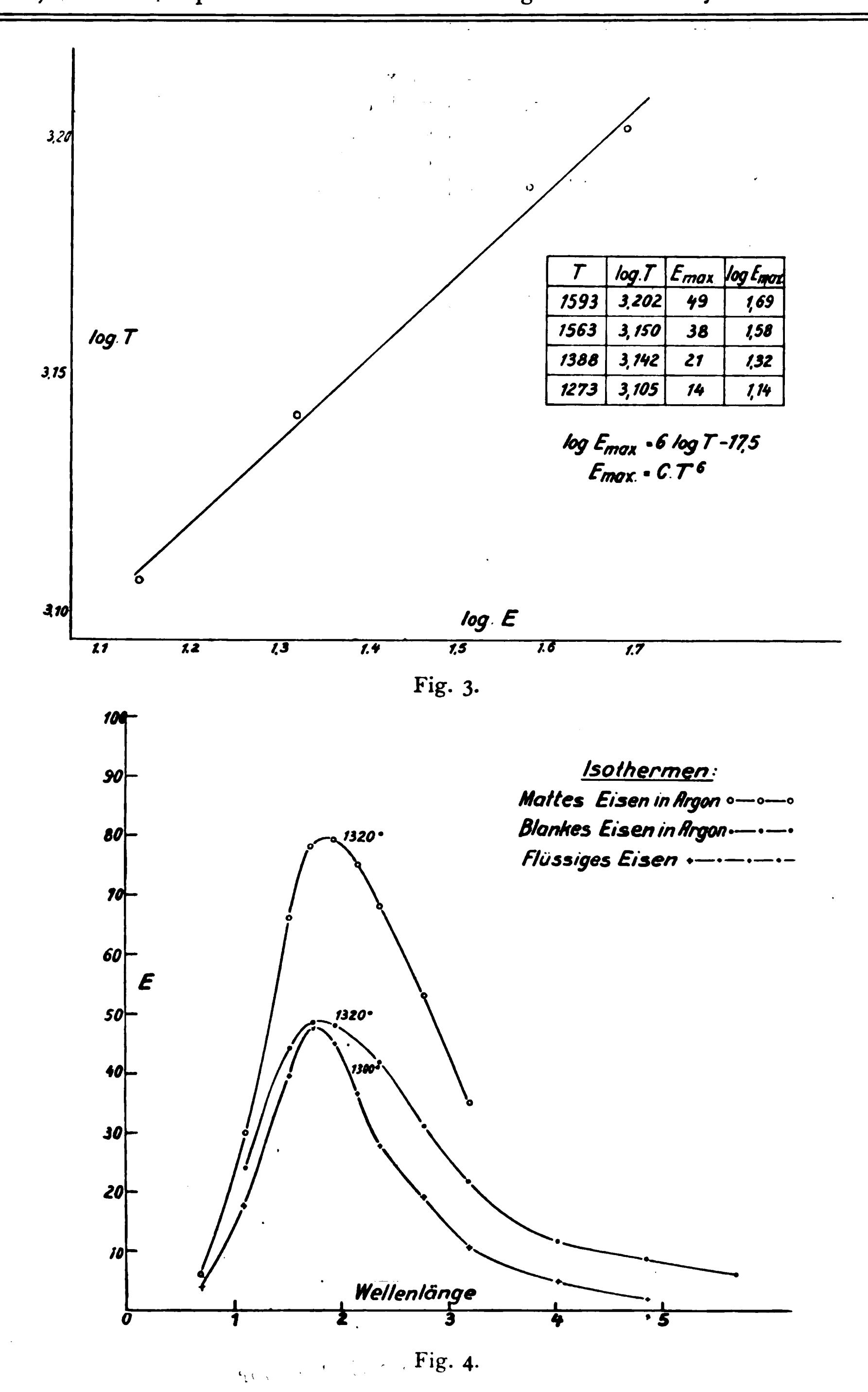


Fig. 3.

Fig. 4.

Kurve 2 bezieht sich auf ähnliche Messungen, jedoch mit Blechstreifen, deren Oberfläche vor dem Glühen blank geschmirgelt wurde. Im Vergleich zu dem vorhergehenden Bilde zeigen diese Kurven bei gleichen Temperaturen bedeutend kleinere Maxima gegenüber dem matten Eisen, so daß auch bei 1300° der Höchstwert nur die Hälfte desjenigen der Hohlraumstrahlung beträgt. Bemerkenswert ist die dem Wienschen Gesetz entsprechende Verschiebung des Maximums mit steigender Temperatur, wobei sich zeigt, daß die entsprechenden Wellenlängen kleiner sind als beim schwarzen Körper. Für das beobachtete Temperaturgebiet würde sich für blankes Eisen die Konstante des Wienschen Gesetzes zu etwa 2890 ergeben, also zwischen derjenigen des schwarzen Körpers 2940 und des Platins 2630 liegen. Trägt man die für die vier Temperaturen 1000, 1115, 1290

und 1320 Grad gewonnenen Werte als Funktion der Temperatur logarithmisch auf, so ergibt sich ein geradliniger Verlauf (Kurve 3), dessen Auswertung zu der Beziehung $E = C \cdot \alpha T^6$ führt, d. h. also, die Ordinate des Energiemaximums in der Strahlungskurve des blanken Eisens nimmt in dem untersuchten Intervall mit der 6. Potenz zu, während dies bekanntlich beim schwarzen Körper mit der 5. Potenz erfolgt. Es ist aber interessant, darauf hinzuweisen, daß auch Lummer und Pringsheim bei ihren Platinmessungen ein Fortschreiten mit der 6. Potenz gefunden haben, so daß anzunehmen ist, daß es sich hier um ein für blanke Strahler gültiges allgemeines Gesetz handelt.

Besondere Schwierigkeiten boten die im Betriebe durchgeführten Messungen am flüssigen Eisen, weil es erforderlich war, mit dem noch auf geringste Wärmeeffekte reagierenden Spektrometer in unmittelbare Nähe des auch für den Beobachter unerträglich strahlenden Kupolofens heranzugehen. Nach mehrfach mißglückten Versuchen führte Einbau der gesamten Apparatur in Wasserkästen zum Ziel. Auf diese Weise konnte wohl zum ersten Male an einem flüssigen Metall die Energiekurve betriebsmäßig beobachtet werden.

Als Gesamtergebnis zeigt Kurve 4 den Vergleich der drei Energiekurven für mattes, blankes und flüssiges Eisen bei 1300°. Hierdurch erklären sich jetzt ohne weiteres die bisher bei Temperaturmessungen an Eisen beobachteten Abweichungen bei Verwendung verschiedener Meßmethoden, und es zeigt sich, daß die Strahlungsunterschiede im wesentlichen durch das Spektralgebiet bedingt sind, welches oberhalb etwa $1{,}5\,\mu$ gelegen ist.

Das Ergebnis läßt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Das Energie-Spektrum des strahlenden Eisens in fester und flüssiger Form zeigt einen Verlauf, welcher dem des schwarzen Körpers ähnlich ist.

2. Die Absolutbeträge der Eisenstrahlung sind in weitgehendstem Maße von der Oxydation der Oberfläche abhängig.

3. Die Strahlung des blanken reinen Eisens in Edelgasatmosphäre zeigt eine dem Wienschen Gesetz ähnliche Verlagerung des Maximums mit steigender Temperatur nach kürzeren Wellen zu. Die Ordinate des Maximums wächst wie bei Platin mit der 6. Potenz der absoluten Temperatur. Die Konstante C ergibt sich zu 2890.

4. Im Gegensatz zum blanken Eisen steht das von Schlacken und Zunder freie matte Eisen, dessen Strahlung annähernd grau ist und sich mit steigernder Temperatur derjenigen des schwarzen Körpers nähert.

5. Die Energiekurve des flüssigen Eisens ist in ihrem Verlauf kontinuierlich und nach Größe und Richtung derjenigen des blanken festen Metalles ähnlich.

J. Dejmek (Brünn), Über das logarithmische Mischungsgesetz.

Die erstmals von S. Arrhenius 1887 zur Berechnung der inneren Reibung verdünnter Lösungen ad hoc aufgestellte logarithmische Mischungsformel ist später von J. Kendall zur Berechnung der Viskosität binärer Flüssigkeitsgemische und vor einigen Jahren von K. Lichtenecker zur Berechnung des elektrischen Widerstandes und der Dielektrizitätskonstanten binärer leitender bzw. isolierender Aggregate bei Abwesenheit sekundärer Erscheinungen vorgeschlagen worden. Die Kurve der logarithmischen Mischungsregel ($\log a = \vartheta_1 \log a_1 + \vartheta_2 \log a_2$; a, a_1, a_2, Eigenschaften des Aggregates bzw. seiner Komponenten, ϑ_1, ϑ_2 Raumanteile in der Mischung) als Funktion der Konzentration der einen Komponente in der Mischung zeigt negativen Kurvenverlauf und trifft so das Typische des wirklichen Verlaufes der Eigenschaftswerte der natürlichen Aggregate bei Abwesenheit sekundärer Effekte. Nach Lichtenecker kann man — nach dem Satz vom genügenden Grunde — für Widerstand und Leitfähigkeit einen Ausdruck der gleichen Form fordern und wird zum logarithmischen Mischungsgesetz geführt. Darüber hinaus kann man für ein früher vom Referenten aufgestelltes, das Superpositionsprinzip der „Einflüsse“ $\varphi(a)$ formulierendes, allgemeines Mischungsgesetz: $\varphi(a) = \Sigma\, \vartheta_i \varphi(a_i)$, ($i = 1, 2 \ldots$ mit $\Sigma\, \vartheta_i = 1$) die Invarianz gegenüber der Transformation (Eigenschaftsrelation) $a_i = \alpha b_i^{\beta}$, $a = \alpha b^{\beta}$ fordern und wird, falls $\beta \neq 1$, zum logarithmischen Mischungsgesetz geführt. Ist $\beta = 1$, so führt diese Invarianzforderung auf die Alternative: logarithmisches Mischungsgesetz, Potenzgesetz. Umgekehrt bleibt das logarithmische Mischungsgesetz nur gegenüber obiger Transformation invariant. Aus der Invarianz des logarithmischen Mischungsgesetzes gegenüber dieser Eigenschaftstransformation folgt, daß es als ausgezeichnet für Mischungen bei Abwesenheit sekundärer Effekte gelten muß. Die Eigenschaftsrelation umfaßt das Wiedemann-Franzsche Gesetz, das nach A. W. Smith für mischkrystallfreie Aggregate näherungsweise gilt, die Reziprozität zwischen Widerstand und Leitfähigkeit, zwischen Viskosität und Fluidität und die bekannte Beziehung zwischen Dielektrizitätskonstante und Brechungsindex für optisch isotrope Medien. Von einer Räumlichkeitskorrektur Lichteneckers wird abgesehen, da nicht einzusehen ist, warum das auf obige Art aus dem allgemeinen Mischungsgesetz abgeleitete logarithmische Mischungsgesetz nur für zweidimensionale Aggregate gelten soll. Für binäre Legierungen ohne Mischkrystallbildung ist das logarithmische Mi-

schungsgesetz erfüllt. Desgleichen kann es zur Berechnung der Leitfähigkeit jener Reihen von Legierungen dienen, die zum Typus der Legierungen mit beschränkter Löslichkeit der einen Komponente in der andern gehören und dort die Löslichkeitslücke ausfüllen, da diese von Gemengen der einen gesättigten Lösung in der andern erfüllt wird. An Lichtbildern wird dies für die elektrische und thermische Leitfähigkeit der Systeme *Cd-Bi*, *Al-Bi* und *Ag-Pb* dargetan. Weiterhin werden Anwendungen auf die Berechnung der inneren Reibung binärer Flüssigkeitsgemische und ihrer Dielektrizitätskonstanten gezeigt.

Zusatz bei der Korrektur. — Bei Gelegenheit des Vortrages wurde jedoch die erwähnte Anwendung der logarithmischen Mischungsformel auf die Berechnung der inneren Reibung binärer Flüssigkeitsgemische zugunsten ihrer Anwendung auf die magnetische Doppelbrechung einiger von G. Szivessy und M. Richartz (Ann. d. Phys. Bd. 86, Nr. 11, 1928) untersuchten binären Flüssigkeitsgemische zurückgestellt. Hier stimmen die nach ihr berechneten Werte der Phasendifferenz zwischen der ordentlichen und außerordentlichen Welle in Abhängigkeit von der Volumkonzentration der einen Komponente — im Gegensatze zu dem nach der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie berechneten — mit den gemessenen Werten sehr gut überein. Hiermit ist die logarithmische Mischungsformel auch auf eine Größe angewendet worden, welche nicht direkt als Körpereigenschaft angesprochen werden kann.

Ernst Reichenbächer (Wilhelmshaven), Der Elektromagnetismus und die fünfte Weltdimension.

Wie ich schon vor zwei Jahren in meinem Düsseldorfer Vortrage (1) ausführte, sind die bisherigen Versuche, den Elektromagnetismus in die Weltgeometrie einzugliedern, fehlgeschlagen, da es nicht gelungen ist, sämtliche Fundamentalgleichungen aus einem Prinzip ungezwungen herzuleiten[1]).

Diese Grundgleichungen sind zunächst die beiden Gruppen der Maxwellschen Gleichungen, die in weltgeometrischer Schreibweise lauten:

$$\mathrm{Div}_\varkappa f^{\lambda\varkappa *} = 0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{Div}_\varkappa h^{\lambda\varkappa} = -\varrho^\lambda \qquad (2)$$

und die man die Feldgleichungen des Elektromagnetismus nennt. In ihnen bedeuten die kovariant umgeschriebenen Tensoren $f_{\lambda\varkappa}$ den Feldtensor der Elektrizität und $h_{\lambda\varkappa}$ den sog. Verschiebungstensor, der auf einfache Weise mit $f_{\lambda\varkappa}$ zusammenhängen muß und im einfachsten Falle sich auf $f_{\lambda\varkappa}$ reduziert. Die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen besagt weiter nichts, als daß sich $f_{\lambda\varkappa}$ als Rotation eines Vektors φ_μ, nämlich als

$$f_{\lambda\varkappa} = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x^\lambda}$$

darstellen lassen muß, da sie auch in der Gestalt

$$f_{\lambda\varkappa\nu} = \frac{\partial f_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f_{\varkappa\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x^\varkappa} = 0 \qquad (1\,\mathrm{a})$$

geschrieben werden kann. Die zweite Gruppe führt neben dem Verschiebungstensor h noch einen Vektor ϱ ein, der als Ladungsdichte bezeichnet wird. So zeigen diese Gleichungen die Verknüpfung des Feldtensors — h hängt ja auch mit f zusammen — mit der Ladung.

Es ist das Verdienst Weyls, zuerst gezeigt zu haben, daß diese zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen sich stets ergibt, wenn man ein Wirkungsintegral variiert, dessen Integrand abgesehen von dem Faktor $\sqrt{g}$, der Wurzel aus der Determinante des Einsteinschen Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$, eine skalare Weltfunktion W ist, die neben den $g_{\mu\nu}$ und ihren Ableitungen noch die $\varphi_\varkappa$ und ihre ersten Differentialquotienten enthält. Die Variation nach den $g_{\mu\nu}$ gibt dann in bekannter Weise die Feldgleichungen der Gravitation, nach den $\varphi_\varkappa$ die der Elektrizität und zwar diese stets in der Gestalt der zweiten Gruppe der Maxwellschen Gleichungen, ganz unabhängig von der speziellen Annahme über den Bau der Weltfunktion.

Schwierigkeiten werden aber der Weylschen Theorie bereitet durch die Deutung des Vektors $\varphi_\varkappa$ und besonders durch die mechanischen oder ponderomotorischen Gleichungen

$$f_{\varkappa\lambda}\varrho^\varkappa = m g_{\lambda\mu}\left[\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\varkappa\nu\\ \mu\end{Bmatrix}\frac{dx^\varkappa}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right], \qquad (3)$$

die die Beschleunigung eines Teilchens von der Masse m durch die „Feldkraft" $f_{\varkappa\lambda}\varrho^\varkappa$, d. h. das Produkt aus Feldtensor und Ladungsdichte, bestimmen. Dabei ist die Nebenbedingung

$$\varrho^\varkappa = e\frac{dx^\varkappa}{ds} \qquad (4)$$

zu erfüllen, die die Ladung an das der Feldkraft unterworfene Teilchen knüpft. Die Größen e und m sind als wesentlich konstante Skalare anzusehen; es ist also nicht nur die Ladung e, sondern auch die Masse m des Teilchens konstant.

1) Zu den von mir in (1) erwähnten sind in den letzten Jahren an beachtenswerten Arbeiten die unter den Nummern 2 bis 22 des Literaturverzeichnisses am Ende aufgeführten hinzugetreten, von denen sich ein großer Teil mit der von Th. Kaluza eingeführten fünften Weltdimension beschäftigt.

In einer meiner Arbeiten (23) habe ich gezeigt, wie man die Gleichungen 3, die in der Weylschen Theorie solche Schwierigkeiten bereiten, ungezwungen aus einer Erweiterung des Einsteinschen Prinzips der geodätischen Linie

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = 0$$

ableiten kann, wenn man zu ds den Summanden $\varepsilon \varphi_\varkappa dx^\varkappa$ mit $\varepsilon = \frac{e}{m}$ hinzufügt, also

$$\delta \int \left(\varepsilon \varphi_\varkappa dx^\varkappa + \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}\right) = 0 \qquad (5)$$

setzt, ja daß die mechanischen Gleichungen zu einer Identität werden, wenn man die Ladungsdichte $\varrho^\varkappa$ mit dem elektrischen Potential $\varphi^\varkappa$ proportional annimmt. Diese Annahme ergibt sich in der Weylschen Theorie für das ganze Feld und ist mindestens für das Teilchen ganz plausibel, das ja an der Felderzeugung mitwirkt und sein Feld dem fremden, durch das es den Bewegungsantrieb empfängt, anpassen muß[1]).

Zu dem Ansatz 5 war ich dadurch gekommen, daß ich zu der durch das Einsteinsche Prinzip gegebenen reinen Gravitationswirkung die elektrische Wirkung in ihrer einfachsten Gestalt hinzufügte. Dabei konnte ich natürlich mit der Weylschen Deutung der linearen Fundamentalform $\varphi_\varkappa dx^\varkappa$ nichts anfangen, mußte vielmehr, wenn ich an einer weltgeometrischen Grundlage des Elektromagnetismus festhalten wollte, dem Integranden in Gleichung 5 die Bedeutung eines erweiterten Linienelements

$$ds = \varepsilon \varphi_\varkappa dx^\varkappa + \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \qquad (6)$$

geben, das ich das komplexe Linienelement nannte.

Mit der Annahme eines solchen Linienelementes erhob sich eine neue Schwierigkeit, nämlich die: Wie ist eine Geometrie, die von einem solchen Linienelement beherrscht ist, zu begründen? Sie kann sicher nicht Riemannisch sein, da der elementare Grundsatz der Riemannischen Geometrie, daß die Strecke $AB = -BA$ ist, bei Annahme der Gleichung 6 wegen der Tatsache nicht mehr gilt, daß $\varepsilon \varphi_\varkappa dx^\varkappa$ sein Vorzeichen nicht mit zu wechseln braucht, wenn man das der Quadratwurzel ändert. Abgesehen hiervon ist es ja gerade das Wesen der Riemannischen Geometrie, daß ihr ds^2 eine rein quadratische Differentialform ist. An sich ist die Abweichung der Gleichung 6 von der Riemannischen Geometrie nicht unerwünscht; ja, sie ist sogar durch die Sachlage geboten, da, wie ich schon in meinem Düsseldorfer Vortrage (1) ausführte, in der Riemannischen Geometrie, die physikalisch ganz und gar in der Gravitation aufgeht, für den Elektromagnetismus eben kein Raum mehr ist. Aber es war nun die schwere Frage, wie die nichtriemannische Geometrie der Gleichung 6 zu begründen ist, ohne ins Haltlose zu verfallen. Um diese Gefahr zu vermeiden, ist engster Anschluß an Riemann, soweit es irgend möglich ist, geboten, um die wohlbegründeten Sätze seiner Geometrie benutzen zu können. Deshalb versuchte ich, das nichtriemannische Linienelement der Gleichung 6 durch ein ihm verwandtes Riemannisches zu ersetzen; die Versuche mißlangen aber so lange, wie ich an der Dimensionszahl der Welt festhielt, und erst, als ich diese dadurch erweiterte, daß ich das nichtriemannische ds der Gleichung 6 mit dem Element dx^{n+1} einer neuen, in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit nicht enthaltenen Koordinate bis auf den Faktor $\sqrt{-1}$ gleichsetzte, gelangte ich zu befriedigenden Ergebnissen, indem ich damit den Anschluß an die sogenannte fünfdimensionale Relativitätstheorie von Kaluza-Klein fand (24).

Durch eine ganz spezielle Annahme für den Aufbau des fünfdimensionalen Fundamentaltensors aus den Einsteinschen $g_{\mu\nu}$ und den Komponenten $\varphi_\varkappa$ des elektromagnetischen Potentials gelang es den Schöpfern dieser Theorie, eine innige Verknüpfung des Elektromagnetismus mit der Gravitation zu erzielen. Insbesondere ordnen sich die Gleichungen der zweiten Gruppe Maxwells ohne weiteres den Gravitationsgleichungen ein, so daß sie aus einer Wirkungsfunktion des fünfdimensionalen Kontinuums ableitbar werden, die nur die Riemannische skalare Krümmung dieser Mannigfaltigkeit enthält, wie O. Klein gezeigt hat. Der mathematische Grund hierfür ist folgender: Bezieht man die Komponenten der $n+1$-ten Reihe des $n+1$-dimensionalen Krümmungstensors auf einen n-dimensionalen Fundamentaltensor, so bestehen sie im wesentlichen aus solchen Divergenzen, wie sie die zweiten Maxwellschen Gleichungen fordern. Dabei sind die antisymmetrischen Tensoren, deren Divergenzen zu bilden sind, in ihrer kovarianten Gestalt Rotationen der ursprünglichen Fundamentalkomponenten der $n+1$-ten Reihe nach den übrigen n-Koordinaten. So wird man von selbst dazu geführt, diese über die n-Zahl der Dimensionen hinausgehenden Komponenten mit den elektrischen Potentialen proportional anzunehmen, und es war ein glücklicher Griff von Kaluza, diesen Ansatz zu machen.

Nun kann man aber gegen die Theorie den Einwand erheben, daß sie ihren fünfdimensionalen Fundamentaltensor in allzu spezieller Weise auf-

1) Hier folge ich dem Grundsatz: Ein Teilchen bewegt sich in einem fremden Felde so, daß sich das von ihm erzeugte Eigenfeld diesem fremden Feld so eng wie möglich anschmiegt. Für die reine Gravitation ergibt sich aus diesem Grundsatz das Einsteinsche Prinzip der geodätischen Linie.

baut, und da möchte es mir nicht bedeutungslos erscheinen, daß man gerade zu dem Kleinschen Ansatz geführt wird, wenn man in der Gleichung 6 das nichtriemannische ds durch $\sqrt{-1}\, dx^{n+1}$ ersetzt und die Quadratwurzel durch Potenzieren beseitigt. Man erhält dann

$$\begin{aligned} 0 &= -(\sqrt{-1}\, dx^{n+1} - \varepsilon\varphi_\varkappa dx^\varkappa)^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (dx^{n+1})^2 + 2\varepsilon \sqrt{-1}\, \varphi_\varkappa dx^\varkappa dx^{n+1} \\ &+ (g_{\mu\nu} - \varepsilon^2 \varphi_\mu \varphi_\nu)\, dx^\mu dx^\nu = d\sigma^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Fundamentalkomponenten in diesem Linienelementquadrat sind aber — bis auf andere Bezeichnung der Konstanten — gerade die von Klein, so daß einerseits sämtliche fruchtbaren Folgerungen aus dessen Theorie für die nichtriemannische Geometrie des Linienelementes 6 ebenfalls in Anspruch genommen werden können, andererseits aber auch ein Verständnis dafür gewonnen wird, weshalb Klein den fünfdimensionalen Fundamentaltensor gerade in seiner speziellen Weise ansetzen muß.

Nun könnte man dagegen einwenden, daß hier die Kleinsche Hypothese nur durch einen andern speziellen Ansatz, nämlich die Annahme des komplexen Linienelementes 6 mit Hinzunahme der Gleichung

$$ds = \sqrt{-1}\, dx^{n+1} \quad (8)$$

ersetzt ist. Man kann aber zur Verteidigung des Ansatzes 6 ins Feld führen, daß er eine natürliche Verallgemeinerung des Riemannischen Linienelementes ist, die von der Natur im vereinigten Wirkungsprinzip der Gravitation und der Elektrizität selbst dargeboten wird. Ohne Überschreitung der Grenzen der Riemannischen Geometrie gibt es keinen Elektromagnetismus; deshalb muß die Grundlage der wirklichen Welt ein nichtriemannisches Linienelement sein. Meine Versuche, es durch ein Riemannisches zu ersetzen, sind fehlgeschlagen, da die abgeleiteten Gleichungen zu verwickelt wurden. Es blieb also nur der Ausweg übrig, die Geometrie des Linienelementes 6 auf eine Riemannische Geometrie höherer Dimensionszahl zurückzuführen, und da bietet sich die Gleichung 8 als ein sehr einfacher Weg zu diesem Ziele dar. Sie erinnert, da die x^{n+1}-Parameterlinien in der $n+1$-fachen Mannigfaltigkeit geodätisch sind, an die Nulllinien der Minkowskischen speziellen Raum—Zeit—Welt, und in der Tat erweisen sich auch nach Gleichung 7 die sämtlichen Linien der n-fachen Mannigfaltigkeit als die Nullinien der $n+1$-fachen.

Es kommt also nicht allen Linien der letzteren eine reale Existenz zu, sondern eben nur den Nullinien. Sucht man unter diesen wieder die geodätischen auf, so ergeben diese Gleichungen im n-dimensionalen Gewande die mechanischen oder ponderomotorischen Gleichungen 3 im kombinierten Gravitations- und elektromagnetischen Felde, so daß auch diese, deren Herleitung sonst immer Schwierigkeiten macht, aus einer einfachen Quelle fließen. Die Teilchenbahnen erscheinen somit als geodätische Nulllinien, also gewissermaßen als Strahlungswege, in der höheren Mannigfaltigkeit, so daß hier eine gewisse Beziehung zur Wellenmechanik gewonnen wird.

Man sieht also, welche erheblichen Vorteile die Einführung einer neuen Weltausdehnung für die bequeme mathematische Ableitung der Grundgleichungen bietet. Doch da drängt sich unabweisbar die Frage nach dem physikalischen Sinn dieser fünften Dimension auf, die ja augenscheinlich sich der Wahrnehmung entzieht. In der verschiedenartigsten Weise hat man diese Frage beantworten wollen. Man hat sie der elektrischen Ladung, der linearen Differentialform der elektrischen Potentiale, dem „Spin" des Elektrons zuordnen wollen; wenn bei uns eine Deutung möglich wäre, so wäre es vielleicht die eine Wirkung. Aber ich glaube, daß all dies Suchen verfehlt ist. In Wirklichkeit existiert gar keine fünfdimensionale Welt mit einem Riemannischen, sondern eine vierdimensionale mit dem nichtriemannischen Linienelement der Gleichung 6, und die fünfdimensionale Mannigfaltigkeit ist weiter nichts als ein mathematisches Hilfsmittel, die ohne ihre gedankliche Konstruktion nicht herleitbare Geometrie dieser vierdimensionalen nichtriemannischen Welt zu beherrschen. Das zeigt sich besonders deutlich, wenn man bedenkt, daß ja in der fünfdimensionalen Welt nicht allen Linien eine Realität zukommt, sondern nur denen eines vierfach unendlichen Komplexes, der bei uns als der sämtlicher Nullinien erscheint; alle andern Linien sind für die Erklärung der physikalischen Erscheinungen bedeutungslos, also irreal. Daher existiert nicht eine fünfdimensionale Riemannische, sondern eine vierdimensionale nichtriemannische Welt.

Wohl aber erhalten die gedanklich, also mathematisch, in dem fünfdimensionalen Kontinuum herleitbaren Größen realen Wert, wenn man sie wieder vierdimensional umrechnet. Da ist es interessant, besonders die skalare Riemannsche Krümmung der fünfdimensionalen Welt zu betrachten. Diese wird im vierdimensionalen Gewande zu

$$K_5 = K_4 - \frac{\varepsilon^2}{4} f_{\varkappa\lambda} f^{\varkappa\lambda}. \quad (9)$$

Setzt man diese Größe in die Weltfunktion ein, so erhält diese die von Weyl vorgeschlagene Gestalt, die dieser nur gewählt hatte, weil sie leicht

durchzurechnen war und die charakteristischen Erscheinungen gut darstellte, ohne aber einen inneren Grund für seine Wahl angeben zu können. Allerdings zeigt sich hier bei weiterer Durchrechnung der Mangel der Weylschen Eichinvarianz, weshalb ich mich lieber für andere Weltfunktionen entscheiden möchte; doch das soll Gegenstand einer anderen Veröffentlichung sein.

Literatur.

1) Ernst Reichenbächer, Der Elektromagnetismus in der Weltgeometrie. Physik. Zeitschr. **27**, 741, 1926.
2) O. Klein, Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips. Zeitschr. f. Phys. **41**, 407, 1927.
3) — Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie. Zeitschr. f. Phys. **46**, 188, 1928.
4) D. J. Struik und N. Wiener, A Relativistic Theory of Quanta. Journ. of Math. and Phys. **7**, 1, 1927.
5) F. London, Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl. Zeitschr. f. Phys. **42**, 375, 1927.
6) — Über eine Deutungsmöglichkeit der Kleinschen fünfdimensionalen Welt. Die Naturwiss. **15**, 15, 1927.
7) V. Fock, Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. Zeitschr. f. Phys. **39**, 226, 1926.
8) H. Mandel, Über die Bewegungsgleichungen des Relativitätsprinzips. Zeitschr. f. Phys. **39**, 40, 1926.
9) — Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. Erste Mitteilung. Zeitschr. f. Phys. **39**, 136, 1926.
10) — Zweite Mitteilung. Zeitschr. f. Phys. **45**, 285, 1927.
11) — Beiträge zur zweiten Mitteilung. Zeitschr. f. Phys. **49**, 697, 1928.
12) F. Gonseth und G. Juvet, Sur les équations de l'électromagnétisme. C. R. **185**, 341, 1927.
13) — — Sur la métrique de l'espace à 5 dimensions de l'électromagnétisme et de la gravitation. C. R. **185**, 412, 1927.
14) — — Sur l'équation de M. Schrödinger. C. R. **185**, 448, 1927.
15) — — Les équations de l'électromagnétisme et l'équation de M. Schrödinger dans l'univers à cinq dimensions. C. R. **185**, 535, 1927.
16) L. de Broglie, L'univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire. Journ. d. Phys. et le Radium VI **8**, 66, 1927.
17) Th. de Donder, Sur les extrémales décrites par les électrons et les particules électrisées. Bull. de Belg. **13**, 29, 1927.
18) — Deuxième communication. Bull. de Belg. **13**, 79, 1927.
19) L. Infeld, Les équations de Maxwell dans la théorie commune à la gravitation et à l'électricité. C. R. **186**, 1280, 1928.
20) — Zur Feldtheorie von Elektrizität und Gravitation. Physik. Zeitschr. **29**, 145, 1928.
21) — Zum Problem einer einheitlichen Feldtheorie von Elektrizität und Gravitation. Zeitschr. f. Phys. **50**, 137, 1928.
22) K. Hattori, Über eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität. Physik. Zeitschr. **29**, 538, 1928.
23) E. Reichenbächer, Die mechanischen Gleichungen im elektromagnetischen Feld. Zeitschr. f. Phys. **33**, 916, 1925.
24) — Die fünfdimensionale Relativitätstheorie und das komplexe Linienelement. Zeitschr. f. Phys. **50**, 425, 1928.

E. W. Scripture (Wien), Die physikalische Natur der Vokale nach den neuesten Untersuchungen.

Nach Kurven von einer Grammophonplatte (Scripture) und von Oszillographregistrierungen (Crandall) erweisen sich folgende Sätze als gültig:

1. Ein Vokal besteht aus einer Anzahl von aneinander gereihten Profilstücken.

2. Für verschiedene Vokale sind die Profile verschieden.

3. Die Profilform innerhalb eines Vokals ändert sich allmählich und stetig.

4. Die Profildauer ändert sich innerhalb eines Vokals.

5. Die Profilform ist abklingend.

Die Fouriersche Analyse liefert für eine Vokalwelle eine rein mathematische Formel, welche nur dann über physikalische Tatsachen Kenntnisse liefert, wenn die richtigen Grundlagen gegeben sind. Durch Versuche mit Kurven von bekannten Formen wurden folgende Sätze bewiesen:

Satz I der harmonischen Analyse: Eine Kurve, welche aus Sinuskurven mit Wellenlängen nach der harmonischen Reihe entstanden ist, liefert bei der Analyse die ursprünglichen Analysen und Null für alle anderen Werte.

Satz II der harmonischen Analyse: Eine Kurve, welche aus Sinuskurven mit Wellenlängen innerhalb und außerhalb der harmonischen Reihe entstanden ist, liefert bei der Analyse Amplituden für alle Wellenlängen der harmonischen Reihe, wobei die größeren Amplituden um die tatsächlich vorhandenen Wellenlängen gruppiert sind.

Satz III der harmonischen Analyse: Eine Kurve, welche aus Sinuskurven entstanden ist, wobei eine oder mehrere der ursprünglichen Kurven abklingend sind, liefert bei der Analyse Amplituden für alle Wellenlängen der harmonischen Reihe, wobei die größeren Werte um die tat-



sächlich vorhandenen Wellenlängen gruppiert sind.

Die Anwendung dieser Sätze auf die Resultate der harmonischen Analyse aller Forscher für alle Vokale mit Ausnahme von einigen Fällen von *i* ergibt folgende Resultate:

Satz I der physikalischen Vokalanalyse: Bei der Erzeugung einer Vokalbewegung kommt eine Schwingung mit der Grundperiode (Periode der ganzen Vokalwelle) nie vor.

Satz II der physikalischen Vokalanalyse: Der Vorgang, welcher sich mit der Grundperiode wiederholt, ist gar keine Schwingung.

Satz III der physikalischen Vokalanalyse: Bei der Erzeugung einer Vokalwelle sind immer Schwingungen vorhanden, welche abklingend sind und außerhalb der harmonischen Reihe stehen.

Satz IV der physikalischen Vokalanalyse: Bei der Erzeugung einer Vokalbewegung wirkt eine mit einem Intervall gleich der Grundperiode wiederholte Stoßkraft auf ein elastisches System, dessen Eigenschaften allein die Profilform bestimmen.

Die Analysen ergeben also folgende Resultate:

Grundsatz I der Dynamik der Vokalbewegungen. Auf mehrere elastische Systeme mit den Eigenperioden h_i, h_j, h_k, . . . und den Abklingungskoeffizienten δ_i, δ_j, δ_k, . . . wirkt eine Reihe von plötzlichen Stößen mit den Intervallen D_i, D_j, D_k, . . .

Grundsatz II der Dynamik der Vokalbewegungen: Die Eigenperioden der elastischen Systeme h_i, h_j, h_k, . . . und die Wiederholungsintervalle der Stöße D_i, D_j, D_k, . . . stehen weder untereinander noch miteinander in irgendwelcher Abhängigkeitsbeziehung.

Durch Versuche und Beobachtungen mittelst des Laryngostroboskops gewinnt man den folgenden

Grundsatz der physiologischen Vokalerzeugung: Eine Reihe von plötzlichen Luftstößen vom Kehlkopf mit den Intervallen D_1, D_2, D_3, . . . erregt Schwingungen in den Hohlraum des Mundes, Pharynx, usw. mit den Eigenperioden h_i, h_j, h_k, . . .; diese Perioden sind voneinander und von den Stoßintervallen unabhängig.

Die Versuche von Savart, Seebeck, König und Willis liefern folgende Resultate:

Satz I der Psychologie der Vokale: Eine wiederholte Schallempfindung (Vokalwelle) erzeugt die Empfindung eines Tones (Stimmtones).

Satz II der Psychologie der Vokale: Die Wiederholung irgendeiner Eigenschaft innerhalb einer Schallempfindung gibt dieser Empfindung einen tonähnlichen Charakter.

Satz III der Psychologie der Vokale: Jeder Wellenform entspricht eine besondere Vokalqualitätsempfindung

Satz IV der Psychologie der Vokale: Die Vokalqualität ist von dem Stimmton unabhängig.

Für das Ohr wurden folgende Schlüsse gezogen:

Satz I: Der Stapes folgt den Änderungen des Luftdruckes in eindimensionalen Bewegungen.

Satz II: Das Labyrinthwasser führt dreidimensionale Bewegungen aus, welche von den Stapes Bewegungen genau abhängig sind.

Satz III: Die Basilarmembran folgt genau den Bewegungen des Labyrinthwassers.

Satz IV: Die dreidimensionalen Bewegungen der Basilarmembran werden als ein System von Erregungen dem Gehirn zugeleitet.

Satz V: Eine Analyse irgendwelcher Art gibt es im Ohr nicht.

Satz VI: Die Schallempfindung wird überhaupt nicht analysiert; es werden nur Ähnlichkeiten beurteilt.

Nach der Obertontheorie schwingen die Stimmlippen als ganzes, in Hälften, in Dritteln, usw. und erzeugen dabei eine Reihe von harmonischen Teilschwingungen. Die Hohlräume resonieren auf die Teilschwingungen. Die Vokalbewegungen in der Luft bestehen aus einer Summe von nicht abklingenden Sinusschwingungen, welche Perioden nach der harmonischen Reihe besitzen. Nach den Vokalanalysen ist, wie oben erklärt wurde, diese Theorie in jeder Einzelheit falsch. Diese Theorie ist irrtümlich die Helmholtzsche genannt. Helmholtz selbst hat ausdrücklich die Stoßtontheorie als wahrscheinlich gültig erklärt.

Nach der Helmholtzschen Theorie des Ohrmechanismus reagieren die Fasern auf die Labyrinthwasserbewegungen wie ein harmonischer Analysator und führen tatsächlich eine Fouriersche Analyse aus. Selbst die Stahldrähte eines Klaviers in der Luft könnten solche Analysen nicht ausführen, wenn sie mit einer Gummimembran zusammengebunden wären. Daß die eng zusammengebundenen spinnengewebezarten Fasern gegeneinander und gegen das Wasser vereinzelt unabhängige Bewegungen ausführen können, ist nicht zu glauben.

Die Obertontheorie der Vokalerzeugung und die Resonanztheorie des Hörens entbehren jeder Grundlage.

W. Cauer (Göttingen), Über Vierpole und Siebketten[1]**).**

Bei passiven Vierpolen (Schaltungen von Selbstinduktionen, gegenseitigen Induktionen, Ohmschen Widerständen und Kapazitäten mit zwei Paaren von Zugangsklemmen ohne innere elektromotorische Kräfte) bestehen für alle Frequenzen des Wechselstroms zugleich folgende für die Fernmeldetechnik wichtigen Sätze: Jeder symmetrische Vierpol ist einer Brückenschaltung (Gitterschaltung) aus Zweipolen äquivalent, die untereinander nicht durch gegenseitige Induktionen verknüpft sind. Insbesondere ist jede symmetrische Siebkette oder Phasenausgleichsschaltung äquivalent mit einer Schaltung ohne gegenseitige Induktionen. Der Entwurf symmetrischer Siebschaltungen, Dämpfungsausgleich- und Phasenausgleichschaltungen geschieht zweckmäßig so, daß zunächst die Konstanten zweier den symmetrischen Vierpol charakterisierender Funktionen der Frequenz nach Wunsch festgelegt werden. Dann kann ein Vierpol mit den verlangten Eigenschaften in Form einer Brückenschaltung durch Konstruktion von Zweipolen realisiert werden, die diese beiden Funktionen der Frequenz als Widerstandscharakteristiken besitzen. Durch Transformation lassen sich hieraus sehr viele andere frequenzäquivalente Schaltungen gewinnen, unter denen man gemäß den Anforderungen der Praxis nach geringer Zahl der Schaltelemente, günstigen Abmessungen und Symmetrie bezüglich *a*- und *b*-Ader zu wählen hat. Der Vorteil dieses Vorgehens liegt in der Erfassung aller Möglichkeiten, aus denen bisher wegen der Beschränkung auf Kettenleiter immer nur eine kleine Auswahl getroffen wurde. — Jeder beliebige unsymmetrische Vierpol ist gewissen kanonischen Schaltungen frequenzäquivalent, die im allgemeinen auch dann gegenseitige Induktionen enthalten, wenn Ohmsche Widerstände nicht vorhanden sind. Schaltungen mit gegenseitiger Induktion lassen sich also insbesondere bei Siebketten ohne Einschränkung der Allgemeinheit nicht umgehen. Die Verwendung von gegenseitiger Induktion ist sogar praktisch wünschenswert auch im Falle symmetrischer Sieb- und Ausgleichsschaltungen, da sich dadurch Ersparnisse an Schaltelementen ergeben. — Jede Schaltung von Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen ist einer Schaltung äquivalent, in der nur feste Kopplungen vorkommen. — Zu jedem Zweipol und Vierpol (sogar zu jedem $2n$-Pol) lassen sich frequenzreziproke Schaltungen realisieren. Dies gilt ganz allgemein, auch beim Vorhandensein von gegenseitigen Induktionen. Bisher war nur die Möglichkeit der Konstruktion frequenzreziproker Zweipole in dem Falle bekannt, wo sich die Schaltung aus Reihen- und Parallelkombinationen und aus Wheatstoneschen Brückenanordnungen zusammensetzen läßt. Praktische Bedeutung haben die frequenzreziproken Zweipole u. a. für die Ausgleichsschaltungen konstanten Wellenwiderstandes. — Vorstehende Sätze sind Ergebnisse einer mathematischen Untersuchung, in der positiv definitive quadratische Formen, Invariantentheorie, Stieltjessche Kettenbrüche, eine Arbeit von Hurwitz über ganze rationale Funktionen, deren Nullstellen sämtlich negativ reellen Teil besitzen, analytische Funktionen mit positiv reellem Teil und kombinatorische Topologie eine Rolle spielen.

1) Eine ausführlichere Mitteilung hierüber soll in der Zeitschrift „Elektrische Nachrichtentechnik" erscheinen.

BESPRECHUNGEN.

J. D. van der Waals u. P. Kohnstamm, Lehrbuch der Thermostatik. 1. Teil: Allgemeine Thermostatik (zugl. 3. Aufl. des Lehrbuches d. Thermodynamik derselben Verfasser). Gr.-8°. XVI u. 390 S. Mit 38 Abb. im Text. 2. Teil: Binäre Gemische. 2. Aufl. Gr.-8°. VIII u. 402 S. Mit 220 Abb. im Text. Leipzig, J. A. Barth. 1927. Geh. je RM. 22.—, geb. je RM. 24.—.

Die erste Auflage dieses Werkes habe ich im Jahre 1910 in Bd. XI, S. 551 ff. dieser Zeitschrift besprochen und dabei hervorgehoben, daß es ein Werk von besonderer Eigenart sei, das hauptsächlich die Methoden der Holländischen Schule, insbesondere von van der Waals selbst, zur Darstellung bringt. Es sei also bewußt einseitig, fülle aber dadurch gerade eine Lücke aus, da diese Methoden in Deutschland verhältnismäßig wenig kultiviert würden. Inzwischen ist der Altmeister van der Waals dahingegangen und sein Mitarbeiter Kohnstamm legt nun den ersten Teil in dritter, den 2. Teil in zweiter Auflage vor. Um anzudeuten, daß es sich um das thermische Gleichgewicht materieller Systeme handle, hat Kohnstamm den üblicheren Titel „Lehrbuch der Thermodynamik" durch die etwas ungewöhnliche Bezeichnung „Lehrbuch der Thermostatik" ersetzt. Vom 7. Abschnitt ab ist das Werk im wesentlichen unverändert. Dagegen haben die ersten Abschnitte eine gründliche Umarbeitung über sich ergehen lassen müssen. Der erste Abschnitt gibt die allgemeine Theorie der Zustandsgleichung, der



zweite Abschnitt den ersten Hauptsatz und seine Anwendungen, während der dritte Abschnitt dem zweiten Hauptsatz und seinen Anwendungen gewidmet ist, der vierte Abschnitt enthält die Entwicklung der Theorie von Gibbs, der fünfte behandelt Systeme mit Molekülumwandlung, wobei auch ein Kapitel dem Nernstschen Theorem, dem häufig sogenannten dritten Hauptsatz gewidmet ist. Der sechste Abschnitt bespricht das Gleichgewicht bei Einwirkung äußerer Kräfte. Von hier ab ist, wie bereits erwähnt, das Buch mit der alten Auflage identisch, und ich kann auf meine frühere Anzeige verweisen.

Die sechs ersten Abschnitte geben den oben angeführten Inhalt in im allgemeinen lehrbuchmäßiger Fassung in guter, klarer, (nach meinem Gefühl etwas nüchterner) Darstellung. Als besonders bemerkenswert hebe ich hervor die Darstellung des zweiten Hauptsatzes im Anschluß an die axiomatischen Untersuchungen von Carathéodory, die Kohnstamm offenbar für befriedigender hält als die bisherige Ableitung des zweiten Hauptsatzes. In diesem Punkte überschreitet die Darstellung zuweilen die Grenzen des Lehrbuchs und geht wohl für den Anfänger etwas zu weit. Ich selbst muß bekennen, daß ich mich im Vorlesungsunterricht für die Carathéodorysche Darstellung niemals habe begeistern können und im wesentlichen mit Plancks ablehnendem Standpunkt übereinstimme. Um so interessanter war es mir, daß ein so erfahrener Lehrer wie Kohnstamm, der auch in der Theorie den physikalischen Boden nie unter den Füßen verliert, offenbar entgegengesetzter Meinung ist. Von bemerkenswerter Zurückhaltung ist der Verfasser gegenüber dem Nernstschen Wärmetheorem. Sein Standpunkt deckt sich im wesentlichen mit dem Urteil von Eucken, das diesem Theorem keinen allgemeinen Charakter zuerkennt. Er verweist den Nernstschen Wärmesatz in das Gebiet der Theorie der Zustandsgleichung. Je nachdem man also die allgemeine Theorie der Zustandsgleichung als zur Thermodynamik betrachtet oder nicht — der Verfasser tut dies durchaus — gehört der Nernstsche Wärmesatz der Thermodynamik an oder nicht. Nach dem Verfasser ist eine Grundlegung des Nernstschen Wärmesatzes in analog allgemein gültiger Weise wie für die beiden ersten Hauptsätze bisher nicht gelungen und dürfte auch wohl kaum zu erwarten sein.

Das Gesagte mag genügen, um zu zeigen, daß wir es auch in der neuen Auflage mit einer bedeutenden und interessanten Bereicherung der thermodynamischen Literatur zu tun haben.

Schaefer.

Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, herausgegeben von E. Abderhalden. Abt. III, Teil A, Heft 6: F. Scheminzky, Elektronen- und Ionenröhren. Gr.-8⁰. XVIII u. 942 S. Mit 239 Fig. Berlin und Wien, Urban & Schwarzenberg. 1928. Geh. RM. 25.—.

Da das Buch als Abschnitt des Handbuches für biologische Arbeitsmethoden zusammengestellt ist, so wendet es sich nicht an den Röhrenfachmann, sondern ist ausschließlich für den experimentierenden Forscher bestimmt, der die moderne Röhrentechnik als Hilfsmittel heranziehen will, ohne dabei die gesamte Fachliteratur der Elektronenröhren durcharbeiten zu können. Das vorliegende Buch ist dazu hervorragend geeignet und kann nicht nur für biologische Untersuchungen als Ratgeber empfohlen werden, sondern ebenso für jedes andere Forschungsgebiet, wo Methoden mit Elektronenröhren angewendet werden sollen. Der Verfasser gibt zunächst einen Abriß von Aufbau und Wirkungsweise der Elektronenröhren. Der zweite und dritte Abschnitt befaßt sich mit den prinzipiellen Anwendungsmöglichkeiten der Röhren, ein vierter mit den besonderen biologischen Anwendungen. Weitere Kapitel über Hilfsapparate, Meßmethoden für elektrische Schaltelemente und über den praktischen Aufbau von Röhrenschaltungen folgen. Der zweite Teil über Ionenröhren ist entsprechend der geringeren Bedeutung kurzgefaßt.

Daß an einzelnen Stellen Abänderungen oder Verbesserungen angebracht erscheinen, ist bei dem riesigen Stoff, den das Werk bringt, nicht anders zu erwarten und mindert den Wert des Buches nicht. So wird z. B. mehrmals nachdrücklich darauf hingewiesen, daß Röhren mit schlechtem Vakuum für exakte Messungen ungeeignet sind; Methoden zur Vakuummessung werden angeführt. Das ist sehr richtig, es fehlt aber der Hinweis, daß es der Röhrenindustrie heute keine Schwierigkeit mehr bedeutet, ein gutes Vakuum der Röhren auch im Serienbau zu erzielen, daß für Forschungszwecke die alten Schott- und Seddigröhren nicht Verwendung finden sollten, daß vielmehr die modernen Elektronenröhren außer durch gutes Vakuum auch durch die letzten Verbesserungen und Fortschritte der Röhrenfabrikation die Empfindlichkeit und Brauchbarkeit der Röhrenmeßmethoden erhöhen helfen. Ferner möchte angeregt werden, Vor- und Nachteile der Röhrentypen hinsichtlich des Fadenmaterials (S. 948 bezw. S. 998) etwas ausführlicher zu besprechen, da diese Auswahl oft große Schwierigkeiten bereitet und der Unerfahrene meist den Ratschlägen des Röhrenhändlers ausgesetzt ist.

Obwohl das Buch an sich schon wirklich Umfassendes bietet und selbst für die Röhrentheorie in größter Ausführlichkeit alles Grundlegende zusammenträgt, gibt ein Verzeichnis alle einschlägige Fachliteratur an, in der weiteres Studium möglich ist.

J. Tröger.

A. S. Eddington, Sterne und Atome. Mit Ergänzungen des Autors ins Deutsche übertragen von O. F. Bollnow. 8⁰. VI u. 124 S. Mit 11 Abb. Berlin, J. Springer. 1928. RM. 5.60, geb. RM. 6.80.

In drei Vorlesungen wird unsere gegenwärtige Vorstellung vom Aufbau der Sterne auf Grund unserer physikalischen Kenntnisse über den Atombau wiedergegeben. Das für weitere Kreise bestimmte Buch hat alle Vorzüge von Eddingtons bedeutender Darstellungskunst, die freilich in einer Übersetzung nie voll zur Geltung kommen kann. A. Kopff.

L. Zehnder, Die Entwicklung des Weltalls. 8⁰. VI u. 71 S. Tübingen, H. Laupp. 1928. RM. 3.60.

In allgemeinverständlicher Weise stellt der Verf. seine den neuen physikalischen Erkenntnissen angepaßten kosmogonischen Spekulationen dar, welche an die aus früheren Werken schon bekannten Ausführungen anknüpfen. Die Betrachtungweise des Verf. gehört einer bereits vergangenen Epoche der Kosmogonie an. Wir sind heute davon abgekommen, uns im freien Spiel der Phantasie die Entwicklung des Weltalls auszumalen; vielmehr versucht die wissen-

schaftliche Detailarbeit (man kann nur auf J. H. Jeans und sein neues Werk „Astronomy and Cosmogony" hinweisen) Einzelprobleme, soweit unsere physikalischen Erkenntnisse dies ermöglichen, der Lösung näher zu bringen. A. Kopff.

K. Hahn, Methodik des physikalischen Unterrichts. (Handbuch des naturw. u. math. Unterr. hrsg. v. Norrenberg, Bd. II.) 612 S. Mit 118 Abb. 8⁰. Leipzig, Quelle & Meyer. 1927. Geb. RM. 24.—.

Die Entwicklung des physikalischen Unterrichts in den letzten Jahrzehnten ist durch zwei Marksteine bestimmt: Um die Jahrhundertwende beginnt die „Reformbewegung" (Meraner Lehrpläne, Imuk, Damnu usw.), gekennzeichnet u. a. durch die Forderung, die Physik als Naturwissenschaft zu lehren, nicht als (angewandte) Mathematik. Dazu kommt die Wendung nach dem Kriege, welche in der preußischen Schulreform Gestalt gewinnt, und annähernd dadurch zu charakterisieren ist, daß aller Fachegoismus sich den höheren Zielen der Schule unterzuordnen hat. Konnte der Physiklehrer über die positiven Ergebnisse des ersten Entwicklungsabschnitts ein ausgezeichnetes Bild gewinnen in den Methodiken von Grimsehl (1911) und Poske (1915), so ist es ebenso begrüßenswert, wenn im Rahmen eines Handbuchs von weitem Wirkungsradius jetzt ein Mann sich mit der letzten Entwicklung auseinandersetzt, der als Mitarbeiter und Nachfolger Grimsehls vor der Gefahr bewahrt bleibt, wertvolle Errungenschaften leichtsinnig preiszugeben, und doch vorurteilslos und zukunftsfroh genug ist, um das Positive in der neueren Entwicklung zu sehen, zu nützen und zu fördern.

Das Buch zerfällt in zwei Hauptabschnitte: In dem ersten, allgemeinen Teil findet sich vor allem die Auseinandersetzung mit der preußischen Reform, in dem letzten wird der ganze Lehrgang der Physik in Unterstufe und Oberstufe eingehend durchgesprochen, und zwar in einer sehr zielstrebigen Art, so wenig enzyklopädistisch, daß man den ganzen speziellen Teil als einen ausführlichen Kommentar zu dem Unterrichtswerk des Verfassers (Teubner) ansehen darf. Charakteristisch für das ganze Buch ist die gründliche Art des Verf., den Dingen zuleibe zu gehen, und sie dann beim Namen zu nennen. So sind die Hauptergebnisse des allgemeinen Teils jeweils zusammenfassend formuliert. Zunächst wird der Bildungsinhalt der Physik untersucht und daraus die Bedeutung und das allgemeine Ziel (S. 38) des Physikunterrichts im Rahmen der Gesamtaufgabe der Schule hergeleitet. Daraus ergibt sich dann eine ausführliche Erörterung, welche Wege zur Erreichung dieses Zieles führen: Besonders interessierten dabei die Ausführungen über „Arbeitsunterricht" als die Lehrmethode des nachhaltigen Erfolges und über die „Konzentration" des Lehrstoffs als eine Lösung der Frage, wie man bei der dem Physikunterricht neuerdings auferlegten zeitlichen Einengung dennoch seine wesentlichen Ziele im Auge behalten kann. (Symptomatisch für den Verf. und unsere Zeit ist der Ausdruck, es gelte „den Wirkungsgrad des Unterrichts möglichst zu verbessern.") Sehr lesenswert ist das, was über die erkenntnistheoretische Seite der Physik gesagt wird. Das Kapitel „Unterrichtstechnische Ausgestaltung der Wege" enthält als Wichtigstes eine sehr ausführliche Besprechung der Schülerübungen, die wir ja bekanntlich Grimsehl zum großen Teil verdanken, ihrer Entwicklung und praktischen Handhabung. Auch der Abschnitt „Unterrichtsräume und Sammlung" bietet eine Menge höchst wertvoller Hinweise. Ferner seien noch hervorgehoben die Gesichtspunkte für den grundsätzlichen Aufbau des Lehrgangs: Auf der Unterstufe soll der Schüler mit Erscheinungen, Methoden und Gesetzen der Physik durch Erfahrung vertraut werden, letztes Ziel ist die Herausarbeitung des Energiebegriffs und seiner Bedeutung im praktischen Leben, während bei der Oberstufe der Hauptnachdruck auf dem systematischen Ziel der Physik liegt, d. h. also auf dem Bestreben die Einzelheiten im Zusammenhang zu verstehen; Leitgedanken, die dann in der speziellen Methodik zum Ausdruck kommen. Übrigens verlangt der Verf. mit Entschiedenheit, daß gerade auf die Lücken des physikalischen Weltbilds hingewiesen wird, von denen eine, nämlich die zwischen Wellen- und Quantentheorie ja nach Abschluß des Buches sich zu schließen begonnen hat.

Auf den speziellen Teil im einzelnen einzugehen, würde zu weit führen. Als besonders sympathisch sei die Leitidee bei der Behandlung der Wellenlehre, nämlich die Übertragung der Energie, erwähnt. Ferner sei hingewiesen auf die ausgezeichnete Begründung der Bewegungslehre, in der sich „Schwamm und Kreide" bekanntlich besonders hartnäckig behaupten; hier wird eine zuverlässige Methode beschrieben um den freien Fall und den Fall auf schiefer Ebene seinem zeitlichen Verlauf nach zu messen. (Der Fallkörper zieht einen Papierstreifen nach sich, der von einem elektrischen Funken durchlöchert wird.) Dagegen fordert die Begründung der Elektrizitätslehre (S. 278—304 u. 504—538) zur Kritik heraus. Der Verf. sagt selbst (S. 504), daß „die bisher übliche Darstellung ... die Frage nicht löst" und charakterisiert gegenüber der bisherigen Schulmethodik einige der neueren Anregungen. Aus didaktischen Gründen glaubt H. nach wie vor Magneto- und Elektrostatik als selbständige Gebiete zuerst behandeln zu müssen, gibt aber „dem Gewicht der Gründe, die sich gegen die Behandlung dieser Gebiete überhaupt richten, insoweit Raum", als er die Erörterung lediglich auf die Herausarbeitung der Begriffe und nicht etwa auf die noch hervortretenden speziellen Probleme abgestimmt sehen will. Ohne Frage ist der vorgeschlagene Lehrgang folgerichtig und zielstrebig, ob er aber der kürzeste und leistungsfähigste ist, möchte man doch sehr bezweifeln, wenn man es selbst einmal anders versucht hat. Man kann sehr wohl von der elektrischen Strömung ausgehen und doch im Sinne des Verf. in „entwickelnder Begriffsbildung" aufbauen; in experimenteller Hinsicht hat man dabei die größten Vorteile, für das Verständnis vor allem deshalb, weil man für Ladung und Spannung zwei prinzipiell verschiedene Meßinstrumente verwenden kann, während in der Elektrostatik eben nur das Elektrometer zur Verfügung steht. (Ähnlich sollte man ja auch in der Mechanik verfahren und mit der Hebelwage die schwere Masse, mit der Federwage die statische Kraft gemessen denken.) Vor allem aber wird nicht jeder verstehen, warum der Verfasser die drei elektrischen Maßsysteme nicht zugunsten des praktischen allein aufgeben kann, zumal wenn man sich der ablehnenden Haltung des Verf. gegenüber einem grundsätzlich der geschichtlichen Entwicklung folgenden Lehrgang und seines Eintretens für die Konzentration erinnert. Man müßte sich ja sogar ernsthaft überlegen, ob die Ökonomie des Unterrichts nicht auch in der Mechanik den Verzicht auf das absolute Maßsystem zugunsten des technischen verlangt, wie es der Verf. (S. 274) eine Zeitlang selbst durchführt.

Immerhin, überblickt man die gesamte Haltung des Buches und die vielen Anregungen, die man aus ihm schöpfen kann, so wird man wohl zu der Ansicht kommen, daß jeder Physiklehrer sich einmal gründlich mit ihm beschäftigen muß. E. Nies.

R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, unter besonderer Berücksichtigung der Röntgenmetallographie. Gr. 8⁰. IV u. 377 S. Mit 256 Fig. Berlin, J. Springer. 1928. Geb. RM. 31.50.

Ein Buch, das vielen willkommen sein wird! Allen denen, die sich einarbeiten möchten in dieses noch ziemlich junge, aber so schnell wachsende Arbeitsgebiet, nicht weniger aber denen, die nur nach einer Möglichkeit suchen, sich ohne große Mühe darüber zu orientieren. Und schließlich wird auch der engere Fachmann noch vieles finden, Kleinigkeiten im einzelnen, was für ihn wertvoll ist.

Das Buch behandelt die Materialprüfung im wesentlichen nach drei Richtungen: die Durchleuchtungen, die Spektralanalyse und die Strukturuntersuchungen. Jedem Abschnitt gehen einleitende Kapitel voraus, in denen zunächst die allgemeinen Grundlagen der weiter zu behandelnden Probleme dargelegt werden, dann folgen die speziellen Apparate und Methoden und schließlich die Anwendungen mit vielen Beispielen. Und diese sind besonders instruktiv, weil sie wirklich „aus dem Leben gegriffen" sind. Die reichen Erfahrungen des Verfassers kommen eben dem Buche sehr zugute und der Umstand, daß er in fast allen Teilfragen auf Arbeiten aus seinem Stuttgarter Laboratorium zurückgreifen kann. So ist die Darstellung nie rein abstrakt, sondern man findet Originalaufnahmen und zu diesen Angaben über Röhrenstrom und -Spannung, Belichtungszeit, Aufnahmematerial usw. Dieser Gesichtspunkt, nicht nur Lehrer, sondern auch erfahrener Berater zu sein, ist im ganzen Buche festgehalten und wird ihm viele Freunde sichern.

Zwei einleitende Abschnitte geben einen kurzen Überblick über Erzeugung und Eigenschaften der Röntgenstrahlen: Röhren und Hochspannungsapparate, die Grundtatsachen über Absorption und Kristallreflexion und die Meßmethoden. Es mag dem Physiker wohl so scheinen, als seien schon reichlich oft solche einleitende Kapitel geschrieben, die einen Leser voraussetzen, der alles vergessen hat, was er wohl einst in einer Vorlesung über Experimentalphysik gehört hat; wer aber nicht aus der reinen Physik stammt, wird es vielleicht begrüßen, wenn ihm das Nachschlagen in anderen Werken erspart wird. Die Darstellung bringt nicht mehr, als für den Zweck des Buches erforderlich ist und bringt gleich hier, etwa bei den Apparaten, Hinweise auf das, was für die Zwecke der Materialprüfung jeweils geeignet ist.

Als erstes Teilgebiet werden sodann die einfachen Durchstrahlungen, zur Aufsuchung von Fehlstellen, Inhomogenitäten und dgl. behandelt und durch eine Reihe schöner Aufnahmen erläutert. Der folgende Abschnitt berichtet über das ganze Gebiet der Spektralanalyse mit Hilfe der Röntgenstrahlen. Die spektroskopischen Apparate werden hier zunächst in ihren Grundprinzipien, sodann in den speziellen Ausführungsformen behandelt; vorausgeschickt wird weiter in Kürze das, was über die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der Röntgenspektren bekannt sein muß. Die Spektralanalyse selbst wird anschaulich gemacht durch viele zahlenmäßige Beispiele, zunächst die qualitative, die ja schon häufig ihren Wert hat zeigen können, sodann, getrennt nach Emissions- und Absorptionsmethode, die quantitative Analyse. Hier allerdings wird der Chemiker wohl den Eindruck gewinnen, daß seine altbewährten Methoden vorerst nicht in Gefahr sind, vom Neuen verdrängt zu werden. Dem Abschnitt ist eine wertvolle, von A. Hadding (Lund) bearbeitete Tabelle der Linienkoinzidenzen beigegeben.

Reichlich die zweite Hälfte des Buches ist den Interferenzmethoden gewidmet, deren vielseitige Anwendungen in der Materialprüfung bekannt sind: neben der Erforschung der reinen Kristallstrukturen kommen hier vor allem die Gefügeuntersuchungen in Betracht, also im wesentlichen die Bestimmung von Größe und Lagerung der Kristallite. Es ist darum erforderlich, daß zunächst die kristallographischen Grundlagen besprochen werden; dem folgen dann die einzelnen Verfahren: Debye, Laue, Drehkristall- und schließlich das alte Braggsche Spektrometerverfahren, das letztere nur kurz, da seine heute wichtigsten Anwendungen auf Gebieten liegen, die über den Rahmen des Buches hinausgehen. Die Gliederung ist wieder die gleiche: die Grundlagen einer jeden Methode, die speziellen Apparate und die Anwendungen mit Beispielen zur Auswertung der verschiedenen Diagramme. Der Verfasser hat es gut verstanden, gerade auf diesem, für den Unkundigen recht komplizierten Gebiete die leitenden Gedankengänge klar herauszustellen; wo dann schwierigere Probleme doch nicht zu vermeiden sind, ist ein warnendes Sternchen den betr. Kapiteln vorangestellt. Zusammenfassend sind dann die Kristallstrukturen, sowie die Strukturen von Legierungen ausführlich behandelt und in reichhaltigen Tabellen zusammengestellt. Den Abschluß bildet eine Besprechung der Faserdiagramme und ihrer technischen Anwendungen zur Bestimmung von Wachstums-, Deformations- und Rekristallisationsstrukturen. Ihre Entstehung und Auswertung sind an Hand von vielen besonders schönen Aufnahmen eingehend behandelt.

So ist also dem Buche weite Verbreitung zu wünschen. Der Springersche Verlag hat Sorge getragen, daß es dabei auch seinem Namen Ehre macht. H. Kulenkampff.

E. Abbe, Gesammelte Abhandlungen. Band 4: Unveröffentlichte Schriften wissenschaftlich technischen Inhalts. Erste Hälfte: Arbeiten zum Glaswerk zwischen 1882 u. 1885. Herausgegeben von M. v. Rohr. Gr.-8⁰. V u. 146 S. Mit 3 Abb. u. 1 Bildnis Abbes. Jena, G. Fischer. 1928. RM. 7.—.

Die erste Hälfte des 4. Bandes der gesammelten Abhandlungen von Ernst Abbe enthält eine Zusammenstellung der Schriften Abbes, welche sich ausschließlich mit den Arbeiten zur Entwicklung des Jenaer Glaswerkes befassen auf Grund der Akten, die in den Jahren 1882—1885 im preußischen Kultusministerium gesammelt worden sind.

Eingeleitet wird die Sammlung durch eine von Abbe u. Schott gemeinsam unterzeichnete Denkschrift, welche einen vorläufigen Bericht über den Stand der damaligen Schmelzkunst und über die durch die gemeinsame wissenschaftliche Vorarbeit in Witten und Jena erzielten Erfolge darstellt. Die

beiden ersten Berichte der Denkschrift sind für den Fachmann von besonderem Interesse, weil hier Abbe die nach dem frühzeitigen Tod Fraunhofers ganz ungewöhnliche Meinung ausspricht, daß nur durch planmäßige Zusammenarbeit zwischen dem im optischen Rechnen erfahrenen Fachmann und dem wissenschaftlich arbeitenden Hersteller des optischen Glases eine grundlegende Reform der in roher Empirie steckengebliebenen Glasindustrie zu erreichen sei. In der klaren Erkenntnis, daß die Herstellung der im Laboratorium gewonnenen neuen optischen Glasarten im Großen Mittel erfordern würde, die weit über die Kräfte von Privatleuten hinausgehen, wird bereits in dieser Denkschrift die Notwendigkeit der Unterstützung aus öffentlichen Mitteln betont. Die Begründung dieser Forderung ist in den nachfolgenden Schriften, aus welchen die Notlage der deutschen optischen Industrie mit aller Deutlichkeit hervorgeht (hochinteressant ist in dieser Hinsicht ein Gutachten von Emil Busch über die Lage der Rathenower optischen Industrie), enthalten. Einen der Hauptgründe für die Notwendigkeit der Staatshilfe erblickt Abbe in dem Mangel der Aussicht auf Rentabilität eines solchen Unternehmens zur Erzeugung optischen Glases, so daß für die Privatwirtschaft der Hauptantrieb zur Aufnahme der Fabrikation fehle. Dagegen habe der preußische Staat ein unmittelbares wirtschaftliches und staatliches Interesse an dem Fortbestand und an dem vom Ausland Unabhängigwerden einer hochentwickelten Industrie, welche den ganzen Bedarf der deutschen Armee und Marine an Fernrohren, Feldstechern usw. decke. Unter den Beilagen zu dem dem Kultusminister überreichten Bericht interessiert besonders der Vertragsentwurf betreffend die Begründung einer glastechnischen Versuchsanstalt in Jena unter gemeinsamer Beteilung von Dr. Schott, Prof. Abbe und der Firma Carl Zeiss mit je einem Drittel des Gründungskapitales in Höhe von 60000 RM. zur Fortführung der Arbeiten im Maßstab wirklicher Fabrikation. Für die in der Übergangszeit des zunächst nicht als gewerbliches Institut zu betrachtenden Unternehmens aufzubringenden Mittel wird in der Eingabe vom 5. Januar 1884 die erste Staatshilfe und in der Eingabe vom 27. Juli desselben Jahres eine zweite Staatshilfe erbeten.

Nach den vorliegenden Akten hat daraufhin das Jenaer Glaswerk für das Jahr 1884/85 den Betrag von 25000 RM. in drei und für das Jahr 1885/86 den Betrag von 35000 RM. in 4 Teilbeträgen erhalten. Eine regelmäßige Unterstützung des Jenaer Glaswerkes hat also keineswegs stattgefunden. Zweifellos ist diese Staatsunterstützung für die Begründung des Jenaer Glaswerkes eine wertvolle Hilfe und vielleicht auch eine conditio sine qua non gewesen. Man übersehe aber nicht, daß die bahnbrechende, dreijährige Vorarbeit den beiden Begründern außerordentliche Opfer auferlegt hat, die Zeugnis geben von selbstloser Hingabe an eine große Idee, deren Verwirklichung weit über den Rahmen des Jenaer Glaswerkes hinaus für die Entwicklung der deutschen Feinoptik von unvergänglicher Bedeutung ist.

Der Herausgeber dieser für die Geschichte der Jenaer Hütte sehr wertvollen Schriften hat es in dankenswerter Weise verstanden, in einem die Kerngedanken klar herausarbeitenden Vorwort Verständnis und Anteilnahme zu erwecken, so daß auch der diesem Gebiet Fernstehende der reizvollen Darstellungsweise Abbes mit hohem Genuß folgen wird.

Bartsch.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik. 5. Bd., 1. Hälfte. 2. Auflage. XVIII u. 840 S. Mit 341 Fig. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 1928. RM. 49.—, geb. RM. 53.—.

Nach mancherlei Verzögerungen, die durch den Tod von Prof. Lummer und Prof. E. Wiechert bedingt waren, ist nunmehr auch der erste Teil des 5. Bandes von Müller-Pouillet erschienen. Die Schriftleitung wurde von A. Wegener übernommen, der ja einer der erfolgreichsten Forscher auf vielen Gebieten der Geophysik ist und dadurch den notwendigen Überblick über das ganze Gebiet besitzt. Daß durch die Verzögerung ein Teil der Manuskripte mehrere Jahre vor Erscheinen gedruckt worden war, ist bei dem schnellen Fortschritt der Geophysik auf den meisten Gebieten bedauerlich, tut aber dem Buch kaum Abbruch, da die Darstellung durchweg so gehalten ist, daß der Leser, der wohl im allgemeinen wenig geophysikalische Vorkenntnisse besitzen wird, trotzdem den wünschenswerten Einblick in die Probleme erhält. Das Buch enthält folgende Abschnitte: 1. Meteorologie von H. v. Ficker (Meteorologische und aerologische Messungen sowie ihre Auswertung; Licht- und Wärmestrahlung; Statik und Dynamik der Atmosphäre; Kreislauf des Wassers; Periodizitäten in der Atmosphäre; normale Verteilung der meteorologischen Elemente; Störungen des Gleichgewichtes). 2. Akustik der Atmosphäre von A. Wegener (normale und anormale Schallausbreitung bei natürlichen und künstlichen Schallquellen; Wirkung von Wind und Temperatur). 3. Optik der Atmosphäre von A. Wegener (Reflexion und Brechung der Strahlen in der wolkenfreien Atmosphäre und durch Kondensationsprodukte; Regenbogen und Haloerscheinungen.) 4. Physik des Meeres von H. Thorade (Zusammensetzung und Eigenschaften des Meerwassers, Temperaturänderungen, Meeresströmungen, Wellen und Gezeiten). 5. Physik der Gletscher von H. Hess. 6. Der Erdmagnetismus von A. Nippoldt (Messungen, Theorie, Störungen, Erdstrom). 7. Das Polarlicht von G. Angenheister (Beobachtungen, Theorie, Spektrum). 8. Luftelektrizität von H. Benndorf und V. F. Hess (Leitfähigkeit, Ionisation, Das ungestörte Erdfeld, Störungen, Ströme in der Atmosphäre). 9. Mechanik und Thermodynamik des Erdkörpers von B. Gutenberg mit zwei eingefügten Abschnitten (*) von E. Wiechert † (Entwicklung der Erde, Theorie der Schwerkraft * und Beobachtungen, Bewegungen der Erdachse, Gezeiten des Erdkörpers, Erdbeben und Erdbebenwellen, Geodäsie*, Gestalt der Erde, Dichte, Druck, elastische Konstanten).—

Das Buch ist mit Ausnahme weniger rein theoretischer Betrachtungen fast ohne Formelangaben geschrieben. Vielleicht hätte in dieser Richtung stellenweise etwas weiter gegangen werden können, zumal es ja in erster Linie für Physiker bestimmt ist. Gerade in der Geophysik bricht sich heute auf allen Teilgebieten immer mehr die Tatsache Bahn, daß ohne tiefere physikalische und mathematische Kenntnisse eine Weiterführung der Fortschritte, die in den letzten Jahren erzielt worden sind, nicht möglich ist, und daß sich die Studierenden möglichst frühzeitig an die Anwendung der höheren Mathematik gewöhnen müssen. Andererseits haben die Geophysiker in den letzten Jahren nicht immer die Unterstützung der Physiker in dem Maße gefunden, wie es wünschenswert gewesen wäre, und

zahlreiche rein physikalische Untersuchungen und Betrachtungen selbst durchführen müssen. Daß der Band im Rahmen eines Lehrbuches der Physik erscheint, ist daher besonders zu begrüßen, und es ist zu erhoffen, daß diese Darstellung von Forschern, die sich durchweg schon lange mit den von ihnen behandelten Problemen befaßt haben, einen Anstoß dazu gibt, daß die Physiker sich mehr als seither mit geophysikalischen Problemen befassen. Das Buch ist jedenfalls eine durchaus geeignete Grundlage hierzu, und seine weiteste Verbreitung zu erhoffen.

Gutenberg.

Handbuch der Physik, herausgegeben von H. Geiger und K. Scheel. Band 7: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Redigiert von R. Grammel. 413 S. Mit 290 Abb. Berlin, J. Springer. 1927. Geh. RM. 34.50, geb. RM. 36.60.

Auch dieser Band, an dem wiederum nur ausgezeichnete Kenner der Materie mitgearbeitet haben, macht dem Springerschen Handbuchunternehmen alle Ehre. Er wird aber auch für sich betrachtet rasch Freunde gewinnen und eine seit langem fühlbare Lücke ausfüllen; denn es gab bisher eigentlich keine derartig vollständige und im besten Sinn des Wortes moderne Darstellung der Hydro- und Ärodynamik. Wenn man etwas aussetzen könnte, so ist es nur vielleicht dies, daß an manchen Stellen eine etwas größere Ausführlichkeit, insbesondere hinsichtlich der experimentellen Methoden und Forschungsergebnisse, erwünscht gewesen wäre.

Im ersten Kapitel gibt Lagally eine formvollendete Darstellung der Theorie der idealen Flüssigkeiten (Einleitung, Grundlagen und allgemeine Theorie, Allgemeine Methoden, Besondere Probleme und Methoden), die naturgemäß rein mathematisch orientiert ist und bis zur Prandtlschen Tragflügeltheorie reicht. Das zweite, von Hopf bearbeitete Kapitel über zähe Flüssigkeiten (Grundtatsachen, reine Zähigkeitserscheinungen, Zusammenwirken von Trägheit und Zähigkeit; allgemeine Ideen, Strömung in Rohren und Gerinnen, Oberflächenreibung und Formwiderstand) schließt sich zunächst unmittelbar an, muß dann aber den Boden der strengen analytischen Darstellung sehr bald verlassen und sich in physikalischere Gefilde erheben, wo nur eine von intuitiver Einfühlung regulierte Mischung aus mathematischer Betrachtungsweise, Empirie und tastendem Vermuten weiterhelfen kann; Hopf hat es ausgezeichnet verstanden, hier aller Schwierigkeiten einer befriedigenden Darstellung Herr zu werden. Anschließend sei gleich das Kapitel von Ackeret genannt; während die eine der Entwicklungslinien, die von der Theorie der idealen Flüssigkeiten ausgehen, in dem Kapitel von Hopf verfolgt wurde, führt dieses Kapitel auf einer anderen hinaus in die Gebiete, wo nun nicht die Reibung, sondern die Kompressibilität das Maßgebende ist. Der Inhalt (Einleitung, Grundgleichungen der Gasdynamik, Strömung in Röhren und Düsen in hydraulicher Behandlung, Ebene Gasströmungen, Unstetige Bewegungsvorgänge, Strömungskräfte auf bewegte Körper bei sehr großen Geschwindigkeiten) dürfte erschöpfend alle hierhergehörenden Fragen behandeln. Forchheimer im dritten Kapitel über die Wasserströmungen (Gleichförmige Strömung, Stationäre Strömung, Mit der Zeit veränderliche Strömung, Strömung bei unstetiger Wandung, Ausfluß und Überfall, Wasserstoß) und Betz im vierten Kapitel über Tragflügel und hydraulische Maschinen (Einleitung, Begriffe und wesentliche Eigenschaften, Ebene Vorgänge beim einzelnen Flügel, Ebene Vorgänge bei Flügelreihen, Räumliche Vorgänge beim einzelnen Flügel, Erweiterung der Theorie des induzierten Widerstandes auf Tragwerke und Flügelräder mit sehr kleinem Flügelabstand, Einfluß des endlichen Flügelabstandes, Experimentelle Methoden und Ergebnisse) führen bereits weit hinein in die Anwendungen. Namentlich der Titel des Betzschen Beitrages läßt aber kaum vermuten, daß es sich hier durchaus nicht nur um rein technische Dinge handelt. Den Beschluß des Bandes bildet eine klar und originell geschriebene Darstellung des Gesamtgebietes der Kapillarität von Gyemant (Die molekularen Theorien der Oberflächenspannung, Die mechanischen Wirkungen der Oberflächenspannung, Kapillarität und chemische Konstitution, Elektrokapillarität, Thermodynamik der Kapillarität, Die Messung der Kapillarkonstante).

R. Seeliger.

C. Stumpf, Die Sprachlaute. Experimentell-phonetische Untersuchungen nebst einem Anhang über Instrumentalklänge. Gr. 8⁰. XI. und 419 S. Mit 8 Textfiguren und 8 Notenbildern. Berlin, Julius Springer. 1926. Geh. RM. 28.50.

Inhalt: Analyse gesungener Vokale durch resonierende Stimmgabeln und durch Interferenzröhren, Unkenntlichwerden der Vokale in der höheren Sopranlage, das stimmhafte Sprechen, Struktur der Flüstervokale und Konsonanten, subjektive Tonhöhen der stimmlosen Sprachlaute. Synthetische Darstellung der stimmhaften Vokale; Entwicklung der Vokalforschung und die Konvergenz ihrer Ergebnisse; Phonographische, telephonische und ohrenärztliche Beobachtungen; Systematik der Sprachlaute vom akustischen Standpunkte; Einheitliches und mehrheitliches Hören. Die gegenseitige Beeinflussung der Teiltonstärken und ihr Verhältnis zur Gesamtstärke des Klanges. Psychophysik der Sprachlaute. Physik und Physiologie der Sprachlaute. Über Instrumentalklänge.

Das Buch enthält — in einem gemeinsamen Rahmen zusammengefaßt — die Ergebnisse der vom Verfasser seit 1913 durchgeführten Untersuchungen auf dem Gebiete der Analyse und Synthese von sprachlichen und musikalischen Klängen. Das dabei verfolgte Ziel war die theoretische Zergliederung dieser Klänge und die Erforschung der zu ihrer Wahrnehmung führenden Vorgänge. Dabei wurde die Analyse jeweils erst dann als zufriedenstellend angesehen, wenn es gelang, die Klänge aus ihren einzelnen Faktoren zusammenzusetzen, ohne daß ein Unterschied zwischen den ursprünglichen und den zusammengesetzten Tönen festzustellen war. Die Klänge wurden so unmittelbar als möglich, unter Verwendung möglichst weniger Zwischenglieder, untersucht, und zwar durch subjektive Methoden, bei denen die direkte akustische Beobachtung die Hauptrolle spielte.

Die Arbeit stellt in ihren Hauptlinien die Fortsetzung der Helmholtzschen Versuche über Vokale und Instrumentalklänge dar, wobei in den wesentlichsten Punkten die Richtigkeit der umstrittenen Helmholtzschen Vokaltheorie bestätigt wurde. Die von Helmholtz gegebene Theorie des Aufbaues der

musikalischen Klänge wurde hingegen durch Stumpf modifiziert, da sich zwischen Vokalen und musikalischen Klängen keine scharfe Grenze mehr ziehen läßt.

Die wichtigsten Ergebnisse der Stumpfschen Forschungen stimmen überein mit denen anderer Forscher, die auf ganz anderem Wege mit anderen Mitteln das Problem bearbeiteten.

Die Einheitlichkeit des Inhaltes verbietet, an dieser Stelle aus dem großen Zusammenhange Einzelheiten herauszugreifen. Überall stellt sich dem Leser die vorbildliche Gründlichkeit, umfassende Betrachtungsweise und wissenschaftliche Ehrlichkeit, Geduld und Vorsicht des Verfassers entgegen.

Physiologen, Physiker, Sprach- und Gesangforscher und Musiksachverständige werden nur Gewinn aus diesem Werke ziehen, das einen Teil der wissenschaftlichen Lebensarbeit eines großen Lehrers, Gelehrten und Menschen darstellt.

Reiher.

L. B. Loeb, Kinetic theory of gases. Gr. 8°. XVI u. 555 S. London, Mc Graw-Hill Publishing Co. Ltd. 1927. Preis sh. 27/6.

Anläßlich einer vor mehreren Jahren in Chicago gehaltenen Vorlesung hat der Verf. den empfindlichen Mangel eines in englischer Sprache geschriebenen Buches über kinetische Gastheorie gefühlt, das nicht zu schwierig ist, um auch für den Studenten mittleren Semesters bereits erfolgreich benutzbar zu sein. Das vorliegende Buch soll diese Lücke ausfüllen. Es ist als Lehr- und Handbuch für den studierenden, wie für den forschenden Physiker und Chemiker gedacht, ferner als Vorbereitung für schwierigere Darstellungen, die sich auch auf die statistische Mechanik erstrecken. Zur Erreichung dieses Zieles hat der Verf. namentlich die deutsche Lehr- und Handbuchliteratur (P. Debye, G. Jäger, K. Jellinek, Cl. Schäfer) reichlich benutzt und diese Hilfe erfreulicherweise in seinem Vorworte ausdrücklich dankbar anerkennend hervorgehoben. Ein kurzer Abschnitt über den Zusammenhang zwischen Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung und Spektrallinienbreite ist aus dem französischem Werke von E. Bloch übersetzt. Der Inhalt wird in die folgenden Kapitel abgeteilt: 1. Historisches. 2. Das mechanische Modell eines idealen Gases. 3. Die mittlere freie Weglänge nach Clausius. 4. Die molekulare Geschwindigkeitsverteilung. 5. Die genauere (Van der Waalssche) Zustandsgleichung der Gase. 6. Transport von Impuls, Energie und Masse durch ein Gas (Kinetische Theorie der inneren Reibung, Wärmeleitung und Diffusion). 7. Die Gesetze verdünnter Gase und Oberflächenerscheinungen. 8. Die Realität der Molekularbewegungen (Brownsche Bewegung). 9. Spezifische Wärme und kinetische Theorie. 10. Elektrische und magnetische Eigenschaften der Moleküle und kinetische Theorie. 11. Anwendung der kinetischen Theorie auf die Elektrizitätsleitung in Gasen. Ein Anhang umfaßt Angaben über Moleküldurchmesser, -geschwindigkeiten, usw., allgemeine physikalische Konstanten, mathematische Hilfsformeln und Zahlentafeln, endlich ein ausführliches Autoren- und Sachregister.

Das Buch ist durchaus modern, sowie größtenteils elementar geschrieben und dürfte seinen Zweck sehr gut erfüllen können. Der deutsche Leser, insbesondere der Studierende, wird naturgemäß die deutsche Originalliteratur bevorzugen. Doch ist Loebs Werk nützlich, anregend und originell genug, auch selbständiges Interesse beanspruchen zu dürfen, namentlich im Schlußkapitel, das des Verfassers eigenes Arbeitsgebiet betrifft.

A. Smekal.

G. v. Hevesy, Das Element Hafnium. 8°. II. u. 49 S. Mit 23 Figuren. Berlin, Julius Springer, 1927. RM. 3.60.

Die Schrift enthält das bis zu ihrer Fertigstellung (Sept. 26) bekannte Material über Eigenschaften und Vorkommen des Elements Hafnium. Von der im gleichen Jahre erschienenen Monographie Roses unterscheidet sich daher der Umfang des Inhalts wenig. Dafür ist aber vorliegendes Buch vom Entdecker des Elements selbst verfaßt und enthält so insbesondere eine Reihe von theoretischen Gesichtspunkten (besonders über die Gründe der Zirkonähnlichkeit), die dort fehlen. Es werden zunächst kurz, aber sehr klar die atomtheoretischen und geochemischen Vorüberlegungen der Entdeckung und dann deren Verfahren selbst dargelegt, darauf in großer Ausführlichkeit die Trennungsmethoden des Hafniums vom Zirkonium abgehandelt, von denen im wesentlichen die Fluorid- und die Phosphat-Methode wichtig sind. Es folgt ein Abschnitt über die Eigenschaften des Hafniums (metallisches Hf wurde von v. Hevesy und Berglund durch Reduktion des Kaliumdoppelfluorids mit Natrium erhalten). Die im folgenden dargestellten Eigenschaften der Hf-Verbindungen tragen deutlich den Stempel der Entdeckungsgeschichte an sich; es handelt sich meist um Verbindungen, auf denen Trennungsmethoden basieren, und ihre für diese Methoden wesentlichen Eigenschaften. So sind auch optisches und Röntgespektrum mit großer Genauigkeit untersucht und bekannt. Schließlich wird das Vorkommen des neuen Elements in den verschiedenen Zirkonmineralien ausgeführt und ausführlich die Begründung der „im periodischen System fast einzig dastehenden“ Ähnlichkeit mit dem Zirkonium aus der N-Schalenauffüllung und „Lanthanidenkontraktion“ in den seltenen Erden gegeben. Die ganze Schrift ist eine im rein Chemischen wie im Physikalischen außerordentlich präzise Zusammenstellung des Bekannten; was sie von anderen Monographien im chemischen Sinne unterscheidet, ist die reizvolle Unfertigkeit des behandelten Stoffs.

G.-M. Schwab.

P. P. Ewald, Die Reflexion und Brechung des Lichtes als Problem der Elektronentheorie. Fortschritte der Chemie, Physik u. physikalischen Chemie, Serie B, Band 18, Heft 8. 28 S. Mit 5 Textfiguren. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1925. RM. 2.80.

Die Abhandlung führt an einem speziellen Falle (= senkrechte Inzidenz eines linear polarisierten Strahles auf eine planparallele Kristallplatte) in die optische Dispersionstheorie der Kristalle ein und ist auch für den Leser verständlich, welcher nicht über den mathematischen Apparat verfügt, den die allgemeine Dispersionstheorie der Kristalle erfordert. Nach einem kurzen Überblick über das Problem bis Maxwell-Lorentz setzt sich der Verfasser im 1. Teil der Abhandlung allgemeinverständlich, wie es nur dem Schöpfer der Dispersionstheorie der Kristalle möglich ist, mit dem Randproblem vom Standpunkt einer konsequenten Elektronentheorie auseinander,

für die es keine Trennung in ein zweidimensionales Randproblem und in ein Binnenproblem gibt. Literaturnachweise vervollständigen diesen 1. Teil der Abhandlung. Im zweiten Teil sind die allgemeinen Ausführungen an dem eingangs erwähnten einfachen Beispiel rechnerisch belegt, indem die durch den Primärstrahl an den einzelnen Netzebenen ausgelösten Wellen summiert werden. Das Zustandekommen der vom Vakuumwert c abweichenden Phasengeschwindigkeit v der „Binnenwelle" (infolge der beständigen Phasensprünge, welche die Primärwelle beim Durchsetzen der Netzebenen erfährt), sowie die Wiedergewinnung der „Randbedingungen" und der Fresnelschen Formeln dürften auch dem mathematisch weniger geschulten Leser verständlich werden. H. Ott.

F. Errulat, Die Methoden der Erdbebenforschung. Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden. Lieferung 266. 111 S., 41 Abb., Berlin und Wien, Urban & Schwarzenberg. 1928. RM. 6.—.

Das Bändchen gibt eine durchweg seinem Zweck entsprechende Darstellung der Methoden, nach denen die Erdbebenwellen mit Seismometern sowie die Erdbebenwirkungen im Gelände untersucht, und die Lage der Erdbebenherde in Raum und Zeit bestimmt werden. Ferner werden die Methoden besprochen, mit denen man Aufschlüsse über die Entstehung der Erdbeben erwarten darf. Kurze Angaben über die seismische Bodenunruhe sowie über die Methoden der angewandten Seismologie beschließen die für viele Zwecke sehr erwünschte zusammenfassende Darstellung der genannten Arbeitsmethoden. Gutenberg.

F. Klein, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. Neubearbeitet von W. Resemann. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. XXVI. XII u. 326 S. Mit 237 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1928. RM. 18.—, geb. RM. 19.50.

F. Klein hat in den 1892 autographierten Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie seine grundlegenden Untersuchungen über den Zusammenhang derselben mit der projektiven Maßbestimmung ausführlich dargestellt. Das vorliegende Buch schließt sich an diese Vorlesungen an, bringt jedoch mit Rücksicht auf moderne Entwicklungen manches Neue, während zahlreiche Einzelheiten weggelassen wurden.

Nachdem im ersten Teil eine Einführung in die projektive Geometrie gegeben ist, bringt der zweite Teil die projektiven Maßbestimmungen in ihrem Zusammenhang mit der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen Geometrie. Der dritte Teil: „Die Beziehungen der nichteuklidischen Geometrie zu anderen Gebieten" behandelt die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, ihre Beziehungen zur Axiomatik und zur Differentialgeometrie und gibt schließlich Ausblicke auf Anwendungen der nichteuklidischen Geometrie auf Funktionentheorie und die spezielle Relativitätstheorie.

Die Kleinsche Darstellung der nichteuklidischen Geometrie hat für den theoretisch interessierten Physiker einen besonderen Reiz; die vorliegende Neuausgabe macht den Zugang noch leichter und ist daher sehr zu begrüßen.

E. Hilb.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Reichsmark 13.70 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.50 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Reichsmark 11.20, im Ausland $ 3.—. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Reichsmark —.35, Beilagen mit Reichsmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 24. Ausgegeben am 15. Dezember 1928. Nr. 772. Printed in Germany. 29. Jahrgang.

INHALT:

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 24 | 15. Dezember 1928 | 29. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 2 am 10. Januar 1929.

INHALT:

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Über Kristallstruktur und Ferromagnetismus.

Von O. v. Auwers.

Einleitung.

Vor einer Reihe von Jahren mußte Verfasser (1) die Frage, ob Ferromagnetismus eine Eigenschaft des Atoms, der Molekel oder des Kristallgitters ist, noch offen lassen. Damals glaubte man einerseits an den Magnetismus des einzelnen Eisenatoms, dessen Magnetonen man ja in seinen verschiedenen Bindungszuständen messend bestimmen konnte, wußte aber auf der anderen Seite sehr wohl, daß für die typischen Eigenschaften des Ferromagnetismus, wie Koerzitivkraft, Remanenz und Hysteresis höhere Konfigurationen herangezogen werden mußten, wie das schon von Ewing (2) und allen seinen Nachfolgern, vor allem P. Weiß (3), in seiner Erweiterung der Theorie des Paramagnetismus von Langevin (4) getan war. Auch die Heuslerschen Legierungen (5, 6), die trotz ihrer Zusammensetzung aus einem dia- und zwei paramagnetischen Elementen ferromagnetische Eigenschaften aufweisen, haben seit Jahrzehnten die Frage nach dem eigentlichen Träger des Ferromagnetismus wach gehalten und lassen fast nur den Schluß zu, daß für das Auftreten von Ferromagnetismus eine bestimmte kristallographische Konfiguration nötig ist.

Damals waren die Versuche von Gerlach und Stern (7), die das einzelne Eisenatom als unmagnetisch, d. h. in einem äußeren Feld nicht ausrichtbar, nachgewiesen haben, noch nicht bekannt und der Weg von Laues erstem Kristallbeugungsbild (1912) bis zum Ausbau der modernen Röntgenspektroskopie war erst zum kleinsten Teil durchlaufen, wenigstens in bezug auf die Bereitstellung eines hinreichend umfangreichen kristallographischen Materials.

Einige Jahre später konnte Verfasser anlässig einiger von F. Krüger veranlaßten röntgenographischen Strukturuntersuchungen an verschiedenen Legierungen von A. Sacklowski (8) darauf hinweisen, daß es den Anschein habe, als sei das Auftreten ferromagnetischer Eigenschaften an ein kubisch-raumzentriertes (k. r.) Gitter gebunden. Dabei war jedoch das Verhalten des kubisch-flächenzentrierten (k. f.) Nickels von vornherein zweifelhaft, da die Angaben von A. Hull (9), der auch beim Nickel ein k. r. Gitter gefunden hatte, unsicher und schwankend waren. Auch die

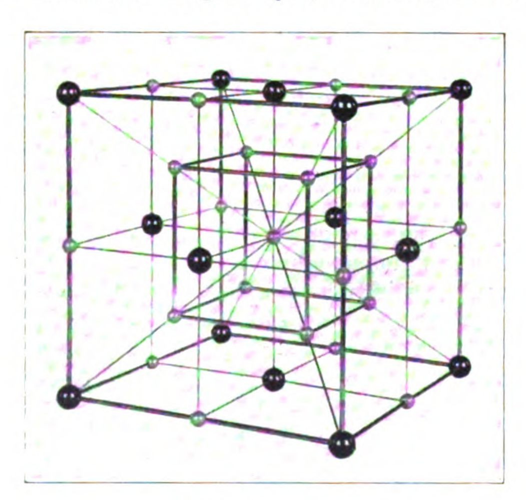


von A. Sacklowski (l. c.) ausgeführten Untersuchungen der Nickel-Kupfer-Reihe ergaben sowohl im magnetisierbaren wie unmagnetisierbaren Teil des Zustandsdiagramms keine Abweichung von der k. f. Form der Gitterstruktur. Somit schien die Frage — auch in Hinblick auf das Kobalt — in dieser Allgemeinheit nicht beantwortbar.

Ist Ferromagnetismus an ein bestimmtes Kristallgitter gebunden?

In neuester Zeit ist dies Problem durch zwei Arbeiten wieder akut geworden. Einerseits ist es E. Persson (10) wohl endgültig gelungen, die lange umstrittene Strukturform der Heuslerschen Legierungen aufzuklären, die gerade wegen ihrer eigenartigen Zusammensetzung aus Kupfer, Mangan und Aluminium besondere Aufschlüsse über die kristallographischen Grundlagen des Ferromagnetismus erwarten lassen, andererseits veröffentlichte W. Heisenberg (11) eine theoretische Arbeit, die das Weißsche Molekularfeld, mit den man bisher den Ferromagnetismus aus dem Paramagnetismus ableitete, durch quantenmechanische Überlegungen ersetzte, die eng an den kristallographischen Aufbau der Materie gebunden sind.

Fig. 1 zeigt ein Modell der Gitterstruktur von Heuslerschen Legierungen, wie es von Persson



● *Al* ○ *Cu*, *Mn*.
Fig. 1. Heuslersche Legierung.

bestimmt ist. Die großen dunklen Punkte bedeuten Aluminium, die kleinen hellen beliebig Kupfer oder Mangan. Man sieht, daß das große kubische Aluminiumgitter ($a_w = a$ Å) kubisch flächenzentriert ist, während seine Bausteine in bezug auf Kupfer und Mangan mit einer Würfelkante ($a_w' = \frac{a}{2}$ Å) kubisch raumzentriert ist. Es ist ein Gitter mit sog. Überstruktur. Bemerkenswert ist, daß das stöchiometrische Verhältnis der drei Komponenten im Elementarkubus genau der seit 30 Jahren von Heusler geforderten chemischen Zusammensetzung entspricht. Damit dürften gleichzeitig die wiederholt angezweifelten Ergebnisse von F. T. S. Young (12) bestätigt sein. Ob im Falle der Heuslerschen Legierungen die Entwicklung ferromagnetischer Eigenschaften an das Auftreten der Überstrukturlinien gebunden ist, bedarf noch der experimentellen Untersuchung. Immerhin wären Zusammenhänge wohl denkbar, da Überstrukturlinien eine Ordnung höherer Art voraussetzen und für den Ferromagnetismus leicht dasselbe verlangt werden könnte. Es mutet jedenfalls kaum wie ein Zufall an, daß das unerwartete Auftreten eines k. r. Gitters in der Legierung dreier an sich k. f. kristallisierender Elemente parallel mit dem Auftreten an sich ebenso unerwarteter ferromagnetischer Eigenschaften geht.

Der Heisenbergsche Ansatz zur Lösung des Problems des Ferromagnetismus geht von quantenmechanischen Voraussetzungen aus, indem er versucht, lediglich aus den Coulombschen Wechselwirkungen der Atome, den Spinellelektronen und dem Pauliprinzip Gesetzmäßigkeiten zu folgern, die wir sonst nur mit Hilfe des Weißschen Molekularfeldes, gegen das berechtigte Einwände (11, 13, 14, 15) erhoben worden sind, abzuleiten gewohnt sind. Eine der Heisenbergschen Bedingungen für das Zustandekommen solcher Austauschphänomene zwischen benachbarten Atomen, daß Wirkungen wie durch das Weißsche Molekularfeld, mithin Ferromagnetismus, auftreten, ist die, daß jedes Atom mindestens 8 Nachbarn in gleichem Abstand haben muß. Das führt auf eine kristallographische Deutung des Ferromagnetismus im oben angedeuteten Sinne.

Jedenfalls geben beide Arbeiten — die experimentelle von der aufschlußverheißenden Seite der Heuslerschen Legierungen und die theoretische von ihren umfassend gültigen Voraussetzungen aus — der Frage nach den kristallographischen Vorbedingungen des Ferromagnetismus erneut Bedeutung, so daß es gerechtfertigt erscheinen mag, im folgenden die heute in der Literatur vorliegenden Daten kritisch daraufhin durchzusehen, ob man bestimmte kristallographische Bedingungen des Ferromagnetismus auffinden kann.

Elemente.

Der Heisenbergschen Bedingung, daß jedes Atom mindestens 7 — das kommt in der Natur nicht vor, also 8 — Nachbarn im gleichen Abstand hat, genügen sowohl das k. f. wie das k. r. Gitter und die hexagonale dichteste Kugelpackung. Es bedingen

k. r. Gitter	8 Nachbarn	
k. f. „	12	„
hex. dichteste Kugelpackung	12	„ .

Diese Bedingung ist, wie auch Heisenberg betont, viel zu allgemein, da die drei sich ergebenden Gittertypen nicht nur fast alle Metalle, sondern darüber hinaus noch einen beträchtlichen Prozentsatz der übrigen Elemente des periodischen Systems umfaßt. Als zweite Bedingung findet Heisenberg, daß die Hauptquantenzahl $n \geqq 3$ sein muß. Das schließt, wenn man von angeregten Zuständen absieht, die erste Horizontalreihe des periodischen Systems für den Ferromagnetismus aus, nämlich alle die Elemente, bei denen die dreiwertige Quantenbahn nicht besetzt ist. Auch hiermit ist zunächst wenig gewonnen. Dabei ist es jedoch keineswegs nötig und hinreichend, die drei ferromagnetischen Elemente Eisen, Kobalt, Nikkel allein aus der Menge der übrigen durch besondere Bedingungen herauszuheben, sondern man muß allgemeiner auch das Auftreten von Ferromagnetismus bei den Manganverbindungen, ja vielleicht auch bei Chrom- und Vanadiumlegierungen ins Auge fassen, in denen Ferromagnetismus offenbar erst durch eine Änderung des normalen Atoms durch seine Legierungsnachbarn in dem Sinne hervorgerufen wird, daß das Atom einen ähnlichen Aufbau wie die Atome[1]) der Eisengruppe erhält.

Betrachten wir zunächst im einzelnen die magnetischen Elemente, dann die binären Legierungen und schließlich kompliziertere auf ihre kristallographische Struktur hin. Daß ferromagnetische Elemente nicht ausschließlich k. r. Gitter zeigen, wurde schon oben erwähnt. Eisen, Kobalt und Nickel weisen alle drei nach Heisenberg möglichen Gitter auf, nämlich k. r., hexagonale dichteste Packung und k. f. Gitter. Nimmt man auch Vanadium, Chrom und Mangan dazu, hat man in den beiden ersten zwei weitere Vertreter des k. r. Gitters, während die Struktur des Mangans z. T. noch ungeklärt ist. Das bei Zimmertemperatur stabile α-Mangan hat 58 Atome (16) komplizierterer Anordnung (Raumgruppe $T_d{}^3$) im Elementarbereich, während β-Mangan (oberhalb 742° C stabil) nur 20 Atome hat. γ-Mangan konnte als flächenzentriertes tetragonales Gitter mit 4 Atomen im Elementarkörper bestimmt werden. In dieser Form dürfte es kaum ferromagnetische Eigenschaften zeigen, während sich seine ferromagnetischen Legierungen gerade vorzugsweise bei hohen Temperaturen bilden. Soweit unsere Kenntnis reicht, liegt also bei den Elementen kein Widerspruch mit den Heisenbergschen Bedingungen vor, doch zeigt sich schon hier, daß die Antwort auf die Frage nach einem bestimmten Kristallgitter sehr allgemein ausfallen wird.

1) Dabei ist im Auge zu behalten, daß auch das einzelne Eisenatom nicht ferromagnetisch ist, es vielmehr erst durch die Wechselwirkung seiner Nachbarn wird (vgl. oben).

Binäre Systeme.

Geht man zu binären Legierungen über, werden die Verhältnisse erheblich komplizierter und zugleich ungünstiger. Bei der Reihe Eisen-Nickel (17) finden wir von 0—25 Proz. *Ni* das k. r. Gitter des α-Eisens vorherrschend; von 25—35 Proz. *Ni* tritt daneben noch das k. f. Gitter des Nickels auf, während von 35—100 Proz. *Ni* das Nickelgitter dominiert. Ähnlich liegen die Verhältnisse für Eisenkobalt (17) und Eisensilizium (18), von denen das erste bis 80 Proz. *Co* k. r., von 80—85 Proz. *Co* k. r. und k. f. und von 85—98 Proz. *Co* k. f. ist, während in der zweiten Reihe von 0—15 Proz *Si* das α-Eisen (k. r.), bei 14 Proz. *Si* (abgeschreckt) das k. f. Gitter des Fe_2Si und bei 15—30 Proz. *Si* das α-Eisen-Gitter neben dem *FeSi*-Gitter auftritt. Bei 33 Proz. *Si* findet sich das kubische *FeSi*-Gitter mit 4 Molekeln im Elementarkörper allein vor; oberhalb 40 Proz. *Si* gewinnt dagegen das $FeSi_2$, das tetragonal mit einer Molekel im Elementarbereich kristallisiert, die Herrschaft.

Diese Reihen stehen größtenteils nicht im Widerspruch mit den Heisenbergschen Folgerungen. Doch gibt der kristallographische Befund zunächst keinerlei Anhaltspunkte für die Erklärung der unmagnetischen Nickelstähle von etwa 25—29 Proz. *Ni*, wie überhaupt für die merkwürdige Tatsache, daß gerade ferromagnetische

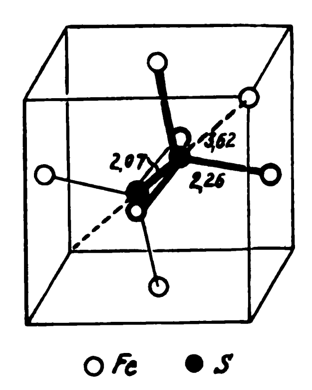


Fig. 2. Pyrittyp.

Stoffe in binären Kombinationen unmagnetische Legierungen ergeben, wie *Fe-Mn* (19 Proz. *Mn*), *Ni-Cr* (3—10 Proz. *Cr*) (19) u. a., obwohl ihre Gitterstrukturen hierfür keinen ersichtlichen Grund zeigen. Die Erniedrigung des Umwandlungspunktes gibt keine hinreichende Erklärung dafür, zumal der Heisenbergschen Theorie

nach auch beim k. f.-Gitter bei stark erniedrigten Temperaturen Ferromagnetismus erwartet werden sollte.

Einen direkten Widerspruch finden wir bei Eisenkies (FeS_2), dessen Kristallstruktur als Pyrit-

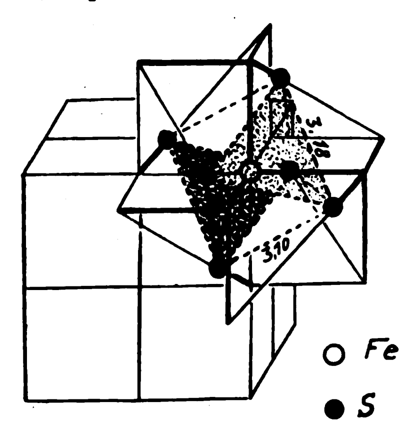


Fig. 3. Pyrittyp.

typ (Fig. 2 u. 3) genau untersucht (20) ist und jeweils jedem Atom nur 6 Nachbarn zuordnet. Will man den Ferromagnetismus der k. f. Verteilung der Eisenatome allein zuschreiben, muß man einerseits die abschirmende Wirkung aller 6 Schwefelatome, die jedes Eisenatom einhüllen, vernachlässigen und kommt durch diesen Schritt bei anderen

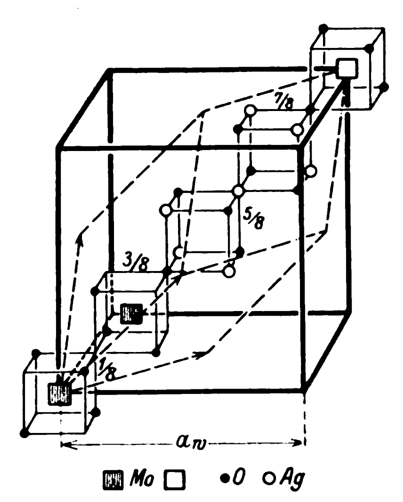


Fig. 4. Spinelltyp.

Atommodellen in erhebliche Schwierigkeiten. Andererseits ist das nach demselben Schema gebaute MnS_2 nicht mehr ferromagnetisch.

Ebensowenig erfüllt Magnetit (Fe_3O_4), das dem Spinelltyp (Fig. 4) angehört, als solcher die Heisenbergschen Nachbarschaftsbedingungen, obwohl es ferromagnetisch ist. Die anderen Oxydationsstufen des Eisens (21), Fe_2O_3 und FeO, sind nicht ferromagnetisch und dürfen es als Steinsalz- und Korundtyp (22) auch nicht sein, Gleichberechtigung verschiedenartiger Atome gleichen Abstands vorausgesetzt.

Bei allen diesen ferromagnetischen Kristallen kommt außerdem hinzu, daß ihre Magnetisierbarkeit in den verschiedenen Achsen ausgeprägte Unterschiede aufweist, die soweit gehen können, daß ein Kristall in der einen Richtung ferro-, in einer anderen aber paramagnetisch sein kann. Derartige augenfällige Eigenschaften müßten in erster Linie aus einer kristallographischen Theorie des Ferromagnetismus ableitbar sein.

Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, das ganze z. Z. vorliegende Tatsachenmaterial durchzusprechen, da die bisherigen Ergebnisse einen derartigen Aufwand nicht rechtfertigen würden. Es ist aber leicht, die Fälle binärer Legierungen, bei denen Schwierigkeiten auftreten, beliebig zu häufen, wenn man das einerseits von P. P. Ewald (l. c.) oder R. Glocker (23) zusammengetragene kristallographische Material mit den andererseits von Auwers (l. c.) zusammengestellten magnetischen Daten vergleicht.

Drei- und Mehrstoffsysteme.

Noch komplizierter werden die Verhältnisse natürlich bei Drei- und Mehrstoffsystemen. Die zweifellos interessantesten sind die schon erwähnten Heuslerschen Legierungen, Mangan-Kupfer-Legierungen, die mit Aluminium, Zinn, Arsen, Antimon, Wismut u. a. Komponenten ferromagnetische Legierungen ergeben. Bei Gleichwertigkeit aller Atomsorten würden sie den Heisenbergschen Forderungen (k. r. Gitter) Genüge leisten. Auf Einzelheiten sei hier nicht näher eingegangen, weil die vorliegenden Daten noch nicht ausreichend sind.

Rückblick und Ausblick.

Die charakteristischste Fragestellung, die sich aus dem bisherigen Material aufdrängt, ist die, ob die Heisenbergschen Betrachtungen, die zunächst wohl nur für Kristalle einer Atomart angestellt sind, auf solche verschiedenartiger Bausteine übertragbar sind. Sind sie rein formal betrachtet übertragbar, wie es den allgemeinen Grundlagen der Theorie nach zu erwarten wäre, stehen ihre Folgerungen mit den Tatsachen häufig im Widerspruch; sind sie es nicht, schrumpft ihr Anwendungsgebiet zur Bedeutungslosigkeit zusammen, da sie die ferromagnetischen Metalle in der von Heisenberg gegebenen Form vorläufig[1]) noch nicht aus der Reihe der anderen Metalle aus-

1) Eine demnächst in den Wiss. Veröff. a. d. Siemenskonzern Bd. VII. 2 erscheinende, nach Abschluß dieses Manuskripts fertiggestellte Arbeit von R. Swinne führt einen entscheidenden Schritt weiter. Herrn Swinne habe ich für liebenswürdige Überlassung des Manuskripts zu danken.

zusondern vermögen. Das führt uns zwangläufig zu der Frage, welche Lücke die Heisenbergschen Bedingungen offenbar noch haben.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, den Verlust des Ferromagnetismus beim Übergang von α- zum β-Eisen. Kristallographisch geschieht, wie heute sicher (24, 25) ist, dabei nichts von Bedeutung. Das k. r. Gitter des α-Eisens folgt lediglich seiner thermischen Ausdehnung; das paramagnetische β-Eisen hat ebenfalls k. r. Gitter. Ebenso liegen die Verhältnisse beim Nickel, dessen α- und β-Form k. f. ist.

Das legt die Vermutung nahe, daß in der Heisenbergschen Theorie des Ferromagnetismus die Temperaturabhängigkeit wichtiger ist als die Zahl der Nachbarn gleichen Abstandes. Für Temperatureinflüsse liegen — soweit wir sehen — drei Möglichkeiten vor:

1. Vergrößerung des Atomabstandes,
2. Vergrößerung der Schwingungsamplituden um die Schwerpunktslagen der Atome,
3. Änderung der Elektronenschalen der Atome durch Anregung.

Ad. 1. Die Änderung des Atomabstandes zieht Heisenberg zur Erklärung des Paramagnetismus von Eisen- und Nickellösungen heran, da die Austauschglieder, die bei ihm das Weißsche Molekularfeld ersetzen, mit zunehmendem Abstand exponentiell abnehmen. Auch das Fehlen ferromagnetischer Eigenschaften bei γ-Eisen, *Rh*, *Pd*, *Jr* und *Pt*[1]) würde damit in Einklang stehen, da die Atomabstände aller dieser Elemente bei sonst dem Nickel analoger Bauweise erheblich größer sind als die von β-Nickel. Auch das *Cr* überragt — abgesehen von seiner anderen Elektronenbesetzung — das analoge β-Eisen. Dementsprechend müßte aus der Temperaturabhängigkeit der Heisenbergschen Austauschglieder die Curietemperatur jedes ferromagnetischen Materials individuell berechenbar sein und für die 12 Nachbaratome des k. f.-Gitters zu einem andern Werte als für die 8 Nachbarn des k. r.-Gitters führen.

Ad. 2. Andererseits kann natürlich auch die kinetische Energie der Wärmebewegung — ähnlich wie bei Weiß — das Heisenbergsche Resonanzphänomen stören. Auch diese Folgerung muß sich aus einer Temperaturfunktion in der Theorie ergeben.

Ad. 3. Es ist schon oft bemerkt worden, daß sich magnetisch ausgezeichnete Verhältnisse im periodischen System nur an Stellen unvollständig besetzter Zwischenschalen finden, was darauf hinweist, daß die Zahl der Nachbaratome allein ohne Rücksicht auf die Elektronenbesetzungen Ferromagnetismus nicht zu erklären erlaubt. Sonst wäre ja z. B. der Wechsel vom ferromagnetischen Nickel (k. f.; $a_w = 3{,}53$ Å) zum diamagnetischen Kupfer (k. f.; $a_w = 3{,}60$ Å) kaum zu verstehen und Arbeiten wie die von St. Meyer, Pascal, Cabrera u. a. wären überflüssig. Ebenso hat R. Swinne[1]) auf mögliche Zusammenhänge zwischen Ferromagnetismus und Elektronenisomerie hingewiesen. Heisenberg leitet aus seiner Theorie dementsprechend auch nicht ab, daß die Hauptquantenzahl aller im Atom vorhandenen Elektronen $n \geqq 3$ sein soll, sondern der für den Magnetismus verantwortlichen, d. h. also der nicht in abgeschlossenen Schalen befindlichen Außenelektronen. Ein Einfluß der Temperatur auf diese liegt im Bereich des Möglichen.

Erst wenn die tiefere Durchdringung der Heisenbergschen Theorie die Curietemperaturen der ferromagnetischen Stoffe zu berechnen[2]) erlaubt hat, darf man hoffen, den ergänzenden Bedingungen auf der Spur zu sein, die die ferromagnetischen Stoffe tatsächlich aus der Reihe der nicht ferromagnetischen aussondern. Immerhin mag es, einerlei ob der Schlüssel zum Ferromagnetismus im Kristallbau oder in den Elektronenschalen zu suchen ist oder nicht, erlaubt sein, in diesem Zusammenhang noch auf folgende Tatsachen hinzuweisen.

Zeichnet man die Gitterabstände (Würfelkanten) des α- und γ-Eisens über einer Temperaturachse auf (Fig. 5), so schneiden sich diese in keinem Existenzgebiet des Eisens. Zeichnet man dagegen die für die vorliegenden Überlegungen entscheidenden Atomabstände im α- und γ-Eisen über einer Temperaturachse auf (Fig. 6), so scheidet die hypothetische Extrapolation der Kurve des γ-Eisens die des α-Eisen in deren Existenzgebiet bei etwa 610° C. Das bedeutet, daß bei dieser Temperatur die Atomabstände der 8 Nachbarn eines Atoms im α-Eisen gleich den Atomabständen der 12 Nachbarn eines Atoms im γ-Eisen werden. Man könnte versucht sein anzunehmen, daß bereits bei dieser Temperatur die α-γ-Umwandlung eintreten müßte. Tatsächlich erfolgt sie erst bei 901°C. Ebenso verschwindet der Magnetismus weder bei dieser noch bei jener Temperatur, sondern bei einem Mittelwert. Ferner: bei 1425° schlägt das k. f. Gitter des γ-Eisens wieder in das k. r. Gitter des α-Eisens um. Das ist ziemlich genau die Temperatur, bei der der extrapolierte — mit den Beobachtungsdaten übereinstimmende — Atomabstand des α-Eisens bei 1425° C den Atomabstand des

1) Bei *Pt* hat H. Weinnoldt (26) schwache Anzeichen ferromagnetischen Verhaltens (Hysteresis) gefunden.

1) Vgl. z. B. (27, 28) und die dort kritisch verwertete Literatur, sowie die auf S. 924 in der Fußnote 1) erwähnte Arbeit.

2) Bei Heisenberg (l. c.) ist die Curietemperatur schätzungsweise Voraussetzung zur angenäherten Berechnung der Größe des molekularen Feldes.

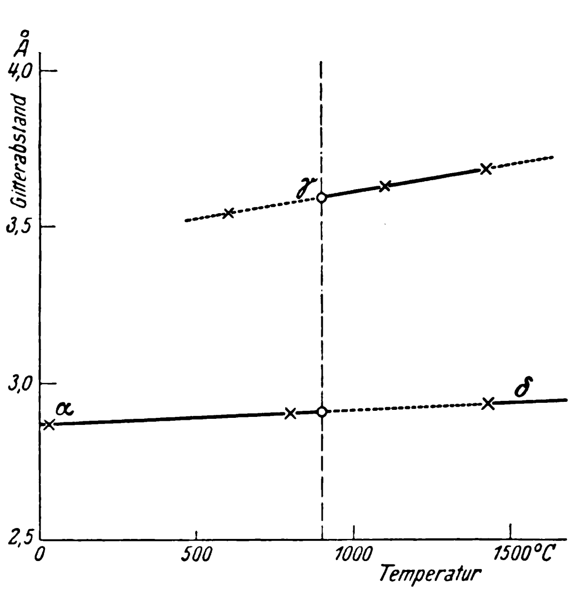



Fig. 5. Änderungen des Gitterabstands mit der Temperatur bei Eisen.

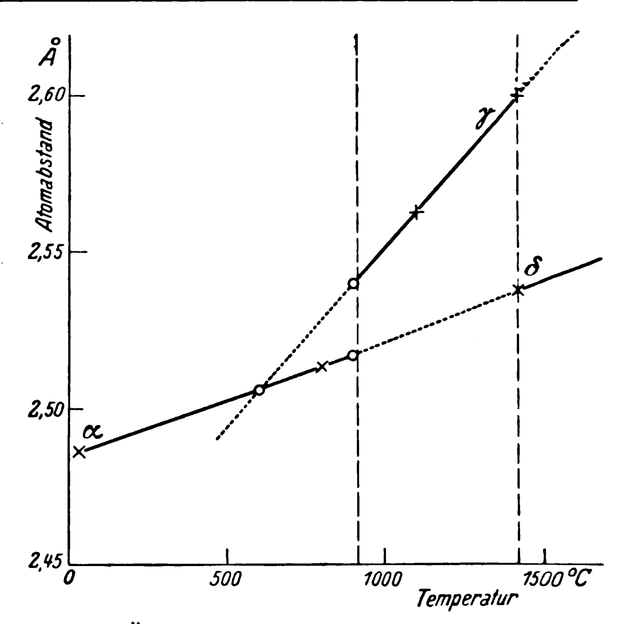


Fig. 6. Änderungen des Atomabstands mit der Temperatur bei Eisen.

γ-Eisens erreicht hat, bei dem dieses stabil geworden ist (901° C). Es liegt nahe, hier einen von einer kristallographischen Theorie des Ferromagnetismus oder der Madelungschen Gitterpotentialtheorie faßbaren ursächlichen Zusammenhang anzunehmen.

Man könnte außerdem die Frage aufwerfen, ob die Temperatur, bei der die Atomabstände im α- und γ-Eisen gleich werden, magnetisch nichts zu bedeuten hat. Bisher war derartiges nie beobachtet worden. Erst kürzlich glaubt E. Dußler (29) bei reinsten Eiseneinkristallen, die parallel zu einer tetragonalen Achse magnetisiert worden sind, zwei scharfe Knicke in den Magnetisierungskurven gefunden zu haben (Fig. 7), von denen der zweite den Eintritt der

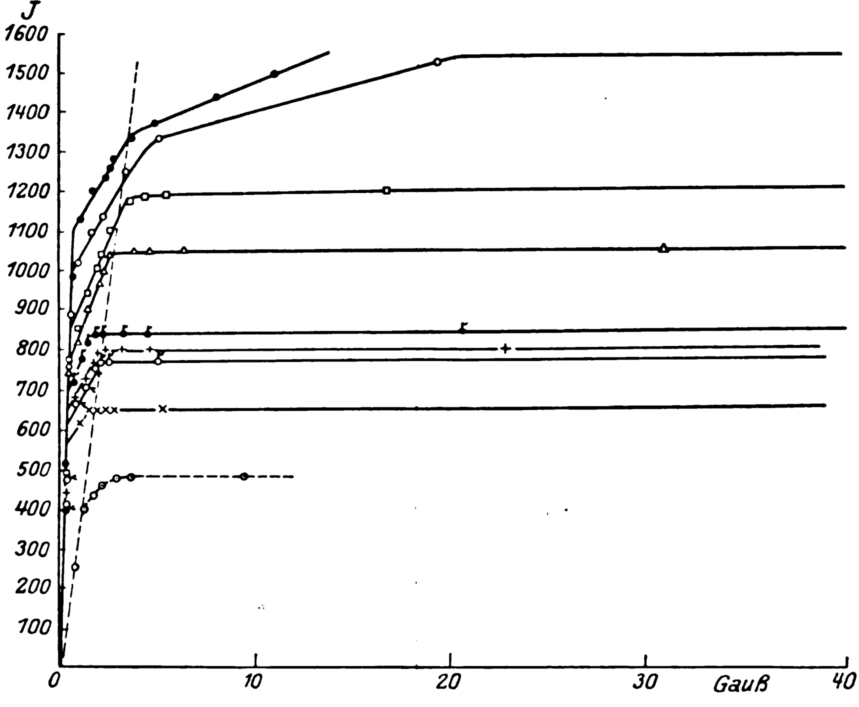


Fig. 7. Magnetisierungskurven von Eiseneinkristallen (nach Dußler).

Sättigung bedeutet. Oberhalb etwa 620° C liegen diese Knicke für alle Temperaturen auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden. Rein geometrisch bedeutet das, daß die Sättigung oberhalb von etwa 620° C unabhängig von der Temperatur stets bei demselben numerischen Suszeptibilitätswert eintritt. Da diese Grenztemperatur nahe bei der Temperatur hypothetischer Atomabstandsgleichheit (Fig. 6) liegt, liegt es nahe, einen Zusammenhang zu vermuten.

Jedenfalls kann zusammenfassend gesagt werden, daß das Problem des Ferromagnetismus vom kristallographischen Standpunkt aus weniger in der Änderung eines Gittertypus zu suchen ist, als im Curiepunkt, im Übergang des k. **r.** α-Eisens in das k. **r.** β-Eisen oder des k. **f.** α-*Ni* in das k. **f.** β-*Ni*. Die Frage, ob der Ferromagnetismus an eine bestimmte Kristallstruktur gebunden ist oder nicht, bleibt also auch bei dem heutigen Stand unserer Kenntnis noch ungelöst.

Zusammenfassung.

Einleitend wird auf eine quantenmechanische Theorie des Ferromagnetismus von Heisenberg hingewiesen, und daran anschließend der Versuch gemacht, einen kritischen Überblick darüber zu geben, wie weit das bisher vorliegende kristallographische und magnetische Tatsachenmaterial mit den Forderungen der Theorie im Einklang steht. Es werden die Elemente, eine Reihe wichtiger binärer und ein Beispiel ternärer Legierungen besprochen. Das Material führt zu der Fragestellung, ob die auf sehr allgemeiner Basis aufgebaute Theorie von Heisenberg nur auf Kristalle einer Atomart anwendbar oder auch auf solche verschiedenartiger Bausteine übertragbar ist. Darüberhinaus wird auf die Bedeutung einer Temperaturfunktion hingewiesen, aus der sich die Curietemperatur berechnen lassen muß. Drei mögliche Einflüsse der Temperatur werden erwähnt. Schließlich werden in diesem Zusammenhang einige geometrische Beziehungen der Atomabstände in den verschiedenen Zuständen des Eisens besprochen.

Die Betrachtungen führen dazu, den Schlüssel zum Verständnis ferromagnetischer Eigenschaften weniger in einem bestimmten Kristallsystem als in seiner Änderung mit der Temperatur zu suchen.

Literatur.

1) O. v. Auwers, Jahrb. d. Rad. u. El. **17**, 215, 1920.
2) J. A. Ewing, Magnetische Induktion in Eisen und verwandten Metallen. Deutsch von Holborn u. Lindeck, Berlin-München, 1892.
3) P. Weiß, Journ. de Phys. (4) **6**, 661, 1907.
4) J. Langevin, Ann. de Chem. (8), **5**, 70, 1905.
5) F. Heusler, Verh. d. Phys. Ges. **5**, 219, 1903.
6) F. Heusler u. F. Richarz, Zeitschr. f. anorg. Chem. **61**, 277, 1909.
7) W. Gerlach u. O. Stern, Ann. d. Phys. **74**, 673, 1924.
8) A. Sacklowski, Diss. Greifswald 1924; Ann. d. Phys. **77**, 241, 1925.
9) A. Hull, Phys. Rev. **10**, 692, 1917; **17**, 580, 1921.
10) E. Persson, Naturwissenschaften, **16**, 613, 1928.
11) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **49**, 619, 1928.
12) F. T. S. Young, Phil. Mag. **46**, 291, 1923.
13) W. Lenz, Physik. Zeitschr. **21**, 613, 1920.
14) E. Jsing, Zeitschr. f. Phys. **31**, 253, 1925.
15) W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. **41**, 81, 1927.
16) G. D. Preston, Phil. Mag. **5**, 1198, 1928.
17) M. R. Andrews, Phys. Rev. (2), **17**, 261, 1921.
18) G. Phragmén, Stahl und Eisen, **45**, 51 u. 211, 1925.
19) H. Ostermann u. Ch. Lacroix, Zeitschr. f. angew. Chem. 550, 1889.
20) Vgl. P. P. Ewald, Kristalle und Röntgenstrahlen, Berlin 1923, S. 216ff.
21) S. Hilpert, Lit. im Jahrb. d. Radioaktivität, **10**, 91, 1913.
22) Vgl. z. B. W. L. Bragg, X-Rays and crystal structure, London 1925, p. 181.
23) R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, Berlin 1927.
24) A. Westgren u. Lindh, Zeitschr. f. phys. Chem. **98**, 181, 1921.
25) A. Westgren u. G. Phragmén, Zeitschr. f. phys. Chem. **102**, 564, 1922.
26) H. Weinnoldt, Diss. Marburg, 1921.
27) R. Swinne, Zeitschr. f. Electrochem. **31**, 417, 1925.
28) R. Swinne, Wiss. Veröff. a. d. Siemenskonzern, V, 1, 80, 1926.
29) E. Dußler, Zeitschr. f. Phys. **50**, 195, 1928.

(Eingegangen 10. November 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Wellengruppe und Wellenpaket.

Von Ludwig Flamm.

Bei allen Arten von Wellen hat man bei einem tieferen Eingehen auf deren Erscheinungen den begrenzten Wellenzügen, den Wellengruppen, schon lange ein besonderes Augenmerk zuwenden müssen. Die Eigenschaften der Wellengruppen gewannen aber allgemeineres Interesse durch ihre grundlegende Rolle, welche sie in der neuen Wellenmechanik spielen, die von L. de Broglie angebahnt und von E. Schrödinger begründet wurde[1]). Von E. Schrödinger rührt ferner der Begriff

1) Der Hinweis auf die Spezialliteratur findet sich in den früheren einschlägigen Veröffentlichungen des Verfassers: Physik. Zeitschr. **27**, 600, 1926; Naturwiss. **15**, 569, 1927; Elektrotechnik und Maschinenbau **45**, 1020, 1927.



Wellenpaket her für Wellen, welche nicht bloß in der Fortpflanzungsrichtung, sondern allseitig begrenzt sind. Die Eigenschaften der Wellengruppe und des Wellenpaketes sollen in Hinblick auf ihre Verwertung in der Wellenmechanik genauer diskutiert werden. Insbesondere wird es auch nötig sein, diesbezügliche in der Literatur auftretende Mißverständnisse zu zerstreuen.

§ 1. Modelldarstellung.

Zunächst soll ein Demonstrationsmodell beschrieben werden, durch welches die Eigenschaften einer Wellengruppe besonders anschaulich vor Augen geführt werden können. Es ist wohlbekannt, daß eine zylindrische Drahtspirale, Fig. 1, welche man mittels einer Kurbel um die Zylinderachse in gleichförmige Rotation setzt, in der zur Zylinderachse senkrechten Projektionsrichtung[1]) das Fortschreiten eines unbegrenzten Zuges einfacher harmonischer Wellen zeigt. Auf analoge Weise läßt sich durch eine etwas kompliziertere Vorrichtung auch die Erscheinung eines fortschreitenden Wellenpaketes erzielen. Dazu dient der in Fig. 2 dargestellte Apparat. Eine kurze bauchige Drahtspirale, deren Enden geradlinig achsial weitergeführt sind, stellt die Wellengruppe nebst der von der Wellenbewegung freien Umgebung dar. Das längere der geradlinigen Drahtenden ist unmittelbar im Traggestell gelagert, das kürzere aber mittels einer langen Schraubenspindel, welche im Bilde auch durch ihre größere Dicke auffällt und an ihrem freien Ende die Drehkurbel trägt. Im sorgfältig ausgeführten Lager der Schraubenspindel sitzt ein Zapfen, der in die Schraubennut eingreift, so daß sich beim Drehen der Kurbel die Schraubenspindel fortschraubt. So hat das gleichmäßige Drehen der Kurbel nicht nur ein gleichförmiges Fortschreiten der Wellen in der Drahtspirale wie beim ersten Versuch zur Folge, sondern die Drahtspirale schreitet auch in achsialer Richtung gleichmäßig fort. In senkrechter Projektionsrichtung zur Drehachse zeigt sich demnach das Fortschreiten einer Wellengruppe. Die Gruppe als Ganzes wandert fort mit der sogenannten Gruppengeschwindigkeit. Die Wellen, aus denen die Gruppe sich zusammensetzt, haben eine davon verschiedene Geschwindigkeit, die Wellengeschwindigkeit. Soll die Wellengeschwindigkeit größer als die Gruppengeschwindigkeit sein, wie dies bei den langen Tiefseewellen zutrifft, muß der Schraubungssinn in der Drahtspirale entgegengesetzt zu dem der Schraubenspindel gewählt werden. Dann laufen die Wellen in der Gruppe nach vorwärts, indem sie am hinteren Ende der Gruppe ganz klein beginnen, zunächst immer größer werden, in der Mitte der Gruppe maximale Amplitude erreichen, um hernach wieder kleiner zu werden und an der vorderen Grenze der Gruppe ganz zu verschwinden. Fortwährend treten bei der fortschreitenden Gruppe Wellen hinten ein, Wellen vorne aus, so daß es immer wieder neue Wellen sind, aus denen die Gruppe besteht. Erwähnen muß ich noch, daß ich das dem Wellenpaketmodell zugrunde liegende Prinzip einem Hinweis seitens Herrn cand. ing. Friedrich Lachner verdanke und Herr Dr. Josef Stulla-Götz mich durch die Anfertigung der abgebildeten Photographien in dankenswerter Weise unterstützt hat.

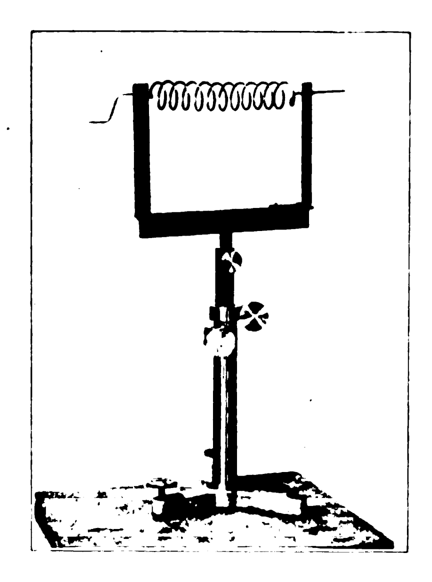


Fig. 1.

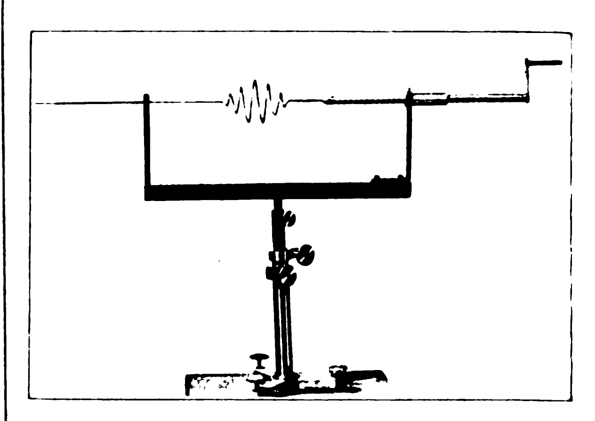


Fig. 2.

Um einwandfreie Wellenzüge zu erhalten, ist bei beiden Modellen, Fig. 1 und Fig. 2, die Erzeugung einer achsensenkrechten Parallelprojektion erforderlich. Am einfachsten erzielt

1) Fig. 1 ist schräg aufgenommen.

man diese durch achsensenkrechte Beleuchtung mit parallelem Licht. Ein senkrecht zu den Lichtstrahlen hinter dem Modell aufgestellter Schirm zeigt die Wellen als Schattenriß der Drahtspirale in richtiger Gestalt, aber bloß in der den Abmessungen des Modells gleichen Größe. Um die zwecks Demonstration vor einem größeren Auditorium erwünschte Vergrößerung zu erzielen, sammelt man das parallele Licht zunächst durch eine Kondensorlinse und stellt im Brennpunkt eine Abbildungslinse (Objektiv) von größerer Brennweite als die der Kondensorlinse auf. Sehr geeignet erwies sich die Kombination der Kondensorlinse mit einer Abbildungslinse doppelter Brennweite. Es läßt sich leicht ein Aufstellungsort des Modelles im Lichtstrahlenzylinder finden, der auf dem entfernt aufgestellten Projektionsschirm die vergrößerte Abbildung des Schattenrisses der Drahtspirale in gleichmäßiger Schärfe liefert. Durch geeignete Wahl der Optik läßt sich jede gewünschte Vergrößerung erzielen.

§ 2. Theorie.

Trotz aller besonderen Eigenschaften lassen sich doch auch die Wellengruppen auf unbegrenzte harmonische Wellen zurückführen. Der Vollständigkeit halber sei dies in einem einfachen Fall gezeigt. Ein Zug unbegrenzter harmonischer Wellen wird durch die Formel dargestellt

$$\psi = a \sin \varphi$$

mit der Phase

$$\varphi = 2\pi\nu\left(t - \frac{s}{u}\right) + \vartheta .$$

Es ist a die Amplitude, ν die Frequenz, u die Wellengeschwindigkeit und ϑ eine Phasenkonstante. Ein enger spektraler Bereich solcher Wellen zwischen den Grenzen ν_1 und ν_2 von der Formel

$$\Psi = a \int_{\nu_1}^{\nu_2} \sin\varphi \, d\nu$$

werde zur Interferenz gebracht. Die rasch abgebrochene Reihenentwicklung

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 (\nu - \nu_6)$$

reicht für den schmalen Frequenzbereich hin. Damit erhält man für das Integral

$$\Psi = a \int_{\nu_1}^{\nu_2} \sin\left[\varphi_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 (\nu - \nu_0)\right] d\nu =$$

$$= a \frac{\left| -\cos\left[\varphi_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 (\nu - \nu_0)\right] \right|_{\nu_1}^{\nu_2}}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0} .$$

Nach geläufigen goniometrischen Formeln findet man weiter

$$\left| -\cos\left[\varphi_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 (\nu - \nu_0)\right]\right|_{\nu_1}^{\nu_2} = 2 \sin\left[\varphi_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 \left(\frac{\nu_2+\nu_1}{2} - \nu_0\right)\right] \sin\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 \frac{\nu_2-\nu_1}{2}\right].$$

Zur Vereinfachung werde nunmehr

$$\nu_0 = \frac{\nu_2+\nu_1}{2}$$

gewählt. Man erhält das Resultat in der Gestalt

$$\Psi = a \frac{2 \sin\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 \frac{\nu_2-\nu_1}{2}\right] \sin\varphi_0}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0} .$$

Für den engen Frequenzbereich kann man offenbar

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_0 \text{ und } \varphi_0$$

auch als einen mittleren Wert von

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \text{ und } \varphi$$

betrachten und den Index ohne weiteres weglassen. Mit der Abkürzung

$$A = a \frac{2 \sin\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \frac{\nu_2-\nu_1}{2}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}}$$

schreibt sich das Resultat dann einfach

$$\Psi = A \sin\varphi .$$

Die erhaltene Formel stellt eine Welle mit variierender Amplitude dar. Diese besitzt ein absolutes Maximum

$$A = a(\nu_2 - \nu_1)$$

für

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 .$$

Sie hat Nullwerte für

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\nu_2-\nu_1}{2} = k\pi , (k \quad 0) .$$

In den Intervallmitten

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\nu_2-\nu_1}{2} = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

besitzt die Amplitude die Werte

$$A = (-1)^{k-1} \frac{a(\nu_2-\nu_1)}{(2k-1)\frac{\pi}{2}} .$$

Für $k > 1$ und $k < 0$ stellen dies extreme Amplitudenwerte dar. Eine graphische Darstellung dieser besonderen Art von Wellengruppen findet sich Physik. Zeitschr. **27**, 605, 1926 und Naturwissenschaften **15**, 573, 1927.

Während die Wellengeschwindigkeit durch die Gleichung

$$\varphi = \text{const}$$

bestimmt ist, ergibt sich die Bewegung der Wellengruppen aus der davon verschiedenen Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \text{const.}$$

Die partielle Differentiation ist bei konstantem s und t zu nehmen, wie aus der obigen Integration hervorgeht. Man erhält

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 2\pi \left(t - \frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} s \right) + \frac{d\vartheta}{d\nu}$$

und folgert für die Gruppengeschwindigkeit v daraus die Beziehung

$$\frac{1}{v} = \frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} = \frac{1}{u} + \nu \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\nu}. \qquad (1)$$

Nur wenn u von ν nicht abhängt, also keine Dispersion besteht, ist die Gruppengeschwindigkeit v der Wellengeschwindigkeit u gleich.

Um auf ebenso einfache Weise ein Wellenpaket zu erhalten, kann man die Phase

$$\varphi = 2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{u} \right) + \vartheta$$

ebener Raumwellen zugrunde legen. Zwischen den Richtungskosinussen α, β, γ der Wellennormale besteht die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Man bringt nunmehr eine Mannigfaltigkeit solcher Wellen nicht nur von variabler Frequenz in dem engen Bereich ν_1 bis ν_2, sondern auch von variabler Wellennormale in den engen Grenzen β_1 bis β_2 und γ_1 bis γ_2 zur Interferenz, etwa nach der Formel

$$\Psi = a \int_{\nu_1}^{\nu_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sin\varphi \, d\nu \, d\beta \, d\gamma.$$

Zufolge der vollkommen unabhängig voneinander vorausgesetzten Grenzen hat man dreimal die gleiche Rechnung durchzuführen wie im erstbehandelten Falle und erhält wieder eine Welle

$$\psi = A \sin\varphi$$

mit der räumlich variablen Amplitude

$$A = a \frac{2\sin\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\nu_2-\nu_1}{2}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}} \frac{2\sin\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}} \frac{2\sin\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}}.$$

Für ν, für β und für γ ist je ein mittlerer Wert des betreffenden Intervalles zu nehmen. Es ist

$$A = \text{const}$$

für die drei Bedingungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = C_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = C_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = C_3.$$

Die rechten Seiten bedeuten Konstante. Diese drei Gleichungen bestimmen die Bewegung des Wellenpaketes.

Im allgemeinsten Falle hat man Anisotropie vorauszusetzen; dann kann man die Normalgeschwindigkeit setzen

$$u = u(\nu, \beta, \gamma)$$

und ebenso

$$\vartheta = \vartheta(\nu, \beta, \gamma).$$

Man findet

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 2\pi \left[t - \frac{\partial\frac{\nu}{u}}{\partial\nu} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right] + \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -2\pi\nu \left[\frac{\partial\frac{\alpha}{u}}{\partial\beta} x + \frac{\partial\frac{\beta}{u}}{\partial\beta} y + \frac{\partial\frac{\gamma}{u}}{\partial\beta} z \right] + \frac{\partial\vartheta}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = -2\pi\nu \left[\frac{\partial\frac{\alpha}{u}}{\partial\gamma} x + \frac{\partial\frac{\beta}{u}}{\partial\gamma} y + \frac{\partial\frac{\gamma}{u}}{\partial\gamma} z \right] + \frac{\partial\vartheta}{\partial\gamma}.$$

Durch Einführung neuer Konstanten x_0, y_0, z_0 mittels der Gleichungen

$$-2\pi \frac{\partial\frac{\nu}{u}}{\partial\nu} (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) + \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu} = C_1$$

$$-2\pi\nu \left[\frac{\partial\frac{\alpha}{u}}{\partial\beta} x_0 + \frac{\partial\frac{\beta}{u}}{\partial\beta} y_0 + \frac{\partial\frac{\gamma}{u}}{\partial\beta} z_0 \right] + \frac{\partial\vartheta}{\partial\beta} = C_2$$

$$-2\pi\nu \left[\frac{\partial\frac{\alpha}{u}}{\partial\gamma} x_0 + \frac{\partial\frac{\beta}{u}}{\partial\gamma} y_0 + \frac{\partial\frac{\gamma}{u}}{\partial\gamma} z_0 \right] + \frac{\partial\vartheta}{\partial\gamma} = C_3$$

schreiben sich die Bewegungsgleichungen des Wellenpaketes

$$\frac{\partial\frac{\nu}{u}}{\partial\nu} \left[\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) \right] = t.$$

$$\frac{\partial\frac{\alpha}{u}}{\partial\beta}(x-x_0)+\frac{\partial\frac{\beta}{u}}{\partial\beta}(y-y_0)+\frac{\partial\frac{\gamma}{u}}{\partial\beta}(z-z_0)=0,$$

$$\frac{\partial\frac{\alpha}{u}}{\partial\gamma}(x-x_0)+\frac{\partial\frac{\beta}{u}}{\partial\gamma}(y-y_0)+\frac{\partial\frac{\gamma}{u}}{\partial\gamma}(z-z_0)=0.$$

Die Größen x_0, y_0, z_0 bedeuten den Ort der betrachteten Interferenzstelle zur Zeit $t=0$. Die beiden letzten Gleichungen stellen die Bahngerade

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial\left(\frac{\beta}{u},\frac{\gamma}{u}\right)}{\partial(\beta,\gamma)}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial\left(\frac{\gamma}{u},\frac{\alpha}{u}\right)}{\partial(\beta,\gamma)}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial\left(\frac{\alpha}{u},\frac{\beta}{u}\right)}{\partial(\beta,\gamma)}}$$

dar. Unter Beachtung von

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}=-\frac{\beta}{\alpha},\quad\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

erhält man

$$\frac{\partial\left(\frac{\beta}{u},\frac{\gamma}{u}\right)}{\partial(\beta,\gamma)}=\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u}+\beta\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}\right),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\gamma}{u},\frac{\alpha}{u}\right)}{\partial(\beta,\gamma)}=\frac{\beta}{\alpha u}\left(\frac{1}{u}+\beta\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}\right)-\frac{1}{\alpha u}\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\alpha}{u},\frac{\beta}{u}\right)}{\partial(\beta,\gamma)}=\frac{\gamma}{\alpha u}\left(\frac{1}{u}+\beta\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}\right)-\frac{1}{\alpha u}\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}.$$

Unter Benutzung der Abkürzungen

$$\beta^*=\frac{\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta}}{\frac{1}{u}+\beta\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}},$$

$$\gamma^*=\frac{\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}}{\frac{1}{u}+\beta\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}}$$

ergibt sich als Gleichung der Bahngeraden

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta-\beta^*}=\frac{z-z_0}{\gamma-\gamma^*}.$$

Die Nenner bestimmen das Verhältnis der Richtungskosinusse der Geraden. Im Fall der Anisotropie weicht mithin die Bewegung des Wellenpaketes im allgemeinen von der Wellennormale ab. Die Geschwindigkeit des Wellenpaketes ergibt sich aus der ersten der drei Bewegungsgleichungen. Ihre Komponente in der Richtung der Wellennormale ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{1}{v_n}=\frac{\partial\frac{\nu}{u}}{\partial\nu}.$$

Wie der Bau der Formel erkennen läßt, erfolgt in der Richtung der Wellennormale die Bewegung mit der Gruppengeschwindigkeit.

Zwecks Spezialisierung für den Fall der Isotropie hat man zu setzen

$$\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\beta}=\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial\gamma}=0.$$

Dann schreibt sich die Gleichung der Bahngeraden

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}.$$

Ihre Richtung fällt also in die Wellennormale. Dann ist v_n mit der Geschwindigkeit des Wellenpaketes identisch und die diesbezügliche Gleichung liefert nunmehr

$$\frac{1}{v}=\frac{d\frac{\nu}{u}}{d\nu}.$$

Das ist genau wieder die anfangs für die Gruppengeschwindigkeit aufgestellte Formel (1). Im Falle der Isotropie bewegt sich also das Wellenpaket mit Gruppengeschwindigkeit.

Das so erhaltene Wellenpaket zeigt ganz die gleiche Struktur wie die behandelte Wellengruppe, bloß von einer auf drei Dimensionen übertragen. Eine maximale Amplitude befindet sich an der durch

$$C_1=C_2=C_3=0$$

bestimmten Stelle. Die Nullstellen der Amplitude erfüllen ein Ebenennetz, bestehend aus einer Schar von Ebenen parallel der mittleren Wellenebene und zwei Scharen von Ebenen, die sich in lauter Geraden parallel zu den besprochenen Bahngeraden schneiden. Die extremen Amplitudenwerte in den so entstehenden Parallelepipeden nehmen mit wachsender Distanz von der Stelle des absoluten Maximums immer mehr ab.

Das in Fig. 2 dargestellte Modell zeigt eine Wellengruppe nicht von der in den obigen Rechnungen behandelten Art, sondern von einer willkürlich gewählten Form. Die Zurückführung einer Wellengruppe von ganz beliebiger Gestalt auf unbegrenzte harmonische Wellen wurde von A. Schuster[1]) behandelt. Sie besteht in der

1) Boltzmann-Festschrift, S. 569, Leipzig 1904.

Darstellung durch ein Fouriersches Integral, bedeutet also, physikalisch gesprochen, Spektralanalyse. Solche durch Interferenz harmonischer Wellen eines ausgedehnten Spektralbereiches sich darstellende Wellengruppen unterscheiden sich von der oben behandelten speziellen Wellengruppe im allgemeinen dadurch, daß sie im Laufe der Zeit ihre Gestalt immer mehr ändern. Nur bei Bestehen eines ganz bestimmten Dispersionsgesetzes bleibt jede Wellengruppe stationär. Man wird auf die notwendige Bedingung durch die Bemerkung geführt, daß man eine beliebige Wellengruppe durch Unterteilung des spektralen Bereiches in lauter spezielle Wellengruppen der oben behandelten Art zerlegen kann. Nur wenn die Gruppengeschwindigkeit aller dieser Teile übereinstimmt, kann die Gestalt stationär bleiben. Zufolge der Beziehung

$$\nu\lambda = u$$

kann man in die Formel für die Gruppengeschwindigkeit (1) auch die Wellenlänge λ an Stelle der Frequenz ν einführen und erhält

$$v = \frac{d\frac{u}{\lambda}}{d\frac{1}{\lambda}}. \qquad (1')$$

Konstanz von v tritt ein für

$$\frac{u}{\lambda} = a\frac{1}{\lambda} + b,$$

worin a und b willkürliche Konstanten bedeuten. Nach Multiplikation mit λ schreibt sich diese Dispersionsformel einfacher

$$u = a + b\lambda. \qquad (2)$$

In dieser Gestalt wurde sie von A. Schuster[1]) als Bedingung für das Stationärbleiben beliebiger Wellengruppen angegeben.

§ 3. Bedeutung für die Mechanik.

Bei Voraussetzung von Unhomogenität kann man nicht mehr die Phase ebener Wellen zugrunde legen, sondern hat eine allgemeinere Phasenfunktion

$$\varphi = \varphi(t, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

vorauszusetzen. Die Größen α, β, γ bedeuten drei willkürliche, unabhängige Parameter. Feste Werte derselben bestimmen eine bestimmte Schar von Wellen, die sich aber im allgemeinen nunmehr weder geradlinig noch gleichförmig ausbreiten und deren Wellenflächen nicht stationär zu sein brauchen. Auch hier kann man durch Interferenz solcher Wellen, deren Parameter in einem schmalen Bereich variieren, ein spezielles Wellenpaket bilden. Die Bedingung dafür, daß der Phasenunterschied an der Stelle $x_1 y_1 z_1$ zur Zeit t_1 mit dem Phasenunterschied an der Stelle $x_2 y_2 z_2$ zur Zeit t_2 übereinstimmt, ist durch die Bedingung

$$\delta\int_1^2 d\varphi = 0$$

gegeben. Dabei bezieht sich die Differentiation d bloß auf die Koordinaten t, x, y, z und die Variation δ bloß auf die Parameter. Die Extremalen dieses Variationsproblems bestimmen die Bewegung des Wellenpaketes. Diese ist nunmehr im allgemeinen weder geradlinig noch gleichförmig. Die mit dem Namen Hamilton verknüpften Prinzipe und Integrationsmethoden der klassischen Mechanik finden auf dieser Grundlage durch Auffassung des Massenpunktes als Wellenpaket ihre einfache und selbstverständliche Deutung[1]). Hinzuzufügen wäre noch, daß die Methode weder auf kartesische Koordinaten noch auf drei Freiheitsgrade beschränkt ist. Für ein allgemeineres Problem der Punktmechanik von n Freiheitsgraden hat man eine Phasenfunktion

$$\varphi = \varphi(t, q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)$$

in den generalisierten Koordinaten q_1, q_2, ... q_n und den unabhängigen Parametern α_1, α_2, ... α_n. Fixen Parameterwerten entspricht hier ein System von Wellenscharen, welches in analoger Weise wie oben ein System von Wellenpaketen erzeugt, das die Dynamik eines Punktsystems aufweist. Man kann die zuletzt angeschriebene Phasenfunktion auch durch eine einzige Wellenschar in einem n-dimensionalen Koordinatenraum repräsentieren, wodurch die landläufige Anschauung freilich verloren geht. Nur bei bloßer Berücksichtigung dieses letzteren Falles konnte in der Literatur fälschlich ein Unanschaulichkeitseinwand gegen die Wellenpaketvorstellung bei Systemen mit mehr als drei Freiheitsgraden erhoben werden.

Wenn auch die Anwendung der Materiewellen bis auf Hamilton zurückreicht, so verdanken wir doch erst E. Schrödinger die Aufstellung ihrer Differentialgleichung. In der relativistischen Mechanik, die noch auf das Einkörperproblem beschränkt ist, lautet sie

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \mp \frac{4\pi i e}{hc}\left(\frac{V}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\psi\right) + \frac{4\pi^2 e^2}{h^2 c^2}\left(V^2 - \mathfrak{A}^2 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2}\right)\psi = 0, \qquad (3)$$

1) a. a. O.

1) Ausführlicher vom Verfasser in einer früheren Arbeit behandelt: Physik. Zeitschr. **27**, 733, 1926.

bezogen auf das Elektron von der Ladung e und der Ruhemasse m_0 in einem elektromagnetischen Felde mit dem skalaren Potential V und dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$. In der Newtonschen Mechanik lautet sie

$$\Delta^* \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V \psi \mp \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

in einem Kraftfeld, das sich aus einem Potential V herleitet. Die Zahl der Freiheitsgrade ist beliebig und zwar bedeutet

$$\Delta^* \psi = \Delta_p^{1/2} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\Delta_p^{-1/2} T_{p_k}\left(q_k, \frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right) \right]$$

den Laplaceschen Operator im Konfigurationsraum, gebildet aus der kinetischen Energie

$$T = T(q_k, p_k),$$

welche als quadratische Form der Momente p_k die Diskriminante Δ_p besitzt. Bemerkenswert ist das Auftreten des Planckschen Wirkungsquantums als Konstante in der Wellengleichung. Auch waren es die grundlegenden Erfolge E. Schrödingers auf dem Gebiete der Quantenmechanik, welche diese Wellengleichung berühmt gemacht haben. Das Aufsuchen der für die Atom- und Molekularmechanik in Betracht kommenden Materiewellen führt nämlich auf ein Eigenwertproblem dieser Differentialgleichung. Die dem Atom- und Molekülverband angehörigen Elektronen können sich nur aus einer diskreten Anzahl geschlossener Wellenzüge oder stehender Wellen aufbauen, den eindeutigen und stetigen Lösungen der Wellengleichung. Der Vorstellung ist hier nämlich insofern ein gewisser Spielraum gelassen, als man im allgemeinen stehende Wellen durch Interferenz von fortschreitenden Wellen erzeugen kann und umgekehrt fortschreitende Wellen durch Interferenz stehender. Auf dieser Grundlage finden die Erscheinungen der Quantenmechanik nach der Schrödingerschen Theorie ihre gesetzmäßige Behandlung.

An dieser Stelle sollen die Integrale der Schrödingerschen Wellengleichung betrachtet werden, welche entsprechend den Untersuchungen des vorigen Paragraphen im Falle verschwindenden Kraftfeldes auftreten. Diesem Grenzfall wird die gewöhnliche Mechanik mit ihren im Verhältnis zu den Atom- und Molekülfeldern sehr schwachen Kraftfeldern am meisten ähneln. Auch soll der Einfachheit halber die Wellengleichung für einen Freiheitsgrad spezialisiert werden. Man kann von vornherein harmonische Wellen

$$\psi = C e^{\pm 2\pi i \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)} \qquad (5)$$

als partikuläre Integrale erwarten.

Zunächst soll Gleichung (3) auf die gewünschte Weise spezialisiert werden. Für

$$V = 0 \text{ und } \mathfrak{A} = 0$$

erhält man

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} \psi = 0. \qquad (6)$$

Tatsächlich genügt dieser Gleichung der Ansatz (5), wobei die $\pm$ Zeichen beide unabhängig voneinander ganz beliebig sind, und führt auf die charakteristische Gleichung

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} - \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} = 0.$$

Daraus findet man für die Frequenz, wenn sie nur positiv gerechnet wird, die Abhängigkeit

$$\nu = c \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{h^2} + \frac{1}{\lambda^2}}. \qquad (7)$$

Da die Wellenlänge ganz beliebig ist, kann in diesem Falle eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Materiewellen auftreten. Aus

$$u = \nu \lambda$$

folgt die Dispersionsformel

$$u = c \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2 + 1}. \qquad (8)$$

Zufolge (1') erhält man für die Gruppengeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2 + 1}}.$$

Die beiden letzten Gleichungen zusammen ergeben die einfache Beziehung

$$u v = c^2. \qquad (9)$$

Durch Umkehrung liefert die vorletzte Gleichung

$$\frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2 = \frac{c^2}{v^2} - 1.$$

Damit läßt sich aus der modifizierten Gleichung (7)

$$\nu = \frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2}}$$

die Wellenlänge eliminieren und man erhält

$$\nu = \frac{m_0 c^2}{h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Diese Beziehung schreibt sich einfacher

$$m c^2 = h \nu. \qquad (10)$$

Mit Hilfe von (9) läßt sich daraus weiter finden

$$m v = h \frac{1}{\lambda}. \qquad (11)$$

Die Beziehungen (9), (10) und (11) wurden bereits von L. de Broglie gefunden, welcher die Bedeutung der Materiewellen für die Quantenmechanik als erster erkannt hatte. Kleine Gruppengeschwindigkeit bedeutet nach (11) kleine Wellenzahl. Für diesen Grenzfall kann man aus (7) durch Reihenentwicklung die Näherungsformel herleiten

$$\nu = \frac{m_0 c^2}{h} + \frac{h}{2 m_0 \lambda^2}. \qquad (7')$$

Unter den gleichen Voraussetzungen erhält man auch für (10) die Näherungsformel

$$m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} = h\nu. \qquad (10')$$

Auf analoge Weise soll nunmehr mit Gleichung (4) verfahren werden. Man erhält für $V = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \mp \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \qquad (12)$$

Auch dieser Wellengleichung genügt der Ansatz (5), wobei das erste $\pm$ Zeichen mit der Differentialgleichung korrespondiert, das zweite aber ganz beliebig ist. Die charakteristische Gleichung lautet hier

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{8\pi^2 m}{h} \nu = 0$$

und daraus folgt

$$\nu = \frac{h}{2m\lambda^2}. \qquad (13)$$

Auch hier ist die Wellenlänge ganz beliebig, so daß wieder eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Materiewellen auftreten kann. Man erkennt, daß man (13) auch aus der Näherungsformel (7′) durch Weglassen des von der Wellenlänge unabhängigen Gliedes erhält. Die Dispersionsformel lautet hier

$$u = \frac{h}{2m\lambda}. \qquad (14)$$

Als Gruppengeschwindigkeit findet man

$$v = \frac{h}{m\lambda},$$

was wieder die Formel

$$mv = h\frac{1}{\lambda} \qquad (11)$$

bedeutet. Man erkennt unmittelbar die Beziehung

$$u = \frac{v}{2}. \qquad (15)$$

Schließlich gibt (13) bei Ersetzen von λ durch v die Gleichung

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu. \qquad (16)$$

Die Formeln (15) und (16) sind von denen L. de Broglies verschieden. Immerhin kann man (16) aus der entsprechenden Näherungsformel (10′) wieder dadurch erhalten, daß man das erste, die Ruheenergie bedeutende Glied fortläßt.

Der Vergleich der Materiewellen in der relativistischen und der Newtonschen Mechanik läßt also erkennen, daß wohl die Wellenzahl übereinstimmt, dagegen die Frequenz zufolge des verschiedenen Nullpunktes der Energiezählung enorm abweicht. Eine unmittelbare Folge davon ist auch der gewaltige Unterschied in der Wellengeschwindigkeit u. In beiden Fällen stimmt aber der Bau und die Mannigfaltigkeit der gefundenen partikulären Integrale überein, welche durch die gleiche Formel (5) dargestellt werden. Aus ihnen kann man nach der Methode der Partikularlösungen das allgemeine Integral finden. Dies gelingt durch den Ansatz

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{2\pi i\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)} d\frac{1}{\lambda}, \qquad (17)$$

indem wir in der gebräuchlichen Weise nur das untere der in (5) vor $2\pi i$ stehenden Vorzeichen anschreiben. Dabei ist

$$\nu = \nu\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

als gegeben vorausgesetzt und $C\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ eine beliebige komplexe Funktion des Argumentes, nur der einen Beschränkung unterworfen, daß das Integral einen Sinn hat und die nötigen Differentiationen gestattet. Um dem allgemeinen Integral (17) die Gestalt der Lösung eines Anfangswertproblems zu geben, bilden wir zunächst

$$\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} C\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{2\pi i \frac{x}{\lambda}} d\frac{1}{\lambda}.$$

Der Fourierschen Integraldarstellung gemäß folgert man

$$C\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi,0)\, e^{-2\pi i \frac{\xi}{\lambda}} d\xi.$$

Damit läßt sich die allgemeine Lösung (17) umformen in

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi,0)\, e^{2\pi i\left(\frac{x-\xi}{\lambda} - \nu t\right)} d\xi. \qquad (18)$$

Auch der Realteil von $\psi(x,t)$ für sich ist demnach durch zwei willkürliche Funktionen als Anfangswerte bestimmt, den reellen und den imaginären Teil von $\psi(\xi,0)$, wie es für die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialglei-

chung zweiter Ordnung erforderlich ist. Die Formel (18) stellt eine Wellengruppe dar mit gewissen, beliebig vorgebbaren Anfangswerten. Bei Benützung von (7), das sich mittels der Abkürzung

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$$

einfacher schreibt

$$\nu = \sqrt{\nu_0^2 + \frac{c^2}{\lambda^2}},$$

erhält man das allgemeine Integral der Gleichung (6)

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi,0)\, e^{2\pi i\left(\frac{x-\xi}{\lambda} - t\sqrt{\nu_0^2 + \frac{c^2}{\lambda^2}}\right)} d\xi. \tag{19}$$

Durch Verwendung von (13) ergibt sich das allgemeine Integral der Gleichung (12) zu

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi,0)\, e^{2\pi i\left(\frac{x-\xi}{\lambda} - \frac{ht}{2m\lambda^2}\right)} d\xi. \tag{20}$$

Die Formel (20) kann man vereinfachen. Der Exponent der e-Potenz läßt sich auch schreiben

$$-\frac{\pi i h t}{m}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2m(x-\xi)}{ht\lambda}\right).$$

Macht man die Substitution

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{m(x-\xi)}{ht} = \eta,$$

so schreibt sich (20) mit Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \psi(\xi,0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i h t}{m}\left(\eta^2 - \frac{m^2(x-\xi)^2}{h^2 t^2}\right)} d\eta.$$

Durch Ausführung der Integration nach η erhält man

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{iht}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi,0)\, e^{-\frac{\pi m (x-\xi)^2}{iht}} d\xi. \tag{21}$$

Nach P. Ehrenfest[1]) läßt sich diese Gestalt der Lösung unmittelbar anschreiben. Gleichung (12) kann man nämlich in die Form der Wärmeleitungsgleichung bringen

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0,$$

wenn man bezeichnet

$$\frac{1}{a^2} = \mp \frac{4\pi m}{ih}. \tag{22}$$

1) Zeitschr. f. Phys. **45**, 456, 1927.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung hat die bekannte Gestalt

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi,0)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Um mit der Festsetzung bei der Aufstellung des grundlegenden Integrals (17) in Übereinstimmung zu bleiben, hat man auch in (22) nur das untere Vorzeichen beizubehalten. Dann ist tatsächlich die zuletzt erhaltene Formel mit (21) identisch.

Die durch (21) gegebene Gestalt des Integrales gilt als allgemeiner Beweis für das allmähliche Auseinanderfließen der Wellengruppen, welche der Differentialgleichung der Materiewellen genügen. Für ein solches Verhalten hat zuerst W. Heisenberg[1]) ein spezielles Beispiel gegeben, welches er nach der Quantenmechanik von Dirac und Jordan durchrechnete. Auf wellenmechanischer Grundlage hat G. Darwin[2]) die Heisenbergsche Wellengruppe auch in verschiedenen Kraftfeldern untersucht und im allgemeinen gleichfalls das Auseinanderfließen bestätigt. Solche Befunde sind die Hauptursache der von einer großen Zahl von Forschern geteilten Meinung, daß die Materiewellen bloß statistische Bedeutung hätten und nur ein Maß für die Wahrscheinlichkeit mechanischer Bewegungen seien.

Man könnte vielleicht auf den Gedanken kommen, das besprochene Auseinanderfließen der Wellengruppen dem parabolischen Charakter der Differentialgleichung (12) zuzuschreiben und von den der hyperbolischen Gleichung (6) genügenden Wellengruppen eher Dauerhaftigkeit zu erwarten. Als exakt richtig sieht man ja allgemein ohnehin nur die de Broglie-Wellen an, welche der Gleichung (6) genügen. Dagegen betrachtet man die der Gleichung (12) genügenden Wellen nur als eine erste Näherung derselben bei gleichzeitiger Unterdrückung eines Faktors

$$e^{-\frac{2\pi i m_0 c^2}{h} t}$$

in der Wellenfunktion. Zu ihrer Charakterisierung bringt G. Darwin[3]) ein treffendes Gleichnis: „Wir beobachten, um eine Analogie aus der Praxis der drahtlosen Telephonie zu bringen, unsere Wellen mit Hilfe einer Heterodynfrequenz

$$\frac{m_0 c^2}{h},$$

und wenn wir von der Phase einer Welle sprechen, so meinen wir die Phase des Schalles, der im Telephon gehört wird, nicht die der Ätherschwin-

1) Zeitschr. f. Phys. **43**, 172, 1927.
2) Proc. Roy. Soc. (A) **117**, 258, 1927.
3) a. a. O. S. 265.

gungen". Aber gerade dieses Gleichnis läßt ein wesentlich anderes Verhalten der de Broglie-Wellen in der in Betracht kommenden Frage nicht erwarten.

Man überzeugt sich auch tatsächlich, daß die Ursache des Auseinanderfließens der Wellengruppen schon in dem grundlegenden Ansatz (17) zu finden ist, welcher allen beiden in Frage kommenden Wellengleichungen genügt. Versteht man unter u den Betrag der Wellengeschwindigkeit, so besteht die Beziehung

$$\nu = u \left| \frac{1}{\lambda} \right|.$$

Nur bei Dispersionsfreiheit ist u eine Konstante und der Ausdruck (17) geht über in

$$\psi(x, t) = f(x - ut) + g(x + ut).$$

In diesem Falle bewirkt der Zeitfaktor in allen harmonischen Teilwellen eine Phasenverschiebung vom gleichen Betrag. Von der durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen vermeidbaren Aufspaltung abgesehen, läuft die Wellengruppe in diesem Falle ohne jede Gestaltsänderung weiter. Die Materiewellen besitzen jedoch Dispersion, u ist eine Funktion der Wellenzahl; der Zeitfaktor bewirkt in diesem Falle bei den einzelnen harmonischen Teilwellen eine ungleiche Phasenverschiebung, welche deren Phasenkoinzidenzen fortschreitend verwirrt, was das allmähliche Auseinanderfließen einer solchen Wellengruppe notwendigerweise zur Folge hat. Dies gilt für die de Broglie-Wellen in gleicher Weise wie für die von E. Schrödinger benutzten Ersatzwellen.

Wenn das allgemeine Integral einer Wellengleichung von variabler Wellengeschwindigkeit auf keine stationären Wellengruppen führt, muß man deshalb schon schließen, daß es dann so etwas in diesem Falle gar nicht geben könnte? Dieses Ergebnis wäre zu unwahrscheinlich und man wird auf die Vermutung geführt, daß dieses sogenannte „allgemeine Integral" doch nicht alle Möglichkeiten umfaßt. Untersuchen wir doch einmal an der Hand des Modelles von § 1, welche Eigenschaften die Lösung der Wellengleichung besitzen muß, um eine stationäre Wellengruppe darzustellen. Für den mit der Wellengruppe mitbewegten Beobachter rufen die durchlaufenden Wellen offenbar nur zeitlich rein periodische Veränderungen hervor und zwar mit der Frequenz ν_0 dieser durchlaufenden Wellen. Das erfordert eine Darstellung mittels Fourierscher Reihen an Stelle Fourierscher Integrale.

Darum wollen wir nunmehr aus den Partikularlösungen (5) die allgemeine Lösung aufbauen

$$\psi(x', t') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} C_n e^{2\pi i \left(\frac{x'}{\lambda'_n} - \nu'_n t' \right)}, \qquad (23)$$

gültig für ein mit der Geschwindigkeit v sich bewegendes Koordinatensystem. Die gewünschte Periodizität in t' wird durch den Ansatz erreicht

$$\nu'_n = n \nu_0. \qquad (24)$$

Nunmehr zählt man ν'_n sowohl positiv als auch negativ, man braucht daher für das zugehörige λ'_n nur den absoluten Betrag einzusetzen. Die Koeffizienten C_n kann man komplex voraussetzen. Der Wellencharakter wird durch die Festsetzung

$$C_0 = 0 \qquad (25)$$

ausgedrückt. Für $x' = 0$ erhält man die Fouriersche Reihe

$$\psi(0, t') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} C_n e^{-2\pi i n \nu_0 t'},$$

welche die Koeffizientenermittlung

$$C_n = \nu_0 \int_0^{\frac{1}{\nu_0}} \psi(0, \tau) e^{2\pi i n \nu_0 \tau} d\tau$$

gestattet. Es kann für $\psi(0, \tau)$ eine beliebige komplexe Funktion von τ im Intervall

$$0 \text{ bis } \frac{1}{\nu_0}$$

gewählt werden, welche mit Rücksicht auf (25) nur der einen Beschränkung unterworfen ist

$$\int_0^{\frac{1}{\nu_0}} \psi(0, \tau) d\tau = 0.$$

Auch hier, wo es sich um die allgemeine Lösung der Wellengleichungen von vorgegebener Periode handelt, sind nunmehr als Randbedingung wieder zwei willkürliche Funktionen vorschreibbar, welche in eine komplexe Funktion zusammengefaßt erscheinen. Für $t' = 0$ erhält man aus (23)

$$\psi(x', 0) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} C_n e^{2\pi i \frac{x'}{\lambda'_n}},$$

was im allgemeinen keine Fouriersche Reihe mehr darstellt. Sind die λ'_n inkommensurabel, dann ist $\psi(x', 0)$ nicht periodisch und wird bei geeigneter Wahl der Koeffizienten C_n nur in einem beschränkten Bereich von x' merklich von Null verschieden sein. Man sieht also, daß eine stationäre Wellengruppe als Lösung der Wellengleichungen durch die Ansätze (23), (24) und (25) bestimmt ist. Die stationären Wellengruppen weisen mithin eine charakteristische spektrale Struktur auf. Man erkennt ferner, daß man in einem dispergierenden Medium stationäre Wellengruppen dadurch erzeugen kann, daß man einen periodischen Wellenerreger mit der zur Periode gehörigen Gruppengeschwindigkeit fortbewegt.

Zunächst machen wir Anwendung auf Wellengleichung (6), welcher die relativistische Mechanik zugrunde liegt. Man hat

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$$

zu nehmen. Ferner gilt die Beziehung (7) auch für das mitbewegte Koordinatensystem; wir schreiben sie

$$\frac{1}{\lambda'^2} = \frac{\nu'^2 - \nu_0^2}{c^2}.$$

Es folgt

$$\frac{1}{\lambda'_n} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{n^2 - 1}.$$

Diese diskreten Werte der Wellenzahlen sind inkommensurabel und können zur Bildung einer stationären Wellengruppe herangezogen werden. Formel (23) spezialisiert sich zu

$$\psi(x', t') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} C_n e^{\frac{2\pi i m_0 c}{h}(x'\sqrt{n^2-1} - n c t')}$$

Der Übergang vom mitbewegten auf das reguläre Bezugssystem erfolgt durch die Lorentztransformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Es ist also mit Beachtung von (25)

$$\psi(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} C_n e^{\frac{2\pi i m}{h}\left[c\sqrt{n^2-1}(x - vt) + vn\left(x - \frac{c^2}{v}t\right)\right]} \tag{26}$$

die allgemeine Formel für eine stationäre Wellengruppe, welche der Differentialgleichung (6) genügt.

Bei Anwendung auf Wellengleichung (12) hat man die Anisotropie der Wellenausbreitung für den mitbewegten Beobachter in der Newtonschen Mechanik zu beachten. Wohl ist

$$\lambda = \lambda',$$

aber zufolge des Dopplereffektes gilt

$$\nu = \nu' + \frac{v}{\lambda}.$$

Behufs Anwendung der Formel (13) müssen wir vorläufig wieder unter ν und ν' die absoluten Werte der Schwingungszahlen verstehen und λ positiv und negativ zählen. Für die Abhängigkeit zwischen λ und ν' erhält man so die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2mv}{h\lambda} = \frac{2m\nu'}{h},$$

woraus folgt

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{mv}{h}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{mv^2}\nu'}\right).$$

Ferner wird man am einfachsten setzen[1])

$$\nu_0 = \frac{mv^2}{2h}.$$

Man findet so zu

$$\nu'_n = \frac{mv^2}{2h}|n|$$

gehörig

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{mv}{h}\left(1 + \frac{n}{|n|}\sqrt{1 + |n|}\right).$$

Durch Multiplikation beider Ausdrücke mit

$$\frac{n}{|n|}$$

erhält man wieder die für (23) geeigneten Vorzeichen. Man hat also einzusetzen

$$\nu'_n = \frac{mv^2}{2h}n$$

und

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{mv}{h}\left(\sqrt{1 + |n|} + \frac{n}{|n|}\right).$$

Hier sind alle Wellenzahlen mit Indizes

$$|n| = k^2 - 1$$

kommensurabel und würden Schwebungen hervorrufen, welche unendlich viel Energie erfordern würden. Mithin muß man annehmen

$$C_{k^2-1} = C_{1-k^2} = 0 \tag{27}$$

für alle ganzen Zahlen k. Nunmehr spezialisiert sich (23) zu

$$\psi(x', t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} C_n e^{2\pi i \frac{mv}{h}\left[\left(\sqrt{1 + |n|} + \frac{n}{|n|}\right)x' - n\frac{v}{2}t\right]}.$$

Der Übergang vom mitbewegten auf das reguläre Koordinatensystem erfolgt durch die Galileitransformation

$$x' = x - vt.$$

Man erhält

$$\psi(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} C_n e^{2\pi i \frac{mv}{h}\left[\left(\sqrt{1 + |n|} + \frac{n}{|n|}\right)(x - vt) - n\frac{v}{2}t\right]} \tag{28}$$

Es stellt also (28) unter Beachtung von (27) die allgemeine Formel der in Betracht kommenden stationären Wellengruppen dar, welche der Differentialgleichung (12) genügen.

---

1) Das Darwinsche Gleichnis würde allerdings

$$\nu_0 = \frac{mc^2}{h}$$

auch hier verlangen.

Man sieht also, es gibt stationäre Materiewellengruppen, ja es gibt deren sogar eine große Mannigfaltigkeit. Nur bauen sie sich nicht aus einem kontinuierlichen Spektrum auf wie die Heisenbergsche Wellengruppe, sondern aus einem Linienspektrum von gegebener Serienformel. Die hier gewonnenen Ergebnisse sind auf den räumlich dreidimensionalen Fall entsprechend zu übertragen. Die hierfür erweiterte Gleichung (6) wurde von P. Humbert allgemein integriert[1]). Übrigens können im Raum Wellengruppen mit Schwingungszentrum auch mit einer Frequenz allein endliche Energie besitzen. Beispiele hierfür haben schon L. de Broglie[2]) und W. Wessel[3]) gegeben[4]).

An und für sich ist das Ergebnis recht befriedigend, daß die Korpuskeln durch Wellenpakete repräsentiert werden müssen, welche offenbar Quantenstruktur aufweisen. Allerdings wird man sofort auch nach dem Mechanismus fragen, welcher zum Aufbau aus dem erforderlichen Linienspektrum harmonischer Wellen führt. Ein bestimmter Mechanismus ist sicher durch die inneren Kräfte gegeben, welche das Korpuskel zusammenhalten, die aber bisher ganz außer acht gelassen worden sind. Vielleicht liefert ein Eigenwertproblem um ein Zentrum gruppierter Wellen auch noch die Erklärung für das Auftreten ganz bestimmter Materiequanten in der Natur, wie Elektronen, Protonen und die übrigen Atomkerne. Freilich dürfte dies alles schwerlich ohne vorherigen Ausbau einer Quantenelektrik gelingen, wie auf wellenphysikalischer Grundlage von G. Mie[5]) bereits versucht wird.

Jedenfalls haben die obigen Darlegungen erwiesen, daß man nicht bloß auseinanderfließende Materiewellengruppen aufbauen kann, sondern auch stationäre. Es liegt somit keine Nötigung vor, den Materiewellen ausschließlich statistische Bedeutung zuzuschreiben[6]). Zweifellos ist die Entdeckung M. Borns über die Anwendbarkeit der Materiewellen in der Statistik äußerst wertvoll, aber sie schließt die Deutung der Korpuskeln als solide Wellenpakete nicht aus. Ich meine, man müßte es umso eher verstehen, daß eine ebene Welle statistisch ein Bündel paralleler Korpuskularstrahlen repräsentiert und die Beugung der Welle das statistische Verhalten der gebeugten Korpuskularstrahlen wiedergibt, wenn man sich die Korpuskeln als Wellenpakete vorstellt[1]). Alle vorurteilslosen Forscher sollten darum in Hinkunft auch mit der Gewohnheit brechen, die Materiewellen schlechtweg Wahrscheinlichkeitswellen zu nennen, in Fällen, wo es sich gar nicht um ihre statistische Anwendung handelt.

1) Journ. de Physique et le Radium (6) **9**, 81, 1928.
2) Ondes et Mouvements, 12 und 60. Paris 1926.
3) Ann. d. Phys. (4) **81**, 1086, 1926.
4) Die erhaltenen Resultate können in quantitativer Hinsicht allerdings nicht übernommen werden, weil noch nicht die hier benutzte Wellengleichung zugrunde liegt.
5) Ann. d. Phys. (4) **85**, 711, 1928.
6) Anmerkung bei der Korrektur: Dies wäre auch der inzwischen erschienenen Arbeit von Tokio Takeuchi entgegenzuhalten: Eine neue Deutung der Wellengleichung der Materie. Zeitschr. f. Phys. **51**, 887, 1928.

Zusammenfassung.

§ 1 beschreibt ein Projektionsmodell zur Demonstration von Wellengruppen.

§ 2 bringt die allgemeine Theorie eines einfachen Spezialfalles einer Wellengruppe und eines Wellenpaketes bei homogener Wellenausbreitung.

§ 3 bringt die Erweiterung für den Fall unhomogener Wellenausbreitung und bespricht die Anwendung auf die klassische Mechanik. Der Unanschaulichkeitseinwand wird widerlegt. Die Schrödingerschen Differentialgleichungen der Materiewellen werden für den kräftefreien Fall in einer räumlichen Dimension diskutiert und ihr allgemeines Integral untersucht. Außerdem werden diejenigen Integrale aufgestellt, welche stationäre Wellengruppen darstellen. Dadurch wird gezeigt, daß auch der Einwand des Auseinanderfließens der Wellengruppen nur beschränkte Gültigkeit besitzt.

1) Anmerkung bei der Korrektur: Eine weitgehende Klärung in dieser Frage hat die inzwischen erschienene Arbeit von G. Wataghin gebracht: Versuch einer korpuskularen Theorie der Interferenz und Beugung. Zeitschr. f. Phys. **51**, 593, 1928.

Wien, II. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 26. Oktober 1928.)

Zur Frage der Schwingungen nach dem quadratischen Widerstandsgesetz.

Von Theodor Pöschl.

Die Frage der Schwingungen unter dem Einfluß einer zurückführenden, linear von der Entfernung abhängigen (etwa elastischen) Kraft und einem vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängigen Widerstand ist in der Literatur vielfach behandelt worden. Es sei hier auf die Arbeiten von Ph. Forchheimer[1]), R. Gram-

1) Ph. Forchheimer, Zeitschr. d. V. D. I. **56**, 1291, 1912 und Lehrbuch der Hydraulik, Berlin 1914, 348.



mel[1]), H. Burkhardt[2]) und R. v. Mises[3]) u. a. hingewiesen. Von diesen hat der letztgenannte eine anschauliche Darstellung zur Ermittelung der aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte angegeben, und R. Grammel hat auch versucht, für kleine Werte der Ausschläge eine Näherungsformel anzugeben. Tatsächlich ist diese Formel, wie Grammel selbst schon bemerkt, nur in sehr engen Grenzen verwendbar. Dasselbe trifft auch für die Ansätze zu, die H. Burkhardt für die Berechnung der Ausschläge angegeben hat.

Eine neuerliche Durchrechnung dieser Frage hat nun ergeben, daß bei folgerichtiger Durchführung des Näherungsverfahrens eine weit bessere Annäherung der rechnerischen Ermittelung der einzelnen Schwingungsausschläge gegeben werden kann, die auch für die Berechnung der Schwingungsdauer zu einem besonders einfachen Ergebnis führt. Es ergibt sich weiterhin, daß die Dauer der aufeinanderfolgenden Schwingungen abnimmt und in der Grenze von oben her dem Werte zustrebt, der bei fehlender Dämpfung gilt.

1. Zeichnerische Ermittelung der aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte.

Die Gleichung für die auftretende Bewegung unter den oben angegebenen Bedingungen hat die Form

$$\frac{dv^2}{dx} \mp 2kv^2 + 4\alpha^2 x = 0, \tag{1}$$

wobei das obere Vorzeichen für den Rückgang aus einer Anfangslage x_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 und für alle folgenden Rückgänge, und das untere für die dazwischen liegenden Hingänge gilt. Für andere Anfangsbedingungen, wobei etwa die Anfangsgeschwindigkeit v_0 beim Durchgang durch die Nullage $x = 0$ gegeben werden kann, tritt etwas wesentlich Neues nicht auf.

Das Integral der obigen Bewegungsgleichung, die eine lineare Differentialgleichung in v^2 ist, lautet:

$$v = \mp \frac{\alpha}{k} \sqrt{1 \pm 2kx - (1 \pm 2kx_0)\, e^{\mp 2k(x_0 - x)}}. \tag{2}$$

In diesem Ausdruck sind für die aufeinanderfolgenden Rückschwingungen an die Stelle von x_0 die Größen x_2, x_4 usw. und für die Hingänge (für die die unteren Vorzeichen gelten) für x_0 aufeinanderfolgend die Größen x_1, x_3 usw. einzusetzen, so daß die aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte durch x_0, x_1, x_2 usw. gekennzeichnet sind.

In diese Gleichungen führen wir zunächst die dimensionslose Veränderliche

$$kx = \xi \text{ und demgemäß } kx_0 = \xi_0,\ kx_1 = \xi_1 \text{ usw.} \tag{3}$$

ein, so daß die Gleichung zur Bestimmung dieser Umkehrpunkte ($v = 0$) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$1 \pm 2\xi_1 - (1 \pm 2\xi_0)\, e^{+2(\xi_0 - \xi_1)} = 0, \tag{4}$$

oder auch:

$$\frac{e^{+2\xi_1}}{1 \pm 2\xi_1} = \frac{e^{+2\xi_0}}{1 \pm 2\xi_0} \tag{5}$$

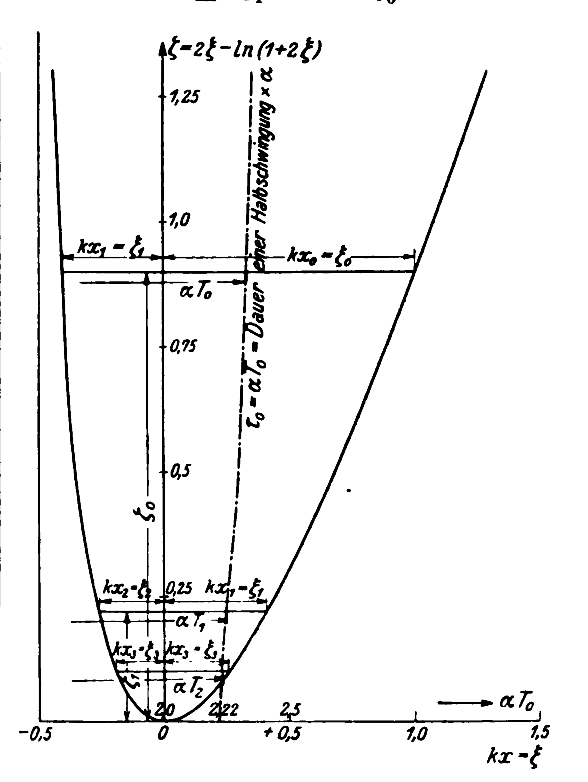


Fig. 1.

und ähnlich auch für die weiter folgenden Umkehrpunkte.

Aus der Form dieses Ausdruckes ergibt sich unmittelbar die von v. Mises (a. a. O.) herrührende einfache Darstellung für die graphische Ermittelung der aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte. Man zeichne (Fig. 1) die Kurve

$$\zeta = 2\xi - \ln(1 + 2\xi), \tag{6}$$

1) R. Grammel, Physik. Zeitschr. **14**, 20, 1913, Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen **10**, 129, 1913 und Handbuch der Physik **5**, 329, 1927. Berlin, J. Springer.

2) H. Burkhardt, Zeitschr. f. Math. u. Physik **63**, 303, 1915.

3) R. v. Mises, Elemente d. Techn. Hydromechanik I, 188, Leipzig 1914. In allen diesen Schriften sind noch weitere Literaturhinweise enthalten.

in der nach Gleichung (5) zwei aufeinanderfolgenden ξ-Werten gleiche ζ-Werte zugehören.

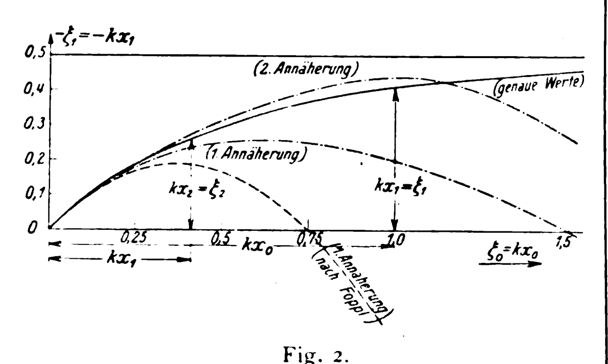


Fig. 2.

An Stelle dieser Darstellung verwenden wir weiterhin eine andere, die man dadurch erhält, daß man in einem neuen Achsenkreuz zusammengehörige Werte von ξ in Abhängigkeit voneinander aufträgt; so ergibt sich die in Fig. 2 durch „genaue Werte" bezeichnete Kurve, die ebenso wie die Fig. 1 dazu dienen kann, die aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte in einfacher Weise zu bestimmen. Der hierzu einzuschlagende Vorgang ist in die Fig. 2 für einige aufeinanderfolgende Schwingungsausschläge eingetragen.

2. Die rechnerische Ermittelung der aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte macht von der Entwicklung der e-Funktion in Gleichung (4) in eine Potenzreihe Gebrauch, wobei in der Näherungsrechnung auf die folgerichtige Beibehaltung gleich hoher Potenzen Bedacht zu nehmen ist. Für diese Rechnung genügt, wie man ohne weiteres erkennt, die Beibehaltung eines, z. B. des oberen Vorzeichens, so daß Gleichung (4) nach Multiplikation mit $e^{2(\xi_0-\xi_1)}$ in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(1+2\xi_1)\left[1+2(\xi_0-\xi_1)+2(\xi_0-\xi_1)^2+\tfrac{4}{3}(\xi_0-\xi_1)^3+\tfrac{2}{3}(\xi_0-\xi_1)^4\ldots\right]-(1+2\xi_0)=0. \qquad (7)$$

In dieser Gleichung heben sich die Glieder nullter und erster Ordnung auf. Der übrigbleibende Teil kann durch $2(\xi_0-\xi_1)$ dividiert werden und liefert dann folgende Glieder:

$$\left.\begin{aligned}&\xi_0-\xi_1+\tfrac{2}{3}(\xi_0-\xi_1)^2+\tfrac{1}{3}(\xi_0-\xi_1)^3+\tfrac{2}{15}(\xi_0-\xi_1)^4+\cdots\cdots\\&+2\xi_1+2\xi_1(\xi_0-\xi_1)+\tfrac{4}{3}\xi_1(\xi_0-\xi_1)^2+\tfrac{2}{3}\xi_1(\xi_0-\xi_1)^3+\cdots\end{aligned}\right|=0. \qquad (8)$$

Werden in dieser Gleichung nur die linearen Glieder beibehalten, so folgt $\xi_1=-\xi_0$ als (nullte) Annäherung. Setzen wir dann in den quadratischen Gliedern der Gleichung (8) $\xi_1^2=\xi_0^2$ so bleibt, wenn die höheren Glieder zunächst außer Betracht bleiben, die Gleichung:

$$\xi_0+\xi_1+\tfrac{2}{3}\xi_0\xi_1-\tfrac{2}{3}\xi_0^2=0. \qquad (9)$$

Diese Gleichung nach ξ_1 aufgelöst gibt:

$$\xi_1=-\xi_0\frac{1-\frac{2}{3}\xi_0}{1+\frac{2}{3}\xi_0}, \qquad (10)$$

eine Gleichung, die in Fig. 2 als „erste Näherung" eingetragen ist.

Durch Vergleich der gerechneten Zahlenwerte mit den genauen und aus der Fig. 2 erkennt man, daß diese Annäherung für die Werte $0<\xi_0<0{,}4$ (etwa) schon recht gut mit den genauen Werten übereinstimmt. In Fig. 2 ist auch der Verlauf nach der von A. Föppl (Vorlesungen über techn. Mechanik, Bd. IV, 6. Auflage, S. 48) gefundenen „1. Annäherung" eingetragen, die mit Gl. (10) nicht ganz übereinstimmt, und den „genauen Werten" nicht so nahe liegt, wie die nach Gl. (10) gefundene.

Die Weiterführung dieses Gedankens für die Glieder dritter Ordnung in Gleichung (8) führt unter Einführung der Bezeichnung

$$\xi_1=-A\xi_0,\ \text{also}\ A=\frac{1-\frac{2}{3}\xi_0}{1+\frac{2}{3}\xi_0} \qquad (11)$$

zu folgendem Vorgang:

Es wird in den Gliedern dritter Ordnung der Entwicklung (8) gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1^3&=-\xi_0^3\\\xi_1^2&=A^2\xi_0^2\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

und die linearen Glieder werden unverändert beibehalten. Damit erhält man:

$$\xi_1\left[1+\tfrac{2}{3}\xi_0+\tfrac{1}{3}\xi_0^2\right]+\xi_0\left[1+\tfrac{2}{3}\xi_0(1-2A^2)-\tfrac{1}{3}\xi_0^2(2+5A^2)\right]=0$$

und daraus:

$$\xi_1=-\xi_0\cdot\frac{1+\frac{2}{3}\xi_0(1-2A^2)-\frac{1}{3}\xi_0^2(2+5A^2)}{1+\frac{2}{3}\xi_0+\frac{1}{3}\xi_0^2} \qquad (13)$$

Die Eintragung dieser „zweiten Näherung" in Fig. 2 läßt erkennen, daß die Übereinstimmung mit den genauen Werten bis etwa $\xi_0=1{,}2$ schon recht befriedigend ist, so daß für praktische Rechnungen diese Näherung in den meisten Fällen genügen dürfte. Beachtet man noch, daß die Kurve in Fig. 1 bei $\xi=-0{,}5$ eine lotrechte Asymptote hat, so daß schon der zweite Ausschlag sicher kleiner als 0,5 ist, so wird man kaum Veranlassung haben, zu einer höheren Näherung zur Berechnung der aufeinanderfolgenden Schwingungsausschläge zu greifen.

Das Näherungsverfahren ist jedoch beliebig fortsetzbar, und es würde also für den nächsten Schritt, wenn nach Gleichung (13) $\xi_1=-B\xi_0$,

$$\text{also}\ B=\frac{1+\frac{2}{3}\xi_0(1-2A^2)-\frac{1}{3}\xi_0^2(2+5A^2)}{1+\frac{2}{3}\xi_0+\frac{1}{3}\xi_0^2}$$

gesetzt wird, in der Entwicklung (8) zu setzen sein:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1^4 &= \xi_0^4 \\ \xi_1^3 &= -A^3\,\xi_0^3 \\ \xi_1^2 &= B^2\,\xi_0^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (14)$$

während die linearen Glieder wieder beibehalten werden. Die Auflösung der so entstehenden Gleichung nach ξ_1 würde die „dritte Näherung" ergeben usw.

3. Angenäherte Berechnung der Schwingungsdauer.

Um die Schwingungsdauer zu erhalten, wird in Gleichung (2) für den ersten Rückgang $v = -\frac{dx}{dt}$ gesetzt, ferner nach Gleichung (3) $k\,dx = d\xi$ und schließlich statt t die dimensionslose Veränderliche („Eigenzeit des Problems")

$$\alpha t = \tau \text{ bzw. } \alpha\, dt = d\tau\,. \qquad (15)$$

Dadurch enthält man für die Zeit, die irgendeinem Zwischenpunkte ξ entspricht, den Wert:

$$\tau = \int_{\xi}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + 2\xi - (1 + 2\xi_0)e^{-2(\xi_0 - \xi)}}} \qquad (16)$$

und für die Dauer einer Halbschwingung τ_0 ist dann $\xi = \xi_1$ zu setzen. Der Verlauf des Nenners des Integrals für eine von $\xi_0 = 1$ bis $\xi_1 = -0{,}41$ gehende erste Halbschwingung ist aus Fig. 3 zu

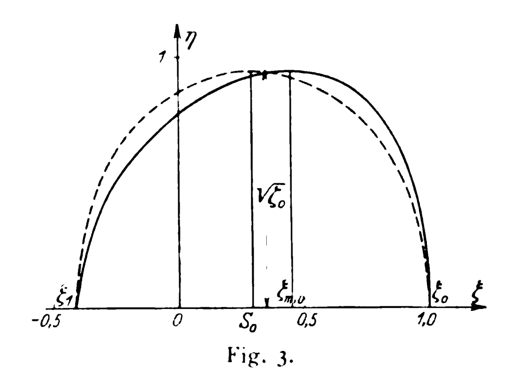


Fig. 3.

ersehen. Um einen angenäherten Wert für τ_0 zu erhalten, ersetzen wir diese Kurve durch eine Halbellipse, deren eine Achse $\xi_0 - \xi_1$ ist, und deren halbe andere Achse der größte Wert jener Kurve ist. Die Stelle $\xi_{m,0}$ dieses größten Wertes ergibt sich durch Nullsetzung der Ableitung des Radikanden nach ξ:

$$1 - (1 + 2\xi_0)\,e^{-2(\xi_0 - \xi_{m,0})} = 0,$$

woraus folgt

$$e^{-2(\xi_0 - \xi_{m,0})} = \frac{1}{1 + 2\xi_0}\,. \qquad (17)$$

Die Größe des größten Wertes des Radikanden im Nenner ergibt sich demnach zu

$$2\,\xi_{m,0} = 2\,\xi_0 - \ln(1 + 2\,\xi_0) = \zeta_0 \qquad (18)$$

und kann daher unmittelbar aus Fig. 1 entnommen werden.

Die Gleichung der Ellipse, durch die der Nenner von Gleichung (16) ersetzt wird, hat daher die Form

$$\frac{\left(\xi - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\xi_0 - \xi_1}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\zeta_0} = 1\,. \qquad (19)$$

Setzt man daher ähnlich wie bei Grammel (Physik. Zeitschr. a. a. O.)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} &= S_0 \\ \frac{\xi_0 - \xi_1}{2} &= D_0 \end{aligned}\right\}, \qquad (20)$$

so folgt für die Größe des Nenners im obigen Integral (16)

$$\eta = \sqrt{\zeta_0}\,\sqrt{1 - \left(\frac{\xi - S_0}{D_0}\right)^2}, \qquad (21)$$

und für das Integral selbst ergibt sich der Wert:

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\zeta_0}} \int_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi - S_0}{D_0}\right)^2}} = \frac{D_0}{\sqrt{\zeta_0}} \left[\arcsin \frac{\xi - S_0}{D_0}\right]_{\xi_1}^{\xi_0} = \frac{\pi D_0}{\sqrt{\zeta_0}}\,. \qquad (22)$$

Die aufeinanderfolgenden Werte der Dauer einer Halbschwingung sind daher gegeben durch:

$$\tau_0 = \frac{\pi D_0}{\sqrt{\zeta_0}}, \quad \tau_1 = \frac{\pi D_1}{\sqrt{\zeta_1}}, \text{ usw.} \qquad (23)$$

und können unmittelbar mit Hilfe von Fig. 1 ermittelt werden. In Fig. 1 ist die Kurve $\tau_0 = \alpha\,T_0$, also die Dauer einer Halbschwingung mal α in Abhängigkeit von ζ_0 aufgetragen. Man sieht aus dieser Kurve, daß die Zeiten der aufeinanderfolgenden Halbschwingungen langsam abnehmen, und zwar gegen den Wert $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2{,}22$, d. i. die Dauer der ungedämpften Schwingung gehen.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß schon Poisson[1]) bewiesen hat, daß in dem Fall der quadratischen Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit, der auch hier behandelt wurde, die Schwingungsdauer vom Schwin-

1) S. D. Poisson, Traité de mécanique, vol. I, Art. 186 u. f.

gungsbogen in erster Näherung unabhängig ist. Aus Fig. 1 ist zu ersehen, daß dieses Resultat tatsächlich mit sehr großer Näherung zutrifft.

Der Verlauf der Schwingung ausgehend von den Anfangswerten $\xi_0 = 1$ und $v_0 = 0$ ist in Fig. 4 wiedergegeben. Gemäß der obigen Glei-

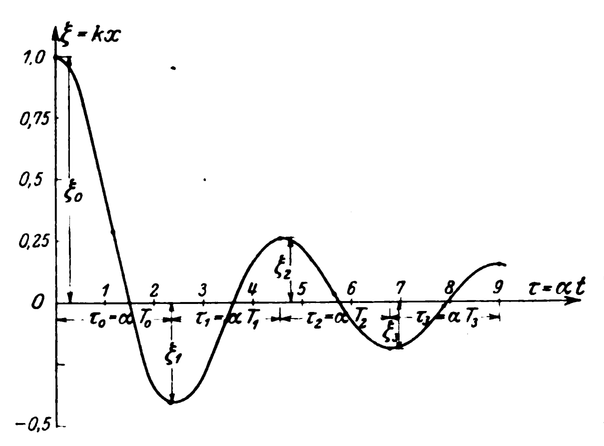


Fig. 4.

chung (22) kann diese ξ-τ-Linie als eine Aneinanderreihung von Sinuslinien dargestellt werden, deren Wendepunkte um die Beträge S_0, S_1 usw. von der τ-Achse entfernt liegen.

Bei der Durchführung der Zahlenrechnungen und der Anfertigung der Figuren hat mich mein Assistent, Herr Dipl.-Ing. K. Klotter, mit großer Aufopferung unterstützt, dem ich auch bei dieser Gelegenheit hierfür besonderen Dank sagen möchte.

Karlsruhe, Institut für Mechanik und angewandte Mathematik der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 29. Oktober 1928.)

Viskosität und Strömungsorientierung.

Von S. Kyropulos.

1. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität („Viskositätskurve") gesättigter Kohlenwasserstoffe.

Die Viskositätskurven der Stoffe, die der folgenden Untersuchung zugrunde liegen, wurden mittelst der Coulombschen Methode gewonnen. Diese besteht in der Bestimmung von Dämpfungskonstanten mittelst eines Torsionspendels. Aus den Schwingungsbeobachtungen wurde das logarithmische Dekrement und daraus der Reibungsfaktor (b) der Differentialgleichung der Schwingung berechnet. Fig. 1 stellt einige Viskositätskurven, b als $f(T)$ dar, wobei b proportional η ist, dem Koeffizienten der inneren Reibung. In der Tabelle sind die b-Werte von 10 zu 10° zahlenmäßig aufgeführt.

Die untersuchten Stoffe haben Ölcharakter und sind verschieden hoch siedende Fraktionen technisch reiner gesättigter Kohlenwasserstoffe[1]). Sie erweisen sich chemisch als solche durch ihre Widerstandsfähigkeit gegen Oxydationsmittel (Kaliumpermanganat-Sodalösung) und physikalisch durch ihre niedrige Dielektrizitätskonstante (DEK.) von $\varepsilon\,18^0 = 2{,}24$—$2{,}21$ und Dichte $d\,18^0 = 0{,}8886$ — 0,8722. Molekular unterscheiden sich die einzelnen Öle voneinander nur durch die verschiedene Länge der sie bildenden Kohlenstoffketten $C_n H_{2n+2}$. Zum späteren Vergleich sind mit aufgeführt die Reibungswerte zweier ungesättigten Kohlenwasserstofföle, N und S, die sich chemisch durch leichte Oxydierbarkeit, physikalisch durch größere Polarisierbarkeit $\varepsilon\,18^0 = 2{,}40$ und Dichte $d\,16^0 = 0{,}9515$ bzw. $d\,27^0 = 0{,}9642$ kennzeichnen. Das Öl 15 enthält eine Beimengung an besonders langen Molekülen.

Betrachtet man die einzelnen Viskositätskurven der gesättigten Kohlenwasserstofföle der

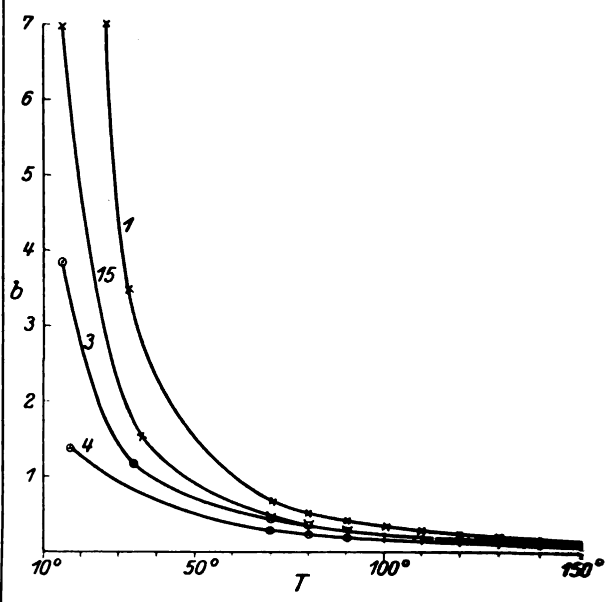


Fig. 1.
Viskositätskurven gesättigter Kohlenwasserstoffe.

Tabelle, so bemerkt man ein Gebiet starken Abfalles, an das sich Gebiete schwächeren, bzw. ganz geringen Abfalles schließen. Die Reibungsfaktoren bei 16—17° der Öle 1 (AAAX) und 4 (MA) verhalten sich wie 11,4:1; bei 150° wie

1) „Valvoline"-Öle des Handels.



Reibungskoeffizient b als $f(T)$.

Oel	T =		70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
1. AAAX	$15.65^{16°}$	$3.48^{33°}$	0.687	0.538	0.437	0.359	0,302	0,258	0.220	0,187	0,157
2. H	$3.61^{13°}$	$1.48^{34°}$	0.502	0.375	0.289	0.245	0.214	0.192	0.179	0.159	0.141
3. XRM	$3.85^{15°}$	$1.28^{34°}$	0.455	0.352	0.280	0.234	0.200	0.177	0.154	0.145	0.137
4. MA	$1.38^{17°}$	$1.11^{33°}$	0.283	0.231	0,199	0.168	0.145	0,128	0,112	0.105	0.098
13. N	$10.37^{15°}$	$1.44^{36°}$	0.374	0.283	0.227	0,184	0.154	0.130	0,117	0.100	0.095
14. S	$126.3^{13°}$	$5.10^{35°}$	0.528	0.407	0.310	0.249	0.208	0.173	0,146	0.124	0,107
15. --	$6.98^{15°}$	$1.53^{36°}$	0.466	0.364	0.288	0.231	0,192	0.166	0,145	0.139	0,137

1,6:1. Verschiebt man die Kurve eines dünneren Öles nach höherer Temperatur hin, so kann man sie in diesem Gebiete flachen Verlaufes mit der Kurve eines wesentlich zäheren Öles nahezu zur Deckung bringen. Im Gebiete des steilsten Abfalls der Kurve der zähesten Fraktion verläuft aber die verschobene Kurve des dünneren Öles alsdann flacher als die des zäheren, entweder unterhalb derselben, oder sie schneidet sie. D. h. bei der Reibungsmessung verhalten sich bei höherer Temperatur die Öle mit den längeren Molekülen sehr ähnlich denen mit den kürzeren; bei niederer Temperatur verursachen die längeren Moleküle einen steileren Verlauf der Viskositätskurve. Diese Erscheinung ist besonders deutlich ausgeprägt im Vergleich der Kurven der Öle 3 und 15, von denen das letztere, wie erwähnt einen Gehalt an sehr langen Molekülen hat.

Die Viskositätskurven der Öle 13 und 14 unterscheiden sich von allen anderen durch ihre hohen Anfangs- und niedrigen Endwerte.

2. Viskositätskurven anderer Stoffe.

In Fig. 2 ist die Viskositätskurve ($\eta = f(T)$) von geschmolzenem Natriumnitrat nach Lorenz

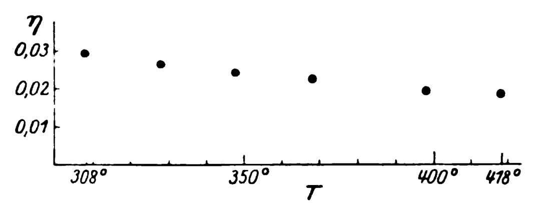


Fig. 2. Viskositätskurve von geschmolzenem Natriumnitrat nach Lorenz u. Kalmus.

und Kalmus[1]) dargestellt vom Schmelzpunkt des Salzes (308°) bis 418°. Der Gesamtabfall, der das steilste Gebiet einschließt, beträgt 38 Proz. des Höchstwertes, gegen 98 Proz. im Gebiet von 16—120° beim zähesten Kohlenwasserstofföl 1, wobei dessen Erstarrungspunkt tiefer liegt als 16°, ein Gebiet sehr steilen Verlaufes daher unberücksichtigt geblieben ist. Der Vergleich und der fast lineare Verlauf der Kurve beim Natriumnitrat zeigt, daß die Nähe des Schmelzpunktes an sich keine Aufsteilung der Viskositätskurve bedingt.

1) Zeitschr. physik. Chem. **59**, 244. 1907.

3. Viskosität und Moleküleigenschaften.

Ähnlich dem Temperaturverlauf der Viskosität bei den Ölen ist der der DEK. bei Dipolflüssigkeiten wie Äther[1]). Beide Kurven sind typisch für die Überlagerung eines linearen Dichteeffektes und eines Zerfallseffektes von Komplexen. Diese Effekte kommen beim Temperaturverlauf der DEK. völlig getrennt vor, indem dipollose Flüssigkeiten, wie auch die untersuchten Öle, linearen Abfall zeigen, da die Komplexbildung in ihnen, ihrer Natur nach, den Polarisationszustand der Flüssigkeit nicht beeinflußt.

Die Betrachtung der zu erwartenden Art der Molekülaggregation bei den gesättigten Kohlenwasserstoffen macht nun den oben erörterten Verlauf ihrer Viskositätskurven verständlich.

Bei einem Dipolmolekül und dessen ausgesprochener Entfernung der Ladungsschwerpunkte, die einfache, stabilste Assoziationskonfigurationen ergibt, sind Stellen im Molekül vorhanden, von denen starke anziehende Kräfte ausgehen, so daß Assoziationsprodukte resultieren, die in der Mehrzahl der beobachteten physikalischen Eigenschaften viel mehr zum Ausdruck kommen, als das sie bildende Dipolmolekül selbst, und ganz wie selbständige „Moleküle" auftreten. Die Komplexe sind in der Regel von geringerem Dipolmoment als ihre Bestandteile, die, wie schon aus der Konzentration der Kraftfelder verständlich, keine ausgesprochene Neigung zur Kettenbildung zeigen. Der Stärke der sie zusammenhaltenden Kräfte entsprechend, genügen die gebräuchlichen mechanischen Mittel nicht, die Komplexe zu trennen.

Anders muß die Komplexbildung bei den gesättigten Kohlenwasserstoffen erfolgen. Stellen mit Kraftfeldern, die denen bei Dipolmolekülen vergleichbar wären, sind nicht vorhanden, Punkte

1) Vgl. z. B. Isnardi, Zeitschr. f. Phys. **9**, 153, 1922.

schwacher anziehender Molekularfelder sind über die ganze Länge des Moleküls verteilt. Ihre Anzahl wächst mit der Kettenlänge. Von der Gestalt dieser losen Aggregationsprodukte läßt sich jedenfalls voraussagen, daß sie vom einfachsten, kreuz- bzw. sternförmigen Komplex

$$\begin{matrix} & H & & H & \\ & \cdot & & \cdot & \\ H \cdot & C & — & C & \cdot H \\ & \cdot & & \cdot & \\ & H & & H & \end{matrix}$$

bei einer zweigliedrigen Kette beginnend, mit wachsender Kettenlänge immer unregelmäßigere Formen annehmen kann, so daß bei großer Kettenlänge schließlich die ganze Flüssigkeitsmasse unter sich lose verbunden, einem Filz vergleichbar, zu denken ist, der um so mehr zusammenhält, je vielfältiger die Verflechtung, d. h. je länger das Einzelmolekül ist. Dieser Vorstellung entspricht auch der Anstieg der Kapillarkonstante mit wachsender Kettenlänge in dieser Körperklasse von 1,8 (Hexan) auf 3,31 mg/mm beim Öl 1. Der Abfall dieser statisch gemessenen Größe[1]) mit der Temperatur ist fast linear.

Bei der Beurteilung der Viskositätsdaten ist zu beachten, daß Viskositätsmessungen ihrer Natur nach dynamisch sind, woraus allein schon folgt, daß bei ihnen die Möglichkeit der Beeinflussung des Meßergebnisses durch die Meßmethode vorliegt, die in diesem Falle in der Bewegung eines Körpers durch die Flüssigkeit besteht. Offenbar wird der bewegte Körper einen geringeren Widerstand erfahren, wenn kleine Komplexe zu bewegen, bzw. an wenigen Haftstellen von anderen zu lösen, als wenn große Komplexe an zahlreichen Stellen abzulösen sind. Dies würde in obigem Bilde eine beschleunigte Zunahme der Viskosität mit wachsender Kettenlänge bedeuten und dementsprechend eine beschleunigte, starke, Abnahme mit steigender Temperatur. Wie die angeführten Beispiele zeigen, kann die Temperaturabhängigkeit der Viskosität der Linearität in solchen Fällen nahekommen, wo eine Vorzugsrichtung im Molekül oder Komplexbildung irgendwelcher Art fehlt. Hinsichtlich des Viskositätsverlaufes nach höheren Temperaturen hin bei langgestreckten, im übrigen gleichartigen Molekülen, wie den gesättigten Kohlenwasserstoffen, liegt dann folgende Vorstellung nahe. Mit zunehmender Temperatur wird die Zeitdauer der freien Existenz von Einzelmolekülen wachsen. Je weniger Anlagerungsstellen im Molekül vorhanden sind, d. h. je kürzer die Kohlenstoffkette ist, bei um so niedrigeren Temperaturen wird daher, über endliche Zeiten betrachtet, die Flüssigkeit sich so verhalten, als bestände sie nur aus Einzelmolekülen. Wenn dies der einzige Effekt wäre, so sollte vom Temperaturpunkte seines Eintritts an die Viskosität langsam linear weiter abfallen und die Viskositätskurven von Kohlenwasserstoffen verschiedener Kettenlänge sollten allmählich einander parallel laufen oder sich voneinander entfernen. Letzteres wäre dann zu erwarten, wenn die aus längeren Einzelmolekülen bestehende Flüssigkeit bei gleicher Temperatur stets eine größere Viskosität hätte, als die Flüssigkeit, die aus den kleineren Einzelmolekülen besteht und wenn außerdem die Viskosität bei kürzeren Molekülen etwas rascher mit steigender Temperatur abnehmen würde als bei längeren. Die Reibungswerte der Tabelle zeigen deutlich, daß keines von beiden eintritt: die Viskositätskurven nähern sich einander mit steigender Temperatur.

Dieser Verlauf wird verständlich, wenn man die einleuchtenden Annahmen macht, daß 1. eine Vorzugsrichtung minimaler (längen-unabhängiger) Reibung der Moleküle aneinander existiert, wenn sie etwa längs einander gleiten und 2. eines Einflusses der dynamischen Meßvorrichtung, derart, daß der durch die Flüssigkeit bewegte Körper eine orientierende Kraftwirkung auf die langen Moleküle ausübt, der sie um so leichter folgen können, je länger sie sind. Es würde genügen, wenn nur die dem Körper unmittelbar benachbarten Molekülschichten sich mehr oder weniger vollständig — je nach der Kraftwirkung, die auf sie ausgeübt würde — orientieren würden. Ein solcher Vorgang würde genau zu dem Beobachtungsergebnis führen: der relativ stärkeren Viskositätsabnahme der „zähen" Kohlenwasserstoffe bei den untersuchten höheren Temperaturen und der Annäherung der Viskositätskurven aneinander. — Es erhebt sich noch die Frage, was bei noch höheren Temperaturen zu erwarten wäre, bei denen, konstante Kraftwirkung vorausgesetzt, die Lebhaftigkeit der Wärmebewegung wieder einen Rückgang der Orientierung bewirken muß. Hierüber lassen sich zur Zeit nur Vermutungen äußern, an die nur die Forderung der Widerspruchslosigkeit mit den obigen Annahmen zu stellen ist. Bei den kürzeren Molekülen würden ihre lebhaftere Wärmebewegung und ihr geringeres Orientierungsvermögen im Sinne größerer Viskosität wirken. Bei den längeren Molekülen würden die weniger lebhafte Wärmebewegung und das größere Orientierungsvermögen im Sinne geringerer Viskosität, ihre größere Moleküllänge jedoch im entgegengesetzten Sinne wirken. Welche Wirkung die Oberhand behielte, ist kaum vorauszusagen. Die Erfahrung spricht für ein Überwiegen der letzteren Wirkung.

Die Betrachtung ergibt, daß bei bewegten, einfach kettenförmigen Molekülen, wesentlich mit

1) Gemessen nach der Abreißmethode in der Ausführungsform von Lenard, Ann. d. Phys. **74**, 381, 1924.

einer Längsorientierung zu rechnen ist und daß die Wirkung der Molekülvergrößerung sekundärer Natur ist durch Vergrößerung der Komplexe.

4. Strömungsorientierung.

Die Annahme einer derartigen „Strömungsorientierung" bereits bei einer relativ niedrigen Temperatur und damit eines relativ langsamen Abfalles der Viskosität nach höheren Temperaturen hin steht im Einklang mit dem Verlauf der Viskositätskurven der gesättigten Kohlenwasserstofföle mit ihrem relativ flachen Abfall. Ein anderer, steilerer Abfall ist bei den Ölen zu erwarten, deren Moleküle Seitenketten enthalten, keine Symmetrieachse besitzen und somit weniger zur Strömungsorientierung geneigt sind. Die Öle *S* und *N* der vorliegenden Untersuchung zeigen diesen Temperaturverlauf der Viskosität ganz ausgesprochen. Dunstan und Thole[1]) sowie Woog[2]) haben auf die Vergrößerung der Viskosität durch ungesättigte Kohlenwasserstoffe bzw. molekulare Assymetrie, hingewiesen.

Die vorstehenden Betrachtungen, die lediglich auf molekularphysikalischen Überlegungen beruhten und auf dem Verlauf der Viskositätskurven einigermaßen definierter Öle, werden gestützt durch neuere Untersuchungen von Vorländer und Walter[3]), die nichts anderes sind, als Untersuchungen über Strömungsorientierung an wohldefinierten Stoffen. Hierbei befanden sich die untersuchten Flüssigkeiten bei etwa 20° in einem zylindrischen Gefäß von 4,75 cm Höhe und 2,3 cm Durchmesser, in dem in 1 mm Abstand ein konzentrisch angeordneter Zylinder rotiert wurde. Die Drehzahlen pro Minute betrugen von 300 bis 10000. Die beobachtete Änderung der Doppelbrechung ist ein Maß für die Orientierung. Die Hauptergebnisse mit Bezug auf das vorliegende Problem sind die folgenden:

Die der Ordnung entgegenwirkende Molekülbewegung wird bei der Rotation um so leichter überwunden, je mehr das Molekül Stäbchenform annimmt. Bei vielen Substanzen mit geringer Zähigkeit nimmt die Orientierung mit wachsender Drehzahl deutlich zu. Umgekehrt nimmt sie in einigen Fällen mit wachsender Drehzahl so schnell ab, wie aus dem Einfluß der bei der Rotation steigenden Temperatur kaum zu erklären ist. Dabei handelt es sich um Flüssigkeiten von sehr großer Zähigkeit und kleiner spezifischer Doppelbrechung (D.). — Keine D. zeigten in der benutzten Apparatur kleine Moleküle oder sehr verzweigte und solche ohne ausgeprägte Längsrichtung. — Die D. wächst mit steigender Kettenlänge bei den Fettsäuren. — Werden in das Molekül Seitenketten eingeführt, so sinkt die D. je nach der Länge der Seitenkette. — Der Einfluß der Winkelbildung zeigt sich bei stellungsisomeren Benzolderivaten im Wachsen der D. vom *o*- über das *m*- nach dem *p*-Derivat.

1) J. Petr. Techn. **4**, 191, 1918.
2) P. Woog, Contributions à l'étude du graissage, Paris 1926, S. 190.
3) Zeitschr. f. physik. Chem. **118**, 1, 1925. Vgl. a. Freundlich, Stapelfeldt u. Zocher, daselbst **114**, 161, 1925.

Eine Ergänzung der vorstehenden Untersuchungen mit Hinblick auf das vorliegende Problem hinsichtlich der Abhängigkeit der Strömungsorientierung von der Drehzahl, dem Zylinderzwischenraum, dem Druck und namentlich der Temperatur und ihre Ausdehnung auf die hier behandelten Öle befindet sich in Vorbereitung.

Die Ergebnisse von Vorländer und Walter legen jedoch bereits nahe, eine bekannte Diskrepanz zwischen dem Befund der Zähigkeitsmessung und der Ölprüfmaschine durch Strömungsorientierung zu erklären.

Biel[1]) stellte Untersuchungen über die Größe des an der Welle der Ölprüfmaschine gemessenen Reibungsmomentes bei Schmierung mit einem reinen Mineralöl und einem Mineralöl-Voltolgemisch an, dessen Mineralölkomponente besonders dünnflüssig war. Die Englerviskositäten von Öl und Gemisch waren bei 30° nahe gleich, bei 70°, der oberen Grenze des Untersuchungsgebietes war das Voltolgemisch wesentlich zäher

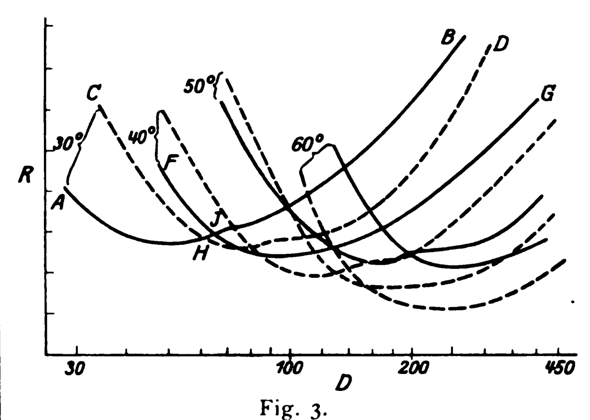


Fig. 3.
Reibungsmoment-Drehzahlkurven nach Biel.
—— reines Mineralöl. – – – – Voltolgemisch.

als das Mineralöl. Von 30° bis 60°, um 10° fortschreitend, wurde das Reibungsmoment in Abhängigkeit von der Drehzahl bestimmt. Die so erhaltenen Kurven (Fig. 3) durchlaufen Minima des Reibungsmomentes, deren Lage sich mit steigender Temperatur nach wachsender Drehzahl verschiebt und in einem engen Werte-

1) Zeitschr. d. Ver. dt. Ing. **64**, 449 u. 483, 1920.

bereich des Reibungsmomentes bleibt, verglichen mit dessen sonst vorkommenden Größenunterschieden. Vergleicht man den Verlauf eines zusammengehörigen Kurvenpaares, so sieht man, daß unterhalb einer gewissen Drehzahl die Mischölkurve stets oberhalb der Mineralölkurve verläuft und die Differenzen der Werte des Reibungsmomentes bei gleicher Drehzahl sind um so größer, je niedriger die Temperatur ist. Mit steigender Drehzahl nähern sich die Kurven einander, schneiden sich, so daß nunmehr das Mischöl nach steigender Drehzahl die geringeren Reibungsmomente ergibt. Dabei zeigt sich auf den extremen Kurvenpaaren für 30^0 bzw. 60^0, daß sie nach höheren Drehzahlen verlängert, wieder zum Schnitt kommen und das Größenverhältnis der Reibungswerte beider Ölarten sich also wieder umkehrt.

Dieser Verlauf der Kurven entspricht vollkommen dem entworfenen molekularphysikalischen Bilde und den Untersuchungsbefunden von Vorländer und Walter.

Bekanntlich ist das unvermischte Voltol äußerst viskos und enthält sehr langgestreckte Moleküle vom Molekulargewicht bis zu 6000, so daß alle Voraussetzungen für eine sehr ausgesprochene Strömungsorientierung gegeben sind. Dies gilt auch von dem von Biel untersuchten Gemisch, dessen Zusammensetzung aus einem dünnen Mineralöl als Grundlage und den langen Voltolmolekülen, in gewisser Weise an die von Freundlich, Stapelfeldt und Zocher[1]) bezüglich der Strömungsorientierung untersuchten Vanadinpentoxydsole erinnert.

Die folgende Vorstellung stellt den Kurvenverlauf dar, bzw. ergänzt seine hydrodynamische, die Änderung der Dicke des Schmierspaltes berücksichtigende Deutung durch Einführung der Strömungsorientierung.

Betrachten wir das Kurvenpaar bei 30^0 und die Mineralölkurve bei 40^0. Die viskosimetrisch gemessene Viskosität des Voltolgemisches ist bei gleicher Temperatur stets größer als die des reinen Mineralöles. Ferner ist links von H und J jede höher liegende Isotherme ein Ort geringerer „dynamischer" Viskosität, was schon daraus hervorgeht, daß die Viskosität des Mineralöles längs FJ (40^0) kleiner ist als längs AH (30^0). Die „dynamische" Viskosität des Voltolgemisches ist also längs CH geringer als die des reinen Mineralöles bei gleicher Temperatur längs AH. Rechts von J und H sind die höher liegenden Kurventeile, wie eine analoge Betrachtung zeigt, Orte größerer dynamischer Viskosität. Auf beiden Seiten des Schnittpunktes zeigt also das Voltolgemisch die geringere dynamische Viskosität als das reine Mineralöl. Bereits im Gebiete niedriger Drehzahlen und Temperaturen ist in Analogie zu den Befunden von Freundlich und Mitarbeitern bei Vanadinpentoxydsolen, eine merkliche Orientierung der langen Voltolmoleküle zu erwarten, die in Anbetracht des Vorherrschens kleiner Mineralölmoleküle im Gemisch, nur wenig große Komplexe unter sich bilden werden, im Gegensatz zu den Mineralölen mit langen Molekülen, wo diese in der Überzahl vorhanden sind. Da also die Voltolmoleküle zur Orientierung geneigt sind, im Lagerversuch mehr als im Englerviskosimeter, werden sie die „dynamische" Viskosität des Gemisches herabsetzen können. Die teilweise Trennung der Komplexe und dynamische Orientierung der langen Moleküle in der Ölprüfmaschine bewirken eine geringere als die viskosimetrisch gemessene Viskosität und, durch Ölfilmverdünnung[1]), dort die größeren Reibungswerte des Gemisches.

Die Kurven HD des Gemisches und JB des Mineralöles nähern sich nun einander sichtlich nach B und D hin und können sehr wohl einem zweiten Schnittpunkt bei höheren Drehzahlen zustreben, von dem an also wieder das Mineralöl nicht nur die geringere Englerviskosität, sondern auch die geringere dynamische Viskosität hätte, das Gemisch sich also „normal" verhielte. Ein solches Verhalten entspräche durchaus den Schlußbemerkungen des § 3 und steht im Einklang mit Befunden von Vorländer und Walter bei sehr zähen Flüssigkeiten, wo die Orientierung mit wachsender Drehzahl wieder abnimmt, entsprechend einem stärkeren Wiedereintritt von Rotationsbewegung. Für dieses Gebiet sind um so größere Reibungswerte zu erwarten, je größer die Moleküle und je kleiner damit ihre freie Weglänge wird.

Der hier beschrittene Weg des Vergleichs der Kurven eliminiert einigermaßen die gleichzeitige Änderung anderer Variabler, die hier nicht ganz zu übersehen ist. Ob dem Reibungsminimum der Kurven das Maximum der jeweils möglichen Orientierung entspricht, wie zu erwarten und wie weit die Abnahme der Schmierschichtdicke durch Orientierung gefördert wird, kann auf Grund dieser Versuche nicht entschieden werden. Die obige Deutung schließt die Mitwirkung anderer Faktoren nicht aus, da die Kurven nicht ganz die einfache, unserer Diskussion zugrunde gelegte Form haben und die Erscheinungen besonders

1) l. c.

1) Die „Sperrigkeit" des Schmiermittels nimmt ab und damit die Dicke (y) des Schmierspalts. Bei gleichbleibender Relativgeschwindigkeit u der gleitenden Flächen wächst also $\frac{du}{dy}$ und damit R.

durch die Änderung der Schmierschichtdicke während des Versuches kompliziert sind. Versuche an genau definierten Substanzen mit konstanter Schichtdicke sind in Vorbereitung.

5. Strömungsorientierung und Schmierungsvorgang.

Aus den vorangehenden Ausführungen ergibt sich, daß die Strömungsorientierung eine der wichtigsten molekularphysikalischen Grundlagen des Schmierungsvorganges ist. Ihre Beachtung bei allen Strömungsvorgängen bei denen sie auftritt, ist wesentlich für jede konkrete, über das Formale hinausgehende Anwendung der Hydrodynamik. Ihre rationelle Untersuchung im allgemeinen und an technischen Schmiermitteln im besonderen ist eine notwendige Ergänzung der Viskositätsmessungen unter dynamischen Verhältnissen, die dem praktischen Gebrauch der Schmiermittel entsprechen und diesem eine exakte und zweckmäßige Grundlage schaffen kann.

6. Zusammenfassung.

Auf Grund einfacher molekularphysikalischer Betrachtungen wird der Temperaturverlauf der Viskosität von Flüssigkeiten, insbesondere gewisser Öle gedeutet; die Diskrepanz zwischen den Befunden von Viskosimeter und Ölprüfmaschine beleuchtet und, durch Versuche gestützt, die Wichtigkeit der Strömungsorientierung der Flüssigkeitsmoleküle für den Schmierungsvorgang und andere Strömungsvorgänge aufgewiesen.

(Eingegangen 23. Oktober 1928.)

Untersuchungen mit dem Geigerschen Spitzenzähler über den Einfluß des Kathodenmaterials auf das Funkenpotential.

Von Otto Klemperer.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich entgegen den Vorstellungen Townsends[1]) über die Gasentladung, beim Spitzenzähler ein Elektrodeneinfluß auf das Funkenpotential bemerkbar macht. Gerade beim Spitzenzähler sind Untersuchungen über den Elektrodeneinfluß gut auszuführen, weil die Einsatzspannung (Funkenpotential) ganz besonders scharf definiert ist[1]).

In einer früheren Arbeit[2]) wurde gezeigt, daß die Einsatzspannung V eines Zählers mit der Spitze oder der Kugel vom Krümmungsradius r beim Druck p und der Temperatur t gegeben ist durch

$$V = V_0\left(\frac{(1 + \alpha t)}{R_0} \cdot rp + 1\right) \cdots \quad (1)$$

R_0 bedeutet die Reichweite des Elektrons, welche durch die Grenzspannung V_0 gegeben ist. Die Grenzspannung ist die für den Radius $r \rightarrow 0$ geradlinig extrapolierte Einsatzspannung, wo also die ganze das Elektron beschleunigende Feldstärke an der Spitze konzentriert ist, so daß das Elektron seine Reichweite im feldfreien Raum zurücklegt. Die Weiterentwicklung der Versuche hat nun gezeigt, daß man nicht daran festhalten kann, daß diese Grenzspannung gleich ist dem Ionisierungsaufwand im Gase dividiert durch die Befreiungswahrscheinlichkeit des Elektrons aus der Zählerspitze, sondern am Anfang der Elektronenbahn ist die elektrische Feldstärke noch so wirksam, daß bei den ersten Stößen Multiplikation durch Stoß stattfindet. Die Gültigkeit der Gleichung (1) bleibt bestehen, aber über die Grenzspannung V_0 können wir nur soviel sagen, daß diese wächst, wenn die Befreiungswahrscheinlichkeit des Elektrons aus der Spitze abnimmt.

Bei der experimentellen Untersuchung kamen als Kathoden (Spitze des Zählers) feine Kügelchen von 0,04 bis 0,12 mm Radius zur Verwendung. Diese wurden an Haardrähten von 0,02 mm Stärke hergestellt aus Gold und Silber durch Schmelzen im Sauerstoffgebläse, und aus Kupfer durch Schmelzen in einer reduzierenden Stichflamme. Stahl bzw. Aluminium wurden in Form von Nadeln bzw. abgeschnittenen Drähten untersucht. Um geradlinige Abhängigkeit der Einsatzspannung vom Druck zu erhalten, mußten die Kügelchen rund und ohne Vorsprünge, die Nadeln genügend schlank sein. Bis auf Aluminium konnten mit allen Materialien deutlich und gut einzelne α-Strahlen gezählt werden. Als Grenzspannungen ergaben sich:

1. in Kohlensäure ($\pm 5\%$ genau) keine Materialunterschiede bemerkbar, bei den einzelnen Spitzen V_0 zwischen 600 und 650 Volt.

2. In Luft ($\mp 5\%$ genau): *Pt, Au, Ag, Cu*, Stahl erhitzt oder in Salpetersäure getaucht[3]) alle $V_0 = 600$ Volt. Stahl roh $V_0 = 580$, *Al* $V_0 = 500$.

3. In Wasserstoff ($\pm 3\%$ genau) ergab sich mit

1) J. S. Townsend, in Marx Handb. d. Radiologie; siehe auch W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchsfeldstärke in Gasen, Berlin 1923.

1) H. Geiger und O. Klemperer, Zeitschr. f. Phys. **49**, 753, 1928. O. Klemperer, ebenda **51**, 341, 1928.
2) O. Klemperer, l. c.
3) L. F. Curtis, Phys. Rev. **31**, 1060, 1928.

großer Deutlichkeit eine Reihenfolge (Stahl ausgenommen) parallel der Voltaschen Spannungsreihe: *Pt* 500, *Au* 500, *Ag* 490, *Cu* 490, *Al* 450, Stahl roh 570, erhitzt 630, in HNO_3 getaucht 600 Volt.

In Argon zeigten sich die allerstärksten Unterschiede für die einzelnen Metalle. Ein Vergleich mit den anderen Gasen ist aber deshalb erschwert, weil die Kurven: Einsatzspannung als Funktion vom Radius des Kügelchens nicht geradlinig verlaufen, und bei verschiedenen Drucken keinen gemeinsamen Schnittpunkt auf der Ordinate haben, wie bei andern Gasen. Dies hat wahrscheinlich seinen Grund in der geringen Elektronenaffinität des Argons. Als Beispiele seien angeführt für die Drucke 10 cm bzw. 75 cm *Hg*, die Grenzspannungen am Kupfer 200 bzw. 400 Volt, am Platin 310 bzw. 570 Volt.

Die gewonnene Erkenntnis gibt uns nun auch neue Aufschlüsse über die Wirkungsweise des Geigerschen Zählers. Bekanntlich kann man die Spannung am Zähler über die Einsatzspannung bedeutend erhöhen bis zur sogenannten Selbstentladungsspannung, wo plötzlich selbständige Stromstöße einsetzen. Wir müssen annehmen, daß die Einsatzspannung dem Funkenpotential entspricht[1]), unterhalb der Einsatzspannung haben wir einen stabilen Zustand, oberhalb einen labilen, welcher z. B. durch eine vom α-Strahl gelieferte Ionenmenge zum Umkippen gebracht werden kann. Je höher man die Spannung über die Einsatzspannung treibt, um so labiler wird natürlich der Zustand, so daß schließlich ohne äußerlich ersichtlichen Grund das Umkippen erfolgt bei der Selbstentladungsspannung. Ist nun die Austrittsarbeit des Elektrons an den verschiedenen Stellen der Oberfläche des Kügelchens verschieden, weil eine Rauhigkeit vorhanden ist oder weil es Spuren fremder Substanz z. B. Alkalisalz auf seiner Oberfläche trägt, an denen die Einsatzspannung eine andere ist, so ist die Stabilität an den infizierten Stellen geringer, was niedrige Selbstentladungsspannung (die häufig sogar gleich der Einsatzspannung wird) bzw. starke und häufige „natural disturbances" bedingt. Hierbei ist die Größe des Unterschieds der Befreiungswahrscheinlichkeit nicht ausschlaggebend, denn es gelingt in jedem der untersuchten Gase leicht „gute" Spitzen dadurch unbrauchbar zu machen, daß man sie mit Alkalisalz beschmutzt, andererseits kann man „schlechte" Spitzen dadurch brauchbar machen, daß man sie ausglüht. (Verdampfen der Alkalisalze.) Alkalisalz verdirbt die Spitzen nicht, wenn es diese homogen überzieht, so gelingt es z. B. Platin-Kügelchen mit Natriumphosphat gleichmäßig in der Flamme zu überziehen. Solche Kügelchen zeigen dann, obwohl sich ihr Durchmesser gegenüber dem unbedeckten Kügelchen vergrößert hat, eine deutlich erniedrigte Einsatzspannung (z. B. in Wasserstoff von Atmosphärendruck um ca. 150 Volt). Trotzdem liegt die Selbstentladungsspannung hoch über der Einsatzspannung, so daß α-Strahlen sauber gezählt werden. Bei sehr runden hochglänzenden, in Weißglut geschmolzenen Platinkügelchen, bei denen die Selbstentladungsspannung bis zu etwa 500 Volt über der Einsatzspannung liegen kann, bleiben immer noch einige natürliche Ausschläge, deren Zahl von der Größe des geometrischen Zählbereichs abhängt. Diese können nicht durch den oben beschriebenen Effekt erklärt werden, sondern rühren wahrscheinlich von durchdringender γ-Strahlung oder einer Radioaktivität des Zählermaterials her.

1) J. Taylor, Cambr. Proc. **24** (2), 251, 1928.

Herrn Professor H. Geiger bin ich für sein dauernd förderndes Interesse zu großen Dank verpflichtet, ferner danke ich Herrn Dr. W. Müller für einige nützliche Beratungen.

Kiel, Physikalisches Institut der Universität, November 1928.

(Eingegangen 15. November 1928.)

Über die Dipolmomente einiger aliphatischer Ketone.

Von K. L. Wolf und E. Lederle.

Im Zusammenhang mit Untersuchungen über die Lage der ultravioletten Absorptionsbanden der aliphatischen Ketone in verschiedenen Lösungsmitteln erwies es sich als nötig, Dipolmomente und Assoziationsgrad dieser Ketone zu kennen. Diese wurden nach der zuerst von Lange[1]) auf Veranlassung von Debye angegebenen Methode durch Extrapolation der Molekularpolarisation der gelösten Dipolsubstanz auf unendlich verdünnte Lösung bestimmt. Die Dielektrizitätskonstanten wurden mit einer Schwebungsmethode, ähnlich der von Lautsch[2]) beschriebenen, bestimmt, die Dichten mit einem geeigneten Dilatometer von 25 cm^3 Inhalt und die Brechungsexponenten der Lösungen mit einem Refraktometer nach Pulfrich. Als Meßkondensator diente ein von der P.T.R. geeichter Normalluftkondensator von Spindler & Hoyer. Die Genauigkeit der Messungen be-

1) L. Lange, Zeitschr. f. Phys. **33**, 169, 1925; P. Debye, Handb. d. Radiologie **6**, Leipzig 1925.
2) W. Lautsch, Zeitschr. f. phys. Chem. (B) **1**, 115, 1928.



trägt $^1/_2$ Proz. in ε. Für Methylbutylketon und Hexamethylaceton ist sie etwas geringer (etwa $1^1/_2$ Proz.), da für diese beiden Stoffe wegen Mangels an Substanz (der gewöhnlich verwandte Flüssigkeitskondensator erfordert 50 cm) ein wesentlich kleinerer Kondensator verwandt werden mußte.

Die Berechnung der Dipolmomente aus der Molekularpolarisation geschieht meist so, daß die Molekularpolarisation des gelösten Stoffes P_1 mit Hilfe der Mischungsregel[1]) (1)

$$P_1 = \frac{P_{12} - c_2 \cdot P_2}{c_1} \qquad (1)$$

berechnet wird, in der P_{12} die Molekularpolarisation des gelösten Stoffes, P_2 die des Lösungsmittels und c_1 bzw. c_2 die Molenbrüche bedeuten. Von dem auf unendlich verdünnte Lösungen extrapolierten Wert wird dann der dielektrische Anteil der Molekularpolarisation des gelösten Stoffes, im folgenden mit P_1'' bezeichnet, abgezogen, der meist unter Vernachlässigung des Ultrarotgliedes gleich der auf unendlich lange Wellen extrapolierten Molrefraktion R_∞, die nur den Anteil der Elektronenverschiebung enthält, gesetzt wird. Die Vernachlässigung des Ultrarotgliedes sowohl wie die Tatsache, daß man für die Molekularpolarisation des Lösungsmittels P_2 und für die Molrefraktion des gelösten Stoffes $R_{1\infty}$ die der reinen Stoffe einsetzt, bedingen aber Fehler, die sich zum größten Teil vermeiden lassen. Man geht dazu so vor, daß man unter Zuhilfenahme der gemessenen Molrefraktion der Lösungen ($R_{12\infty}$) nach Gl. (2) rechnet:

$$(P_1 - R_{1\infty}) = \frac{(P_{12} - R_{12\infty}) - c_2 (P_2 - R_{2\infty})}{c_1}$$
$$= \frac{(P_{12} - R_{12\infty}) - c_2 (\text{Ultrarotglied}_2)}{c_1}. \qquad (2)$$

Man setzt damit den Fehler, den man durch die nicht zutreffende Annahme der Additivität der Molrefraktion bei Lösungen einer Dipolsubstanz in einem dipollosen Lösungsmittel macht, auf etwa $^1/_{10}$ herab, da nur noch für die ohnehin meist unsicheren Ultrarot-Glieder die Werte der reinen Stoffe verwandt werden. Die dadurch vermiedenen Fehler betragen bei den vorliegenden Messungen 1—2 Proz. der Molekularpolarisation.

Man hat nach dieser Rechnung von dem erhaltenen Wert $P_1 - R_{1\infty}$, der die Molekularpolarisation des gelösten Stoffes vermindert und den Anteil der Elektronenverschiebung darstellt, noch das Ultrarotglied des gelösten Stoffes abzuziehen, um das reine Dipolglied (Orientierungsanteil) zu erhalten. Für die Größe dieses Ultrarotgliedes kann man nun bei den Ketonen sicher einen ähnlichen Bruchteil von P_1'' ansetzen, wie ihn Stuart[1]) für Äther gefunden hat, also etwa 15 Proz. von P_1''[2]). Der durch das Ultrarotglied bedingte Fehler dürfte dann höchstens noch 5 Proz. von P_1'' ausmachen. Speziell bei den hier untersuchten Ketonen, bei denen $P_1'' \ll P_1'$ ist, beträgt der dadurch mögliche Fehler bei der Bestimmung des Dipolgliedes P_1' nur noch sehr wenig (etwa $^1/_2$ Proz. bei Aceton, $1^1/_2$ Proz. bei Methylnonylketon).

Unter Berücksichtigung all dieser Umstände ist die Häufung von Fehlern weitgehend vermieden. Jedenfalls dürften die im folgenden abgegebenen Momentwerte auf $\pm 0{,}08 \cdot 10^{-18}$ richtig sein. Der Fehler ist damit bereits sehr hoch gegriffen.

Die Ergebnisse der Messungen, die bei 14,5° C ausgeführt wurden, sind in Tab. I zusammengestellt. Die Reinheit der Ketone ist auf Grund der ebenfalls gemessenen Ultraviolettabsorption verbürgt. Das Trocknen geschah durch mehrtägiges Stehen über Pottasche und nachfolgende Destillation.

Die für das Aceton in Hexan- und Benzollösungen erhaltenen Werte stimmen überein. Sie können, da für Aceton bereits anderweitige Momentbestimmungen vorliegen, mit diesen verglichen werden. Williams[3]) findet in Benzollösung, wenn man das von ihm vernachlässigte Ultrarotglied berücksichtigt, $2{,}68 \cdot 10^{-18}$, Stuart[4]) durch Messung der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Dampfes $2{,}84 \cdot 10^{-18}$. Die Übereinstimmung ist befriedigend, wenn man berücksichtigt, daß Stuarts Messungen am Aceton infolge von Komplexen Wasser-Aceton (bedingt durch Spuren von Wasser), nach seiner Ansicht ein etwas zu großes Moment ergeben und deshalb ebenfalls nur auf etwa $(\pm)\, 0{,}08 \cdot 10^{-18}$ genau sein dürften.

Das Gesamtresultat sagt aus, daß die Momente der Ketone, unabhängig von der Länge und Struktur der gesättigten Kohlenwasserstoffketten $2{,}75 \pm 0{,}05 \cdot 10^{-18}$ betragen. Man muß danach annehmen, daß lediglich die CO-Gruppe (evtl. mit den beiden nächsten C-Oktetts) das Moment

1) Die Indizes 12 beziehen sich im folgenden auf die Lösungen, 1 auf die gelösten Stoffe und 2 auf das Lösungsmittel.

1) H. A. Stuart, Zeitschr. f. Phys., im Erscheinen.

2) 10—20 Proz. dürften sicher den richtigen Wert einschließen. Ähnliche Werte ergeben sich ja auch bei andern vergleichbaren Molekülen. So findet man für CO_2 aus der vollständigen Dispersionsformel (O. Fuchs, Zeitschr. f. Phys. **46**, 519, 1928) für den Ultrarotbeitrag 10 Proz.

3) J. W. Williams, Physik. Zeitschr. **29**, 174. 1928.

4) A. H. Stuart, Zeitschr. f. Phys., im Erscheinen.

Tabelle I[1]).

	Dipolglied in den reinen Stoffen	P_1' (Dipolglied in der unendlich verdünnten Lösung)	$\mu \cdot 10^{18}$	Lösungsmittel
Aceton	39,8	159,0	2,71	Hexan
Aceton	39,8	159,0	2,71	Benzol
Methylaethylketon	53,3	168,0	2,79	,,
Methylpropylketon	60,1	159,5	2,72	,,
Methylbutylketon	66,0	160,0	2,73	,,
Methylhexylketon	75,3	157,5	2,70	,,
Methylnonylketon	86,4	156,0	2,69	,,
Diaethylketon	57,0	159,5	2,72	,,
Methyltertiaerbutylketon (Pinakolin)	64,7	168,0	2,79	,,
Dipropylketon	72,5	160,0	2,73	,,
Hexamethylaceton	74,7	164,0	2,76	,,

bestimmt, das wesentlich größer ist als bei CO ($0{,}108 \cdot 10^{-18}$)[2]). Man hat sich das am ehesten so vorzustellen: das freie gasförmige CO mit seinem kleinen Moment besteht nach Ausweis der Spektroskopie[3]) aus einem O^{6+} und einem C^{4+}, die von einer gemeinsamen Elektronenhülle von 10 Elektronen umgeben sind, von denen 8 in einer abgeschlossenen Schale sitzen, die beiden andern, ähnlich wie bei den Erdalkalien, als Valenzelektronen gelten können. Beim Einbau des CO in die Kohlenstoffkette ordnen sich diese beiden Elektronen in die Oktetts der benachbarten C-Atome ein und beschreiben demnach andere Quantenbahnen. Dieser Umstand bedingt das wesentlich größere Moment, sei es, daß man es nur den beiden Kernen und der Achterschale zurechnen muß, sei es, daß man auch noch die beiden benachbarten C-Oktetts in die polare Gruppe einbeziehen muß.

Zum Schluß sei noch darauf verwiesen, daß ein von Estermann[1]) gegen die auch hier verwandte Methode auf Grund des von ihm als Beweisstück verwandten Äthers erhobener Einwand nicht als stichhaltig angesehen werden darf. Denn seine Voraussetzung, daß Äther vollkommen unassoziiert sei, trifft nach den zitierten neuen Messungen Rolinskis nicht zu, so daß der von Estermann aus der Temperaturabhängigkeit des flüssigen Äthers bestimmte Wert des Dipolmomentes als unsicher gelten muß. Tatsächlich findet Stuart[2]), dessen Messungen in Ätherdampf als die genauesten gelten können, einen wesentlich höheren Wert ($1{,}14 \cdot 10^{-18} \pm 0{,}02$). Mit diesem sind die durch Extrapolation aus Benzollösungen gewonnenen Werte von Williams und Rolinski[3]) in bester Übereinstimmung. Deren Messungen führen nämlich, wenn man das Ultrarotglied mit 3,9 ansetzt, wie es Stuart angibt, beide übereinstimmend zu $1{,}15 \cdot 10^{-18}$.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sei für ihre Unterstützung auch an dieser Stelle gedankt.

Königsberg i. Pr., Oktober 1928.

1) μ ist berechnet aus den Werten der Spalte 2 (unendlich verdünnte Lösung) auf Grund der Debyeschen Beziehung $\mu = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{kP'_1 T}{\pi N_L}}$. Auf die aus den Werten der Spalte 1 zu ziehenden Schlüsse bezüglich der Assoziation soll später im Zusammenhang mit der Verschiebung der Absorptionsbanden in Lösungen eingegangen werden. Hier sei jedoch bereits darauf hingewiesen, daß, wenn man wie Rolinski (Physik. Zeitschr. **29**, 658, 1928) vorgeht, man hier findet, daß der Assoziationsgrad bei gleichem Moment abhängt vom Einbau der polaren Gruppe in das Molekül. Erst wenn dieser gleichartig ist, wenn man z. B. lauter Moleküle mit endständiger polarer Gruppe hat, findet man die von Rolinski genannte Erscheinung, daß der Assoziationsgrad mit wachsendem Moment zunimmt. Bei den Ketonen dagegen nimmt der Assoziationsgrad bei gleichem Moment ab mit wachsender Abschirmung der polaren Gruppe durch indifferente Kohlenwasserstoffketten. Diese Abschirmung macht sich auch, wie anderwärts gezeigt werden soll, in der Lage der Absorptionsbanden der Ketone bemerkbar und muß bei der Betrachtung der Reaktionsfähigkeit mit in Betracht gezogen werden.

2) H. Weigt, Physik. Zeitschr. **22**, 643, 1921.

3) R. T. Birge, Physik. Rev. **28**, 1157, 1926; s. auch Mecke und Guillery, Physik. Zeitschr. **28**, 479, 1927.

1) J. Estermann, Zeitschr. f. phys. Chem. (B) **1**, 134, 1928.

2) A. H. Stuart, Zeitschr. f. Phys., im Erscheinen.

3) J. W. Williams, l. c.; J. Rolinski, l. c.

(Eingegangen 3. November 1928.)



Veränderungen im Widerstand beim Spannen von Nickeldraht.

Von J. B. Seth und Chetan Anand.

Die meisten Metalldrähte zeigen, wenn sie gespannt werden, ein stetiges Wachsen ihres elektrischen Widerstandes. Eine Ausnahme bildet Nickel, da bei diesem zuerst eine Abnahme und

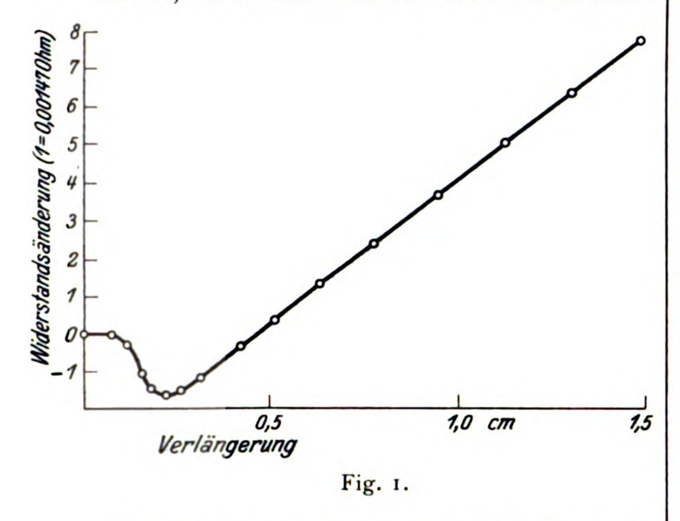


Fig. 1.

dann die übliche Zunahme zu beobachten ist. Es scheint, daß diese Tatsache das erste Mal von Tomlinson ungefähr 1883 festgestellt wurde. Jemand aus unserem Institut (C. A.) zeigte vor einiger Zeit besonderes Interesse für die Widerstandsveränderung der Metalldrähte beim Spannen; während des vergangenen Universitätsjahres vertrauten wir einem M. Sc.-Studenten (Vaisakhi Ram) die Untersuchung der Veränderung bei Nickeldraht an; dieser sollte ihn bis an die Zerreißgrenze spannen und ihn außerdem einer periodischen Operation von Spannen und Entspannen unterwerfen.

Der Draht wurde in horizontaler Lage angebracht; er wurde durch eine Schraubenvorrichtung gedehnt, so daß seine Länge bei einem beliebigen Dehnungsgrad, gleichgültig ob innerhalb oder außerhalb der Elastizitätsgrenze, beibehalten werden konnte. Das Messen des Widerstandes erfolgte durch Kelvins Doppelbrücke, und zwar unter Verwendung eines sehr empfindlichen Galvanometers, durch das eine Änderung von 0,003 Proz. im Widerstande leicht nachgewiesen werden konnte. Die Dehnung des Drahtes wurde mittels eines verstellbaren Mikroskopes gemessen, an dem man bis zu 0,002 cm ablesen kann. Es wurde Draht Nr. 24 S. W. G. verwendet; die Länge schwankte zwischen 90 und 95 cm. Die Knicke im Draht wurden entfernt, entweder dadurch, daß man ihn gespannt hielt oder für die Dauer von 18 bis 72 Stunden belastete. Man ließ den Draht mehrere Stunden ruhen, ehe man ihn für das Experiment verwendete.

Bei einem fortgesetzten Spannen bis an die Zerreißgrenze vermindert sich der Widerstand im Anfangsstadium der Ausdehnung, wie oben angegeben, erreicht ein Minimum, wenn die Dehnung 15 Proz. der totalen zum Reißen erforderlichen Dehnung beträgt, und wächst dann andauernd. Dies wird in Fig. 1 dargestellt. Wenn ein Zyklus

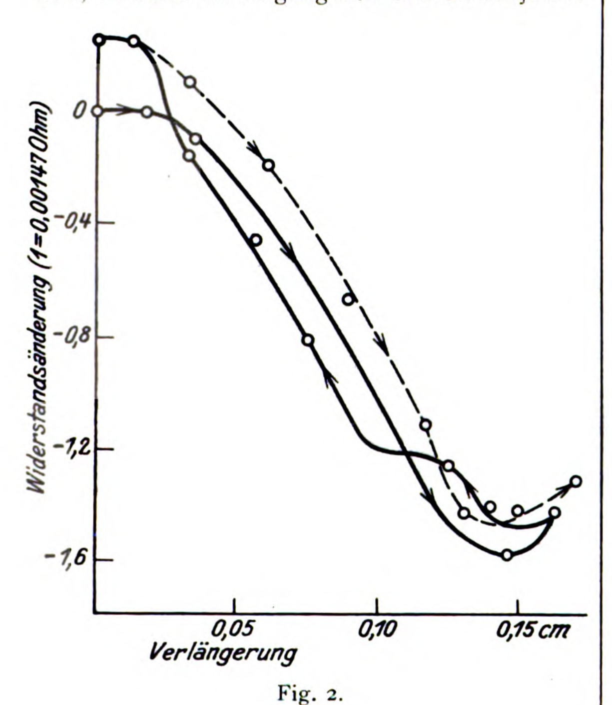


Fig. 2.

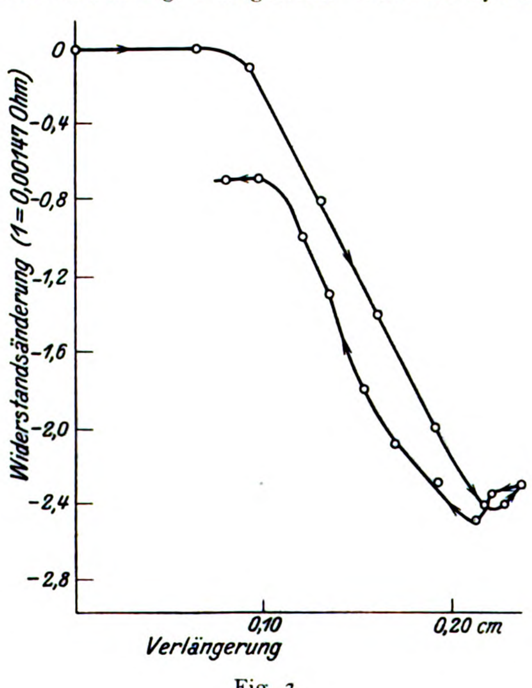


Fig. 3.

von Spann- und Entspannungsoperationen an dem Draht vorgenommen wird, dadurch, daß man die Schraube zuerst vorwärts und dann rückwärts dreht, treffen die beiden Linien in der Dehnungs-widerstandskurve selten zusammen, sondern bilden eine Schleife. Wenn der Punkt des geringsten Widerstandes in den Zyklus fällt, so hat die Kurve die Gestalt einer doppelten Schleife (Fig. 2). Die Dehnung erreicht gewöhnlich bei der Vollendung eines Zyklus nicht ihren ursprünglichen Wert, so daß der Anfangs- und der Schlußpunkt der Kurve einen Unterschied zeigen, obwohl in beiden Fällen die Dehnung die gleiche ist. Der horizontale Teil am Beginn der Kurve entspricht dem anfänglichen Durchhang des Drahtes. Derartige horizontale Teile in allen Dehnungs-Widerstandskurven sind gewöhnlich durch das Entfernen oder Entstehen entweder eines Durchhanges oder eines Knicks zu erklären.

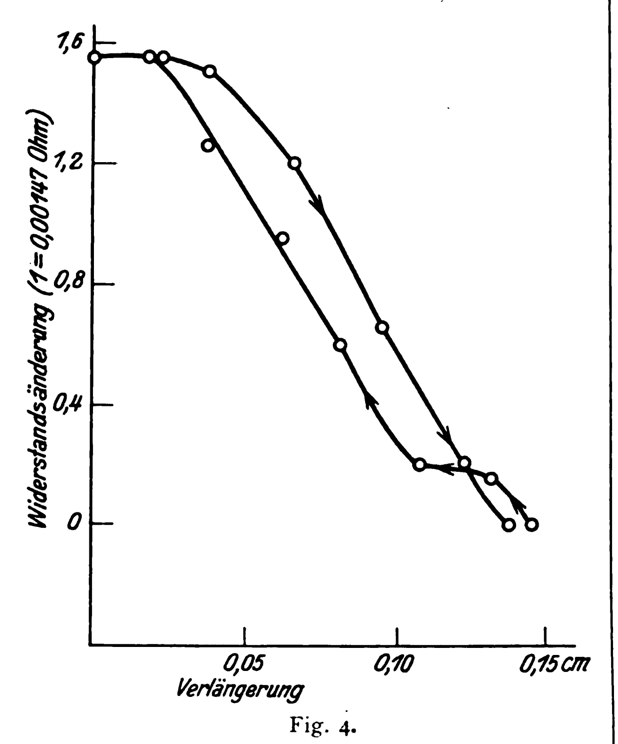


Fig. 4.

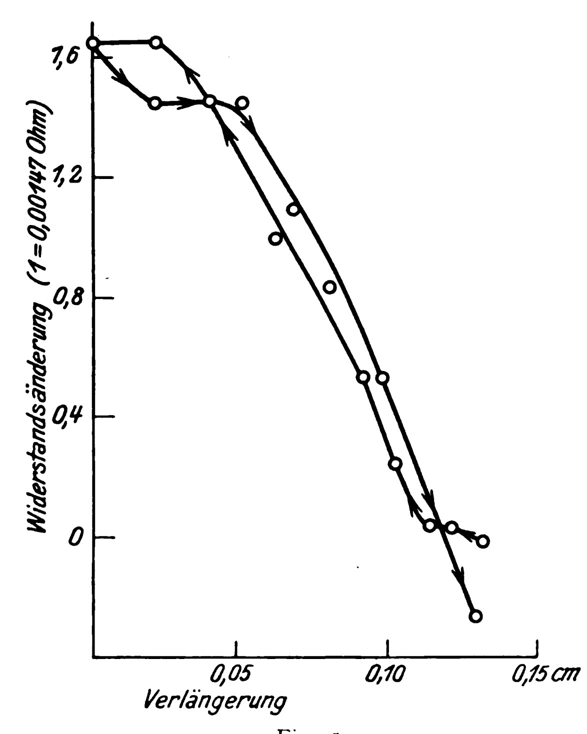


Fig. 5.

Die Gestalt der erhaltenen Kurve hängt bei einem solchen Zyklusverfahren von der Vorgeschichte des Drahtes ab. Im allgemeinen hat sie mit der Doppelschleife der Fig. 2 Ähnlichkeit, aber zuweilen bildet der obere Teil der Kurve keine geschlossene Schleife (Fig. 3). Wenn mit dem Draht wiederholt zyklische Operationen vorgenommen werden, so nehmen die Schleifen verschiedene Formen an, als ob eine Verschiebung und eine leichte Drehung durch das Wiederholen der Operation hervorgerufen worden wäre (Fig. 4 und 5).

Der nach oben gehende Teil eines Zyklus und der nach unten führende des nächsten bilden also Schleifen. Wenn dementsprechend die zyklische Operation in umgekehrter Richtung vorgenommen wird, dadurch daß man mit dem bereits gespannten Draht beginnt, dann ihn entspannt und wieder spannt, erhält man eine Schleife, die gewöhnlich einfach, doch manchmal auch doppelt ist.

Lahore, Government College, Physics Laboratory.

(Eingegangen 12. November 1928.)

Kontaktdetektor und Schwingkristall.

Von K. Sixtus.

Inhalt: Berichtigung eines Zitates in der Arbeit von Fritz Regler: Vorläufige Mitteilung über die Theorie des Kontaktdetektors[1].

Es ist sehr zu begrüßen, daß Regler in dem genannten Aufsatz die Wirkungsweise der Kontaktdetektoren von einem neuen Gesichtspunkt aus erklärt, nämlich durch die Längenänderung des Kristalls unter dem Einfluß der angelegten Spannung. Man hat allen Grund, auf die experimentelle Bestätigung dieser Theorie gespannt zu sein. Ohne auf die Annahme Reglers einzugehen, soll hier ein Mißverständnis geklärt werden

1) Regler, Physik. Zeitschr. **29**, 429, 1928.

das ihm bei Zitierung einer Arbeit des Verfassers über den Schwingkristall[1]) offenbar unterlaufen ist.

Regler kommt, wie vorher kurz bemerkt werden soll, im Bestreben, die Wirkungsweise von Kontaktdetektor und Schwingkristall aus einer für beide gemeinsamen Theorie heraus zu erklären, zu einer Kurve (Fig. 2 seiner Arbeit), die jedem bisherigen experimentellen Befund widerspricht. Abgesehen von anderen Unstimmigkeiten enthält diese Kurve ein Strommaximum, ist also nach Buschs Terminologie eine rückfallende Charakteristik, während bei den Kennlinien für den Schwingkristall, wie sie z. B. von F. Seidl[2]) und dem Verf. aufgenommen und veröffentlicht wurden, ein Spannungsmaximum, also eine fallende Charakteristik, auftritt. Vom Verf. wurde diese Erscheinung als Folge der in dem Kontakt entwickelten Stromwärme betrachtet (nicht als Folge von Thermoströmen, wie Regler irrtümlich zitiert). Schreibt man dem Kristall einen negativen Widerstand-Temperaturkoeffizienten zu, eine Annahme, die zwar noch nicht in jedem Falle nachgewiesen ist, aber einen großen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzt[3]), so muß mit zunehmendem Strom der Widerstand des Kontaktes immer geringer werden, da mit der wachsenden Stromwärme auch die Temperatur steigt. Von einem gewissen Punkt an erfolgt bei vergrößerter Stromstärke die Widerstandsabnahme rascher als die Stromzunahme, so daß die Spannung am Kontakt (als Produkt aus Strom und Widerstand) wieder absinkt. Dort beginnt die fallende Charakteristik. Ein Gleiches ergibt die Rechnung in der angegebenen Arbeit[3]). Auf diese muß auch bezüglich weiterer Belege für die hier vertretene Auffassung verwiesen werden.

1) Sixtus, Zeitschr. f. Techn. Phys. **8**, 70, 1928.
2) F. Seidl, Physik. Zeitschr. **27**, 64, 1926.
3) Landolt-Börnstein, Tabellen.

Dresden, im September 1928.

(Eingegangen 5. Oktober 1928.)

Kontaktdetektor und Schwingkristall.

Von Fritz Regler.

(Erwiderung auf eine Berichtigung von K. Sixtus.)

Bei der Zitierung einer Arbeit von K. Sixtus[1]) in einer Arbeit des Verfassers über die Theorie des Kontaktdetektors[2]) ist dem Schreiber dieser Zeilen ein für die entwickelte Hypothese allerdings unbedeutendes Versehen unterlaufen. Auf Seite 435, erste Spalte, Zeile 25 ff. von oben, muß es nämlich heißen: . . . durch die in dem Kontakt entwickelte Stromwärme . . . und nicht, wie in der Arbeit zu lesen ist: . . . durch den dem Hauptstrom entgegenfließenden Thermostrom . . .

Irrtümlich scheint nun Herr Sixtus zu glauben, daß die in meiner Arbeit abgedruckte Fig. 2 in einer Verbindung mit der Zitierung seiner oben erwähnten Arbeit steht. Dem sei entgegengehalten, daß aus meiner Arbeit eindeutig hervorgeht, daß ich die Arbeit des Herrn Sixtus im Zusammenhang mit meiner Kurve niemals erwähnt habe. Auch wird jedem aufmerksamen Leser meiner Arbeit klar sein, daß die von Sixtus experimentell gefundenen Kennlinien des Kontaktdetektors meiner Theorie nur dienlich sein können, da wir ja beide als Ursache der Schwingungserzeugung im Kristall die variablen Kontakt- bzw. Übergangswiderstände (nach meiner Annahme eventuell noch unterstützt durch den piezoelektrischen Sekundäreffekt) annehmen. Unsere Meinungen gehen also im allgemeinen nur über den Mechanismus der Widerstandsänderung auseinander und nicht über die Tatsache derselben. Es ist also die Ansicht des Herrn Sixtus, daß die in Fig. 2 meiner Arbeit veröffentlichte Kurve in dem Bestreben entstanden sei, die Wirkungsweise von Kontaktdetektor und Schwingkristall aus einer für beide gemeinsamen Theorie heraus zu erklären, völlig gegenstandslos, da mir die experimentellen Ergebnisse der Arbeit von Sixtus als Stütze meiner Theorie nur willkommen sein können. Die Kurve soll ja gar nicht die Grundlage meiner theoretischen Erwägungen bilden, sondern bloß den Verlauf des einen Kontaktdetektor durchfließenden reinen Gleichstromes als Funktion der Netzspannung angeben, wie er bei geeignetem Verhältnis von C/L zustande kommen kann, wobei ich definitionsgemäß unter einem reinen Gleichstrom einen solchen Strom verstehe, den man erhält, wenn man die Minima eines Stromoszillogrammes miteinander verbindet. Es wird also bei Erhöhung der Netzspannung bis zum Einsetzen einer Schwingung der den Detektor durchfließende reine Gleichstrom steigen, nach Einsetzen der Schwingung aber fallen müssen. Dieses Fallen kann so stark werden, daß der reine Gleichstrom den Wert „Null" erreicht, kann aber auch unter Umständen nur ganz gering sein. (Je nach der Art der Schwingung.) Meine Kurve macht mit Rücksicht darauf keinerlei Angaben über Strom- bzw. Spannungswerte und ist eine rein ideelle Kurve, die weder eine statische noch dynamische Charakteristik sein soll. Aus dem oben Gesagten geht wohl klar hervor, daß der Verfasser dem Schwingkristall eine fallende und keine

1) Sixtus, Zeitschr. f. techn. Phys. **9**, 70, 1928.
2) F. Regler, Physik. Zeitschr. **29**, 429, 1928.

rückfallende Charakteristik zugrunde legen muß, da eine rückfallende Charakteristik nach seiner Theorie schwerlich zu erklären wäre und auch experimentell nirgends gefunden wurde.

Meine Kurve soll aber auch noch andere Unstimmigkeiten besitzen. Nun sei gleich vorweggenommen, daß sie durch den Nullpunkt gehen muß und nur durch ein drucktechnisches Versehen etwas oberhalb desselben die Ordinate schneidet. Dieser Umstand ist aber nach meiner Meinung keineswegs sinnstörend. Mit den anderen Unstimmigkeiten meint Herr Sixtus offenbar den unsymmetrischen Verlauf meiner Kurve, während seine Messungen einen nahezu symmetrischen Verlauf ergeben haben. Es ist aber schon in verschiedenen Mitteilungen über das Detektorproblem, unter anderem bei Reißaus[1]), zu lesen, daß der Widerstandswert des Detektors bei Anlegen einer entgegen der Gleichrichterwirkung polarisierten Spannung eine Funktion der Zeit ist, wie dies ja auch aus meiner Theorie durch die Annahme verschiedener, langsam entstehender, meist dauernder Veränderungen im Kristall erklärlich ist, daß also anfangs der Strom in der Gegenrichtung viel schwächer fließen muß als in der Hauptrichtung. Meine Kurve soll den Verlauf bei kurzzeitiger Durchfließung angeben, um den Gleichrichtereffekt möglichst gut zu demonstrieren. Die Kurve von Sixtus hingegen muß als statische Charakteristik den Strom erst nach Erreichung eines konstanten Wertes widergeben. Daß auch der entgegen der Gleichrichterwirkung fließende Strom eine fallende Charakteristik haben muß, folgt aus meiner Theorie. Durch diese Bemerkungen scheint auch dieser Vorwurf entkräftet zu sein.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß die in Frage stehende Kurve für die Entwicklung der Theorie vollständig unwesentlich ist und nur zur Erläuterung des Stromverlaufes dienen sollte, ihr also gar keine prinzipielle Bedeutung zukommt.

1) Reißaus, Physik. Zeitschr. **29**, 223, 1928.

(Eingegangen 15. September 1928.)

Schlußbemerkung.

Von K. Sixtus.

Ohne auf die Deutungen Reglers einzugehen, soll nur noch folgendes festgestellt werden: Die als Kennlinie bezeichnete Kurve seiner Arbeit, die „mit den bekannten vollkommen übereinstimmen" sollte, ist also keine Detektorkennlinie im gewöhnlichen Sinne, d. h. eine Abhängigkeit zwischen Klemmenspannung und durchfließendem Strom, sondern eine „rein ideelle Kurve". Auf diese Eigenart der Kurve als gedankliche Konstruktion und die hierbei zu machenden Voraussetzungen ist jedoch im begleitenden Text nicht hingewiesen worden.

(Eingegangen 15. September 1928.)

Strenge Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für ein beliebiges kugelsymmetrisches, statisches Schwerefeld.

Von Hans Bauer.

A. Ursprüngliche Fassung der Feldgleichungen.

Die Einsteinschen Schwerefeldgleichungen haben in ihrer ersten Fassung, wie bekannt, die Gestalt:

$$R_{ik} = \varkappa\left(T_{ik} - \frac{g_{ik}}{2} T\right); \tag{1}$$

dabei bedeuten: die R_{ik} die Komponenten des verjüngten Krümmungstensors

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} i\,l \\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l\,m \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} l\,k \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i\,m \\ l \end{Bmatrix} \tag{2}$$

mit den Christoffelschen Dreiindizessymbolen

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{ml}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right), \tag{3}$$

die g_{ik} bzw. g^{ik} die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors, die T_{ik} diejenigen des Energie-Impulstensors mit dem zugehörigen Laueschen Skalar

$$T = \sum_{i=0}^{3} T_i^i = g^{ik} T_{ik} \tag{4}$$

und $\varkappa = 1 \cdot 87 \cdot 10^{-27}$ cm g^{-1} die Einsteinsche Gravitationskonstante.

Im folgenden sollen für den Fall eines kugelsymmetrischen, statischen Schwerefeldes, erzeugt durch einen beliebigen Energie-Impulstensor T_{ik}, die Feldgleichungen (1) in strenger Form integriert und so die Lösungen allgemeinster Art für den metrischen Fundamentaltensor g_{ik} (die „Gravitationspotentiale") gewonnen werden. Wir tragen der Kugelsymmetrie des Gravitationsraumes durch die Wahl gewöhnlicher Polarkoordinaten $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$ Rechnung, setzen $x^0 = t$ (Zeit) und machen für das Quadrat des Bogenelements der „Welt" den Ansatz:



$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k = g_0\,dt^2 - g_1\,dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\ ^{1)}. \tag{5}$$

Die Kugelsymmetrie findet dabei darin ihren Ausdruck, daß wir $g_{00} = g_0$ und $g_{11} = -g_1$ ausschließlich als Funktionen der radialen Koordinate r annehmen und ferner $g_{22} = -r^2$, $g_{33} = -r^2\sin^2\vartheta$, jedoch die übrigen räumlichen $g_{ik} = 0$ setzen. Der statische Charakter des Schwerefeldes hinwiederum drückt sich in der Unabhängigkeit sämtlicher g_{ik} von der Zeit und in dem Verschwinden der raumzeitlichen Komponenten $g_{0k} = g_{k0}$ $(k = 1, 2, 3)$ aus.

Unter dieser Voraussetzung berechnen sich die Dreiindizessymbole (3), wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}0\,1\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\,0\\0\end{Bmatrix} = \frac{g_0'}{2g_0},\ ^{2)}\\
&\begin{Bmatrix}0\,0\\1\end{Bmatrix} = \frac{g_0'}{2g_1},\quad \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} = \frac{g_1'}{2g_1},\quad \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} = -\frac{r}{g_1},\\
&\begin{Bmatrix}3\,3\\1\end{Bmatrix} = -\frac{r}{g_1}\sin^2\vartheta,\\
&\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\,1\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix}3\,3\\2\end{Bmatrix} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,\\
&\begin{Bmatrix}1\,3\\3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}3\,1\\3\end{Bmatrix} = \frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix}2\,3\\3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}3\,2\\3\end{Bmatrix} = \operatorname{cotg}\vartheta,\\
&\text{sonst } \begin{Bmatrix}i\,k\\l\end{Bmatrix} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Für die Komponenten des Krümmungstensors (2) finden wir sodann:

$$\left.\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{g_0''}{2g_1}\,^{3)} - \frac{g_0'^2}{4g_0g_1} - \frac{g_0'g_1'}{4g_1^2} + \frac{g_0'}{rg_1},\\
R_{11} &= -\frac{g_0''}{2g_0} + \frac{g_0'^2}{4g_0^2} + \frac{g_0'g_1'}{4g_0g_1} + \frac{g_1'}{rg_1},\\
R_{22} &= -\frac{rg_0'}{2g_0g_1} + \frac{rg_1'}{2g_1^2} - \frac{1}{g_1} + 1,\\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\vartheta,\\
&\text{die übrigen } R_{ik} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wir wenden uns nun zu der Frage, welche Eigenschaften ganz im allgemeinen der Energie-Impulstensor T_{ik} besitzen muß, um als Erzeuger eines kugelsymmetrischen, statischen Schwerefeldes gelten zu können. Aus den Feldgleichungen (1) ist unmittelbar zu ersehen, daß er ein dem Fundamentaltensor g_{ik} und dem Krümmungstensor R_{ik} analoges Verhalten zeigen muß: Sämtliche T_{ik}, für die $i \neq k$ ist, müssen verschwinden; von Null verschieden und bloß von r abhängig können nur die Komponenten T_{ii} sein. Schreiben wir für die Komponenten T_i^i des zugehörigen gemischten Tensors einfach T_i, so gilt:

$$T_{ii} = g_{ii}T_i$$

und wir erhalten für den Energie-Impulstensor mit Rücksicht auf (5) das Schema:

$$\left.\begin{aligned}
T_{00} &= g_{00}T_0 = g_0T_0,\\
T_{11} &= g_{11}T_1 = -g_1T_1,\\
T_{22} &= g_{22}T_2 = -r^2T_2,\\
T_{33} &= g_{33}T_3 = -r^2\sin^2\vartheta\,T_3,\\
&\text{die übrigen } T_{ik} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Für den Laueschen Skalar gilt ferner zufolge (4):

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3. \tag{9}$$

Tragen wir die für die R_{ik}, T_{ik} und für T gefundenen Ausdrücke (7), (8) und (9) in die Feldgleichungen (1) ein, so reduzieren sich diese auf die folgenden vier:

$$\left.\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\varkappa}{2}g_0(T_0 - T_1 - T_2 - T_3),\\
R_{11} &= \frac{\varkappa}{2}g_1(T_0 - T_1 + T_2 + T_3),\\
R_{22} &= \frac{\varkappa}{2}r^2(T_0 + T_1 - T_2 + T_3),\\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\vartheta =\\
&= \frac{\varkappa}{2}r^2\sin^2\vartheta\,(T_0 + T_1 + T_2 - T_3).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt sofort:

$$-T_2 + T_3 = T_2 - T_3$$

oder

$$T_3 = T_2. \tag{11}$$

Es verbleiben somit drei Gleichungen zur Bestimmung von g_0 und g_1:

$$\left.\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{g_0''}{2g_1} - \frac{g_0'^2}{4g_0g_1} - \frac{g_0'g_1'}{4g_1^2} + \frac{g_0'}{rg_1} =\\
&= \frac{\varkappa}{2}g_0(T_0 - T_1 - 2T_2),\\
R_{11} &= -\frac{g_0''}{2g_0} + \frac{g_0'^2}{4g_0^2} + \frac{g_0'g_1'}{4g_0g_1} + \frac{g_1'}{rg_1} =\\
&= \frac{\varkappa}{2}g_1(T_0 - T_1 + 2T_2),\\
R_{22} &= -\frac{rg_0'}{2g_0g_1} + \frac{rg_1'}{2g_1^2} - \frac{1}{g_1} + 1 =\\
&= \frac{\varkappa}{2}r^2(T_0 + T_1),
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

1) Vgl. z. B. H. Bauer, Kugelsymmetrische Lösungssysteme der Einsteinschen Feldgleichungen. Wiener Ber., math.-nat. Kl., Abt. IIa, **127**, 2141—2227, 1918.

2) $g_0' = \frac{dg_0}{dr}$.

3) $g_0'' = \frac{d^2g_0}{dr^2}$.

die jedoch voneinander *nicht unabhängig* sind. Vielmehr beinhaltet ihr Zusammenbestehen eine weitere Bedingung für den Energie-Impulstensor, die mit dem Energie-Impulssatze (s. u.) identisch ist.

Um die Integration des Gleichungssystems (12) zu bewerkstelligen, bilden wir zunächst:

$$R_{00} g_1 + R_{11} g_0 \equiv \frac{g_0'}{r} + \frac{g_0 g_1'}{r g_1} = \varkappa g_0 g_1 (T_0 - T_1),$$

woraus sich durch Multiplikation mit $\frac{r}{g_0}$

$$\frac{g_0'}{g_0} + \frac{g_1'}{g_1} = \varkappa r g_1 (T_0 - T_1) \tag{13}$$

ergibt. Durch Kombination von (12) mit (13) erhalten wir weiter:

$$R_{22} \cdot \frac{2}{r} + (13) \cdot \frac{1}{g_1} \equiv \frac{2 g_1'}{g_1^2} - \frac{2}{r g_1} + \frac{2}{r} = 2 \varkappa r T_0$$

oder

$$\frac{g_1'}{g_1^2} - \frac{1}{r g_1} + \frac{1}{r} = \varkappa r T_0, \tag{14}$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{g_1}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{g_1}\right) - \frac{1}{r} + \varkappa r T_0 = 0. \tag{14'}$$

Diese lineare Differentialgleichung erster Ordnung läßt sich sofort integrieren und ihr allgemeines Integral lautet:

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{r}\left[K + \int r\left(\frac{1}{r} - \varkappa r T_0\right) dr\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left(K + r - \varkappa \int r^2 T_0 \, dr\right)$$

oder, indem wir die Integrationskonstante $K = -\alpha$ setzen:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\varkappa}{r} \cdot \int r^2 T_0 \, dr. \tag{15}$$

Zu der so gefundenen Lösung von g_1, die bemerkenswerterweise bloß von der zeitlichen Komponente T_0 des Energie-Impulstensors abhängt, finden wir diejenige von g_0, indem wir zunächst aus (14)

$$\frac{g_1'}{g_1} = \frac{1}{r} - \frac{g_1}{r} + \varkappa r g_1 T_0$$

entnehmen und diesen Ausdruck in (13) einsetzen; dies liefert:

$$\frac{g_0'}{g_0} = -\frac{1}{r} + \frac{g_1}{r}(1 - \varkappa r^2 T_1). \tag{16}$$

Im Hinblick auf (15) folgt sodann:

$$\frac{g_0'}{g_0} = -\frac{1}{r} + \frac{1 - \varkappa r^2 T_1}{r - \alpha - \varkappa \int r^2 T_0 \, dr}. \tag{17}$$

Die Integration von (17) ergibt schließlich:

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 - \varkappa r^2 T_1}{r - \alpha - \varkappa \int r^2 T_0 \, dr} dr}, \quad c^2 = \text{Int.-Konst.} \tag{18}$$

Die Integrationskonstante muß dem Quadrate der Vakuumlichtgeschwindigkeit c gleichgesetzt werden, da im Falle des *materiefreien* Raumes, für den der Energie-Impulstensor und die Konstante α verschwinden,

$$g_0 = c^2$$

werden muß.

Wie schon früher erwähnt, sind die drei Gleichungen (12) voneinander nicht unabhängig. Ihr gleichzeitiges Erfülltsein liefert eine weitere Bedingung für den Energie-Impulstensor, die durch Einsetzen von (15) und (18) in die erste oder zweite Gleichung von (12) erhalten werden kann. Wir gelangen indes rascher zum Ziele, wenn wir den *Energie-Impulssatz* heranziehen, der bekanntlich das *Verschwinden der Divergenz* des Energie-Impulstensors T_i^k zum Inhalte hat:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} k l \\ k \end{Bmatrix} T_i^l - \begin{Bmatrix} i k \\ l \end{Bmatrix} T_l^k = 0, \; i = 0, 1, 2, 3. \tag{19}$$

In unserem Falle eines kugelsymmetrischen und statischen Schwerefeldes reduziert sich das Gleichungssystem (19) auf die eine nicht identische Gleichung für $i = 1$:

$$\frac{d T_1}{dr} + \begin{Bmatrix} k 1 \\ k \end{Bmatrix} T_1 - \begin{Bmatrix} 1 k \\ k \end{Bmatrix} T_k = 0$$

oder

$$T_1' = \begin{Bmatrix} 1 k \\ k \end{Bmatrix} (T_k - T_1), \text{ [1]} \tag{19'}$$

die wir mit Rücksicht auf (6) und (11) auch folgendermaßen schreiben können:

$$T_1' = \frac{g_0'}{2 g_0}(T_0 - T_1) + \frac{2}{r}(T_2 - T_1). \tag{19''}$$

Die Einsetzung von (17) führt nun unmittelbar zu der gesuchten weiteren Bedingung, der der Energie-Impulstensor zu genügen hat:

$$2 T_1' = \left(-\frac{1}{r} + \frac{1 - \varkappa r^2 T_1}{r - \alpha - \varkappa \int r^2 T_0 \, dr}\right)(T_0 - T_1) + \frac{4}{r}(T_2 - T_1) \tag{20}$$

oder in anderer Form:

$$T_2 = T_1 + \frac{r}{2} T_1' - \frac{(T_0 - T_1)\left(\alpha - \varkappa r^3 T_1 + \varkappa \int r^2 T_0 \, dr\right)}{4\left(r - \alpha - \varkappa \int r^2 T_0 \, dr\right)}. \tag{20'}$$

1) Über k ist von 0 bis 3 zu summieren.

Aus den gewonnenen Ergebnissen (15), (18) und (20′) im Vereine mit (11) geht hervor:

erstens daß die Metrik des Gravitationsraumes, die vom Gravitationspotentiale g_1 abhängt, ausschließlich durch die zeitliche Kompenente T_0 des Energie-Impulstensors, bestimmt wird;

zweitens daß die veränderliche Lichtgeschwindigkeit $\sqrt{g_0}$ als Funktion der Komponenten T_0 und T_1 erscheint;

drittens daß die übrigen Komponenten T_2 und $T_3 = T_2$ des Energie-Impulstensors, die in die Gravitationspotentiale selbst nicht eingehen, bereits durch T_0 und T_1 festgelegt sind.

Sonderfälle.

I. Ein Blick auf (20′) läßt erkennen, daß die Annahme

$$T_0 = T_1$$

eine wesentliche Vereinfachung der Verhältnisse zur Folge hat. Wir erhalten nunmehr die Bedingung:

$$T_2 = T_3 = T_1 + \frac{r}{2} T_1' \tag{21}$$

und die Formeln (15) und (18) gehen über in

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\varkappa}{r}\int r^2 T_0\, dr\right). \tag{22}$$

Hierher gehört der Fall des elektrisch geladenen Massenpunktes (Elektrons) mit der Masse m und der Ladung e, für den bekanntlich

$$T_0 = T_1 = \frac{e^2}{8\pi c^2 r^4},\ T_2 = T_3 = -\frac{e^2}{8\pi c^2 r^4} \tag{23}$$

wird in Übereinstimmung mit (21). Die Lösungen der Feldgleichungen lauten demgemäß zufolge (22):

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varkappa e^2}{8\pi c^2 r^2}\right),\ \alpha = \frac{\varkappa m}{4\pi}.^{1)} \tag{24}$$

II. Besonderes Interesse nimmt ferner der Fall

$$T_1 = T_2 = T_3$$

in Anspruch. Aus (20′) folgt jetzt:

$$2r\, T_1'\left(r - \alpha - \varkappa\int r^2 T_0\, dr\right) = \tag{25}$$
$$= (T_0 - T_1)\left(\alpha - \varkappa r^3 T_1 + \varkappa\int r^2 T_0\, dr\right).$$

Die Lösungen (15) und (18) für g_1 und g_0 erfahren formell keine Veränderung.

An dieser Stelle haben wir den Fall der Flüssigkeitskugel mit der Dichte ϱ und dem Drucke p einzureihen, der der Energie-Impulstensor

$$T_0 = \varrho - \frac{p}{c^2},\quad T_1 = T_2 = T_3 = -\frac{p}{c^2} \tag{26}$$

zugehört. Sonderfälle:

a) Inkompressibele Flüssigkeit. Für eine solche gilt die besondere Bedingung:

$$T_0 = \varrho - \frac{p}{c^2} = \varrho_0 = \text{konst.}^{1)} \tag{26'}$$

und der Energie-Impulssatz (25) lautet:

$$-\frac{2rp'}{c^2}\left(r - \alpha - \frac{\varkappa\varrho_0}{3} r^3\right) = \tag{27}$$
$$= \left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2}\right)\left[\alpha + \varkappa\left(\frac{p}{c^2} + \frac{\varrho_0}{3}\right) r^3\right].$$

Als Lösungen der Feldgleichungen erhalten wir aus (15) bzw. (18):

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\varkappa\varrho_0}{3} r^2, \tag{28}$$

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 + \frac{\varkappa p}{c^2} r^2}{r - \alpha - \frac{\varkappa\varrho_0}{3} r^3} dr}.^{2)} \tag{29}$$

Sonderfall: $\alpha = 0$.

Für $\alpha = 0$ läßt sich bekanntlich die Integration in geschlossener Form durchführen (Schwarzschildsche Lösung). Man entnimmt zunächst aus (28):

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\varkappa\varrho_0}{3} r^2. \tag{28'}$$

(27) kann sofort integriert werden und man erhält so:

$$\frac{\frac{\varrho_0}{3} + \frac{p}{c^2}}{\varrho_0 + \frac{p}{c^2}} = A\sqrt{1 - \frac{\varkappa\varrho_0}{3} r^2} = \frac{A}{\sqrt{g_1}}. \tag{27'}$$

Die Integrationskonstante A wird durch die

---

1) α und $\beta = \frac{e}{2c}\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}$ bedeuten bekanntlich die Gravitationsradien von Masse und Ladung. Für $e = 0$ stellt (24) die Lösungen des reinen Massenpunktfeldes dar.

1) A. S. Eddington bezweifelt die Richtigkeit dieser Inkompressibilitätsbedingung und setzt an ihre Stelle die Forderung: $T = \sum_{i=0}^{3} T_i = \varrho - \frac{4p}{c^2} = \text{konst.}$ (Relativitätstheorie in math. Behandlung, J. Springer, Berlin 1925, S. 174, Anm. 2).

2) α bedeutet wie früher einen im Kugelmittelpunkt befindlichen Massenpunkt. Zur näheren Bestimmung von p und g_0 bedarf es noch der Randbedingungen an der Oberfläche der Flüssigkeitskugel.

Randbedingung bestimmt, daß an der Oberfläche der Flüssigkeitskugel, deren Radius r^* sei, der hydrostatische Druck $p^* = 0$ sein muß. Wir finden so:

$$A = \frac{1}{3\sqrt{1 - \frac{\varkappa \varrho_0}{3} r^{*2}}} = \frac{1}{3}\sqrt{g_1^*}$$

und sodann aus (27'):

$$\frac{p}{c^2} = \varrho_0 \frac{A - \frac{1}{3}\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_1} - A} = \varrho_0 \frac{\sqrt{g_1^*} - \sqrt{g_1}}{3\sqrt{g_1} - \sqrt{g_1^*}}. \tag{27''}$$

Um am raschesten die Lösung für g_0 zu finden, bedient man sich der Gleichung (19''), die im vorliegenden Falle die Form annimmt:

$$-\frac{p'}{c^2} = \frac{g_0'}{2g_0}\left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2}\right) \tag{19'''}$$

und sich gleichfalls sofort integrieren läßt:

$$g_0\left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2}\right)^2 = B. \tag{29'}$$

Die Integrationskonstante B wird durch Randbedingung festgelegt, daß an der Kugeloberfläche g_0 und g_1 stetig in die außerhalb der Flüssigkeit gültigen Lösungen des Massenpunktfeldes

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2\left(1 - \frac{\mu}{r}\right)$$

übergehen sollen. Daraus folgt zunächst im Hinblick auf (28'):

$$\frac{\varkappa \varrho_0}{3} r^{*2} = \frac{\mu}{r^*} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{\varkappa \varrho_0}{3} r^{*3} \tag{28''}$$

als Gravitationsradius der Flüssigkeitskugel. Anderseits wird

$$B = \varrho_0^2 g_0^* = \frac{c^2 \varrho_0^2}{g_1^*}$$

und wir erhalten schließlich mit Benutzung von (27''):

$$g_0 = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{(3\sqrt{g_1} - \sqrt{g_1^*})^2}{g_1 g_1^*}. \tag{29''}$$

b) Druck und Dichte konstant. Aus (25) ergibt sich jetzt für $T_1' = p' = 0$:

$$\varrho\left[\alpha + \frac{\varkappa}{3}\left(\varrho + \frac{2p}{c^2}\right) r^3\right] = 0, \tag{30}$$

welche Bedingung entweder durch

$$\varrho = 0$$

oder durch

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \varrho + \frac{2p}{c^2} = 0$$

erfüllt werden kann.

1. $\varrho = 0$.

Da der in Rede stehende Fall b) als Sonderfall von a) aufzufassen ist, können wir die dort gewonnenen Ergebnisse hier anwenden. Aus (26') folgt zunächst:

$$\varrho_0 = -\frac{p}{c^2} \tag{31}$$

und aus (28) bzw. (29) weiter:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varkappa p}{3c^2} r^2, \tag{32}$$

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\ln\left(r - \alpha + \frac{\varkappa p}{3c^2} r^3\right)} = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varkappa p}{3c^2} r^2\right). \tag{33}$$

2. $\alpha = 0$ und $\varrho + \frac{2p}{c^2} = 0$.

Wir erhalten jetzt aus denselben Formeln:

$$\varrho_0 = -\frac{3p}{c^2}, \tag{34}$$

$$\frac{1}{g_1} = 1 + \frac{\varkappa p}{c^2} r^2, \tag{35}$$

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 + \frac{\varkappa p}{c^2} r^2}{r + \frac{\varkappa p}{c^2} r^3} dr} = \frac{c^2}{r} e^{\ln r} = c^2. \tag{36}$$

c) Kompressibele Flüssigkeit. Unter Zugrundelegung einer linearen Zustandsgleichung von der Form:

$$\varrho = 2m \frac{p}{c^2} + 2n$$

wurden vom Verfasser für ausgewählte Werte von m und n Lösungen der Feldgleichungen ermittelt[1]).

B. Kosmologische Form der Feldgleichungen.

Wie ein Blick auf den Energie-Impulssatz (20) lehrt, ist eine inkohärente Massenverteilung, die durch einen Energie-Impulstensor von der Gestalt:

$$T_0 = \varrho, \; T_1 = T_2 = T_3 = 0 \tag{37}$$

gekennzeichnet ist, mit den Schwerefeldgleichungen (1) unvereinbar. Dieser Umstand hat, wie bekannt, A. Einstein dazu veranlaßt, sie durch Hinzufügung eines Zusatzgliedes λg_{ik} folgendermaßen abzuändern:

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = \varkappa\left(T_{ik} - \frac{g_{ik}}{2} T\right)^{2)} \tag{38}$$

1) H. Bauer, l. c., Fußnote S. 955.
2) λ eine Konstante.



Im folgenden sollen nun auch für diese erweiterten Feldgleichungen unter der Voraussetzung eines kugelsymmetrischen, statischen Schwerefeldes strenge Lösungen in allgemeiner Form gewonnen werden. Indem wir denselben Weg wie früher einschlagen, bemerken wir, daß die Symmetriebedingung

$$T_3 = T_2 \tag{11}$$

erhalten bleibt, die rechten Seiten von (12) jedoch die folgende Abänderung erfahren:

$$\left.\begin{aligned} R_{00} &= -\lambda g_0 + \frac{\varkappa}{2} g_0 (T_0 - T_1 - 2T_2), \\ R_{11} &= +\lambda g_1 + \frac{\varkappa}{2} g_1 (T_0 - T_1 + 2T_2), \\ R_{22} &= +\lambda r^2 + \frac{\varkappa}{2} r^2 (T_0 + T_1).\,^{1)} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Die weitere in ebenderselben Weise wie früher durchgeführte Rechnung zeigt, daß auch jetzt die Gleichung

$$\frac{g_0'}{g_0} + \frac{g_1'}{g_1} = \varkappa r g_1 (T_0 - T_1) \tag{13}$$

unverändert bestehen bleibt, während an die Stelle von (14)

$$\frac{g_1'}{g_1^2} - \frac{1}{r g_1} + \frac{1}{r} = \varkappa r \left(T_0 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right) \tag{40}$$

tritt. Demgemäß lautet nunmehr das allgemeine Integral:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{a}{r} - \frac{\varkappa}{r} \int r^2 \left(T_0 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right) dr. \tag{41}$$

Man erkennt, daß (41) aus der früheren Lösung (15) dadurch hervorgeht, daß T_0 durch $T_0 + \frac{\lambda}{\varkappa}$ ersetzt wird. Eine aufmerksame Betrachtung des Gleichungssystems (39) führt weiterhin zu dem Ergebnis, daß eine vollständige Überleitung der Gleichungen (12) in die Gleichungen (39) erreicht wird, sobald man jede Komponente T_i durch $T_i + \frac{\lambda}{\varkappa}$ ersetzt. Wir erhalten daher an Stelle von (16) und (18):

$$\frac{g_0'}{g_0} = -\frac{1}{r} + \frac{g_1}{r}\left[1 - \varkappa r^2 \left(T_1 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right] \tag{42}$$

und

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 - \varkappa r^2 \left(T_1 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right)}{r - a - \varkappa \int r^2 \left(T_0 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right) dr} dr}. \tag{43}$$

Der Energie-Impulssatz (19′) ist offenbar auch jetzt erfüllt und liefert anstatt (20′):

$$T_2 = T_1 + \frac{r}{2} T_1' - \frac{(T_0 - T_1)\left[a - \varkappa r^3 \left(T_1 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right) + \varkappa \int r^2 \left(T_0 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right) dr\right]}{4\left[r - a - \varkappa \int r^2 \left(T_0 + \frac{\lambda}{\varkappa}\right) dr\right]}. \tag{44}$$

Sonderfälle.

I. Einsteins vierdimensionale pseudozylindrische Welt.

Die bereits erwähnte inkohärente Massenverteilung mit dem Energie-Impulstensor

$$T_0 = \varrho = \text{konst.},\quad T_1 = T_2 = T_3 = 0, \tag{37}$$

die Einsteins kosmologische Betrachtungen veranlaßte, steht mit den neuen Feldgleichungen (38) im Einklang. Wir folgern zunächst aus (44):

$$0 = a + \varkappa r^3 \left[-\frac{\lambda}{\varkappa} + \frac{1}{3}\left(\varrho + \frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right], \tag{45}$$

woraus sich weiter

$$a = 0 \text{ und } \varrho = \frac{2\lambda}{\varkappa} \text{ oder } \lambda = \frac{\varkappa \varrho}{2} \tag{46}$$

ergibt. Dementsprechend liefern (41) und (43) als Lösungen der Schwerefeldgleichungen:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\varkappa \varrho}{2} r^2 \,^{2)} \tag{47}$$

und

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 - \frac{\varkappa \varrho}{2} r^2}{r - \frac{\varkappa \varrho}{2} r^3} dr} = \frac{c^2}{r} e^{\ln r} = c^2. \tag{48}$$

Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit dem Falle A. II. b) 2. einer Flüssigkeitskugel von konstanter Dichte ϱ und konstantem Drucke p (S. 958) legt den Gedanken einer Deutung des λ-Gliedes im Sinne E. Schrödingers[1]) nahe, der in demselben die Annahme eines überall herrschenden konstanten Zuges

$$-p = \frac{c^2 \lambda}{\varkappa} \tag{49}$$

erblickt.

II. De Sitters vierdimensionale pseudosphärische Welt.

Bemerkenswerterweise besitzen die Feldgleichungen (38) auch für den völlig leeren Raum Lösungen, für g_0 und g_1, die von den konstanten Werten c^2 bzw. 1 verschieden sind.

1) Auch jetzt gilt wie früher $R_{33} = R_{22} \sin^2 \vartheta$.

2) Dem entspricht als Radius der Einsteinschen Welt $R = \sqrt{\frac{2}{\varkappa \varrho}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

1) Physik. Zeitschr. **19**, 20–22, 1918.

Der Abwesenheit jeglicher räumlich ausgebreiteten Materie entsprechend ist

$$T_0 = T_1 = T_2 = T_3 = 0. \tag{50}$$

Wir stellen zunächst fest, daß dieser Ansatz mit (44) verträglich ist. Des weiteren erhalten wir aus (41) und (43):

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2 \tag{51}$$

und

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 - \lambda r^2}{r - \alpha - \frac{\lambda}{3} r^3} dr} = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2 \right). \tag{52}$$

Bei fehlendem Massenpunkte im Koordinatenursprunge ($\alpha = 0$) folgt daraus die de Sittersche Lösung:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\lambda}{3} r^2, \tag{51'}$$

$$g_0 = c^2 \left(1 - \frac{\lambda}{3} r^2 \right), \text{ [1]} \tag{52'}$$

die vermöge (49) mit dem Sonderfalle A. II. b) 1. einer homogenen Flüssigkeit in demselben Zusammenhange steht wie die „Zylinderwelt" Einsteins mit dem Falle A. II. b) 2.

Zwischen die beiden eben besprochenen äußersten Möglichkeiten, die vollkommen leere Welt de Sitters und die überall gleichmäßig mit Materie erfüllte Einsteins, ordnen sich gewissermaßen als Bindeglieder die folgenden Abarten einer de Sitterschen Welt ein.

III. De Sittersche Welt mit Massenpunkt.

Die Lösungen der Feldgleichungen wurden bereits unter II. in den Formeln (51) und (52) gewonnen.

IV. De Sittersche Welt mit elektrisch geladenem Massenpunkt.

Wir gehen wie früher vom Energie-Impulstensor

$$T_0 = T_1 = -T_2 = -T_3 = \frac{e^2}{8\pi c^2 r^4} \tag{23}$$

aus und überzeugen uns vorerst, daß die Bedingung (44) mit Rücksicht auf (21) erfüllt ist. Als Lösungen der Feldgleichungen (38) erhalten wir sodann aus (41) und (43):

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varkappa e^2}{8\pi c^2 r^2} - \frac{\lambda}{3} r^2 \right). \tag{53}$$

1) Der Radius der de Sitterschen Welt ist demgemäß $R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}$.

V. Homogene Flüssigkeitskugel in einer de Sitterschen Welt.

Als Grundlage der Rechnung benutzen wir wieder den Energie-Impulstensor (26) in der besonderen Form:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \varrho - \frac{p}{c^2} = \varrho_0 = \text{konst.}, \\ T_1 &= T_2 = T_3 = -\frac{p}{c^2}. \end{aligned} \right\} \tag{26'}$$

An Stelle von (27) liefert jetzt der Energie-Impulssatz (44):

$$-\frac{2rp'}{c^2}\left(r - \alpha - \frac{\varkappa \varrho_0 + \lambda}{3} r^3 \right) = \\ = \left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2} \right) \left[\alpha + \varkappa \left(\frac{\varrho_0}{3} + \frac{p}{c^2} - \frac{2\lambda}{3\varkappa} \right) r^3 \right] \tag{54}$$

und als Lösungen der Feldgleichungen (38) finden wir:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\varkappa \varrho_0 + \lambda}{3} r^2 \text{ [1]} \tag{55}$$

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 + \left(\frac{\varkappa p}{c^2} - \lambda \right) r^2}{r - \alpha - \frac{\varkappa \varrho_0 + \lambda}{3} r^3} dr} \text{ [2]}. \tag{56}$$

Sonderfall: $\alpha = 0$.

Entsprechend der früher (S. 957) entwickelten Schwarzschildschen Lösung ist auch hier eine Integration in geschlossener Form möglich. Wir erhalten zunächst aus (55):

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\varkappa \varrho_0 + \lambda}{3} r^2. \tag{55'}$$

(54) geht über in

$$\frac{dp}{\left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2} \right) \left(\frac{\varrho_0}{3} + \frac{p}{c^2} - \frac{2\lambda}{3\varkappa} \right)} = \\ = -\frac{\varkappa c^2}{2} \cdot \frac{r\,dr}{1 - \frac{\varkappa \varrho_0 + \lambda}{3} r^2} \tag{54'}$$

und läßt sich unmittelbar integrieren:

$$\frac{\frac{\varrho_0}{3} + \frac{p}{c^2} - \frac{2\lambda}{3\varkappa}}{\varrho_0 + \frac{p}{c^2}} = \frac{A}{\sqrt{g_1}}. \tag{54''}$$

1) Für $\alpha = 0$ wird der Radius der Welt $R = \sqrt{\frac{3}{\varkappa \varrho_0 + \lambda}}$.

2) Zur näheren Bestimmung von p und g_0 sind noch die Randbedingungen an der Oberfläche der Flüssigkeitskugel erforderlich.

Die Integrationskonstante A wird wieder durch das Verschwinden des Druckes p an der Oberfläche der Flüssigkeitskugel mit dem Radius r^* bestimmt:

$$A = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2\lambda}{\varkappa\varrho_0}\right)\sqrt{g_1^*}\,.$$

Darauf folgt aus (54''):

$$\frac{p}{c^2} = \varrho_0\left(1 - \frac{2\lambda}{\varkappa\varrho_0}\right)\frac{\sqrt{g_1^*} - \sqrt{g_1}}{3\sqrt{g_1} - \left(1 - \frac{2\lambda}{\varkappa\varrho_0}\right)\sqrt{g_1^*}}\,. \tag{54'''}$$

Die frühere Gleichung (19''') bleibt unverändert bestehen und damit auch ihr allgemeines Integral:

$$g_0\left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2}\right)^2 = B\,. \tag{29'}$$

Setzen wir wieder Stetigkeit von g_0 und g_1 an der Oberfläche der Flüssigkeitskugel fest und Gültigkeit der Lösungen des Massenpunktfeldes

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2\left(1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right) \tag{52'}$$

außerhalb der Flüssigkeit, so muß im Hinblick auf (55') wie früher

$$\mu = \frac{\varkappa\varrho_0}{3}r^{*3} \tag{28''}$$

sein. Für die Integrationskonstante B ergibt sich weiter:

$$B = \varrho_0^2 g_0^* = \frac{c^2\varrho_0^2}{g_1^*}$$

und letzten Endes finden wir aus (29') mit Heranziehung von (54''') nach geeigneter Umformung:

$$g_0 = \frac{c^2}{4}\cdot\frac{\left[3\sqrt{g_1} - \left(1 - \frac{2\lambda}{\varkappa\varrho_0}\right)\sqrt{g_1^*}\right]^2}{\left(1 + \frac{\lambda}{\varkappa\varrho_0}\right)^2 g_1 g_1^*}\,. \tag{56'}$$

Zum Schlusse wenden wir unsere Aufmerksamkeit dem schon früher betrachteten Sonderfalle konstanter Dichte und konstanten Druckes zu, für den sich aus (54) wegen $p' = 0$

$$\left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2}\right)\left[\alpha + \varkappa\left(\frac{\varrho_0}{3} + \frac{p}{c^2} - \frac{2\lambda}{3\varkappa}\right)r^3\right] = 0 \tag{57}$$

ergibt.

Demgemäß bestehen auch hier zwei Möglichkeiten:

1. $\varrho_0 + \frac{p}{c^2} = \varrho = 0\,.$

Hierfür folgt aus (55) und (56):

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\varkappa\varrho_0 + \lambda}{3}r^2\right)\cdot \tag{58}$$

Diese Maßbestimmung ist für $\alpha = 0$ augenscheinlich von derselben Art wie die der unter II. behandelten masseleeren de Sitterschen Welt. Der Unterschied besteht nur im Radius R, der hier gleich $\sqrt{\frac{3}{\varkappa\varrho_0 + \lambda}}$ ist.

2. $\alpha = 0$ und $\lambda = \frac{\varkappa}{2}\left(\varrho_0 + \frac{3p}{c^2}\right) = \frac{\varkappa}{2}\left(\varrho + \frac{2p}{c^2}\right)\cdot$

Diesfalls erhalten wir aus (55) und (56):

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\varkappa}{2}\left(\varrho_0 + \frac{p}{c^2}\right)r^2 = 1 - \frac{\varkappa\varrho}{2}r^2 \tag{59}$$

und

$$g_0 = \frac{c^2}{r}e^{\int\frac{1 - \frac{\varkappa\varrho}{2}r^2}{r - \frac{\varkappa\varrho}{2}r^3}dr} = c^2\,. \tag{60}$$

Es ist ersichtlich, daß dieser Fall eine Verallgemeinerung der unter I. behandelten Einsteinschen „Zylinderwelt" mit inkohärenter Massenverteilung ($p = 0$) darstellt.

C. Die abgeänderten kosmologischen Feldgleichungen.

Da der Maxwellsche Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes

$$S_i^k = F^{kl}F_{il} - \frac{1}{4}\delta_i^k F^{lm}F_{lm}\ ^{1)} \tag{61}$$

nur im ladungsfreien Raume dem Energie-Impulssatz (19), auf dem die Feldgleichungen (1) bzw. (38) fußen, Genüge leistet, hat Einstein[2]) zur Lösung des Problems der elektrischen Elementarteilchen eine weitere Abänderung der Feldgleichungen in der folgenden Form vorgeschlagen:

$$R_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}R = \varkappa S_{ik},\quad R = g^{ik}R_{ik} = \sum_{i=0}^{3}R_i^i\,. \tag{62}$$

Dieser Ansatz trägt dem Umstande Rechnung, daß der Skalar

$$S = g^{ik}S_{ik} = \sum_{i=0}^{3}S_i^i = 0 \tag{63}$$

ist. Die Bildung der Divergenz von (62) läßt erkennen, daß bei einer solchen Annahme den

1) F_{ik} bzw. F^{ik} sind die Komponenten des Flächentensors der Feldstärken, die die Grundgleichungen der Elektronentheorie zu erfüllen haben.

2) Berl. Ber. 1919, S. 349ff.

Coulombschen Abstoßungskräften durch einen Gravitationsdruck, der sich aus der potentiellen Energie $\frac{R}{4\varkappa}$ ableiten läßt, das Gleichgewicht gehalten wird. Stellt R^* den konstanten Wert von R im ladungsfreien Raume außerhalb und an der Oberfläche des Teilchens dar und wird der materielle Energie-Impulstensor T_{ik} wiederum den Feldgleichungen

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = \varkappa \left(T_{ik} - \frac{g_{ik}}{2} T \right) \tag{38}$$

unterworfen, so muß, wie eine Betrachtung des ladungs- und materiefreien Raumes unmittelbar zeigt,

$$\lambda = -\frac{R^*}{4} \tag{64}$$

werden und es ergibt sich durch Vergleich von (62) mit (38) die folgende Beziehung:

$$T_{ik} = S_{ik} + \frac{R^* - R}{4\varkappa} g_{ik}. \tag{65}$$

Durch Skalarbildung folgt zugleich unter Beachtung von (63):

$$T = \frac{R^* - R}{\varkappa} \quad \text{oder} \quad R = R^* - \varkappa T, \tag{66}$$

so daß (65) auch in der Form geschrieben werden kann:

$$T_{ik} = S_{ik} + \frac{T}{4} g_{ik}. \tag{65'}$$

Da der abgeänderte Energie-Impulstensor (65) bzw. (65') so bestimmt wurde, daß er die kosmologischen Feldgleichungen (38) befriedigt, so lassen sich die im Abschnitte B für ein kugelsymmetrisches, statisches Feld gewonnenen Lösungen (41) und (43) der Gravitationspotentiale g_1 und g_0 hierher übertragen, wenn wir (64) berücksichtigen und gemäß (65) bzw. (65')

$$T_i = S_i + \frac{R^* - R}{4\varkappa} = S_i + \frac{T}{4} \tag{67}$$

setzen. Wir erhalten so:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\varkappa}{r} \int r^2 \left(T_0 - \frac{R^*}{4\varkappa} \right) dr, \tag{68}$$

$$g_0 = \frac{c^2}{r} e^{\int \frac{1 - \varkappa r^2 \left(T_1 - \frac{R^*}{4\varkappa} \right)}{r - \alpha - \varkappa \int r^2 \left(T_0 - \frac{R^*}{4\varkappa} \right) dr} dr} \text{ [1]}. \tag{69}$$

Auch die aus dem Energie-Impulssatze (19') entspringende Gleichung (44) bleibt unter den gleichen Bedingungen bestehen.

1) Wobei zu beachten ist, daß zufolge (67)

$$T_i - \frac{R^*}{4\varkappa} = S_i - \frac{R}{4\varkappa}$$

ist.

Die Bedeutung der neuen Fassung der Feldgleichungen liegt, abgesehen von der Herstellung eines Gleichgewichtes zwischen den elektrischen und Gravitationskräften, noch insbesondere darin, daß die Konstante λ nicht mehr als eine äußere Zutat der Feldgleichungen, sondern gemäß (64) als Integrationskonstante in der Natur des Schwerefeldes begründet erscheint.

Sonderfälle.

I. Räumlich geschlossene Welt mit konstanter Massendichte (Einsteins „Zylinderwelt").

Der Energie-Impulstensor der Materie lautet wie früher:

$$T_0 = \varrho = \text{konst.}, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0; \tag{37}$$

damit verknüpft ist aber jetzt gemäß (67) mit Beachtung von $T = \varrho$ der elektromagnetische Tensor

$$S_0 = \frac{3\varrho}{4}, \quad S_1 = S_2 = S_3 = -\frac{\varrho}{4}, \tag{70}$$

woraus hervorgeht, daß die gesamte Energie T_0 der Welt zu $^3/_4$ vom elektromagnetischen Felde und nur zu $^1/_4$ vom Schwerefelde herrührt. Die Anwendung von (44) ergibt wie früher:

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\varkappa\varrho}{2}, \tag{46}$$

wodurch zufolge (64) der Wert von R^* bestimmt ist:

$$R^* = -2\varkappa\varrho. \tag{71}$$

Die Lösungen der Feldgleichungen sind dieselben wie im Falle B. I.:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\varkappa\varrho}{2} r^2, \tag{47}$$

$$g_0 = c^2. \tag{48}$$

Eine massenleere, räumlich geschlossene Welt im Sinne de Sitters (s. B. II.) ist jetzt nicht mehr möglich, da mit dem Fehlen jeglicher Materie das Verschwinden von R und R^* notwendig verbunden ist, was gemäß (64) das Nullwerden von λ zur Folge hat. Die Sonderfälle B. III. u. IV., bei denen es sich nur um punktförmig verteilte Materie handelt, scheiden gleichfalls aus der Betrachtung aus.

II. Kugelsymmetrisch verteilte elektrische Raumladung (Elektron).

Die Untersuchung des elektromagnetischen Feldes auf Grund der Maxwellschen Gleichungen zeigt, daß der elektromagnetische Energietensor S_i als eine Verallgemeinerung des Tensors (23) erscheint:

$$S_0 = S_1 = -S_2 = -S_3 = S(r), \tag{72}$$

woraus für den Materietensor mit Rücksicht auf

(67) die Beziehung folgt:

$$T_0 = T_1 = S + \frac{R^* - R}{4\varkappa}, \qquad T_2 = T_3 = -S + \frac{R^* - R}{4\varkappa}. \tag{73}$$

Demgemäß erhalten wir aus (68) und (69) für $\alpha = 0$[1])

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2 \left[1 - \frac{\varkappa}{r}\int r^2 \left(S - \frac{R}{4\varkappa}\right) dr\right] \tag{74}$$

mit der aus (44) entspringenden Nebenbedingung:

$$\frac{R'}{4\varkappa} = \frac{4}{r} S + S', \tag{75}$$

durch die das Gleichgewicht zwischen den elektrischen und den Schwerkräften hergestellt ist. Zur eindeutigen Bestimmung des Feldes ist jedoch eine Gleichung zu wenig vorhanden, so daß jede kugelsymmetrische Verteilung der Elektrizität zulässig erscheint. Es läßt sich indes nachweisen[2]), daß in jedem Falle die Gesamtenergie des Teilchens zu $^3/_4$ vom elektrischen und nur zu $^1/_4$ vom Schwerefeld herrührt.

Zusammenfassung.

Abschnitt A: Die Einsteinschen Feldgleichungen der Schwere in ihrer ursprünglichen Form, die für besondere kugelsymmetrische und statische Felder wiederholt Gegenstand wissenschaftlicher Behandlung waren, werden für ein kugelsymmetrisches, statisches Schwerefeld allgemeinster Art mit Benutzung von räumlichen Polarkoordinaten, die sich zur Rechnung am besten eignen, in strenger Form integriert und im Anschlusse an die so gewonnenen allgemeinen Lösungen die bekannten, physikalisch bedeutsamen Sonderfälle kurz zusammengefaßt. Abschnitt B: Es wird ferner die durch das λ-Glied erweiterte Form der Feldgleichungen in die allgemeine Untersuchung einbezogen und dieselben Sonderfälle betrachtet. Abschnitt C ist der neueren Fassung der kosmologischen Feldgleichungen mit abgeändertem Materietensor gewidmet und behandelt kurz den Fall der Einsteinschen „Zylinderwelt" und des Elektrons.

1) Wodurch wir eine Unstetigkeit im Mittelpunkte des Teilchens ausschließen.

2) N. R. Sen, Der Energieinhalt des elektrischen Teilchens nach den Einsteinschen modifizierten Feldgleichungen. Zeitschr. f. Phys., **40**, 667—674, 1927.

Wien, im Oktober 1928, II. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 17. Oktober 1928.)

Praktisches.

Einiges zum Kapitel Meßtechnik.

Von Dr. K. Fischer.

Nachstehend folgen Materialkonstanten und praktische Angaben, die für die Selbstherstellung und annähernde Vorausbestimmung der Eigenschaften elektrischer Meßgeräte gedacht sind.

I. Drehspulinstrumente. Bei diesen Meßwerken mit 2 Stromzuführungen (zum Unterschied etwa gegen statische Spannungsmesser mit nur einer Stromzuführung) macht meistens die zweite Stromzuführung — bei Bandaufhängung — mehr Schwierigkeiten als die eigentliche Aufhängung. Konstruktiv am einfachsten ist es, die zweite Zuführung als schwach oder gar nicht gespanntes Band, symmetrisch zum Aufhängeband nach unten zu führen; es ist auch möglich, wie bei den Spiegelgalvanometern von Siemens & Halske eine Drahtspirale zu verwenden. (Drahtdurchmesser 0,03 mm, Spirale 5—8 Windungen, Windungsdurchmesser 2—3 cm, Ganghöhe 1 cm.) Bei dieser Art der Stromzuführung wird die gesamte Höhe des Meßwerkes mit den Trägern nur etwas reichlich groß. Eine andere Art ist die, die flachgängige, weite Spirale um das Aufhängeband herumzuführen, dann steht für die Gesamtlänge der Spirale die Gesamtlänge des Aufhängebandes zur Verfügung. Als Material empfiehlt sich Silber, das als 0,03 mm Draht von Heraeus, Hanau um 1 RM. pro Meter, von Hartmann & Braun, Frankfurt/Main bis 0,015 mm herab in 10 Meterspulen zu 33 RM. zu beziehen ist. Die Spiralen werden z. B. bei 0,03 mm Draht auf ein Glasrohr von 15 mm Durchmesser mit 3 mm Windungsabstand unter möglichst starker Anspannung von Hand gewickelt, die Spirale löst sich nach dem Aufhören des Zuges von selbst ab und weitet sich, senkrecht hängend, noch aus, so daß auf 10 cm Spiralenlänge etwa 4 Windungen treffen; die Gesamtlänge des Drahtes ist dann etwa 15 cm, der Widerstand 3 Ohm (der Widerstand einer gleichen Spirale aus Platiniridiumdraht ist 60 Ohm, die Richtkraft aber mindestens 8 mal so groß wie bei Silber). Die Eigenrichtkraft der Spirale ist schon bei einem Phosphorbronzeband von 0,28 × 0,018 mm (Hartmann & Braun) merklich, der durch sie verursachte Nullpunktsfehler aber noch vernachlässigbar klein. Für das dünnere P-Band 0,17 × 0,009 ist die Nachwirkung aber auch einer 0,015 mm Silberdrahtspirale zu groß. Diese dünnsten Bänder sind demnach nur als zweite Stromzuführungen oder für Instrumente mit nur einer Zuführung geeignet. Nachstehende Tabelle gibt die Richtkräfte für einige Phosphorbronzebänder; sie wurden derart gemessen, daß

Tabelle I.

Richtkräfte von Aufhängebändern.

Nr.	Meßwerk	erste Stromzuführung	zweite Stromzuführung	Drehmoment mg/cm/90°	Gewicht des beweglichen Organs	Bemerk.
1	Registrierinstr. Spitzenlager	starke Federn		20—40000	bis 10 g	Keinath[1] S. 8
2	Drehspulschalttafelinstrument	mittelstarke Federn		100—500	2—3	Keinath S. 8
3	Präzisionsdrehspulinstrument	schwache Federn		20—100	1,5—2	Keinath S. 8
4	Drehspulspitzenlager; Magnet von Ruhstrat Gött.	in Uhrenhandlungen als „Kompensationsunruhen" käufliche Weckerunruhfedern		720	2,2	eigene Messung
5	Magnetsystem wie vor	*P*-Band 10 cm 0,45 × 0,028	*Ag*-Spirale nach Beschr.	4,7	2,2	,,
6	wie vor	wie vor 11 cm 0,28 × 0,018	wie vor	0,38	0,52	,,
7	wie vor	wie vor 5 cm	kürzer	1,95	1,2	,,
8	statisches Voltmeter	wie vor 6 cm 0,17 × 0,009	—	0,1	0,1	,,

eine Drehspule von genau bekannten Daten mit den verschiedenen Aufhängungen versehen, jeweils in den gleichen Magneten eingesetzt und das Drehmoment für 90° Ausschlag bestimmt wurde, die Richtkraft der Silberspiralen ist also in den Messungen bereits enthalten.

Die Phosphorbronzebänder waren von Hartmann & Braun, Frankfurt, bezogen und sind unter der Angabe der Breite und Dicke (z. B. 0,45 mm breit, 0,028 mm dick) dort erhältlich. Ein Vergleich der Nr. 6 und 7 — beide sind mit dem gleichen *P*-Band hergestellt — zeigt, daß bei der Verkürzung das Drehmoment stärker als proportional ansteigt. Von der Wiedergabe von Formeln zur Berechnung von Richtkräften aus den Daten der Spiralen und Bänder wurde abgesehen, da schon die Messung der Bandbreite und Dicke kaum auf 10 Proz. genau möglich ist und überdies die Angaben des Elastizitätsmoduls für Phosphorbronze stark schwanken; dies ist erklärlich, da schon das Auswalzen des gleichen Materials auf ein dünneres Band die Elastizität stark beeinflußt. Die Tabelle läßt erkennen, daß bei genauer Anpassung an einen bestimmten Zweck sehr oft ein Spiegelgalvanometer durch ein Bandaufhängungsinstrument mit Zeigerablesung ersetzt werden kann, es ist nur nötig, das Gewicht tunlichst herabzudrücken. Hierfür ein ausgeführtes Beispiel: eine von der Ruhstrat A.-G. Göttingen für Magnete von 25 mm Bohrung gefertigte Spule wurde durch Abwickeln von 2 Innen- und einer Außenlage auf 0,5 g Gewicht gebracht und die Stromzuführungen an zwei, mit Zaponlack aufgekittete Silberblechstreifen (0,03 mm dick, 10 mm lang, 3 mm breit) gelötet. Als Zeiger wurde ein versteifter, aus 3 Quarzdrähten von 0,08 mm Durchmesser genommen. Die Quarzdrähte lassen sich von Hand leicht verdrillen, dann werden sie da, wo man die Spitze wünscht, mit schwarzer Ausziehtusche auf 2 bis 3 cm Länge überstrichen. Die Tusche hält die Drähte vorzüglich und dauerhaft zusammen, der Zeiger erscheint so breit wie ein feiner Tuschestrich, ist also bequem ablesbar. Dabei beträgt das Gewicht noch nicht einmal 10 mg bei 12 cm Zeigerlänge, man kann den Zeiger also nach dem Ausbalancieren der Spule aufsetzen; das Ausbalancieren braucht bei Bandaufhängung bei weitem nicht so sorgfältig zu geschehen wie bei der Spitzenlagerung; es genügt, die Spule durch Verschieben des Aufhängebandes auf dem Blechstreifen mittels des Lötkolbens soweit auszubalancieren, daß sie dem Auge gerade hängend erscheint. Das Aufsetzen des Quarzzeigers geschieht derart, daß man zwei

1) Gg. Keinath, Die Technik elektrischer Meßgeräte. Berlin 1928.

Tabelle II.

Meßwerk	Aufhängeband	Gewicht des beweglichen Organs	Spulenwiderstand ohne Zuführung	Äußerer Grenzwiderstand	Verhältnis Grenzw. zu Spulenw.	Beruhigungszeit	1⁰ =
Ruhstrat Magnet	0,45 × 0,028 1,5 Ohm	2,2 g	2,8 Ohm	10 Ohm	3,5 : 1	6 S.	3,6 μA 24 μV
wie vor	0,28 × 0,018	0,52	129 Ohm	1800 Ohm	14 : 1	12 S.	0,05 μA 8 μV
Schalttafelinstrument von S. & H.	0,28 × 0,018	1,2	1,88	7 Ohm	3,7 : 1	4 S.	1,5 μA 8,8 μV

Tabelle III.

	Technische Instrumente		eigene Ausführungen		
	Präzis. Instrumente Spitzenlager	Einspitzensystem Unipivot	*P*-Band 0,45 × 0,028 Bereich 0,15 A	Wattm 0,45 × 0,028 5 Watt max.	Amp. M. 0,45 × 0,028 2 m A max.
AW der festen Spulen	400	50	42	25	28
AW der beweglichen Spulen	3—15	2	7,5	5	3
Produkt der AW	12—6000	100	310	125	85
Drehmoment mg/cm/90⁰	100—1000	8	5	5	5
Drehmoment zu AW	0,083—0,16	0,08	0,016	0,04	0,06
Eigenverbr. maximal W	8—15	0,02	0,1	0,01	0,008
Bemerkung	nach Keinath S. 58 loc. cit.	nach Keinath S. 180 loc. cit.	wird auch als W-Meter benützt		

Fäden rechts und links auf die Spule legt und mit einem Tröpfchen Lack fixiert. Der dritte Quarzfaden wird über den oberen Rand des erwähnten Silberblechstreifens gelegt und mit der Hand (beim Anfassen mit der Pinzette brechen die Quarzfäden sehr leicht) oder besser noch mittels eines Streichholzes, das am hinteren, später sowieso abzuschneidenden Ende festgeklebt ist, so lange verschoben, bis die Zeigerspitze 3—5 mm über der Skala schwebt. Diese Stellung wird durch ein Tröpfchen Lack fixiert und bis zum völligen Hartwerden (z. B. über Nacht, je nach Konsistenz des Lackes) die Zeigerspitze durch ein untergelegtes Stück Holz usw. entlastet. Das so hergestellte Instrument bedarf wegen der geringen Masse der Drehspule keiner Arretierung beim Transport und ist trotz hoher elektrischer Empfindlichkeit gegen rauhe Behandlung nicht empfindlich. Die Tabelle II gibt die elektrischen Daten einiger selbst hergestellter Instrumente. Bemerkt sei noch für den Fall, daß eines der üblichen Schalttafelinstrumente verwendet wird, daß der Verlust an Empfindlichkeit gegenüber der bequemeren mechanischen Ausführung nicht ins Gewicht fällt, wenn der Eisenkern um 1 bis 2 mm abgedreht wird. Es empfiehlt sich dies also in jedem Falle.

Zur annähernden Vorausbestimmung für die zu 90⁰ Ausschlag gehörige Stromstärke empfiehlt sich die bekannte Formel:

$$i = \frac{D \cdot 9810}{2H \cdot l \cdot r \cdot w},$$

worin i die Stromstärke in Amp., H die Feldstärke im Luftspalt des Magneten (bei Schalttafelmagneten zu 800—1200, nur bei besten

Tabelle IV.

Max. Strom	Widerstand	Eigenverbrauch bei 2/3 Vollast	Thermokraft bei 2/3 Vollast
0,015 Amp.	65 Ohm	0,006 Watt	8 Millivolt
0,025 „	15	0,004	6,4 „
0,09 „	1	0,004	3,6 „

Präzisionsinstrumenten zu 2000 anzusetzen), l die Länge der Spule in axialer Richtung, r die halbe Länge der Spule senkrecht hierzu = Wicklungsradius, w die Windungszahl, D das Drehmoment in g/cm/90°.

II. Dynamometrische Instrumente. Bei der Berechnung dieser Instrumenttypen hat man, gleichgültig, ob für Spannungs-, Strom- oder Leistungsmesser gedacht, so vorzugehen, daß man den weitaus größten Teil der Gesamtamperewindungszahlen in die feste Spule verlegt. Dies hat zwei Vorteile: erstens hat man bei den festen Spulen weit mehr als bei den beweglichen die Möglichkeit, den Ohmschen Widerstand gering zu halten, weil hier Bindungen durch ein Höchstgewicht wegfallen, geringer Ohmscher Widerstand ist aber gleichbedeutend mit geringem Eigenverbrauch. Zweitens wirken magnetische Störfelder nur auf die bewegliche Spule, und zwar um so geringer, je kleiner deren AW-Zahl ist.

Ist Anschaffung dynamometrischer Instrumente beabsichtigt, dann seien die Instrumente nach Bruger (Hartmann & Braun) empfohlen; sie haben Bandaufhängung, astatische Drehspulen, einen Eigenverbrauch von 0,06 bis 0,3 Watt bei max. Stromstärken von 0,015 bis 1 Amp. und haben bereits von 1/20 des Endwertes an proportionale Teilung, mit dem Instrument für 0,015 Amp. können also Stromstärken von 0,5 Milliamp. gemessen werden.

III. Hitzdraht- und Thermoinstrumente. Normale Instrumente haben — bei Ausschluß von Vor- oder Nebenwiderständen — einen Eigenverbrauch von etwa 1 Watt für den maximalen Ausschlag, nur bei Präzisionsausführung ist er geringer (0,1 Watt) bei allerdings sehr störenden dauernden Nullpunktschwankungen. Der Hauptnachteil der Hitzdrahtinstrumente ist aber, daß sie leicht, auch bei vorsichtiger Behandlung durchbrennen. Die Reparatur solcher Instrumente ist, da immer auch eine Neueichung erforderlich ist, meist nahezu ebenso teuer als ein neues Instrument. Für Versuche empfehlen sich also die billigen Instrumente aus ehemaligem Heeresgerät, die man am besten durch Einziehen von Platiniridiumdrähten (Platin mit 10 Proz. Iridium) empfindlicher macht. Als Anhaltspunkt sei angegeben, daß bei 50 mm Hitzdrahtlänge der Strom für 90° Ausschlag ungefähr gleich dem achtfachen des Drahtdurchmessers für 10 Proz. *Pt-Ir* ist, also: 0,03 mm Draht, 0,25 Amp. max. Die Empfindlichkeit nimmt annähernd proportional der Drahtlänge zu, ist z. B. bei 150 mm für 0,03 mm Durchmesser 0,08 Amp., mit der Verlängerung des Hitzdrahtes wächst aber auch die Unsicherheit des Nullpunktes unerträglich an. Die Reparatur durchgebrannter Instrumente ist nicht allzu schwierig, wenn man die Drähte vorher elektrisch ausglüht und streckt, eine ruhige Hand ist natürlich erforderlich.

Die Thermoelemente bieten vor den Hitzdrahtstrommessern den Vorteil der Konstanz des Nullpunktes und des weit geringeren Eigenverbrauches. Wesentliche Empfindlichkeitssteigerung bringt der Einschluß der Thermoelemente in ein Hochvakuum, wofür die nachstehenden Ausführungen von S. & H. ein Beispiel seien; der gleichstromseitige Widerstand ist bei allen etwa 10 Ohm.

Die genannten Thermoelemente stellen bereits ziemliche Anforderungen an das Galvanometer, wenn für dieses noch spitzengelagerte Ausführungen gewählt werden sollen. Der Nachteil, daß man die durchgebrannten Instrumente noch weniger als die Hitzdrahtinstrumente reparieren kann, bleibt natürlich bestehen. Da ist es manchmal besser, das Galvanometer empfindlicher zu wählen (Bandaufhängung) und dafür die Thermoelemente in Luft anzuordnen. Solche sind 5- bis 20mal so unempfindlich gegenüber den Vakuumthermoelementen, aber immer noch den Hitzdrahtinstrumenten hinsichtlich Eigenverbrauch weit überlegen. Eine Zusammenstellung der möglichen Kombinationen findet sich bei E. v. Angerer[1]). Thermokreuze müssen unter allen Umständen in einem gut schließenden Gehäuse vor Luftströmungen geschützt sein und die Neigung der Ebene, in der die Drähte bei der Eichung lagen, muß auch beim Gebrauch annähernd eingehalten werden. Die Eichung wird am besten mit dynamometrischen Instrumenten bei 50 Hertz vorgenommen.

IV. Statische Spannungsmesser sind für Spannungen unter 100 Volt nur mit mehreren

1) E. v. Angerer, Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen, 2. Aufl. Braunschweig 1928.



Kammern und Bandaufhängung herstellbar. Über 100 Volt sind sie dagegen auch mit Spitzenlagerung und nur einer Kammer nicht schwierig herzustellen, man erhält z. B. 5 mm Ausschlag bei 150, wenn die anziehenden Teile an 100 mm Hebelarm angreifen, bei einer Entfernung derselben voneinander von 5 mm und einer Richtkraft von 10 mg/cm/90^0. Als eine der empfindlichsten Ausführungen (Spitzenlager, 1 Kammer) gilt auch noch heute das Instrument von Szilard[1]). Die Daten eines neueren Instrumentes von S. & H. sind: gespanntes Aufhängeband, Meßbereich 70 Volt, Skalenwinkel 70^0, Zeigerlänge 50 mm Drehmoment 0,7 mg/cm/90^0, Gewicht des beweglichen Organs 0,5 g, Trägheitsmoment 0,17 g/cm^2, Schwingungssdauer 2 Sek., Kapazität 50 cm. Die Daten eines Instrumentes von Hartmann & Braun[2]), das sich besonders durch eine sehr gleichmäßige Skala auszeichnet, sind: Bereich 150 Volt, erkennbar 2 Volt, Feinunterteilung von 5 Volt an, Skalenwinkel 90^0, Zeigerlänge 105 mm, Beruhigungszeit 10 Sek., Kapazität 70 cm. Mit Spannungswandlern sind bis 100 Hertz Spannungen bis 0,15 Volt zu messen.

1) Physik. Zeitschr. **15**, 209, 1914.
2) Zeitschr. f. Fernmeldetechnik 1921, Heft 11. Die Abhandlung bringt genaue Angaben über die Form der Kammern für die jeweils gewünschte Skalenteilung.

Zum Schluß noch einige Bezugsquellen.

Phosphorbronzebänder, Wismutdrähte für Thermoelemente, Drähte bis 0,015 mm, Hitzdrahtinstrumente	Hartmann & Braun-Frankfurt, Main, West
Magnete für Drehspulinstrumente, Spulen, Schneidenzeiger	Vereinigte Göttinger Werke Ruhstrat A.-G. Göttingen
Platiniridiumdrähte und -bänder	Heraeus, Hanau
Säulen nach Angabe oder Skizze, Nivellierschrauben, Libellen, Messingrohre	Physikalische Werkstätten Göttingen
Hitzdrahtinstrumente aus Heeresgerät 0—4 A: 15 RM.; 0—1 umschaltbar 0—4 A: 28 RM.	Charlottenburger Motorengesellschaft Charlottenburg Bismarckstr. 105

(Eingegangen 19. November 1928.)

BESPRECHUNGEN.

H. Greinacher, Die Verwertung der freien Elektronen (Elektronentechnik). 8^0. 38 S. Mit 35 Figuren. I. Auflage. Bern u. Leipzig. Paul Haupt vorm. Max Drechsel. 1927. Geh. M. 1.80.

Das kleine Büchel stellt nach der Angabe des Verfassers im wesentlichen den Inhalt eines unlängst gehaltenen akademischen Vortrages dar.

Nach einer kurzen Einleitung über die Befruchtung der Elektrotechnik durch die Verwendung der von den Physikern entdeckten Eigenschaften der Elektronen, über die Elektronenbefreiung und die verwertbaren Eigenschaften der Elektronen werden kurz folgende Kapitel behandelt:

1. die Elektronenröhre für Gleichstrom,
2. die Elektronenröhre für Wechselstrom,
3. die Drei-Elektrodenröhre,
4. die Verwendung der Elektronen als Energieträger. Kathodenstrahlen,
5. die Erzeugung der Röntgenstrahlen,
6. Verwendung der Elektronenabspaltung.

Die Art der Behandlung der einzelnen Kapitel zeigt, daß sich das Buch hauptsächlich an die größere Öffentlichkeit wendet. Die einzigen Formeln, die angeführt werden, sind die Emissionsgleichungen von Richardson bzw. Dushman.

Die Darstellung ist klar und bewegt sich trotz des Fehlens von Formeln nicht nur an der Oberfläche. Das beigegebene Bildmaterial ist mit wenigen Ausnahmen gut. Als eine Übersicht über die Verwendungsmöglichkeiten der Elektronen ist das Büchel auch dem Physiker zu empfehlen; er wird unter Umständen manche Anregung für wissenschaftliche Arbeiten daraus entnehmen können. J. Herweg.

E. v. Angerer, Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen. (Sammlung Vieweg H. 71) 8^0. VIII u. 114 S. Mit 23 Abb. 2. Aufl. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, A.-G., 1928. M. 6.—.

Das kleine Büchlein, das hier in zweiter, merklich erweiterter und in Übersichtlichkeit und Ausdruckskürze verbesserter Auflage vorliegt, stellt sich zur Aufgabe, dem Experimentator, und besonders dem noch unerfahrenen, bei der Technik des Experimentierens zu helfen. Es enthält bewährte Ratschläge, Rezepte usw. betreffend die verschiedenen Handgriffe, die beim Aufbau einer Apparatur gewöhnlich vom Experimentator selber ausgeführt werden müssen. Löten und Kitten, Glasbearbeitung (nur die wesentlichsten Grundlagen und das Anschmelzen an Metalle), Versilbern von Glas, Vakuumtechnik, dünne Folien, hochohmige Widerstände, Thermoelemente, Photographie und verschiedenes sind die Titel der einzelnen bis zu den neuesten Resultaten nachge-

führten und mit Literaturnachweisen reichlich versehenen Kapitel. Das ganze Gebiet ist mit einer angenehmen Vollständigkeit behandelt; bei besonderen Spezialitäten ist auf die Literatur verwiesen. Nützlich ist auch das beigefügte Firmenverzeichnis. Das Büchlein füllt eine Lücke in der physikalischen Literatur aus und wird sicher gerne von jedem experimentell arbeitendem Physiker zurate gezogen werden. H. Sack.

A. Kuhn, Kolloidchemie. Gr. 8⁰. VI u. 122 S. Mit 11 Abb. i. Text. Leipzig, J. A. Barth. 1925. Geh. RM. 4.20, geb. RM. 4.70.

Kuhn wendet sich, wie er in seinem Vorwort hervorhebt, nur an solche Leser, die schon ein kolloidchemisches Praktikum durchgemacht oder zum mindesten ein Experimentalkolleg über Kolloidchemie gehört haben. Allein dieser Gesichtspunkt rechtfertigt die außerordentliche, teilweise skizzenhafte Kürze des Repetitoriums. Er behandelt darin ausschließlich die physikalischen und physikalisch-chemischen Eigenschaften und die Zustandsänderungen disperser Systeme unter Verzicht auf die detaillierte Beschreibung bestimmter kolloidaler Lösungen. Zwei tabellarische Zusammenstellungen der Eigenschaften disperser Systeme und der Dispersoidanalyse vervollständigen das knappe aber übersichtlich geschriebene und deshalb empfehlenswerte Repetitorium. K. Schütz.

A. Hund, Hochfrequenzmeßtechnik. 8⁰. XIX und 526 S. Mit 287 Textabbildungen. 2. Aufl. Berlin, J. Springer, 1928. Geb. M. 39.— (vgl. diese Zeitschr. **24**, 272, 1923).

Die zweite Auflage ist gegenüber der ersten von 1922 wesentlich erweitert worden, da ja in der Zwischenzeit gerade auf dem hier behandelten Gebiete große Fortschritte gemacht worden sind. Besonders kommen hier die erweiterten Anwendungen der Elektronenröhren für Verstärkung und Strom- und Spannungsmessungen und die neueren Methoden zur Erzeugung konstanter Schwingungen und deren Frequenzmessung für den Physiker in Betracht. Daß daneben einige ältere Methoden mit ungedämpften Schwingungen usw. beibehalten wurden, wird sicher vom physikalischen Standpunkt aus als angenehm empfunden. Die Literatur ist sehr vollständig verwendet und angegeben worden. Die Übersichtlichkeit der Darstellung in der ersten Auflage ist gewahrt geblieben. Wenn das Buch auch in erster Linie für den Techniker bestimmt ist, so wird doch auch der Physiker, für den die Hochfrequenztechnik eine Hilfswissenschaft bedeutet, sich hier in vielen Fällen Rat holen können. H. Sack.

M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung. 8⁰. IX u. 358 S. Mit 77 Abb. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1928. Brosch. RM. 21.—, geb. RM. 22.—.

Das Buch erscheint als Band 2 der von E. Hilb herausgegebenen „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern".

Es will dem Leser die Vektorrechnung als lebendiges Werkzeug vermitteln und legt in eindrucksvoller Weise Zeugnis ab von der Schönheit und vielseitigen Anwendbarkeit dieser Disziplin.

Der Vektorbegriff wird geometrisch-anschaulich eingeführt, dann aber mit Methoden, welche der Anschauung nahestehen, schrittweise vertieft und erweitert. So wird der Leser mit der Vektorrechnung und Theorie der Felder sowie mit der Dyadenrechnung vertraut gemacht. Ferner wird ein Zugang zur Tensoranalysis gewonnen, welche heute für die Physik besonders wichtig geworden ist.

Mit besonderer Liebe wird in zwei Kapiteln die Dyadenrechnung vorgeführt, welche alle die Probleme zugänglich macht, bei deren Untersuchung zwei Felder auftreten, die durch eine lineare Vektorfunktion in Beziehung gesetzt sind. Die Dyade wird zwar beispielsweise in den modernen Darstellungen der Elastizitätstheorie benutzt, jedoch wird nicht mit ihr operiert, vielmehr wird die Koordinatenrechnung beibehalten. Im Gegensatz hierzu lehrt das Buch, wie durch Rechnen mit den Dyaden selbst die betreffenden Operationen bedeutend abgekürzt werden.

Geometrische Betrachtungen werden nicht nur zur Ableitung von Sätzen sondern auch als Anwendungsbeispiele für die abgeleiteten Theorien herangezogen. Weitere Anwendungsbeispiele werden aus der Mechanik, einschließlich Mechanik der Kontinua, und aus der Potentialtheorie entnommen. Anwendungen aus sonstigen Gebieten der theoretischen Physik werden mit Absicht vermieden.

Die letzten Abschnitte betreffen Vektoren in Riemannschen Räumen, ferner komplexe Zahlen. Sie sind fast ausschließlich für den Mathematiker bestimmt. Die Untersuchungen über Riemannsche Räume haben Beziehung zur allgemeinen Relativitätstheorie, gehen jedoch über deren Erfordernisse weit hinaus.

Die Darstellung ist klar und lebendig, der Aufbau entsprechend dem Wesen einer Vorlesung weniger straff-methodisch als nach didaktischen Gesichtspunkten angelegt.

Ein Sachregister erleichtert den Gebrauch des Buches. Die Ausstattung ist sehr gut.

Das Buch kann bestens empfohlen werden.

Schachenmeier.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Paul Baumgarten für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent für organische Chemie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Otto Dischendorfer zum a. o. Professor ebenda, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Königsberg Dr. Hans Meerwein in gleicher Eigenschaft an der Universität Marburg, der Universitätsadjunkt Dr. phil. N. J. Toivonen zum ord. Professor der organischen Chemie an der Universität Helsingfors, der Oberassistent an der Sternwarte Leipzig Dr. Karl Schiller zum Observator ebenda.

Gestorben: Der frühere Professor am Physikalischen Staatslaboratorium in Hamburg und Vorsteher des Elektrischen Prüfungswerkes daselbst Dr. Johannes Classen.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Eingegangene Bücher

(Eingehende Besprechung vorbehalten. Rücksendung nicht besprochener Bücher erfolgt in keinem Falle)

Badareu, E., Über die Sekundäremission aus festen Körpern, welche durch Stöße von Partikeln verschiedener Natur erregt wird. Separat-Abdruck aus Buletinul Facultatii Stiinte de Cernauti. Gr. 8⁰. 22 S. Cernauti (Rumänien), Franz V. Mühldorf. 1928.

Berliner, Arnold, Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung. 4. Auflage. Gr. 8⁰. VI u. 658 S. Mit 802 Abb. Berlin, Julius Springer. 1928. Geb. RM. 19.80.

Brill, A., Vorlesungen über allgemeine Mechanik. 8⁰. 364 S. Mit 165 Abb. München, R.Oldenbourg. 1928. Brosch. RM. 18.—, geb RM. 20.—.

Brown, Bruce K. and **Francis M. Crawford,** A survey of nitrocellulose Lacquer. Gr. 8⁰. 368 S. New York, The Chemical Catalog Company Inc. 1928. $ 7.50.

Errulat, F., Die Methoden der Erdbebenforschung. (Handbuch der biolog. Arbeitsmethoden Lfrg. 266.) 8⁰. S. 2151—2262. Mit 45 Abb. u. 1 Tafel. Berlin, Urban & Schwarzenberg. 1928.

Felke, G. N., Einstein für Jedermann. Ein Vortrag. 8⁰. 68 S. Mit 11 Abb. Berlin, Verlag der Neuen Gesellschaft. 1928. RM —.70.

Försterling, K., Lehrbuch der Optik. 8⁰. XII u. 610 S. Mit 193 Abb. Leipzig, S.Hirzel. 1928. Geh. RM. 38.—. geb. RM. 40.—.

Frei, K., Zur Theorie des Fernsprechverkehrs. (Einzeldarstellungen aus der elektrischen Nachrichtentechnik Bd. I. II.) 8⁰. VIII u. 138 S. Berlin, Weidmann'sche Bh. 1928. Brosch. RM. 4.50 geb. RM. 6.—.

Graff, Kasimir, Grundriß der Astrophysik. Gr. 8⁰. VIII u. 751 S. Mit 6 Lichtdrucktafeln und 468 Textabb. Leipzig, B. G. Teubner. 1928. Geh. RM. 42.60, geb. RM. 45.—.

Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden. Abt. III, Physikalisch-chemische Methoden. Teil A, Heft 7: H. Schade u. K. Mayr, Methodik der Gewebselastometrie und der H-Ionenmessung am lebenden Organismus. (Mit 13 Abb.); S. Prát, Die polarographische Methode. (Mit 21 Abb.); I. M. Kolthoff, Die Pufferlösungen bei der kolorimetrischen Bestimmung der Wasserstoffionenkonzentration; K. Schultze, Methodik der Bestimmung der Capillarität. (Mit 26 Abbildungen.) 8⁰. S. 1373—1544. Berlin u. Wien, Urban & Schwarzenberg. 1928. RM. 9.—.

Handbuch der Experimentalphysik, herausgeg. v. W. Wien u. F. Harms. Bd. XIII, 2. Teil: Physik der Glühelektroden. 8⁰. X u. 492 S. Mit 124 Abb. Leipzig, Akad. Verlagsges. m. b. H. 1928.

Kneser, A., Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart. (Wiss. Grundprobl. Philos. Abh. IX.) 8⁰. 70 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1928. RM. 4.—.

(Fortsetzung s. Seite V)

Eingegangene Bücher

(Fortsetzung von Seite III)

Menger, K., Dimensionstheorie. 8⁰. IV u. 319 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1928. Brosch. RM. 22.—, geb. RM. 24.—.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik. 11. Aufl. 5. Band, 1. Hälfte: Physik der Erde. Herausgeg. v. A. Wegener. 8⁰. XVIII u. 840 S. Mit 341 Fig. im Text u. 7 Tafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. A.-G. 1928. Brosch. RM. 49.—, geb. RM. 53.—.

Passarge, H., Die Gravitation, Wesen und Ursprung. 8⁰. 58 S. Leipzig, O. Hillmann. 1928. RM. 2.60.

Richter, G., Die Kraft als fünfte Dimension. I. Teil der Philosophie der Einmaligkeit. 8⁰. XIV u. 130 S. Wien, W. Braunmüller. 1928. RM. 3.50.

Sarnetzky, H., Grundzüge der Luft- und Erdbildmessung. (Sammlung Borntraeger Bd. 14.) 8⁰. 236 S. Mit 117 Abb. u. 4 Zahlentafeln. Berlin, Gebrüder Borntraeger. 1928. Geb. RM. 12.—.

The Svedberg, Colloid Chemistry. Secound Ed. 8⁰. 302 S. New York, The Chemical Catalog Company. 1928. $ 5.50.

Voigt, W., Lehrbuch der Kristalloptik. (Teubners Samml. v. Lehrb. a. d. G. d. Math. Wiss. Bd. 34.) 2. Aufl. 8⁰. XXVI u. 978 S. Mit 213 Fig. u. 1 Tafel. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1928. Geb. RM. 41.—.

Weyl, H., Gruppentheorie und Quantenmechanik. 8⁰. VIII u. 288 S. Leipzig, S. Hirzel. 1928. Geh. RM. 20.—, geb. RM. 22.—.

Willers, F. A., Methoden der praktischen Analysis. (Göschens Lehrbücherei 1. Gruppe. Bd. 12.) 8⁰. 344 S. Mit 132 Fig. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co. 1928. Brosch. RM. 20.—, geb. RM. 21.50.

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern Bd. VII, Erstes Heft. 8⁰. VI u. 383 S. Berlin, J. Springer. 1928. RM. 28.50.

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

